



HAL
open science

Analyse dynamique par projection modale d'un modèle 2D du système couplé crâne-LCR-cerveau

Adil El Baroudi, Fulgence Razafimahéry, Lalaonirina
Rakotomanana-Ravelonarivo

► **To cite this version:**

Adil El Baroudi, Fulgence Razafimahéry, Lalaonirina Rakotomanana-Ravelonarivo. Analyse dynamique par projection modale d'un modèle 2D du système couplé crâne-LCR-cerveau. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. 10.1051/meca/2010061 . hal-01409589

HAL Id: hal-01409589

<https://hal.science/hal-01409589>

Submitted on 6 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse dynamique par projection modale d'un modèle 2D du système couplé Crâne-Lcr-Cerveau

A. El Baroudi, F. Razafimahery, L. Rakotomanana

IRMAR, Equipe de Mécanique
Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042, Rennes Cédex

Résumé — Ce travail a pour but d'étudier le comportement dynamique d'un problème d'interaction fluide-structure. Pour cela, on utilise une méthode semi-analytique basée sur la projection modale. Les résultats obtenus seront comparés avec une solution numérique, obtenue à l'aide du logiciel *Comsol Multiphysics*. Le problème étudié est celui issu d'un dispositif expérimental développé en [6]. On calcule certains paramètres dynamiques locaux et globaux afin de quantifier la sévérité d'un choc.

Mots clés — : Interaction fluide-structure, projection modale, choc, éléments finis.

1 Introduction

Ce travail est une suite d'une étude menée et développée en [1] qui consiste à analyser quelques problèmes d'interaction fluide-structure posés dans des domaines élastiques concentriques séparés ou non de domaine fluide. On rencontre ce type de géométrie en biomécanique. Citons notamment les vaisseaux sanguins, où une structure multicouche entoure un domaine fluide (le sang) ; dans ce cas le système peut être qualifié d'élastique-acoustique. Un autre exemple que l'on connaît moins est celui du système crâne-cerveau, où le domaine fluide (LCR) sépare deux domaines élastiques ; dans ce cas, le système peut être qualifié d'élastique-acoustique-élastique. Ces deux situations ont été développées assez largement en [1]. L'existence des modes propres obtenus analytiquement va nous permettre une résolution par projection modale du problème.

On se place en dimensions deux, dans l'hypothèse de déformation plane. Le couplage est supposé inertiel, et la compressibilité du fluide est prise en compte. Le problème traité modélise un dispositif expérimental développé en [6]. Ce dispositif modélise le système crâne-cerveau, séparé par un fluide, qui est le liquide céphalo-rachidien (LCR). Les caractéristiques géométriques et matérielles utilisées sont essentiellement issues de ce dispositif.

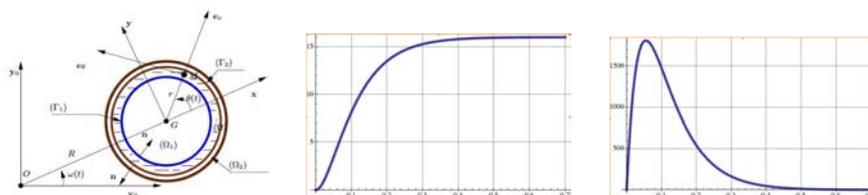


Figure 1 – Schéma 2D du dispositif ; vitesse et accélération angulaires

Ce dispositif peut aussi modéliser celui d'une centrifugeuse humaine, de type Latécoère, servant à l'entraînement des pilotes de chasse. Dans ce cas, la géométrie du modèle est par exemple

la coupe de la branche ascendante de la crosse aortique. Dans toute la suite, on se place dans l'hypothèse où le crâne est supposé rigide.

L'influence de l'épaisseur de la couche fluide a été étudiée, afin de connaître l'effet de confinement. Les solutions analytiques obtenues ont été comparées aux solutions numériques, afin de valider la fiabilité du logiciel de calcul d'éléments finis utilisé.

2 Le problème modèle

Le repère tournant $\mathcal{R} = (G; \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}_0)$ est lié au système couplé par le biais du bras OG , supposé rigide. On note \mathbf{p} et \mathbf{u} les champs de déplacement et la masse volumique respectivement du solide Ω_1 ; ρ_0 , c_0 et p sont respectivement la masse volumique, la célérité du son et le champ de pression dans Ω . Comme le repère \mathcal{R} n'est pas galiléen, le problème aux limites s'écrit alors : trouver (\mathbf{u}, p) solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \rho \mathbf{F}(t) \quad (\Omega_1) \\ \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \mathbf{div} \left[-\frac{1}{\rho_0} (\nabla p - \mathbf{q}) \right] = Q \quad (\Omega_f) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} = -p \mathbf{n} \quad (\Gamma_1) \\ \frac{1}{\rho_0} [\nabla p - \mathbf{q}] \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{n} \quad (\Gamma_1) \\ [\nabla p - \mathbf{q}] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\Gamma_2) \end{array} \right. \quad (1)$$

où $-\mathbf{F}(t)$ est l'accélération d'inertie d'entraînement et on néglige celle de Coriolis. Pour le problème acoustique, il est d'usage d'utiliser la décomposition suivante

$$\rho \mathbf{F}(t) = -\rho_0 \begin{bmatrix} -R\dot{\omega}^2(t) - x\dot{\omega}^2(t) \\ R\dot{\omega}(t) - y\dot{\omega}^2(t) \end{bmatrix} - \rho_0 \begin{bmatrix} -y\dot{\omega}(t) \\ x\dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{q} + \mathbf{Q}$$

où \mathbf{q} est une source qualifiée de dipôle et $\mathbf{div}(\mathbf{Q}) = Q$ est le monopôle. Dans toute la suite, on va prendre les caractéristiques matérielles et géométriques suivantes, issues essentiellement de [6] :

	$E(Pa)$	ν	$\rho(kg/m^3)$	$R(m)$	$c_0(m/s)$
Ω			1000	$R_2 = 0.090$	1450
Ω_1	$6,775 \cdot 10^5$	0,48	1150	$R_1 = 0.075$	

On fixe la longueur du bras à $R = 0,165m$. La valeur maximale de $\dot{\omega}$ est égale à $16rd/s$, tandis que celle de $\ddot{\omega}$ est égale à $1850rd : s^2$. Le temps maximal de calcul est fixé à $500ms = 0,5s$.

3 Résolution par projection modale

La formulation variationnelle du problème aux limites (1) s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_s} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx - \int_{\Gamma_1} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = - \int_{\Omega_s} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dx \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{\Omega_f} \frac{p\phi}{\rho_0 c_0^2} dx + \int_{\Gamma_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \phi d\Gamma \right) + \int_{\Omega_f} \frac{1}{\rho_0} \nabla p \cdot \nabla \phi dx = \int_{\Omega_f} \frac{1}{\rho_0} \mathbf{q} \cdot \nabla \phi dx \end{array} \right. \quad (2)$$

pour tout $(\mathbf{v}, \phi) \in \mathbf{V} \times Q$, où $\mathbf{V} = \mathbf{H}^1(\Omega_1)$ et $Q = H^1(\Omega)$.

Les résultats obtenues en [1] montrent l'existence des modes propres $(\omega_k, \mathbf{X}_k, p_k)_{k=1, \dots, N}$ du problème aux limites (1). La projection modale consiste à décomposer le champ des déplacements

\mathbf{u} et le champ de pression p sur la base modale $(\mathbf{X}_k(x), p_k(x))_{k=1,\dots,N}$ du système couplé. En choisissant $(\mathbf{v}, \phi) = (\mathbf{X}_i, p_i)$ et en utilisant l'orthogonalité par rapport à l'opérateur de masse et de raideur, les coordonnées horaires $(q_k(t))$ et $(r_k(t))$ associées au problème aux limites (2) vérifient le système couplé suivant

$$\begin{cases} M_i \frac{d^2 q_i}{dt^2} + K_i q_i(t) & = \int_{\Gamma_1} p \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{n} d\Gamma - F_i(t) \\ M_{if} \frac{d^2 r_i}{dt^2} + K_{if} r_k(t) + \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Gamma_1} \rho_0 p_i \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{n} d\Gamma & = - \int_{\Omega} \rho \dot{\omega}^2(t) p_i dx - G_i(t) \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

Les coefficients présents dans le système (3) sont parfaitement déterminés à l'aide de $(\mathbf{X}_k(x), p_k(x))$. En introduisant la notation vectorielle $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_N(t))^T$ et $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_N(t))^T$, on obtient le résultat suivant

Proposition•

Le système (3) peut s'écrire sous forme matricielle

$$\mathbb{M} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \mathbb{K} \mathbf{q}(t) - \frac{1}{\rho_0} \mathbb{M}^a \mathbf{r}(t) - \mathbf{F}(t) ; \mathbb{M}^f \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mathbb{M}^a \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \mathbb{K}^f \mathbf{r}(t) = -\mathbf{S}(t) - \mathbf{G}(t) \quad (4)$$

et peut être découplé et on obtient l'équation en $\mathbf{q}(t)$

$$\mathbb{A} \frac{d^4 \mathbf{q}}{dt^4} + \mathbb{B} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \mathbb{C} \mathbf{q}(t) = -\mathbb{M}^f \mathbb{M}^{-a} \frac{d^2 \mathbf{F}}{dt^2} - \mathbb{K}^f \mathbb{M}^{-a} \mathbf{F}(t) - \mathbf{G}(t)$$

3.1 Mise en œuvre de la méthode

Le calcul des coefficients, ainsi que la résolution du système ont été réalisés à l'aide du logiciel de calcul formel **Maple**. Les champs de déplacement et de pression ont pour expressions [1]

$$u_r(r, \theta) = \phi(r) \sin(n\theta) \quad ; \quad u_\theta(r, \theta) = \psi(r) \cos(n\theta) \quad ; \quad p(r, \theta) = -\frac{\chi(R_1)}{K(R_1)} K(r) \sin(n\theta)$$

On calcule ensuite les quantités

$$M_i = \int_{\Omega_1} \rho_1 \mathbf{X}_i(x)^2 dx ; M_i^a = \int_{\Gamma_1} \rho_0 p_j(x) \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{n} d\Gamma ; M_i^f = \int_{\Omega} \frac{p_k^2(x)}{c_0^2} dx$$

On en déduit K_i et K_i^f en fonction de M_i et M_i^a , en utilisant la relation modale classique. Le champ de pression est calculé en quatre points à l'interface fluide-structure. Ainsi, on obtient les lois horaires du champ de pression en ces quatre points.

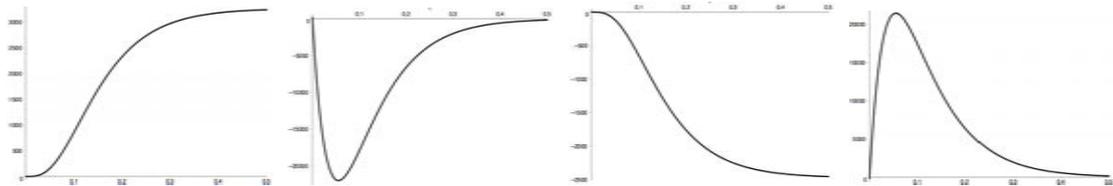


Figure 2 – Variation de pression en $A_1 = (R_1, 0)$, $A_2 = (0, R_1)$, $A_3 = (-R_1, 0)$ et $A_4 = (0, -R_1)$

On constate une variation symétrique des résultats, pour des points symétriques. Ce résultat est dû à la symétrie du domaine et à la linéarité des équations.

3.2 Influence du confinement

Regardons maintenant la variation des paramètres dynamiques du problème en faisant varier l'épaisseur de la couche fluide. Pour cela, on fixe la valeur du rayon intérieur R_2 du solide Ω_2 à $0.090m$ et on fait varier le rayon R_1 du domaine Ω_1 . Les calculs analytiques donnent les résultats suivants : $e = R_2 - R_1 = 0.012m$ et $R_1 = 0.078m$. On calcule les variations du champ de pression aux quatre points définis ci-dessus. On peut constater une variation notable du champ de pression

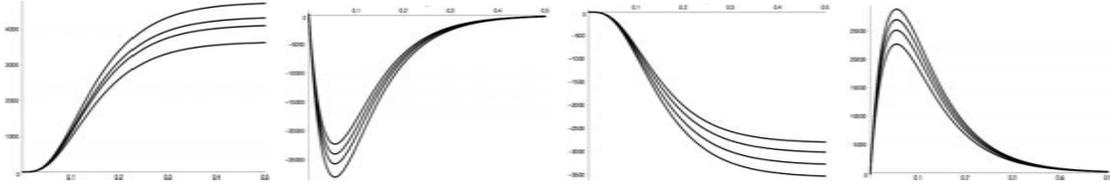


Figure 3 – Variation de pression en $A_1 = (R_1, 0)$, $A_2 = (0, R_1)$, $A_3 = (-R_1, 0)$ et $A_4 = (0, -R_1)$

en fonction de l'épaisseur du fluide. On a bien un effet de confinement. Cet effet est dû à la variation de la masse ajoutée du système couplé.

4 Résolution numérique

La résolution numérique du problème est effectuée à l'aide du logiciel *Comsol Multiphysics*. Le problème acoustique sera alors formulé autrement, pour tenir compte de l'exigence du logiciel. En utilisant les éléments de Lagrange, où $\mathbf{u}_h \in \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$ et $p_h \in \mathbb{P}_1$, la discrétisation du problème variationnel (2) conduit au système

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{O} \\ \mathbf{M}_a & \mathbf{M}^f \end{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{S} + \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ce système est résolu à l'aide du logiciel *Comsol Multiphysics*. On obtient les variations de la pression en différents points, ainsi que la contrainte de Von Mises.

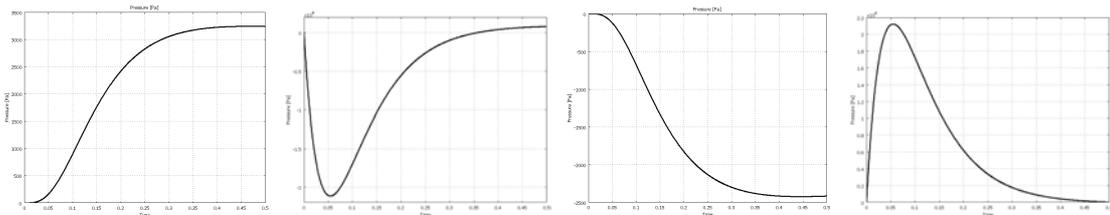


Figure 4 – Variation de pression en $A_1 = (R_1, 0)$, $A_2 = (0, R_1)$, $A_3 = (-R_1, 0)$ et $A_4 = (0, -R_1)$

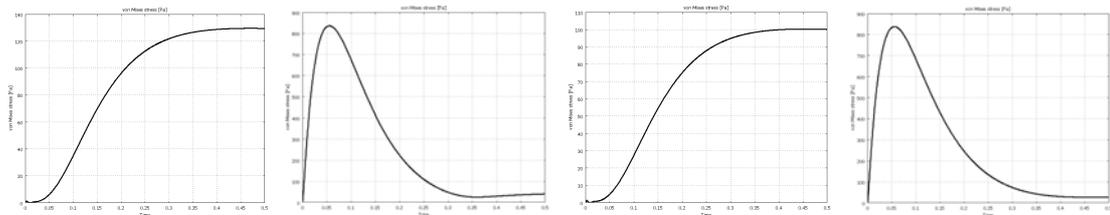


Figure 5 – Variation de la contrainte de Von Misès en A_1 , A_2 , A_3 et A_4

On constate, que les résultats numériques et semi-analytiques sont en parfait accord, ce qui nous permet de valider l'algorithme utilisé dans le logiciel *Comsol Multiphysics* pour le système

non symétrique (5). Le champ de contrainte de Von Mises dans le solide, ainsi que le champ de pression dans le domaine fluide ont été calculés, pour différents instants. Certaines quantités

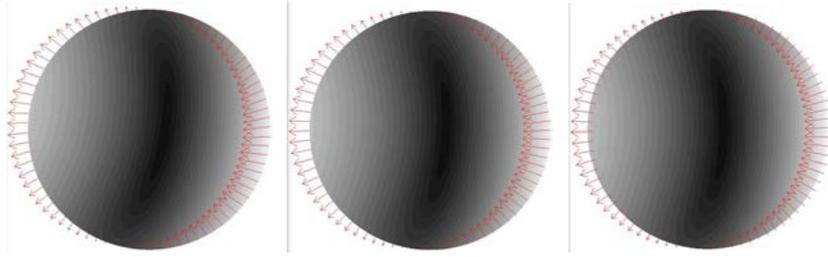


Figure 6 – Contrainte de Von Misès aux instants $t = 0.1s, 0.2s, 0.3s$



Figure 7 – Champ de pression aux instants $t = 0.1s, 0.2s, 0.3s$

dynamiques telles que l'énergie de déformation $W(t)$, l'énergie cinétique $K(t)$, la masse ajoutée $m_a(t)$ et la résultante des efforts $\mathbf{R}(t)$ ont été aussi calculées. On pose

$$\mathbf{R}(t) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{T}(M, \mathbf{n}) dS = \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} dS = D(t)\mathbf{x} + L(t)\mathbf{y}$$

où les quantités D et L sont qualifiées de traînée et portance du solide respectivement.

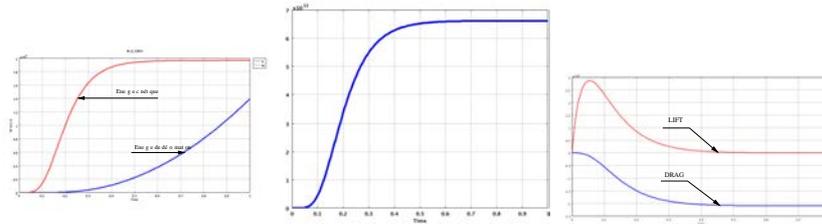


Figure 8 – Variations de $W(t)$, $K(t)$, $m_a(t)$, de $D(t)$ et de $L(t)$

On peut constater que l'énergie cinétique, la masse ajoutée et la traînée sont étroitement contrôlées par l'accélération normale du bras, tandis que la portance est contrôlée par l'accélération tangentielle.

5 Conclusion

A l'issue de cette étude, on peut maintenant tirer les conclusions suivantes.

L'approche par projection donne de très bons résultats, en utilisant uniquement quelques termes ($N \leq 10$) dans le développement de la solution. Cette approximation est d'autant meilleure, que la première fréquence est assez élevée. Le seul inconvénient est que dans une géométrie compliquée, l'obtention par voie analytique des modes propres n'est pas toujours possible. En ce qui

concerne le champ de déplacement, les résultats obtenus montrent sa sensibilité par rapport à l'accélération normale. Ce qui est en accord avec le modèle utilisé, car la condition de glissement à l'interface cerveau-LCR assure uniquement la continuité de la composante normale de la vitesse. Au niveau du champ de pression, les résultats obtenus semblent être en accord avec ceux observés. La variation de la pression dans les deux points situés suivant l'axe du bras est sensible à l'accélération normale, tandis que dans l'axe orthogonal au bras, les résultats semblent sensibles à l'accélération tangentielle. Pour la contrainte de Von Mises, les résultats semblent être contraire à ceux obtenus pour le champ de pression. En effet, sur les deux points situés sur l'axe du bras, on constate l'existence d'un pic, à l'instant $t = 0.05s$. L'allure montre, qu'en ces deux points, c'est l'accélération tangentielle qui l'emporte sur l'accélération normale. Sur les deux points situés sur l'axe orthogonal au bras, la variation de la contrainte suit celle de l'accélération tangentielle.

Ces résultats montrent, que la partie la plus sollicitée pendant le choc est celle située suivant l'axe du bras. Autrement dit, lors d'un impact, la lésion peut survenir sur l'axe orthogonal à la direction de l'impact.

L'étude de confinement, montre que le modèle n'est pas très sensible à la variation de l'épaisseur de la couche du LCR. On peut penser que cette propriété est due à l'approximation acoustique utilisée dans le modèle.

Finalement, le modèle proposé dans le cadre de ce travail permet en première approximation de quantifier la sévérité d'un choc dans le cadre d'un modèle prenant en compte le caractère couplé du problème. Une amélioration du modèle proposé ici, peut être la prise en compte du caractère visqueux du LCR [2], ainsi que le caractère non linéaire du matériau constituant le cerveau.

Références

- [1] A. El Baroudi, F. Razafimahery, L. Rakotomanana. Parametric Modal Analysis of Brain-Csf-Skull system. Influence of fluid-Structure Interaction. *European Journal of Computational Mechanics vol 18/1*, 2009.
- [2] A. El Baroudi, F. Razafimahery, L. Rakotomanana. Potential formulation in fluid-structure interaction : Application to the modal analysis of skull-CSF-brain system. *African Conference on Computational Mechanics*, First International Conference, Sun City, South Africa, 7-11 January 2009.
- [3] N. Bideau, B. Mahiou, L. Monier, F. Razafimahery, L. R. Rakotomanana, B. Bideau, G. Nicolas. 2D dynamical efficiency of a swimfin : a fluid-structure interaction approach. *Submit to XXXIVème Congrès SB 2009 and Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 31 août & 2 sept. 2009, Toulon.
- [4] A. Hault-Dubrulle, F. Razafimahery, P. Draztic. Influence de la modélisation de l'interface crâne-cerveau sur la réponse dynamique globale de la tête soumise à un choc. *XIVème Colloque Vibrations chocs et bruit*, Ecole Centrale de Lyon, juin 2004.
- [5] A. Hault-Dubrulle, F. Razafimahery, L. Rakotomanana, P. Rungen and E. Markiewicz. Comparison of the CSF models during an angular acceleration of the head : experimental measurements and finite element analysis. *Xth International Symposium on Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, Madrid, Spain, Février 2004.
- [6] A. Hault-Dubrulle. Contribution à l'amélioration des connaissances des phénomènes d'interaction fluide-structure à l'intérieur de la boîte crânienne soumise à une sollicitation dynamique : études expérimentales et numériques. *Thèse de Doctorat en Génie Mécanique*, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 06 juillet 2007.
- [7] H. J. -P. Morand and R. Ohayon. *Fluid Structure Interaction*, John Wiley & Sons, 1995..