



**HAL**  
open science

## Résolution de problèmes de structures multi-défauts dans le cadre Arlequin. Préconisations pratiques et adaptation du solveur FETI

Nadia Elkhodja, Hachmi Ben Dhia, François-Xavier Roux

► **To cite this version:**

Nadia Elkhodja, Hachmi Ben Dhia, François-Xavier Roux. Résolution de problèmes de structures multi-défauts dans le cadre Arlequin. Préconisations pratiques et adaptation du solveur FETI. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01408459

**HAL Id: hal-01408459**

**<https://hal.science/hal-01408459>**

Submitted on 5 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Résolution de problèmes de structures multi-défauts dans le cadre Arlequin. Préconisations pratiques et adaptation du solveur FETI.

Nadia Elkhodja <sup>1,2</sup>, Hachmi Ben Dhia <sup>1</sup>, François-Xavier Roux<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ecole Centrale Paris, Laboratoire MSSMat UMR 8579 ECP  
92295 Châtenay-Malabry cedex France  
{nadia.elkhodja,hachmi.ben-dhia}@ecp.fr

<sup>2</sup> ONERA - Centre de Chatillon  
29 Av. de la Div. Leclerc, BP 72, F-92322 Châtillon  
francois-xavier.roux@onera.fr

---

**Résumé** — Dans ce travail, une formulation multi-patches Arlequin est développée pour la modélisation flexible et la simulation performante des structures complexes de type aube de turbine multi-perforée. En outre, en s’inspirant de la méthode FETI, on propose une stratégie de résolution itérative, parallèle et préconditionnée des problèmes Arlequin discrets. Des préconisations pratiques pour la construction d’un patch et la distribution des patches dans la structure sont données. La pertinence de notre approche est éclairée par des tests numériques.

**Mots clés** — multi-patch, multi-échelle, défaut, sous-structuration, méthode Arlequin, méthode FETI, preconditionneur.

---

## 1 Introduction

Soumises à des chargements, des structures complexes telle qu’une aube de turbine multi-perforée présentent des phénomènes mécaniques variant sur des échelles différentes. La modélisation de ces structures nécessite, par nature, l’utilisation de méthodes numériques multi-échelles prenant en compte les phénomènes locaux et globaux de manière couplées. La faisabilité d’une telle simulation dans le cadre multi-modèles et multi-échelles Arlequin [2, 3] a été abordée dans [7] (dans un cadre modèle). En particulier, pour des éléments finis de bas degré, l’étude paramétrique des dimensions du patch Arlequin a montré que la taille de sa zone libre par rapport au pas du maillage substrat conditionne la précision du modèle éléments finis Arlequin : cette zone libre doit contenir au moins les éléments du modèle global grossier touchés par les phénomènes mécaniques localisés. En outre, nous avons donné dans [7] les premiers éléments sur la performance numérique que l’on peut tirer de l’adaptation de la méthode FETI [1] à la résolution des problèmes Arlequin discrets. Ce travail s’inscrit dans la continuité de ces travaux antérieurs. Nous progressons dans trois directions. En premier, nous élaborons un preconditionneur naturel pour notre solveur itératif. Dans un second temps, nous proposons des préconisations pratiques sur les distances critiques inter-patches en deçà desquelles nous recommandons leur fusion en un seul patch. Enfin, pour optimiser davantage les coûts des calculs, nous montrons l’intérêt d’utiliser une cascade de patches.

Ce papier est structuré comme suit. En section 2, et dans le cadre de l'élasticité linéaire, nous donnons des écritures continues et discrètes d'un problème Arlequin mixte multi-patches. Dans la section 3, nous présentons une stratégie de résolution itérative parallèle de type FETI adaptée aux problèmes Arlequin multi-patches, nous proposons un préconditionneur naturel, témoignant de l'intérêt du couplage énergétique. Pour la section 4, nous étudions numériquement la question de la distance critique inter-patches et nous détaillons la notion de patches intermédiaires. Des conclusions et perspectives clôturent le papier.

## 2 Formulations Arlequin multi-patches

On considère une structure occupant la fermeture d'un domaine borné  $\Omega$ , comportant  $n$  inclusions disjointes (cf. Figure 1 (a)). On suppose que la structure est encastree sur une partie  $\Gamma$  de son bord et libre sur la partie complémentaire. On suppose que les caractéristiques mécaniques des inclusions sont différentes de celles de la matrice. On note  $E_i, \nu_i$  le module de Young et le coefficient de Poisson des matériaux constitutifs des inclusions  $i, i = 1, \dots, n$  et  $E_0, \nu_0$  les caractéristiques de la matrice.

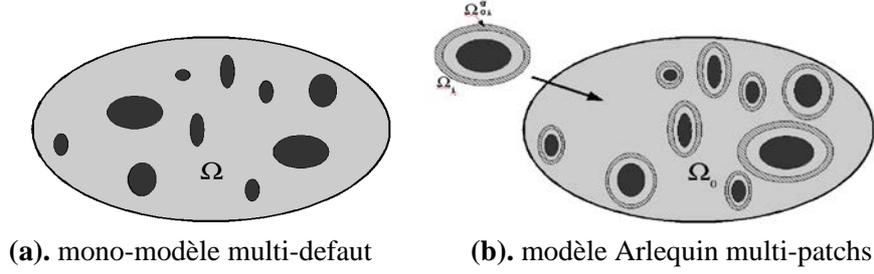


Figure 1 – mono-modèle multi-defaut et modèle Arlequin multi-patches.

### 2.1 Formulation Arlequin continue du problème

Dans le cadre Arlequin, on superpose  $n$  patches  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  (aux  $n$  inclusions  $I_i$ ) sur la structure saine  $\Omega_0$  (cf. Figure 1 (b)). On note  $\Omega_{0i} = \Omega_0 \cap \Omega_i$ ,  $\Omega_{0i}^g$  la zone de collage entre  $\Omega_0$  et  $\Omega_i$ , et  $\Omega_{0i}^f$  la zone libre. Pour la clarté, on suppose que  $\partial\Omega_{0i}^g \supset \partial\Omega_{0i}^f$ ,  $\partial\Omega_{0i} \cap \partial\Omega_0 = \emptyset$ , et que les inclusions sont contenues strictement dans  $\Omega_{0i}^f$ . Ainsi, le problème Arlequin multi-patches mixte, avec couplage de type énergétique s'écrit :

Trouver  $(u_0, u_1, \dots, u_n) \in W_0 \times W_1 \times \dots \times W_n$  et  $(\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0n}) \in W_{01}^g \times \dots \times W_{0n}^g$  tels que

$$\begin{cases} \forall v_0 \in W_0, & \int_{\Omega_0} \alpha_0 \sigma_0(u_0) : \varepsilon_0(v_0) + \sum_{i=1}^n C_i(\lambda_{0i}, v_0) = \int_{\Omega_0} \beta_0 f \cdot v_0 \\ \forall v_i \in W_i, & \int_{\Omega_i} \alpha_i \sigma_i(u_i) : \varepsilon_i(v_i) - C_i(\lambda_{0i}, v_i) = \int_{\Omega_i} \beta_i f \cdot v_i & (\forall i = 1, \dots, n) \\ \forall \mu_i \in W_{0i}^g, & C_i(\mu_i, u_0 - u_i) = 0 & (\forall i = 1, \dots, n) \end{cases} \quad (1)$$

où pour tout  $i = 0, \dots, n$   $\alpha_i$  et  $\beta_i$  désignent les fonctions de pondérations des énergies interne et externe, vérifiant les hypothèses habituelles, et où

$$W_0 = \{v_0 \in H^1(\Omega_0) ; v_0 = 0 \text{ sur } \Gamma\} \quad (2)$$

$$W_i = H^1(\Omega_i) \text{ et } W_{0i}^g = H^1(\Omega_{0i}^g) \quad (3)$$

$$C_i(\lambda_{0i}, v) = \int_{\Omega_{0i}^g} \sigma_i(\lambda_{0i}) : \varepsilon_i(v) \quad (4)$$

On définit  $\sigma_i$  le tenseur de contrainte du domaine  $\Omega_i$  tel que :

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} \sigma(E_0, \nu_0) & \text{si } x \in \Omega_i / I_i \\ \sigma(E_i, \nu_i) & \text{si } x \in I_i \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \text{et } \sigma_0(x) = \sigma(E_0, \nu_0) \text{ si } x \in \Omega_0$$

On note que les modes rigides des multiplicateurs  $\lambda_{0i}$  doivent être traités pour des raisons de stabilité (voir [4]).

## 2.2 Formulation Arlequin discrète

Pour discrétiser le problème Arlequin multi-patches, on utilise la méthode des éléments finis, on obtient ainsi le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

avec :

$$\bullet B_{i,j} = \begin{cases} C_{0i} & \text{si } j = 1 \\ -C_{jj} & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall i = 0, \dots, n-1, \quad \forall j = 0, \dots, n, \quad \text{et } A_{i,j} = \begin{cases} K_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall i, j = 0, \dots, n,$$

$$\bullet \Lambda = [\lambda_{01} \dots \lambda_{0i} \dots \lambda_{0n}], \quad f = [F_0 \dots F_i \dots F_n] \text{ et } U = [U_0 \dots U_i \dots U_n]$$

où  $K_i$ ,  $C_{ij}$ ,  $F_i$ ,  $U_i$  et  $\lambda_{0i}$  sont respectivement les matrices de rigidités du domaine  $\Omega_i$ , de couplages, les vecteurs forces et déplacements du domaine  $\Omega_i$  et les forces de collages (multiplicateurs) du domaine  $\Omega_0$  avec le patch  $\Omega_i$ .

## 3 Stratégie de résolution itérative

Pour résoudre de façon performante et en parallèle le système (5), on présente dans un premier temps une stratégie itérative parallèle consistant en une adaptation de la méthode FETI pour les problèmes Arlequin multi-patches. On discute, dans un second temps des préconditionneurs.

### 3.1 FETI pour Arlequin

Les problèmes Arlequin étant sous-structurés par nature, ils se prêtent bien à des résolutions par des méthodes de sous-domaines. L'approche consiste à résoudre un problème condensé sur les zones de collages (les équations des multiplicateurs) des différents patches par l'élimination des différents déplacements. Ceci entraîne la résolution de problèmes locaux mal posés lorsque les patches sont des structures flottantes. Toutefois, on s'inspirant de la méthodologie FETI, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} U_i = K_i^+ (F_i + C_{ii}^T \lambda_{0i}) + R^{(i)} \alpha^{(i)} \\ R^{(i)T} (F_i + C_{ii}^T \lambda_{0i}) = 0 \end{cases} \quad (\forall i = 1, \dots, n) \quad (6)$$

où  $K_i^+$  et  $R^{(i)}$  désignent respectivement la pseudo-inverse et une base du noyau de  $K_i$ . Cela nous conduit au problème condensé suivant :

$$\begin{bmatrix} D & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} \quad (7)$$

avec :

$$\bullet D_{i,j} = \begin{cases} C_{0i} K_0^{-1} C_{0i}^T + C_{ii} K_i^+ C_{ii}^T & \text{si } j = i \\ C_{0i} K_0^{-1} C_{0j}^T & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

$$\bullet G = [\dots C_{ii} R^{(i)} \dots], \quad \alpha = [\dots \alpha^{(i)} \dots]$$

$$\bullet d = [\dots C_{0i} K_0^{-1} F_0 - C_{ii} K_i^+ F_i \dots] \text{ et } e = -[\dots R^{(i)T} F_i \dots]$$

Ce système est résolu par une méthode de gradient conjugué projeté. L'algorithme projeté consiste à rechercher la solution  $\Lambda$  sous la forme  $\Lambda = \Lambda^0 + P\tilde{\Lambda}$  avec :

$$P = I - G(G^T G)^{-1} G^T \quad \text{et} \quad \Lambda^0 = G(G^T G)^{-1} e \quad (8)$$

### 3.2 Préconditionneurs

Afin d'optimiser le coût en temps de calcul, la convergence du système (7) peut-être améliorée à l'aide de preconditionneurs adaptés. Contrairement aux approches duales classiques, la méthode Arlequin n'a pas besoin d'un preconditionneur global pour assurer la scalabilité. En effet, le modèle global joue le rôle du preconditionneur global, il transmet naturellement l'information à l'ensemble des patches, en même temps (cf. Figure 2). Ainsi le nombre d'itérations ne devrait pas croître avec le nombre de patches.

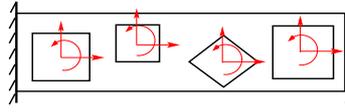


Figure 2 – mouvements rigides des patches

Cependant, pour être efficace d'un point de vue calcul, des preconditionneurs locaux sont nécessaires. Le principe consiste à preconditionner les contributions apportées par chaque patch dans l'opérateur du problème condensé. Pour un patch  $i$ , le fait d'utiliser un couplage énergétique fait que sa contribution  $C_{ii}K_i^+C_{ii}^T$  est homogène à une matrice de rigidité. C'est la raison pour laquelle nous proposons d'utiliser la matrice  $C_{ii}^{-1}$  comme preconditionneur local. Ce dernier a montré de grandes potentialités dans [7], pour un problème modèle mais significatif. Nous en donnons d'autres illustrations pour des problèmes plus généraux.

## 4 Préconisations pratiques pour les patches

Dans la section précédente, nous avons donné une formulation Arlequin multi-patches et expliqué comment résoudre les problèmes éléments finis associés. En pratique, pour une structure de type aube de turbine multi-perforée et pour un maillage grossier donné de l'aube sans perforations, la préconisation sur la taille de la zone libre d'un patch [7] soulève deux questions pratiques importantes :

(i) dans quelles conditions serait-il possible d'utiliser plusieurs patches ?

(ii) comment éviter l'utilisation d'un patch fin occasionnant des coûts conséquents dans le cas où l'atération est de dimension très faible par rapport à l'élément grossier qui la contient ? (cas de petits trous ou petites inclusions dans une grande structure)

Les deux études numériques présentées ci-dessous donnent des éléments de réponse et des préconisations pratiques.

### 4.1 Distribution des patches dans une structure multi-défauts

Dans un premier temps, nous étudions numériquement le cas simple 1D d'une barre contenant deux inclusions. Pour cela, nous considérons une barre élastique où le module de Young est  $E_1 = 1Pa$ , sauf en deux zones de très faibles tailles relatives dont le module de Young  $E_2$  vaut  $10^{-2}Pa$  et  $10^{-1}Pa$ . La barre est encastée à ses extrémités et soumise à une densité "volumique" d'efforts. Deux modèles EF fins locaux, englobant chacun une des deux zones d'affaiblissement, sont superposés à un modèle EF grossier de la barre substrat, dans le cadre Arlequin. Les modèles locaux sont fortement pondérés et respectent la taille minimale préconisée pour la zone libre [7]. Nous avons mené une étude dans laquelle nous avons fait varier la distance inter-zones libres des patch, pour des tailles de mailles grossières différentes. Les solutions calculées sont comparées à une solution de référence dans la Figure 3. Il apparaît clairement que la distance inter-zone libre des patches doit être d'au moins un élément grossier du substrat pour disposer des patches dans une structure multi-inclusions.

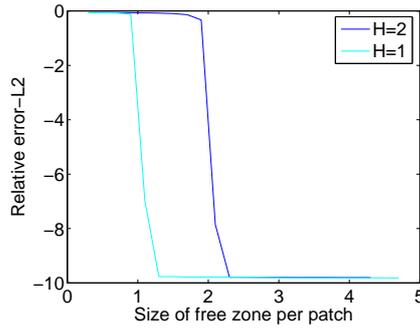
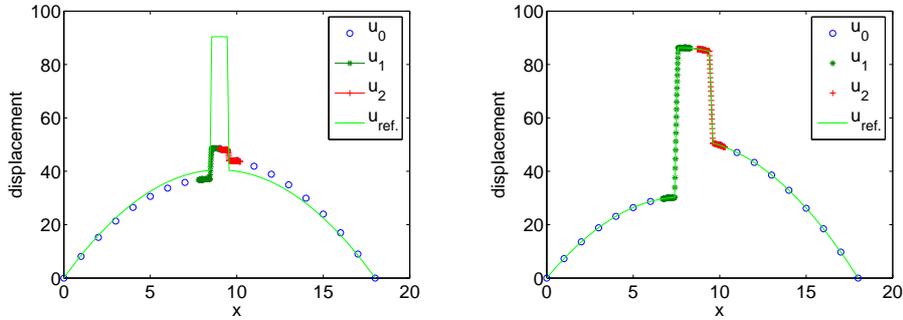


Figure 3 – Erreur relative L2 / à la taille des zones libres des patches pour différents  $H$

A titre d'illustration, nous avons également reporté sur la Figure 4 les solutions Arlequin et de référence dans le cas où la préconisation pratique ci-dessus est respectée et dans un autre où elle ne l'est pas. Les solutions obtenues lorsque les deux patches sont, soit séparés par un élément macro., soit se recouvrent, sont données et comparées à la solution classique obtenue pour un mono-modèle EF fins (où on note  $H$  le pas du maillage substrat).



(a). recouvrement de patches (b). patches séparés par un élément macro.

Figure 4 – Comparaison de la solution Arlequin avec la solution EF fin

## 4.2 Patches de transition

La préconisation pratique sur la taille de la zone libre d'un patch n'autorise pas l'usage de patches intra-éléments grossiers. Par conséquent, même dans les situations où la taille  $\varepsilon$  d'un "défaut" est très petite par rapport à la taille  $H$  de l'élément substrat qui le contient, le nombre d'éléments fins (implicitement fins) utilisés pour le patch restera élevé, induisant ainsi des coûts élevés. Pour redresser cette situation, tout en préservant la flexibilité de la méthode Arlequin (en particulier, ne pas remailler le modèle substrat), nous proposons une approche par cascade de patches que nous illustrons par un exemple très simple. Nous considérons une barre élastique occupant un domaine  $\Omega$  de taille  $L$ . Le module de Young du matériau est de  $1Pa$ , sauf sur une très petite zone de taille  $\varepsilon$  où il est de  $10^{-2}Pa$ . La barre est encadrée à ses extrémités et soumise à une densité "volumique" d'efforts. Pour résoudre ce problème dans le cadre Arlequin, nous utilisons un maillage global de  $\Omega_0$  de taille  $H \gg \varepsilon$ . A ce maillage, nous superposons un patch  $\Omega_1$  intermédiaire dont la zone libre respecte la préconisation pratique par rapport à  $H$ . Un maillage intermédiaire de  $\Omega_1$  de pas  $H_i$  est utilisé. Ce modèle intermédiaire n'est pas suffisamment fin (ni de taille, ni en modèle) pour capter les phénomènes localisés d'interfaces (discontinuités de la déformation). Un deuxième patch  $\Omega_2$  est superposés au domaine  $\Omega_1$ , au niveau de la zone critique. Ce second patch respecte la préconisation pratique portant sur la taille minimale de la zone libre par rapport à  $H_i$ . En outre, il est maillé finement pour capter les phénomènes localisés d'interfaces (cf. Figure 5)

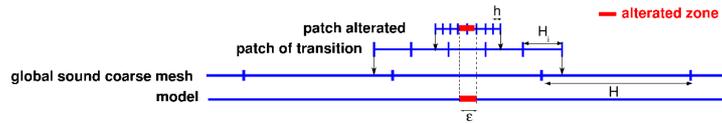
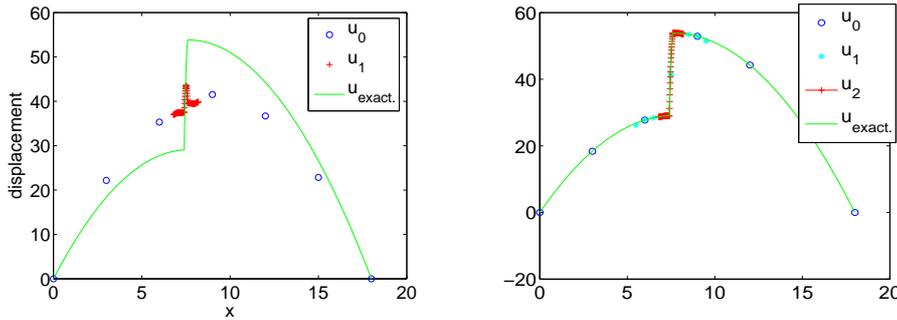


Figure 5 – Modèle Arlequin 2 patches

Les résultats obtenus lorsque on utilise un patch Arlequin intra-élément global et lorsqu'on introduire un deuxième patch ou patch de transition assurant le "dialogue" entre le modèle grossier et le modèle fin sont représentés sur la Figure 6. Ils sont comparés à la solution analytique.



(a). patch intra-élémentaire global (b). passerelle intermédiaire : patch de transition.

Figure 6 – Comparaison de la solution en déplacement Arlequin et de la solution analytique

On remarque l'utilisation d'un patch Arlequin de transition adapté permet d'obtenir un bon comportement de la solution avec un coût relativement comparable à une analyse monopatch intra-élémentaire substrat.

## 5 Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous proposons une stratégie de résolution itérative parallèle de type FETI adaptée aux problèmes Arlequin multi-patches, avec une définition naturelle de préconditionneurs locaux témoignant de l'intérêt du couplage énergétique. Par ailleurs, l'analyse des résultats numériques du problème Arlequin bi-patch 1D nous a permis d'établir que la distance inter-zone libre des patches doit être d'au moins un élément grossier du substrat pour disposer des patches dans une structure multi-defauts. Enfin, pour optimiser davantage les coûts des calculs, nous montrons l'intérêt d'utiliser une cascade de patches (patch de transition).

## Références

- [1] C. Farhat, F.-X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 32, 1205–1227, 1991
- [2] H. Ben Dhia. Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin. *C.R.A.S. Paris Série Iib* 326 : 899–904, 1998.
- [3] H. Ben Dhia. Numerical modelling of multiscale problems : the Arlequin method, *ECCM'99* 1999.
- [4] H. Ben Dhia, G. Rateau Mathematical analysis of the mixed Arlequin method *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris Série I* 332,649–654, 2001
- [5] H. Ben Dhia, G. Rateau Application of the Arlequin method to some structures with defects. *R.E.E.F.* 11, n° 2,3,4 : 291–304, 2002.
- [6] H. Ben Dhia, G. Rateau The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *IJNME*, 2005
- [7] H. Ben Dhia, N. Elkhodja, F.-X. Roux. Multimodeling of multi-altered structures in the Arlequin framework. Solution with a Domain-Decomposition solver. *R.E.M.N.* 17 : 969–980 2008.