



**HAL**  
open science

## **Fissuration 3D X-FEM avec contact interfacial: stratégie à deux échelles structure/interface**

Emilien Pierrès, Marie-Christine Baietto, Anthony Gravouil

### ► To cite this version:

Emilien Pierrès, Marie-Christine Baietto, Anthony Gravouil. Fissuration 3D X-FEM avec contact interfacial: stratégie à deux échelles structure/interface. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01408458

**HAL Id: hal-01408458**

**<https://hal.science/hal-01408458v1>**

Submitted on 5 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Fissuration 3D X-FEM avec contact interfacial: stratégie à deux échelles structure/interface

E. Pierrès<sup>1</sup>, MC. Baietto-Dubourg, A. Gravouil

<sup>1</sup> INSA-Lyon, LaMCoS, CNRS UMR5259, F-69621, France

Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures LaMCoS, Institut National des Sciences Appliquées INSA de Lyon, Bât. Jacquard, Av. Jean Capelle, 69621 Villeurbanne Cedex France  
emilien.pierres@insa-lyon.fr

---

**Résumé** — Contact et frottement sont notamment présents à l’interface des fissures liées aux problèmes de fatigue de contact. La prise en compte de ces phénomènes locaux couplés au problème global (à l’échelle de la structure) est réalisée dans le cadre de la méthode des éléments finis étendus (X-FEM). La stratégie proposée considère l’interface de la fissure comme une structure autonome, possédant une discrétisation indépendante du maillage éléments finis, ses propres variables et sa propre loi de comportement. Le problème local est connecté au sens faible au problème global de la structure à l’aide d’une formulation faible à trois champs. La description des conditions de contact locales est ainsi adaptée à l’échelle des phénomènes locaux, indépendamment du maillage éléments finis de la structure globale.

**Mots clés** — fatigue tribologique, fissuration 3D X-FEM, contact interfacial.

---

## 1 Introduction

La conception des structures doit satisfaire à des contraintes de plus en plus sévères, couplant à la fois augmentation des performances et allègement. En réponse à ces demandes, le dimensionnement doit être fait au plus juste. La fatigue de contact est rarement intégrée dans les études de dimensionnement. Elle se manifeste aux interfaces des composants en contact de ces structures, telles que les attaches rivetées, pieds d’aubes, contacts bille/piste, etc... Elle est à l’origine de dégradations telles que usure et fissuration. Les conséquences sont une diminution importante de la durée de vie avec des facteurs d’abattement de deux ou trois [14]. Dans ce contexte, des modèles de comportement à l’échelle locale (zone de contact) ont été développés [4, 8], mais ne prennent pas en compte l’échelle globale de la structure .

La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) est très adaptée à la simulation de propagation de fissures. Elle permet de modéliser des fissures indépendamment du maillage éléments finis. Elle ne nécessite donc pas de remaillage de la structure ni de projection de champs lors de la propagation des fissures. Une approximation précise du champ de déplacement est obtenue avec des maillages plutôt grossiers, grâce aux fonctions d’enrichissement en point de fissure. Le développement de X-FEM couplée à une méthode de fonctions de niveaux permet de simuler la propagation de fissures bi-dimensionnelles et tri-dimensionnelles aux géométries complexes [12, 7], en élasticité linéaire et plasticité confinée en pointe de fissure [5]. La méthode X-FEM a aussi été couplée aux techniques multi-grille [13] avec raffinement local du maillage en volume afin d’adapter la taille des éléments à l’échelle de chaque problème (structure/fissure) dont l’ordre de grandeur peut varier du mètre au millimètre.

En 2007, Ribeaucourt [15] propose un modèle de fissuration X-FEM quasi-statique avec contact et frottement dédié aux problèmes de fatigue de contact en 2D. Elguedj [5] développe un modèle X-FEM quasi-statique avec résolution du contact unilatéral et plasticité confinée en pointe de fissure. Pour chacun de ces modèles, la discrétisation de l'interface est liée au maillage éléments finis de la structure. Le raffinement du maillage en volume dans la zone d'intérêt est donc nécessaire afin de capturer précisément les conditions de contact complexes comme celles rencontrées en fatigue de contact. Ceci entraîne une certaine dépendance de la fissure au maillage et pénalise l'intérêt de la méthode X-FEM. De plus, il est parfois complexe de générer de tels maillages en 3D. En parallèle, Géniaut [6] propose un premier modèle X-FEM 3D avec contact unilatéral à l'interface. Une condition forte reliant l'interface au problème global entraîne des instabilités dans la solution de contact. Ce problème est lié à la condition inf-sup de Ladizenskaïa-Babuška-Brezzi (LBB) [1]. Il est résolu grâce à une réduction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange liant l'interface au problème global proposée par Moës [10, 2]. La discrétisation de l'interface est alors plus grossière que le maillage éléments finis sous-jacent.

Dans le cadre d'un projet de recherche sur les problèmes de fissuration sous chargement de fretting, une nouvelle stratégie de calcul X-FEM à deux échelles, celle globale de la structure et celle locale de l'interface de la fissure, est proposée. L'interface est considérée comme une structure autonome possédant une discrétisation indépendante du maillage éléments finis, ses propres variables et sa propre loi de comportement [9]. Une formulation à trois champs et un solveur itératif adapté sont utilisés. Le problème local est relié au sens faible au problème global de la structure. La finesse de la modélisation du problème de contact est alors indépendante du maillage global éléments finis et peut être adaptée à l'échelle des non-linéarités locales.

## 2 Formulation du problème de fissuration avec contact interfacial

Le problème général considère un solide déformable fissuré  $\Omega \subset R^3$  soumis à un effort imposé  $\mathbf{F}_t$  sur la surface  $\Gamma_t$  et des déplacements imposés  $\mathbf{U}_d$  sur  $\Gamma_d$ . Soit  $\mathbf{u}$  le champ vectoriel du déplacement dans le corps et  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes. Le champ des déplacements à l'interface  $\mathbf{w}$  et le champ des efforts à l'interface  $\mathbf{t}$  sont définis sur les deux faces de la fissure  $\Gamma_C^+$  et  $\Gamma_C^-$ . Soit  $\mathbf{n}_C$  la normale à l'interface de la fissure. Le problème de fissuration peut être découpé en un problème structure global et un problème d'interface local comme illustré dans la figure 1.

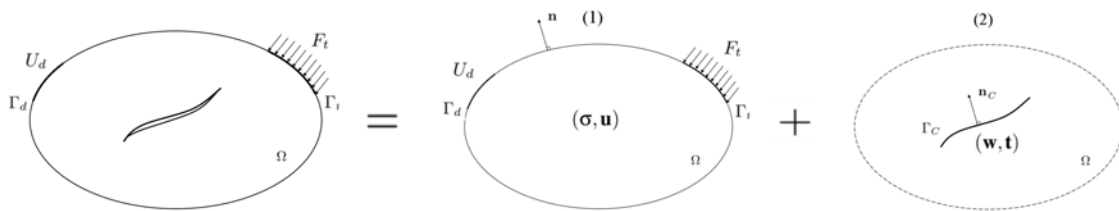


Figure 1 – Problème de fissuration découpé en un problème structure global (1) et un problème d'interface local (2).

Le problème structure (1) prend en compte une loi de comportement en volume (élasticité linéaire, plasticité,...). Les puissances virtuelles internes et externes associées à ce sous-problème s'écrivent :

$$P_{int}^* = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) d\Omega, \quad P_{ext}^* = \int_{\Gamma_t} \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{u}^* dS.$$

Le problème local à l'interface (2) possède sa propre loi de comportement d'interface (contact unilatéral, frottement de coulomb, etc...). La puissance virtuelle associée à ce sous-problème

s'écrit :

$$P_{crack}^* = \int_{\Gamma_C} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}^* dS.$$

De plus il existe une puissance virtuelle de couplage qui lie les deux sous-problèmes. Elle représente la condition de continuité, écrite ici au sens faible, entre les déplacements locaux  $\mathbf{w}$  et globaux  $\mathbf{u}$  dans la zone d'intérêt de la fissure :

$$P_{couplage}^* = \int_{\Gamma_C} \Lambda^* \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{w}) dS + \int_{\Gamma_C} \Lambda \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{w}^*) dS.$$

où le champ des multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda$  est porté par l'interface de la fissure. On écrit alors le principe des puissances virtuelles pour l'ensemble du problème. On obtient ainsi une formulation faible à trois champs :

$$P_{int}^* + P_{ext}^* + P_{crack}^* + P_{couplage}^* = 0 \quad \forall (\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*, \Lambda^*) \text{ admissibles.} \quad (1)$$

où les champs sont supposés suffisamment réguliers et à énergie finie.

À partir de cette formulation faible, on peut montrer qu'on obtient les équations fortes d'équilibre et la condition de continuité du problème :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} = C\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_t \quad \text{sur } \Gamma_t,$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_C)|_{\Gamma_C^+} = \mathbf{t}^+, \quad (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_C)|_{\Gamma_C^-} = \mathbf{t}^- \quad \text{sur } \Gamma_C,$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_C^+} = \mathbf{w}^+, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_C^-} = \mathbf{w}^- \quad \text{sur } \Gamma_C.$$

où  $C$  est le tenseur de Hooke.

Dans le paragraphe suivant, nous proposons une méthode de discrétisation à deux échelles de la formulation faible (1) dans le cadre de la méthode X-FEM.

### 3 Modèle X-FEM à deux échelles avec contact interfacial

La méthode des éléments finis étendus, introduite par Moës [11], est basée sur le concept de partition de l'unité. Elle permet de modéliser des fissures indépendamment du maillage éléments finis. L'approximation du champ de déplacement est la suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{structure} + \mathbf{u}_{fissure},$$

où l'approximation  $\mathbf{u}_{fissure}$  est enrichie à l'aide de fonctions additionnelles permettant de modéliser la discontinuité du champ de déplacement à l'interface et le comportement asymptotique en pointe de fissure [12]. En ce sens, la méthode X-FEM peut être présentée comme une stratégie à deux échelles (structure/fissure). Deux fonctions de niveaux (level-set) représentant l'interface et le front fissure permettent de définir les enrichissements locaux associés à la géométrie de la fissure. On maille donc la structure indépendamment de la fissure.

Afin d'intégrer numériquement les termes d'interface dans la formulation faible (1), celle-ci est discrétisée à l'aide de points d'intégration. Nous choisissons de reprendre le concept d'éléments d'interface proposé par Dolbow [3]. Ces éléments d'interface sont définis par l'intersection de la géométrie de la fissure et du maillage éléments finis. Ils sont le support des points d'intégration d'interface. Dans notre approche, l'objectif est de disposer d'une description fine de l'interface afin d'analyser correctement son comportement. Il s'agit de déterminer précisément les zones de contact et celles d'ouverture, et à plus long terme, de capturer précisément les non-linéarités dues au frottement. Un premier algorithme de création des éléments d'interface en trois dimensions

est développé. Il permet de traiter des géométries de fissure complexes, en limitant le nombre d'éléments distordus près du front.

L'échelle des conditions de contact est d'ordre 1, 2 ou 3 fois plus fine que l'échelle de la structure. Afin d'adapter la finesse de la solution de contact à cette échelle, nous proposons un algorithme automatique permettant de raffiner et d'uniformiser la distribution des points d'intégration d'interface pour atteindre une échelle donnée. Ceci à partir des éléments d'interface triangles qui résultent de l'intersection entre les fonctions de niveaux et les tétraèdres du maillage éléments finis.

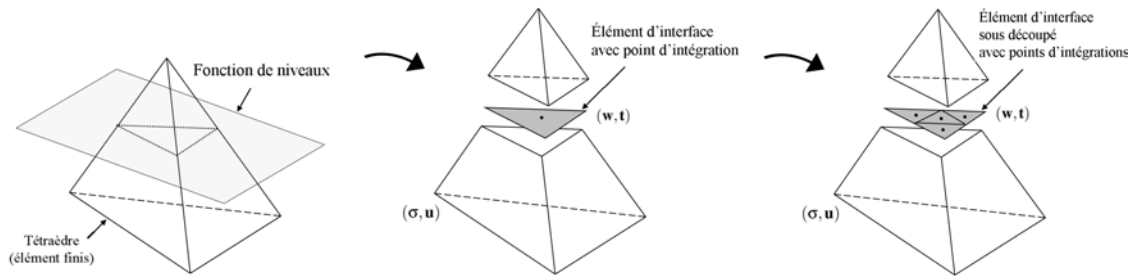


Figure 2 – Création des éléments d'interface et sous découpage adapté à l'échelle du problème local.

Cette opération assure une bonne homogénéité de la distribution des points d'intégration, avec une finesse indépendante du maillage éléments finis structure sous-jacent, adaptée à l'échelle des non linéarités locales de contact. Un exemple est illustré ci-après.

La géométrie du domaine fissuré et le maillage considérés, ainsi qu'une représentation des fonctions de niveaux sont présentés dans la figure 3. La figure 4 montre les maillages d'interface et la distribution de point de Gauss associée avant et après sous découpage.

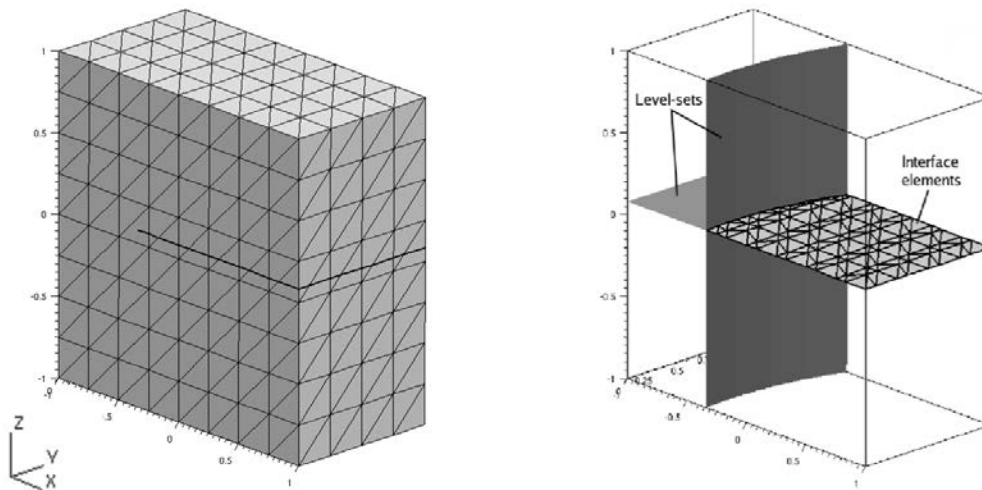


Figure 3 – Géométrie (en mm) et maillage d'une éprouvette fissurée (gauche) et représentation des fonctions de niveaux associées à la fissure.

Des conditions aux limites servant à bloquer les déplacements selon l'axe  $z$  (vertical) et les mouvements de corps rigide sont imposées sur la surface inférieure de l'éprouvette. Un chargement de compression non uniforme est appliqué sur la surface supérieure afin d'obtenir une ouverture partielle de la fissure. Un comportement en volume élastique linéaire et une loi de contact unilatéral à l'interface sont considérées. Une représentation graphique amplifiée du champ de déplacement obtenu est donnée dans la figure 5 (gauche), ainsi que les champs des efforts d'interface

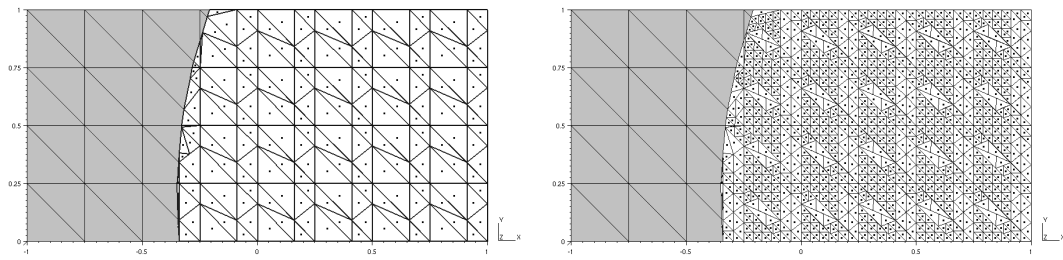


Figure 4 – Maillages d’interface et distributions des points de Gauss avant et après le sous-découpage.

$\mathbf{t}$  (gris foncé) et des déplacements relatifs d’interface ( $\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-$ ) (gris clair) (droite). La distribution fine des points d’intégration d’interface permet de situer précisément la frontière entre la zone d’ouverture et la zone en contact, avec un maillage plutôt grossier. Le champ de déplacement à l’interface  $\mathbf{w}$  n’est pas gouverné par les fonctions de formes linéaires éléments finis. Ceci grâce à l’absence de condition forte liant le champ de déplacement structure  $\mathbf{u}$  et d’interface  $\mathbf{w}$ . Une solution de contact à l’interface stable et précise est obtenue.

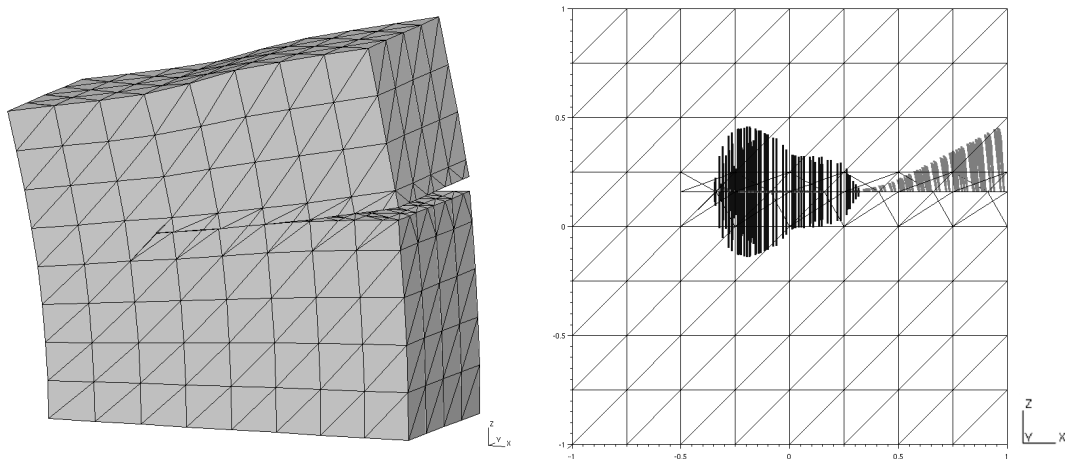


Figure 5 – Représentation amplifiée du champ de déplacement et représentation des champs des efforts et des déplacements relatifs à l’interface.

## 4 Conclusion

Le modèle proposé pour l’analyse des problèmes de fissuration avec contact interfacial utilise la méthode X-FEM afin d’éviter le remaillage des structures lors de l’éventuelle propagation des fissures. Une vision à deux échelles du problème structure et du problème de contact interfacial permet d’obtenir une solution de contact précise sans pénaliser les avantages de la méthode X-FEM, c’est à dire sans nécessiter un maillage fin en volume. Ce modèle est particulièrement adapté aux problèmes de fissuration en fatigue de contact pour lesquels l’échelle des déformations en volume est de deux ou trois ordres supérieure à celle des non-linéarités de contact. La formulation faible utilisée permet de considérer n’importe quelle loi de comportement en volume (élasticité linéaire, plasticité, etc...) et loi d’interface (contact unilatéral, frottement de coulomb, etc...). De

plus, l'écriture au sens faible des conditions de continuité entre les champs de déplacement semble être à l'origine de la bonne qualité numérique des quantités d'interface (absence d'oscillations dues à un éventuel non-respect de la condition LBB). Cependant, des investigations complémentaires sont en cours afin d'étudier les propriétés de stabilité de cette formulation mixte à trois champs.

## Références

- [1] I. Babuška. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, Springer, 20 :179–192, 1973.
- [2] E. Béchet, N. Moës, B. Wohlmuth. A stable LaGrange multiplier space for stiff interface conditions within the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, 2008.
- [3] J. Dolbow, N. Moës, T. Belytchko. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, 190 : 6825–6846, 2001.
- [4] M.C. Dubourg, B. Villechaise. Analysis of multiple fatigue cracks. Part I : Theory ASME. *Journal of tribology*, 114, 455–461, 1992.
- [5] T. Elguedj, A. Gravouil, A. Combescure. A mixed augmented Lagrangian-extended finite element method for modeling elastic-plastic fatigue crack growth with unilateral contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, 71 :1569–1597, 2007.
- [6] S. Géniaut, P. Massin, N. Moës. A stable 3D contact formulation for cracks using x-fem. *Revue européenne de mécanique numérique*, Lavoisier, 16 :259–276, 2007.
- [7] A. Gravouil, N. Moës, T. Belytchko. Non-planar 3D crack growth with the extended finite element and level sets – Part2 : Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, 53 (11) :2569–2586, 2002.
- [8] D.A. Hills, D. Nowell. Mechanics of Fretting Fatigue. *Solid Mechanics and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [9] P. Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics*, Springer, 1998.
- [10] N. Moës, E. Béchet, M. Tourbier. Imposing Dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, 67 :1641–1669, 2006.
- [11] N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, 46 :131–150, 1999.
- [12] N. Moës, A. Gravouil, T. Belytchko. Non-planar 3D crack growth with the extended finite element and level sets – Part1 : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, 53 (11) :2549–2568, 2002.
- [13] J. Rannou, A. Gravouil, M.C. Baietto-Dubourg. A local multigrid X-FEM strategy for 3-D crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley, 77 :1641–1669, 2008.
- [14] D.B. Rayaprolu, R. Cook. A critical review of fretting fatigue. Investigations at the Royal Aerospace Establishment *Standardization of the Fretting Fatigue Test Methods and Equipments*, ASTM STP 1159, Philadelphia, 129–152, 1992.
- [15] R. Ribeaucourt, M.C. Baietto-Dubourg, A. Gravouil. A new fatigue frictional contact crack propagation model with the coupled X-FEM / LATIN method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Wiley, 196 :3230–3247, 2007.