



**HAL**  
open science

# Etat de l'art de la compensation de vibration par la generation de trajectoire – application a la robotique industrielle

Richard Béarée

► **To cite this version:**

Richard Béarée. Etat de l'art de la compensation de vibration par la generation de trajectoire – application a la robotique industrielle. Assises MUGV, Oct 2014, Clermont-Ferrand, France. pp.1-10. hal-01410447

**HAL Id: hal-01410447**

**<https://hal.science/hal-01410447>**

Submitted on 6 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ETAT DE L'ART DE LA COMPENSATION DE VIBRATION PAR LA GENERATION DE TRAJECTOIRE – APPLICATION A LA ROBOTIQUE INDUSTRIELLE

**Richard BEAREE**

Arts et Métiers ParisTech, LSIS, 8 Bd Louis XIV 59046 Lille, [richard.bearee@ensam.eu](mailto:richard.bearee@ensam.eu)

**Résumé :** *Dans un contexte d'amélioration constante de la productivité et de la flexibilité des machines de production, les vibrations mécaniques demeurent un phénomène limitant les performances dynamiques. Le problème de réduction des vibrations induites par les perturbations extérieures (environnement dynamique, procédés de coupe) est généralement abordé par le biais de la mise en œuvre de systèmes de dissipation passifs ou actifs. Quant aux vibrations induites par le mouvement des axes de la machine, elles peuvent être efficacement prises en compte lors de la synthèse de la trajectoire du système. Ce papier dresse un état de l'art des méthodes de réduction de vibration s'appuyant sur une adaptation de la trajectoire du système. Une analyse unifiée des méthodes applicables au domaine de la machine de production est réalisée. Des essais menés sur un robot industriel 6 axes viennent illustrer cette analyse.*

**Mots clés :** vibration, trajectoire, filtrage.

**Abstract:** *The reduction of structural vibration is a significant problem when the machines performances in terms of productivity, flexibility and accuracy have to be improved. Reduction of environment-induced vibrations is classically addressed by using adapted control structure or by adding active or passive devices, which damped the natural deformation of the system. Concerning the motion-induced vibrations, they can be efficiently reduced by taking into account the modal characteristics during the trajectory planning stage. This paper proposes to review, in a unified manner, the fundamental methods of adaptation of the trajectory to the vibration reduction. Experimental tests conducted on industrial robots illustrate the previous concepts.*

**Keywords:** vibration, trajectory, input shaping.

## 1 Introduction

La figure 1 présente la structure de la génération de trajectoire d'un axe de machine. La trajectoire de référence  $q(t)$ , dont les caractéristiques fréquentielles sont données par  $Q(\omega)$ , peut être mise en forme par le filtre de précommande  $F(\omega)$ , afin de réduire l'excitation possible des fréquences propres de l'axe considéré. La nouvelle trajectoire  $q^*(t)$  est envoyée en entrée des asservissements  $C(\omega)$  de l'axe. Classiquement, les retours d'information concernent uniquement les cinématiques mesurées au niveau de l'actionneur et par conséquent les dynamiques vibratoires  $H(\omega)$  situées en amont de ce dernier ne sont pas prises en compte dans la commande. La dynamique rapide des actionneurs employés sur la majorité des systèmes actuels, permet un réglage très « rigide » des asservissements et par conséquent un écart très faible entre la position de l'actionneur  $q_0(t)$  et la référence de trajectoire. Dans ce cas, la fonction  $C(\omega)$  peut raisonnablement être négligée devant les dynamiques induites par  $H(\omega)$  ou idéalisée par un comportement de type filtre passe-bas ayant une bande passante incluant  $H(\omega)$ .

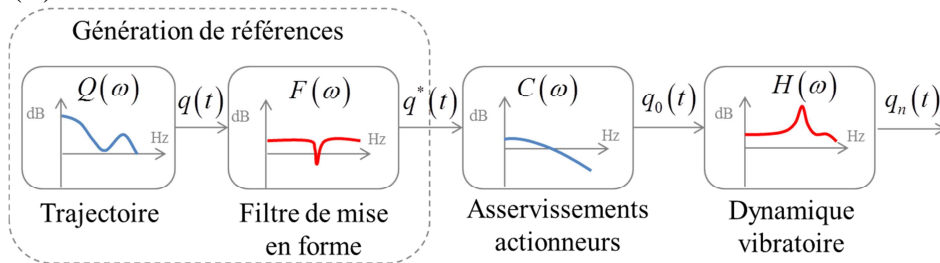


Fig. 1 : Structure de génération de trajectoire pour un axe soumis à des dynamiques vibratoires non négligeables.

Parmi les méthodologies de « mise en forme » de la trajectoire (filtre  $F(\omega)$ ), les plus utilisées industriellement sont les techniques de filtrage anti-vibratoire (type filtre Notch) [1-2]. Une autre approche, nécessitant une meilleure connaissance du système, se base sur l'inversion approchée des dynamiques modélisées et identifiées [3]. Cette dernière technique induit généralement des contraintes de continuité sur la trajectoire de référence [4]. Ces 2 premières techniques visent une compensation continue des dynamiques non désirées. Une dernière approche, appelée « Input Shaping », consiste quant à elle à annuler ces dynamiques uniquement à certains instants spécifiés. Largement répandu pour des applications de transitique, le principe de la technique IS [5-8] peut se retrouver dans les propriétés de certaines trajectoires de référence à commutations, telle que la trajectoire à jerk limité [9]. Nous proposons dans ce papier une présentation unifiée, ainsi qu'une analyse comparative de ces différentes techniques de réduction de vibration.

## 2 Modèle de la dynamique vibratoire pour analyse : $H(\omega)$

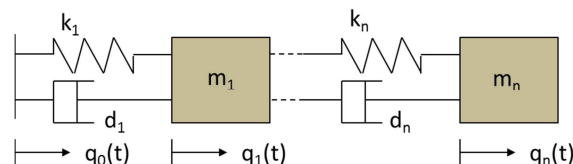


Fig. 2 : Modèle de dynamique vibratoire  $H(\omega)$  commandée en position.

La figure 2 présente le modèle d'un axe mécanique contrôlé en position et soumis à  $n$  modes de déformation élastique dans sa transmission de mouvement. La dynamique de ce système peut être décrite par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + d_1 (\dot{q}_1 - \dot{q}_0) + k_1 (x_1 - x_0) - d_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - k_2 (q_2 - q_1) = 0 \\ \vdots \\ m_i \ddot{q}_i + d_i (\dot{q}_i - \dot{q}_{i-1}) + k_i (x_i - x_{i-1}) - d_{i+1} (\dot{q}_{i+1} - \dot{q}_i) - k_{i+1} (q_{i+1} - q_i) = 0 \\ \vdots \\ m_n \ddot{q}_n + d_n (\dot{q}_n - \dot{q}_{n-1}) + k_n (q_n - q_{n-1}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Dans le cas d'un unique mode dominant la réponse dynamique, ce système se ramène à :

$$m_1 \ddot{q}_1 + d_1 \dot{q}_1 + k_1 q_1 = d_1 \dot{q}_0 + k_1 q_0 \quad (2)$$

En considérant  $\varepsilon_x = q_1 - q_0$  la différence de position due à l'élasticité, on obtient :

$$\ddot{\varepsilon}_x + 2\zeta_1 \omega_1 \dot{\varepsilon}_x + \omega_1^2 \varepsilon_x = -\ddot{q}_0 \quad (3)$$

Avec  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ ,  $\zeta_1 = \frac{d_1}{2m_1 \omega_1}$  la fréquence naturelle et le coefficient d'amortissement du système dynamique. Ou encore dans le domaine fréquentiel :

$$H_{\text{1dof}}(\omega) = \frac{\varepsilon(\omega)}{\ddot{q}_0(\omega)} = -\frac{1}{(\omega_1^2 - \omega^2) + j2\zeta_1 \omega_1 \omega} \quad (4)$$

La dynamique vibratoire du système précédent sera naturellement impactée par les caractéristiques fréquentielles du profil d'accélération  $\ddot{q}_0$  de la trajectoire de référence.

### 3 Familles de trajectoire : $Q(\omega)$

Le planificateur de trajectoire d'un système de positionnement industriel (machine-outil, robot, manipulateur,..) se doit de générer les références temporelles de position pour la commande du système en intégrant des contraintes cinématiques sur la vitesse d'avance conseillée et/ou les vitesses maximales des axes, ainsi que sur les accélérations maximales de ces derniers. Il existe de nombreuses représentations mathématiques susceptibles de décrire un profil de déplacement intégrant ces contraintes [10]. Les deux familles de trajectoire les plus usitées dans les contrôleurs sont les lois de mouvement de type polynomial (cubique, quintique) et les lois à commutation (accélération constante par partie, jerk constant par partie). Les contraintes de synthèse de ces deux familles de trajectoires s'expriment dans le domaine temporel, mais on notera qu'elles présentent des caractéristiques fréquentielles très différentes et ne sont donc pas équivalentes en termes de potentiel d'excitation vibratoire pour le système. Toutes les fonctions étudiées  $q(t)$ , définissant une trajectoire, sont dites à énergie finie pour des raisons physiques évidentes. Il est par conséquent possible de définir leur transformée de Fourier, ainsi que leur transformée inverse (fonction réelle et paire) :

$$Q(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) e^{-j\omega t} dt \quad q(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |Q(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \quad (5)$$

Cette dernière équation exprime le fait que la fonction  $q(t)$  est la somme d'une infinité de termes sinusoïdaux d'amplitude  $|Q(\omega)|/\pi$ . Il en découle que par l'analyse fréquentielle, il est possible d'évaluer les contraintes vibratoires induites par une trajectoire temporelle donnée.

Ainsi, afin de limiter les vibrations induites par la trajectoire, la transformée de Fourier de cette dernière doit posséder, soit un contenu spectral faible aux hautes fréquences, soit uniquement aux fréquences de résonnances dominants la dynamique du système mécanique sollicité. Une trajectoire possédant très peu d'harmoniques en haute fréquence sera naturellement « douce ». Une trajectoire imposant peu d'excitation uniquement au niveau des fréquences propres du système sera potentiellement plus optimale quant au compromis temps/vibrations et sera associée aux techniques de filtrage. Afin de faciliter l'analyse comparative des propriétés intrinsèques de ces trajectoires, nous considérons, dans ce qui suit, le cas d'un mouvement de type point à point (vitesses de départ et de fin nulles) de longueur  $P = 1$  m, réalisé en un temps  $T = 1$  s.

### 3.1 Trajectoire polynomiale

La trajectoire polynomiale d'ordre 3, ou cubique, décrivant un mouvement point à point de longueur  $P$  en  $T$  secondes est donnée par :

$$q_{cub}(t) = \frac{3P}{T^2}t^2 - \frac{2P}{T^3}t^3; \dot{q}_{cub}(t) = \frac{6P}{T^2}\left(t - \frac{t^2}{T}\right); \ddot{q}_{cub}(t) = \frac{P}{T^2}\left(6 - 12\frac{t}{T}\right) \quad (6)$$

D'où l'on tire la transformée de Fourier de l'accélération de référence :

$$\ddot{Q}_{cub}(\omega) = j \frac{12P}{\omega^2 T^2} e^{-j\omega \frac{T}{2}} \left( \frac{2}{T} \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right) - \omega \cos\left(\omega \frac{T}{2}\right) \right) \quad (7)$$

Et son amplitude

$$|\ddot{Q}_{cub}(\omega)| = \frac{12P}{\omega^2 T^2} \left| \frac{2}{T} \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right) - \omega \cos\left(\omega \frac{T}{2}\right) \right| \quad (8)$$

En posant  $\Omega = \frac{\omega}{2\pi/T}$ , on peut réécrire cette expression sous la forme :

$$|\ddot{Q}_{cub}(\Omega)| = \frac{6P}{T\pi^2\Omega^2} |\sin(\pi\Omega) - \pi\Omega \cos(\pi\Omega)| \quad (9)$$

De même, pour une trajectoire quintique on aura :

$$q_{quin}(t) = \frac{10P}{T^3}t^3 - \frac{15P}{T^4}t^4 + \frac{6P}{T^5}t^5; \dot{q}_{quin}(t) = \frac{30P}{T^3}\left(t^2 - \frac{2}{T}t^3 + \frac{1}{T^2}t^4\right); \quad (10)$$

$$\ddot{q}_{quin}(t) = \frac{60P}{T^3}\left(t - \frac{3}{T}t^2 + \frac{2}{T^2}t^3\right)$$

Ce qui, après manipulation algébrique, conduit à l'amplitude de la transformée de Fourier suivante pour l'accélération :

$$|\ddot{Q}_{quin}(\Omega)| = \frac{30P}{T\pi^4\Omega^4} |(3 - \pi^2\Omega^2)\sin(\pi\Omega) - 3\pi\Omega \cos(\pi\Omega)| \quad (11)$$

La figure 3 décrit les caractéristiques fréquentielles issues des trajectoires polynomiales de degré 3 et 5 (cf. eq. (9-11)). Le premier lobe du polynôme de degré 5 est plus important que celui de la cubique, ce qui traduit naturellement le fait que pour une durée de mouvement fixée, la loi quintique nécessite une accélération supérieure. En contrepartie, les lobes suivants sont significativement plus faible (rapport 2 à 3). Les trajectoires polynomiales de degré 5 seront ainsi naturellement peu « excitantes » pour les modes propres basse fréquences du

système.

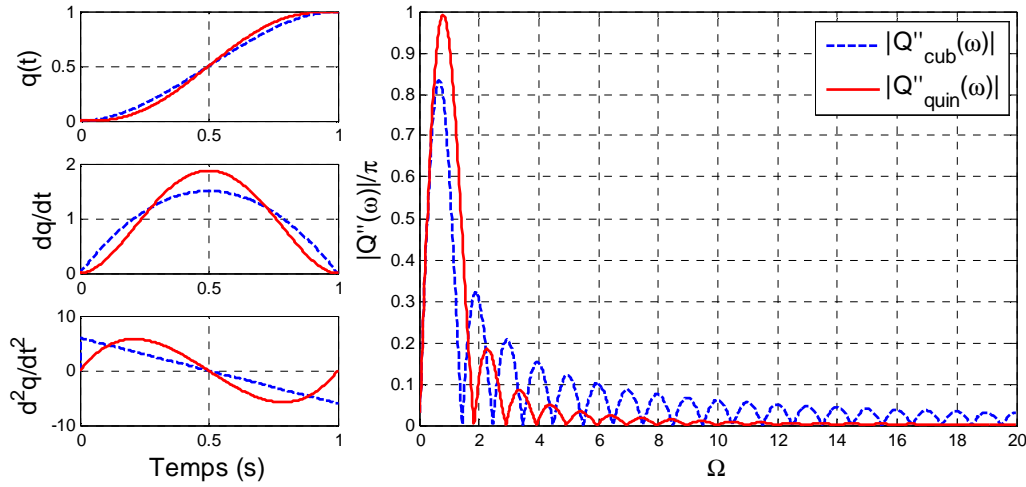


Fig. 3 : Réponses temporelle et contenu fréquentiel des lois polynomiales d'ordre 3 et 5.

### 3.2 Trajectoire à commutations

Les trajectoires de type « bang-bang » sont des lois de mouvement qui saturent une dérivée de la position de référence. Par nature, ce type de loi optimise le critère temps pour un point matériels soumis à un ensemble de contraintes cinématiques. La plus classique et la plus ancienne est la loi à accélération limitée ou trapèze de vitesse. En remarquant que ce type de loi peut être représenté par une succession d'échelons d'accélération décalés dans le temps, on peut écrire :

$$\ddot{Q}_{acc}(s) = \frac{A_{max}}{s} \left[ 1 - e^{-sT_a} - e^{-s(T-T_a)} + e^{-sT} \right] \quad (12)$$

En notant  $T_a = \alpha T$ , la durée des phases d'accélération, on trouve que l'accélération maximale est associée à la relation :

$$A_{max} = \frac{P}{\alpha(1-\alpha)T^2} \quad (13)$$

L'expression de la transformée de Fourier du signal d'accélération sera alors donnée par :

$$\ddot{Q}_{acc}(\omega) = 4j \frac{P}{(1-\alpha)\alpha T^2 \omega} \sin\left((1-\alpha)\omega \frac{T}{2}\right) \sin\left(\alpha\omega \frac{T}{2}\right) \quad (14)$$

D'où son amplitude en fonction du paramètre adimensionné  $\Omega$  :

$$\left| \ddot{Q}_{acc}(\Omega) \right| = 2 \frac{P}{(1-\alpha)\alpha T \pi \Omega} \left| \sin((1-\alpha)\pi\Omega) \sin(\alpha\pi\Omega) \right| \quad (15)$$

En procédant de même pour une loi à jerk limité avec  $T_a = \alpha T$  et  $T_j = \beta T_a$ , respectivement la durée des phases d'accélération et de jerk, on obtient la transformée de Fourier suivante :

$$\left| \ddot{Q}_{jerk}(\Omega) \right| = 2 \frac{P}{(1-\alpha)(1-\beta)\beta\alpha^2 T \pi^2 \Omega^2} \left| \sin((1-\alpha)\pi\Omega) \sin(\alpha(1-\beta)\pi\Omega) \sin(\alpha\beta\pi\Omega) \right| \quad (16)$$

Les réponses temporelles, ainsi que le contenu fréquentiel des trajectoires à accélération et à jerk limitée sont présentées respectivement sur les figures 4 et 5. Le paramètre  $\alpha$  conditionne

ici le niveau maximal de l'accélération (pour un temps  $T$  fixé). Plus ce paramètre sera faible et plus le spectre de ces deux trajectoires sera riche, donc excitant pour le système. Quant au paramètre  $\beta$  associé à la durée des phases à jerk constant, on remarque qu'il a une influence forte dans certaines bandes de fréquences. On retrouve ici la possibilité qu'offre la loi à jerk limité de pouvoir être réglé de façon à compenser une vibration faiblement amortie située à une fréquence connue et stationnaire [11-12]. Naturellement, si l'on exploite le paramètre de durée de jerk, le niveau de jerk maximal  $J_{\max}$  sera fixé par la relation :

$$J_{\max} = A_{\max} / T_j = A_{\max} / (\beta T_a) \quad (17)$$

et ne rentrera plus dans les contraintes cinématiques de définition de la trajectoire.

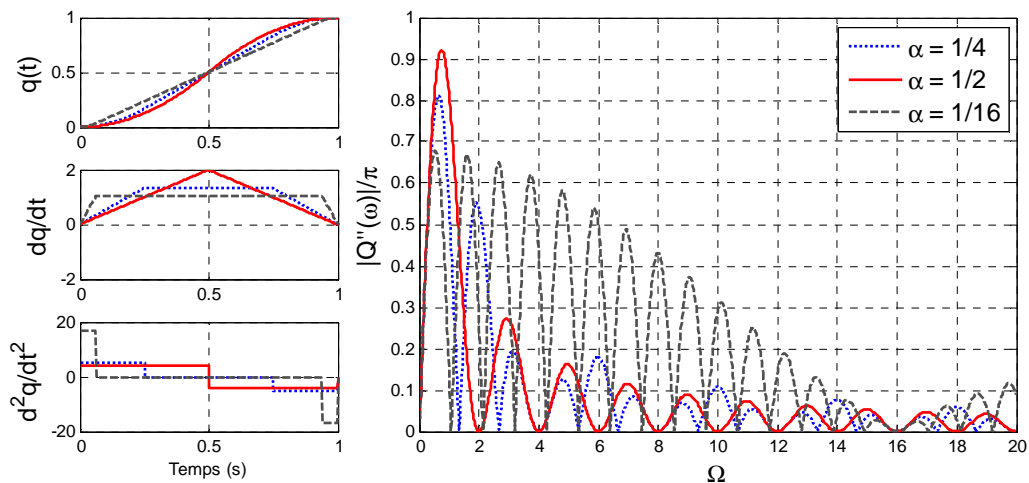


Fig. 4 : Réponses temporelle et contenu fréquentiel de la loi à accélération limitée en fonction de  $\alpha$ .

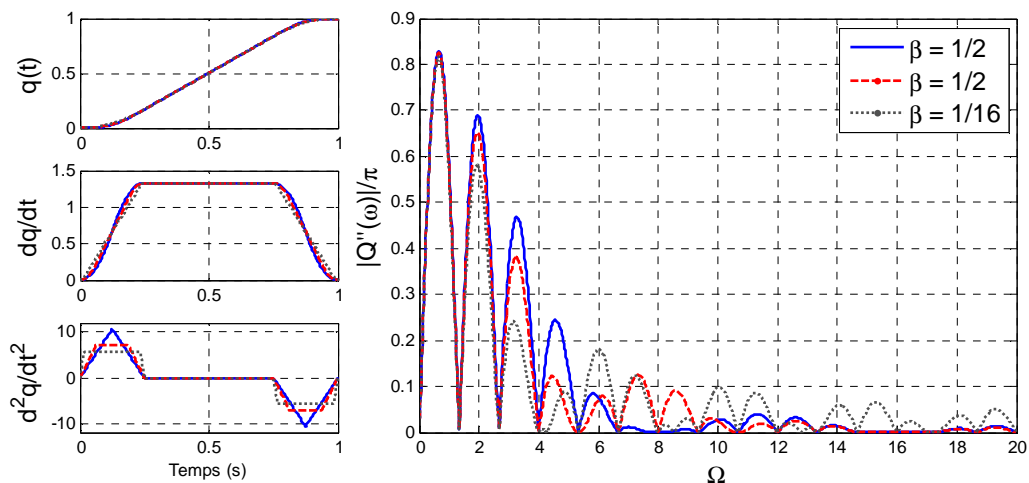


Fig. 5 : Réponses temporelle et contenu fréquentiel de la loi à jerk limitée en fonction de  $\beta$  ( $\alpha$  est ici fixé à 1/4).

## 4 Méthode de compensation de vibration par filtrage de la trajectoire : $F(\omega)$

### 4.1 Méthodes générales

Le filtrage par modèle inverse consiste à définir un filtre de fonction de transfert égale à l'inverse des dynamiques à compenser. Sous contrainte d'implantation causale, le

dénominateur du filtre en question sera classiquement compléter par des dynamiques rapides de type 1<sup>er</sup> ordre. On notera que si la dynamique du système est à non-minimum de phase, le modèle inverse serait naturellement instable. Dans ce cas, plusieurs méthodes approchées permettent de garantir la réalisabilité du filtre en minimisant l'erreur d'inversion. Considérons le cas du système à 1 mode dominant  $H_{1\text{dof}}$ , le modèle inverse est dans ce cas un filtre de type biquadratique :

$$F_{\text{biquad}}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2}{(1 + \tau_a s)(1 + \tau_b s)} \quad (18)$$

avec  $1/\tau_a$  et  $1/\tau_b$  situé au-delà de la bande passante utile.

Le filtre coupe-bande ou « notch » est classiquement le plus utilisé dans l'industrie afin d'éliminer l'effet d'une fréquence indésirable dans la bande passante utile. La forme la plus simple de ce type de filtre est également une fonction de type biquadratique et peut se mettre sous la forme :

$$F_{\text{notch}}(s) = \frac{s^2 + \omega_a^2}{s^2 + \omega_b/Qs + \omega_b^2} \quad (19)$$

avec  $Q$  le coefficient de surtension et classiquement  $\omega_a$  et  $\omega_b$  prisent égales à la pulsation du mode à éliminer  $\omega_1$ .

Dans le domaine de la compensation de vibration mécanique, les techniques d'« input shaping » sont particulièrement reconnues, notamment pour des applications telles que le contrôle de grue de chantier, de portique en gantry ou encore de bras polyarticulés souples. La technique repose sur la convolution de la trajectoire de commande avec un filtre à réponse impulsionnelle finie (séquence d'impulsion) appelé « input shaper ». Le signal ainsi convolué devient la nouvelle trajectoire de référence. L'input shaper le plus simple, appelé « Zero Vibration » shaper, permet de compenser un mode amorti par une succession de deux impulsions notées  $A_1$  et  $A_2$ , l'occurrence de la seconde impulsion ayant lieu au temps  $T_{ZV}$  égal à la demi-période du mode propre considéré. Le ZV shaper est donné par la séquence impulsionnelle suivante :

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K \\ 1+K & 1+K \\ 0 & T_{ZV} \end{bmatrix} \quad (20)$$

avec  $T_{ZV} = \frac{\pi}{\omega_1\sqrt{1-\zeta_1^2}}$  et  $K = \exp\left[\frac{-\zeta_1\pi}{\sqrt{1-\zeta_1^2}}\right]$ . En notant que la transformée de Laplace d'une

impulsion unité est la constante unité, la fonction de transfert équivalente au filtre impulsionnel du ZV shaper est :

$$F_{ZV}(s) = A_1 + A_2 e^{-sT_{ZV}} \quad (21)$$

L'amplitude de sa transformée de Fourier s'obtient après quelques manipulations algébriques :

$$|F_{ZV}(\omega)|^2 = 4A_1A_2 \left[ \cos\left(\frac{\omega T_{ZV}}{2}\right) \right]^2 + (A_1 - A_2)^2 \quad (22)$$



La figure 6 présente les réponses fréquentielles et indicielles de ces trois filtres génériques réglés pour compenser le mode associé à  $H_{1\text{dof}}$ . Le filtre de type Notch induit une modification de la trajectoire difficilement exprimable analytiquement (cf. réponse indicielle), ce qui conduit à une difficulté notable quant à la prévision de la durée du mouvement. Le filtre biquadratique inversant la dynamique conduit à une réponse indicielle présentant des discontinuités. Ce type de filtrage nécessite naturellement une trajectoire de référence dont l'ordre de continuité doit être au moins égale à l'ordre du filtre. On notera que le ZV shaper réduit le contenu spectral en accord avec l'amortissement choisi aux fréquences correspondantes à  $(2k+1)\omega_I$  avec  $k \in \mathbb{N}$ . Ainsi, un mode à fréquence propre plus élevé situé à proximité d'un multiple impair de la fréquence propre compensé sera naturellement amorti. L'allongement de la durée du mouvement est ici parfaitement défini par la durée du shaper, i.e. la demi-période du mode à compenser pour un ZV shaper.

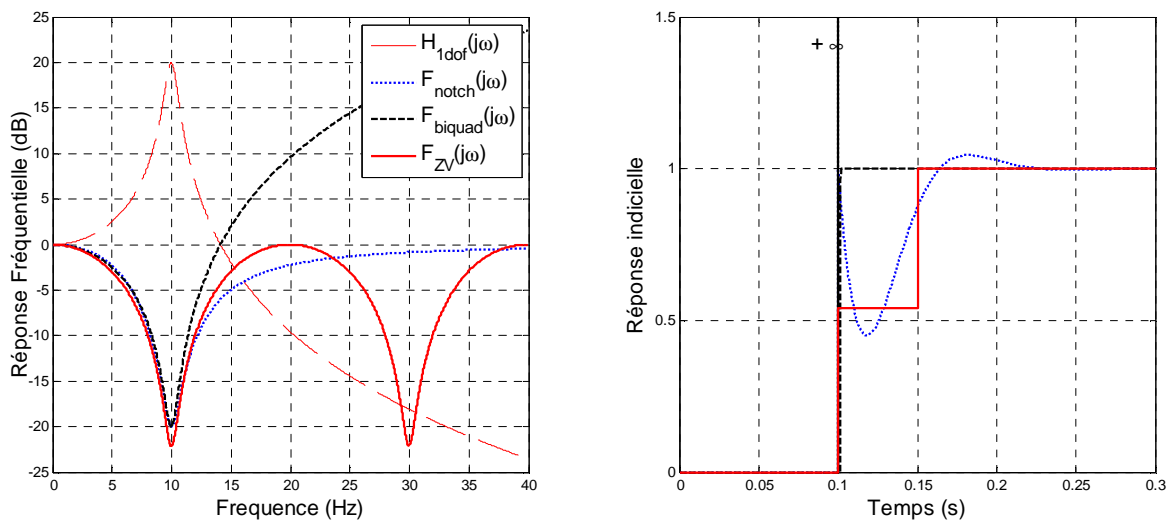


Fig. 6 : Réponses fréquentielle et indicielle des 3 types de filtres génériques de compensation de vibration.

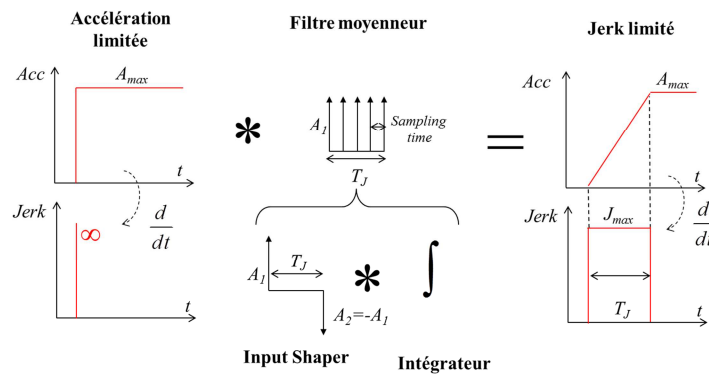


Fig. 7 : Filtre équivalent pour synthèse d'une trajectoire à jerk limitée.

#### 4.2 Un point sur les trajectoires à jerk limité

Comme évoqué en 3.2, le paramètre de durée de jerk de la trajectoire à jerk limité peut être exploité pour compenser un mode faiblement amorti. La trajectoire à jerk limité peut tout simplement être décomposée en une trajectoire à accélération limitée filtrée par l'intégrale d'un

shaper à impulsion négative (cf. figure 7). Les deux impulsions du shaper étant d'amplitude égale, il ne pourra compenser qu'un mode à amortissement négligeable. Dans [13] une évolution de ce shaper afin de tenir compte de l'amortissement est proposé. La trajectoire correspondante, baptisée « à jerk amorti », permet de compenser parfaitement un mode vibratoire tout en conservant les propriétés naturelles de la loi à jerk limitée. C'est-à-dire, la simplicité de réglage, d'implantation et surtout le filtrage naturelle des fréquences élevées (effet de l'intégrale sur le shaper). La figure 8 présente un comparatif des propriétés de compensation de vibration pour une trajectoire à jerk limité et une trajectoire à jerk amorti en fonction de l'amortissement du mode. Le pourcentage de vibration résiduelle étant référencé par rapport à l'amplitude de vibration induite par la loi à accélération limitée de référence.

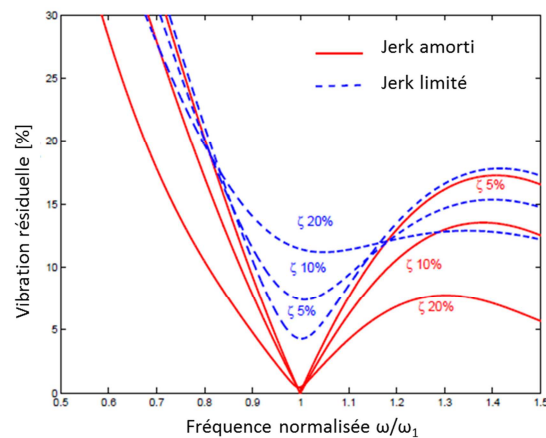


Fig. 8 : Performance en réduction de vibration des trajectoires à jerk limité et jerk amorti en fonction de l'amortissement du mode.

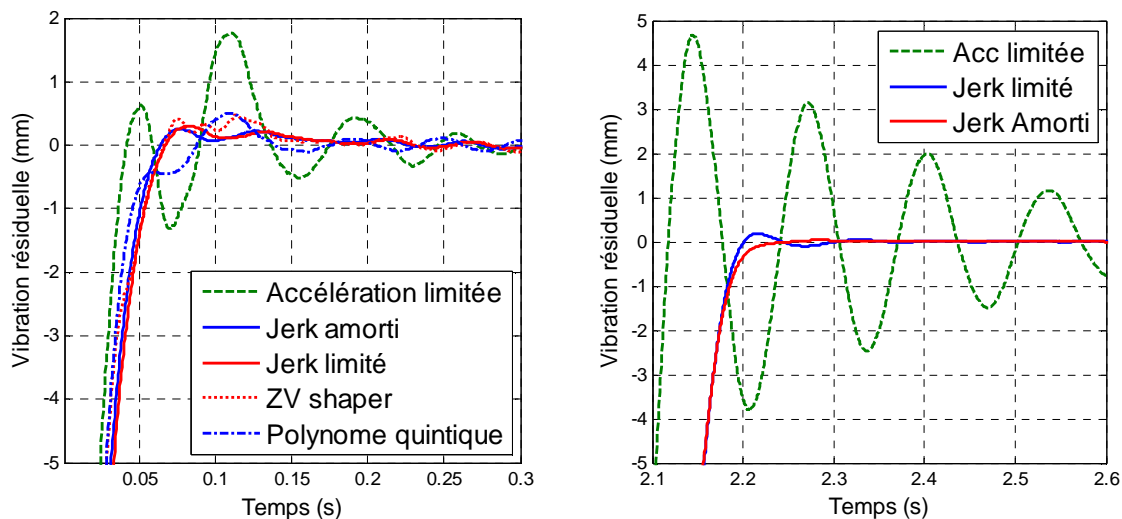


Fig. 9 : Exemple de résultat en réduction de vibration pour un axe de robot industriel : axe 1 Stäubli TX90 (droite) et axe 1 Stäubli RX170 (gauche).

## 5 Quelques expérimentations sur robot industriel

La figure 9 présente quelques résultats en termes de réduction de vibration résiduelle obtenue pour un mouvement point à point d'un axe de robot. Les mesurent proviennent d'un laser tracker API Inc. De façon générale, les trajectoires adaptées naturellement à la réduction

de vibration (jerk limité et jerk amorti) permettent de réduire le niveau de vibration résiduelle de façon significative (sphère de répétabilité statique de l'axe). Les shapers classiques peuvent atteindre les mêmes performances, généralement en réduisant le temps de réponse d'une demi-période du mode propre, mais ceci au prix d'une plus grande complexité de réglage pour atteindre une robustesse équivalente face aux dynamiques négligées.

## Références

- [1] P. SCHMIDT, T. REHM, 1999, *Notch filter tuning for resonant frequency reduction in dual inertia systems*, Industry Applications Conference, Conference Record of the Thirty-Fourth IAS Annual Meeting 3, 1730 - 1734.
- [2] Y.C. CHEN, J. TLUSTY, 1995, *Effect of Low-Friction Guideways and Lead-Screw Flexibility Dynamics of High-Speed Machines*, Annals of CIRP 44(1), 353–356.
- [3] A. PIAZZI, A. VISIOLI, 2000, *Minimum-Time System-Inversion-Based Motion Planning for Residual Vibration Reduction*, IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 5(1).
- [4] M. BOERLAGE, R. TOUSSAIN, M. STEINBUCH, 2004, *Jerk derivative feedforward control for motion systems*, Proc. of the American Control Conference, Boston, Massachusetts, 4843-4848.
- [5] W. SINGHOSE, 2009, *Command Shaping for Flexible Systems: A Review of the First 50 Years*, Int. Journal of precision engineering and manufacturing, 10(4), 153–168.
- [6] W. SINGHOSE, J. VAUGHAN, 2011, *Reducing Vibration by Digital Filtering and Input Shaping Control Systems Technology*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 19(6), 1410 – 1420
- [7] I.M. DIAZ, E. PEREIRA, V. FELIU, J.J.L. CELA, 2010, *Concurrent Design of Multimode Input Shapers and Link Dynamics for Flexible Manipulators*, IEEE/ASME Trans. on Mechatronics, 15(4).
- [8] W. SINGHOSE, L. PAO, 2009, *A comparison of input shaping and time optimal flexible-body control*, Control Engineering Practice, 5(4), 459–467.
- [9] T. SINGH, 2004, *Jerk Limited Input Shapers*, ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, 126(1), 215–219.
- [10] D. BRUN-PICARD, 2004, *Influence des lois de mouvement sur les déformations et les vibrations des machines à grande vitesse*, Proc of 3ème Assises MO&UGV, pp. 81-90.
- [11] A. OLABI, R. BEAREE, O. GIBARU, M. DAMAK, 2010, *Feedrate planning for machining with industrial six-axis robot*, Control Engineering Practice, 18(5), 471-482.
- [12] R. BEAREE, A. OLABI, 2013, *Dissociated jerk-limited trajectory applied to time-varying vibration reduction*, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 29(2), 444-453.
- [13] R. BEAREE, 2014, *New Damped-Jerk trajectory for vibration reduction*, Control Engineering Practice, 28, 112–120.