

# Prolongement harmonique discret unique. Application à la complétion de données.

Alain Cimetière <sup>1</sup>, Franck Delvare <sup>2</sup>, Frédéric Pons <sup>3</sup>

<sup>1</sup> ENSMA et PHYMAT Université de Poitiers  
Boulevard Marie et Pierre Curie, Téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex  
alain.cimetiere@univ-poitiers.fr

<sup>2</sup> Institut PRISME, Université d'Orléans et ENSI de Bourges  
88 Boulevard Lahitolle, 18020 Bourges Cedex  
franck.delvare@ensi-bourges.fr

<sup>3</sup> LEA, Université de Poitiers et ENSMA  
Boulevard Marie et Pierre Curie, Téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex  
pons@ensma.fr

---

**Résumé** — Une méthode de complétion de données est proposée pour les problèmes de Cauchy pour lesquels le nombre de données est inférieur au nombre des inconnues. La présentation est faite pour le laplacien, opérateur elliptique modèle. L'idée est de rechercher la solution dans un espace de fonctions harmoniques discrètes pour lequel l'existence et l'unicité d'un prolongement harmonique discret est garanti (Théorème de Holmgren discret).

**Mots clés** — problème de Cauchy, complétion de données, harmonicité discrète.

---

## 1 Introduction

Les problèmes inverses dits de complétion de données interviennent dans de nombreux domaines de la physique, comme par exemple en thermique, en mécanique ou en électrostatique. Les méthodes pour la résolution des problèmes de complétion de données sont nombreuses. Parmi les plus classiques on peut citer [1, 2, 3, 4, 5] et la méthode introduite par les auteurs dans [6, 7]. Cette dernière est de fait une méthode de point fixe et la solution est obtenue comme limite d'itérés successifs. Elle consiste à rechercher la solution d'équilibre qui s'approche aux mieux de conditions aux limites surabondantes. Ces conditions aux limites, qui peuvent être issues par exemple de mesures expérimentales, sont considérées comme pouvant être entachées d'un bruit de mesure ; elles seront relaxées et recalculées par l'algorithme. Ceci permet donc simultanément la complétion de données sur les parties où aucune donnée n'est disponible et le débruitage des conditions aux limites mesurées. Plusieurs variantes de cette méthode ont été développées [8, 9] dans le but d'améliorer notablement la reconstruction de la dérivée normale, en particulier lorsque le domaine présente des coins.

L'objet est de proposer une variante de la méthode d'ordre zéro introduite dans [6, 7] où la recherche de la solution est effectuée dans le sous-espace des fonctions harmoniques discrètes admettant un et un seul prolongement de  $\Gamma_d$  à  $\Gamma_i$ .

## 2 Retour sur la méthode d'ordre zéro [6, 7]

Dans le cas du laplacien, le problème de complétion de données sur le bord  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$  s'énonce comme suit : déterminer  $u$  et  $u' = \frac{\partial u}{\partial n}$  sur  $\Gamma_i = \Gamma \setminus \Gamma_d$  sachant que :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = u_d & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = u'_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (1)$$

où  $\Gamma_d$  est la partie du bord où sont données simultanément  $u$  et  $u'$ .

Dans le cas de la méthode d'ordre zéro [6, 7], après discrétisation du problème continu, supposé 2D pour simplifier, l'itéré  $\mathbf{U}^k = (U_1^k, \dots, U_N^k, U_1'^k, \dots, U_N'^k)$  est constitué des  $N$  valeurs de  $u$  sur  $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$  et des  $N$  valeurs de sa dérivée normale. L'itéré  $\mathbf{U}^{k+1}$  est fourni par :

$$\begin{cases} \text{étant donné } c > 0, \text{ trouver } \mathbf{U}^{k+1} \in H_N(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^k(\mathbf{U}^{k+1}) \leq J_c^k(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in H_N(\Gamma) \text{ avec} \\ J_c^k(\mathbf{V}) = \|\mathbf{V} - \mathbf{U}_d\|_{\Gamma_d}^2 + c \|\mathbf{V} - \mathbf{U}^k\|_{\Gamma}^2 \end{cases} \quad (2)$$

où  $H_N(\Gamma)$  désigne l'ensemble des couples des traces discrètes des fonctions harmoniques discrètes :

$$H_N(\Gamma) = \{\mathbf{U} = (U, U') \in \mathbf{R}^{2N}; AU + BU' = 0\} \quad (3)$$

Les matrices  $A$  et  $B$  ne dépendent que de la discrétisation choisie. Si le premier itéré est choisi égal à zéro, alors toute la suite  $\mathbf{U}^k$  se trouve dans  $Z_N^\perp$ , avec :

$$Z_N = \{\mathbf{U} = (U, U') \in H_N(\Gamma); U_1 = \dots = U_p = 0, U_1' = \dots = U_p' = 0\} \quad (4)$$

où  $2p$  désigne le nombre total de données discrètes sur  $\Gamma_d$ . Sa limite  $\mathbf{U}$ , elle aussi située dans  $Z_N^\perp$ , est la solution du problème de Cauchy discret introduit dans [6, 7]. Elle ne dépend pas de la valeur de  $c$  choisie.

## 3 Prolongement harmonique discret unique dans le cas d'un petit nombre de données ( $2p \leq N$ )

Lorsque  $2p \leq N$ ,  $Z_N$  ne se réduit pas au vecteur nul et zéro sur  $\Gamma_d$  ne se prolonge pas de manière unique par zéro sur  $\Gamma_i$ . Ce fait est naturellement source de difficultés pour reconstruire la solution. Dans toute la suite on suppose que le nombre de données est inférieur au nombre d'inconnues :  $2p \leq N$ . On introduit le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } \mathbf{U} \in Z_N^\perp(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J^k(\mathbf{U}) \leq J^k(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in Z_N^\perp \text{ avec} \\ J^k(\mathbf{V}) = \|\mathbf{V} - \mathbf{U}_d\|_{\Gamma_d}^2 \end{cases} \quad (5)$$

Pour chaque niveau de discrétisation, ce problème possède une solution unique qui réalise l'unique prolongement harmonique de  $\mathbf{U}_d$ . A nouveau lorsque  $N$  augmente,  $\mathbf{U}$  devient sensible aux imperfections et on revient à un algorithme régularisé analogue à (2) : étant donné  $c > 0$ ,

$$\begin{cases} \text{trouver } \mathbf{U}^{k+1} \in Z_N^\perp(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^k(\mathbf{U}^{k+1}) \leq J_c^k(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in Z_N^\perp \text{ avec} \\ J_c^k(\mathbf{V}) = \|\mathbf{V} - \mathbf{U}_d\|_{\Gamma_d}^2 + c \|\mathbf{V} - \mathbf{U}^k\|_{\Gamma_i}^2 \end{cases} \quad (6)$$

## 4 Le problème de complétion de données vu comme un problème d'optimisation sur $Z_n^\perp$

La première chose est de contruire l'orthogonal de  $Z_N$ . Tout d'abord, on montre que  $\mathbf{U}$  de  $R^{2N}$  est dans  $Z_N$  si et seulement si  $\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{0}$ , où  $\mathbf{L}$  est la matrice à  $N+2p$  lignes et  $2N$  colonnes suivante :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} I_{p,p} & 0_{p,N-p} & 0_{p,p} & 0_{p,N-p} \\ 0_{p,p} & 0_{p,N-p} & I_{p,p} & 0_{p,N-p} \\ A_{N,N} & & B_{N,N} & \end{bmatrix} \quad (7)$$

où  $I_{p,p}$  désigne la matrice carrée  $p \times p$  identité et  $O_{p,q}$  désigne la matrice à  $p$  lignes et  $q$  colonnes nulle. Elle fait aussi intervenir la matrice à  $N$  lignes et  $2N$  colonnes :

$$\mathbf{H} = [A \ B] \quad (8)$$

Désignant par  $L_j$  la  $j^{eme}$  ligne de  $\mathbf{L}$ , on obtient la caractérisation suivante de  $Z_N^\perp$  :

$$Z_N^\perp = \left\{ \mathbf{V} = \sum_{j=1}^{N+2p} \mu_j L_j, \mu_j \in \mathbf{R}; \mathbf{H}\mathbf{V} = 0 \right\} \quad (9)$$

Le problème itératif (6) est alors ramené à un problème d'optimisation sous contraintes égalités, comme c'était déjà le cas pour la méthode d'ordre zéro [6, 7] :

$$\begin{cases} \text{minimiser } F(\mu_1^{k+1}, \dots, \mu_{N+2p}^{k+1}) \text{ résultant de (6)} \\ \text{sous les } N \text{ contraintes égalités :} \\ \sum_{i=1}^{N+2p} \mu_i \mathbf{H}L_i = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Nous introduisons un vecteur composé de  $N$  multiplicateurs de Lagrange pour prendre en compte les  $N$  contraintes égalités et aboutissons à la résolution d'un système linéaire de  $2N+2p$  équations à  $2N+2p$  inconnues ( $N+2p$   $\mu_i$  et  $N$  multiplicateurs de Lagrange). Dans [6], le système était composé de  $3N$  équations à  $3N$  inconnues.

## 5 Simulations numériques

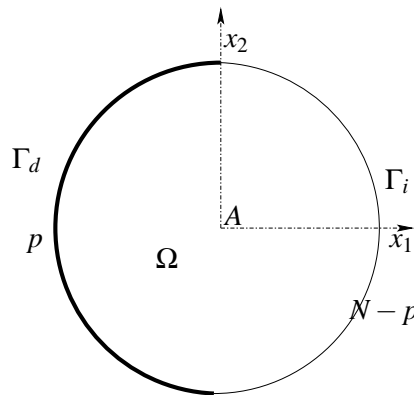


Figure 1 – Domaine d'étude

Les simulations numériques sont réalisées en utilisant la méthode des éléments finis. Une technique de condensation permet de se ramener à une formulation ne faisant intervenir que des

données sur la frontière. Le domaine considéré est le cercle de rayon 0.5 centré en A (0.5,0.5) (figure 1). Les données surabondantes  $\phi_d$  et  $\psi_d$  sont disponibles sur la moitié  $\Gamma_d$  de la frontière et sont générées à partir de la solution de référence :

$$u(x_1, x_2) = \cos x_1 \cosh x_2 + \sin x_1 \sinh x_2 \quad (11)$$

### 5.1 Comparaison avec la méthode introduite dans [6, 7]

Le nombre de couples de données  $p$  est fixé à 18 et celui d'inconnues  $N - p$  à 36. La figure 2 (respectivement figure 3) donne la reconstruction de la fonction obtenue par la méthode introduite dans [6, 7] (respectivement par la méthode proposée) lorsque les données sont exactes.

La figure 4 (respectivement figure 5) donne la reconstruction de la dérivée normale obtenue par la

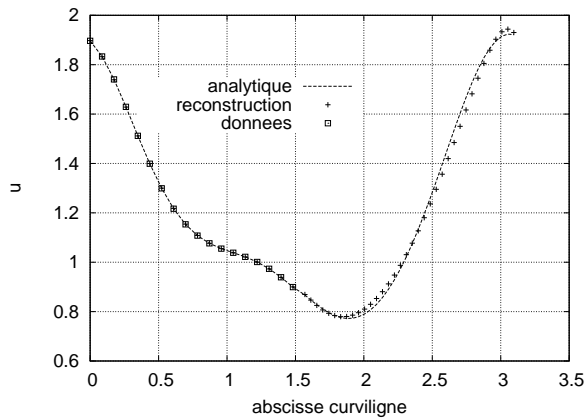


Figure 2 – Reconstruction de  $u$  avec la méthode [6, 7]

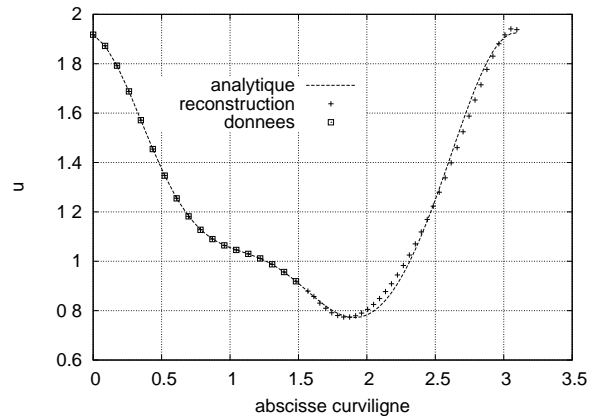


Figure 3 – Reconstruction de  $u$  avec la méthode proposée

méthode introduite dans [6, 7] (respectivement par la méthode proposée) lorsque les données sont exactes. Nous pouvons constater que la précision des reconstructions est similaire avec les deux méthodes.

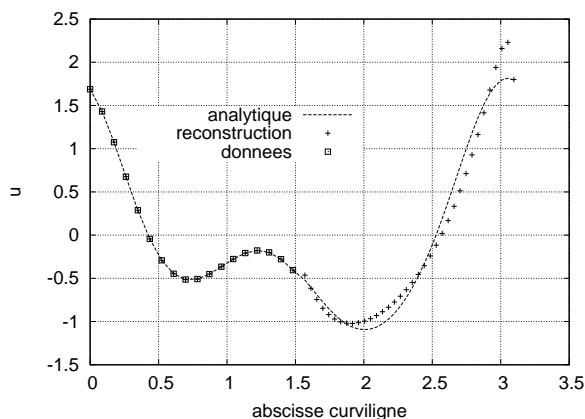


Figure 4 – Reconstruction de  $u'$  avec la méthode [6, 7]

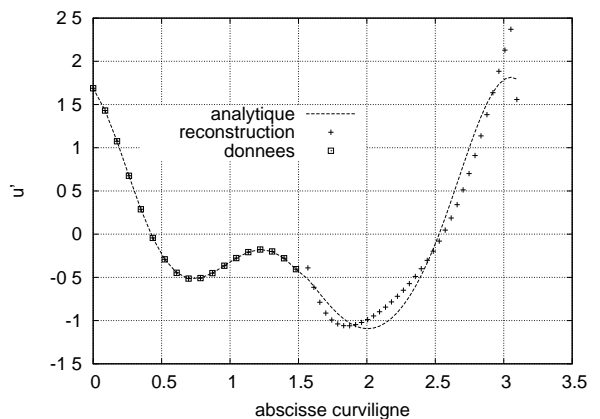


Figure 5 – Reconstruction de  $u'$  avec la méthode proposée

## 5.2 Stabilité de la méthode vis à vis du nombre d'inconnues recherché

Le nombre de couples de données  $p$  est fixé à 18 et celui d'inconnues  $N - p$  à 225. La figure 6 (respectivement figure 7) donne la reconstruction de la fonction (respectivement celle de la dérivée normale). Nous pouvons noter que ces deux reconstructions sont stables vis à vis du nombre d'inconnues recherchées et que le niveau de précision est semblable à celui obtenu dans la section précédente.

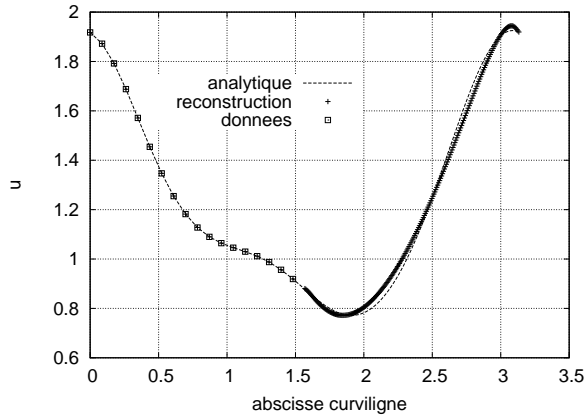


Figure 6 – Influence du nombre d'inconnues - Reconstruction de  $u$

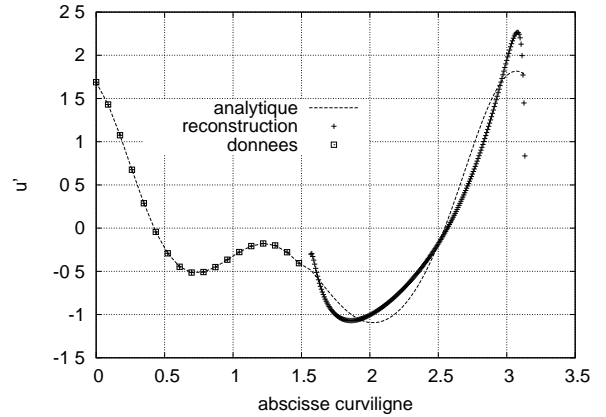


Figure 7 – Influence du nombre d'inconnues - Reconstruction de  $u'$

## 5.3 Stabilité de la méthode vis à vis d'un bruit entachant les données

Le nombre de couples de données  $p$  est fixé à 18 et celui d'inconnues  $N - p$  à 36. La figure 8 (respectivement figure 9) donne la reconstruction de la fonction lorsque la donnée  $\phi_d$  est entachée d'un bruit de 1% (respectivement 5%). Nous pouvons noter que ces deux reconstructions sont stables vis à vis d'un bruit entachant les données et que l'algorithme, tout comme l'algorithme introduit dans [6, 7], est capable de débruiter la donnée  $\phi_d$ . Ceci est rendu possible par le fait que la fonctionnelle à optimiser à chaque itération fait intervenir un terme d'écart aux données qui permet de les relaxer et de les réestimer.

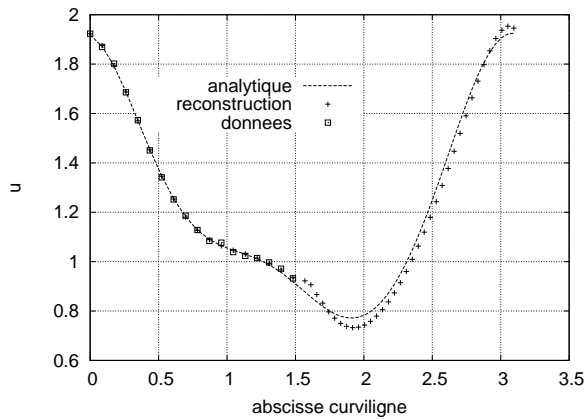


Figure 8 – Reconstruction de  $u$ , bruit sur  $u$  de 1%

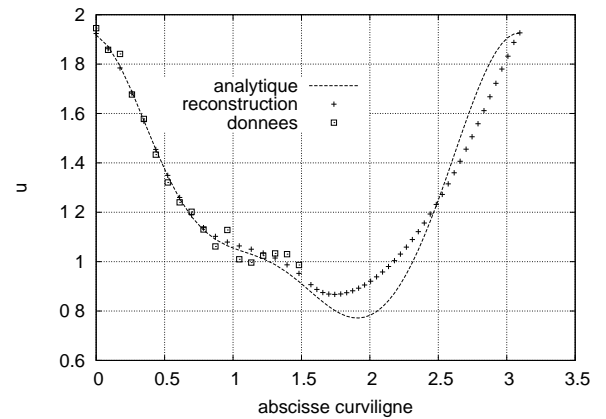


Figure 9 – Reconstruction de  $u$ , bruit sur  $u$  de 5%

## 6 Conclusion

Une méthode de complétion de données a été proposée pour les problèmes de Cauchy pour lesquels le nombre de données est inférieur à celui des inconnues. L'idée est de rechercher la solution dans un espace de fonctions harmoniques discrètes pour lequel l'existence et l'unicité d'un prolongement harmonique discret est garanti. Plusieurs simulations numériques ont montré que la qualité des reconstructions est comparable à celle obtenue par une méthode précédemment introduite [6, 7]. En particulier, la méthode est stable vis à vis de bruits entachant les données. Ces premiers résultats permettent d'envisager de généraliser ce principe aux variantes [8, 9] introduites dans le but d'améliorer notablement la reconstruction de la dérivée normale, en particulier lorsque le domaine présente des coins.

## Références

- [1] S. Andrieux, T. Baranger, A. Ben Abda. Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional, *Inverse Problems*, 22, 115-133, 2006.
- [2] L. Bourgeois. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation, *Inverse Problems*, 21, 1087-1104, 2005.
- [3] A. Tikhonov, V. Arsenine. *Solutions of ill-posed problems* John Wiley & Sons, New-York Toronto, 1977.
- [4] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, A.F. Fomin. An iterative method for solving the Cauchy Problem for Elliptic Equations, *Comput. Maths. Math. Phys.*, 31, 45-52, 1991.
- [5] D. Lesnic, L. Elliott, D.B. Ingham. An iterative boundary element method for solving the Cauchy problem for the Laplace equation", *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 20, 123-133, 1997.
- [6] A. Cimetière, F. Delvare, F. Pons. Une méthode inverse à régularisation évanescence, *CRAS - Serie IIB*, 328, 639-644, 2000.
- [7] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, F. Pons. Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization, *Inverse Problems*, 17, 553-570, 2001.
- [8] A. Cimetière, F. Delvare, F. Pons. Système d'équations intégrales de frontière pour les dérivées partielles d'une fonction harmonique dans un ouvert du plan. Application à un problème inverse de Cauchy, *8ème Colloque national en Calcul des Structures*, Giens, tome II, pp. 481-486, 2007.
- [9] F. Delvare, A. Cimetière, A first order method for the Cauchy problem for the Laplace equation using BEM, *Computational Mechanics*, 41, 6, 789-796, 2008.