



HAL
open science

Indépendance dimensionnelle et désintégration dans la régularisation des intégrales divergentes

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. Indépendance dimensionnelle et désintégration dans la régularisation des intégrales divergentes. 2016. hal-01408159

HAL Id: hal-01408159

<https://hal.science/hal-01408159>

Preprint submitted on 8 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Indépendance dimensionnelle et désintégration dans la régularisation des intégrales divergentes

Jonot Jean Louis

ABSTRACT. On s'intéresse dans la première partie de cet article à la notion d'indépendance des dimensions pour une mesure positive λ , σ -finie. On en déduit une notion de régularisation à l'aide des λ -métriques qui en découlent. Cette régularisation se généralise par désintégration des mesures. On peut donner ainsi, une description mathématique de la régularisation dimensionnelle. Ensuite, on généralise cette représentation en définissant l'espace mesuré, sur lequel on intègre, comme la fibre d'un fibré avec groupe de structure défini par la mesure positive λ , σ -finie.

1. Introduction

Le but est de définir des critères de régularisation des intégrales de fonctions mesurables positives sur une variété \mathbf{W} , de dimension finie, munie d'une mesure positive λ qui est σ -finie. On introduit plusieurs procédés de régularisation des intégrales divergentes

$$\int_{\mathbf{W}} f(w) \lambda(dw) = +\infty,$$

ces différentes méthodes complètent l'article: " Sur quelques méthodes de régularisation des intégrales divergentes, application à la renormalisation". On propose de donner, dans ce qui suit, une représentation mathématique de la régularisation dimensionnelle et on géométrise les techniques d'intégration en utilisant la théorie des fibrés.

2. Corrélation et covariance dimensionnelle

Soit \mathbf{W} une variété de dimension p munie d'une mesure λ positive qui est σ -finie. Une carte (W, ϕ) de \mathbf{W} est une λ -carte si

$$\lambda(W) < \infty \text{ et } \phi_\nu = (\pi_\nu \circ \phi) \mathbf{1}_W \in L^2(\mathbf{W}, \lambda)$$

pour tout $\nu = 1, 2, \dots, n$ où π_ν est la ν -ième projection de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . On pose

$$\rho_{\mu\nu} = \frac{\sigma_{\mu\nu}}{\sigma_\mu \sigma_\nu},$$

où $\sigma_{\mu\nu} = \text{cov}(\phi_\mu, \phi_\nu)$ définie par

$$\text{cov}(\phi_\mu, \phi_\nu) = E((\phi_\mu - E(\phi_\mu))(\phi_\nu - E(\phi_\nu))) \text{ et } \sigma_\tau = \sqrt{\text{cov}(\phi_\tau, \phi_\tau)},$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 28A33, 28A75, 51N25, 51F25, 51P05.

Key words and phrases. Covariance, corrélation, régularisation, désintégration de mesures.

avec

$$E(\phi_\tau) = \frac{1}{\lambda(W)} \int_{\mathbf{W}} \phi_\tau(w) \lambda(dw) < +\infty \text{ car } \phi_\nu, \mathbf{1}_W \in L^2(\mathbf{W}, \lambda).$$

REMARK 1. $|\rho_{\mu\nu}| \leq 1$ et $\rho_{\mu\mu} = 1, \forall \mu, \forall \nu$.

DEFINITION 1. La matrice de covariance associée à la carte (W, ϕ) est définie par

$$\text{cov}(W, \phi) = (\text{cov}(\phi_\mu, \phi_\nu)),$$

une carte (W, ϕ) est dite λ -indépendante si $\text{cov}(W, \phi)$ est diagonalisable. La matrice de corrélation associée à la carte (W, ϕ) est définie par

$$\text{corr}(W, \phi) = (\rho_{\mu\nu}).$$

LEMMA 1. Pour toute carte (W, ϕ) , il existe une application $L \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ telle que la carte $(W, L \circ \phi)$ soit λ -indépendante.

PROOF. La matrice $\text{cov}(W, \phi)$ est une matrice symétrique, elle est diagonalisable. Soit $\mathbf{P} = (p_\nu^\mu) \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ et \mathbf{D} une matrice diagonale telle que

$$\text{cov}(W, \phi) = \mathbf{P}\mathbf{D}(\text{Tr}\mathbf{P}).$$

On note L , l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$\mathbf{Q} = (\text{Tr}\mathbf{P})^{-1} = (q_\nu^\mu) \quad (2.1)$$

alors

$$(L \circ \phi)_\nu = q_\nu^\tau \phi_\tau,$$

$$\text{cov}((L \circ \phi)_\mu, (L \circ \phi)_\nu) = q_\mu^\tau q_\nu^\sigma \text{cov}(\phi_\tau, \phi_\sigma)$$

et

$$\text{cov}(W, L \circ \phi) = \mathbf{D}.$$

□

3. Les λ -métriques

Soit (W, ϕ) une λ -carte, on note $\{\partial_\nu\}$, le local frame associé à la carte et $\text{cov}(W, \phi) = (\sigma_{\mu\nu})$ sa matrice de covariance. Pour deux champs

$$X = X^\nu \partial_\nu, Y = Y^\mu \partial_\mu,$$

on pose

$$g_W(X, Y) = X^\nu Y^\mu \sigma_{\nu\mu}.$$

PROPOSITION 1. g_W est une métrique riemannienne sur W .

PROOF. g_W est bilinéaire, symétrique. Soit L l'application linéaire de matrice 2.1, alors si $e_\nu = q_\nu^\tau \partial_\tau$

$$g_W(e_\nu, e_\mu) = q_\nu^\tau q_\mu^\rho \sigma_{\tau\rho} = \pm \delta_{\nu\mu} \text{ ou } 0$$

car $\{e_\nu\}$ est une base dans laquelle la matrice est diagonale et réduite, c'est-à-dire

$$g_W(e_\nu, e_\mu) = 0 \text{ si } \nu \neq \mu \text{ et } g_W(e_\mu, e_\mu) = 0 \text{ ou } \pm 1.$$

On va montrer que $g_W(e_\mu, e_\mu) = 1$,

$$g_W(e_\mu, e_\mu) = q_\mu^\tau q_\mu^\rho \sigma_{\tau\rho} = \text{cov}(q_\mu^\tau \phi_\tau, q_\mu^\rho \phi_\rho) \geq 0$$

et

$$g_W(e_\mu, e_\mu) = 0 \text{ ou } 1,$$

si $g_W(e_\mu, e_\mu) = 0$ alors $q_\mu^\tau \phi_\tau$ est constante et vaut $E(q_\mu^\tau \phi_\tau)$. Donc, pour tout ρ

$$q_\mu^\tau \mathcal{L}_{\partial_\rho}(\phi_\tau) = 0, \mathcal{L}_{\partial_\rho} \phi_\tau = pr_2 \circ T\phi_\tau(\partial_\rho) = \delta_{\tau\rho}$$

car

$$pr_2 \circ T\phi(\partial_\mu) = \epsilon_\mu$$

où $\{\epsilon_\mu\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^n dont le champ associé est

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(x) = (x, \epsilon_\mu),$$

on en déduit que $q_\mu^\rho = 0, \forall \rho$ et $e_\mu = 0$, contradiction. La métrique g_W est une métrique riemannienne. \square

REMARK 2. g_W est l'image réciproque par $T\phi$ de la métrique g de \mathbb{R}^n de matrice cov (W, ϕ) ,

$$g_W(\partial_\mu, \partial_\nu) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right).$$

On recouvre la variété \mathbf{W} par une famille localement finie (W_α, ϕ_α) de λ -cartes et soit une partition de l'unité localement finie subordonnée à ce recouvrement notée $\{\rho^\alpha\}$, on pose

$$g = \rho^\alpha g_\alpha, g_\alpha = g_{W_\alpha}$$

où g_{W_α} est la métrique riemannienne associée à la carte (W_α, ϕ_α) , alors g est une métrique riemannienne.

DEFINITION 2. La métrique g est une λ -métrique sur \mathbf{W} .

NOTATION 1. On note \mathcal{F}_λ , l'ensemble des λ -métriques et λ_g la mesure riemannienne définie par g où \mathbf{W} est une variété orientable.

Si λ est une mesure positive σ -finie, le théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym permet d'écrire pour tout $g \in \mathcal{F}_\lambda$, la mesure λ sous la forme

$$\lambda = f_g \lambda_g + \mu_g, \lambda_g \perp \mu_g \text{ et } f_g \geq 0,$$

on s'intéresse à la convergence de $\int_{\mathbf{W}} f(w) \lambda(dw)$, pour une fonction f mesurable positive. Formellement, on a

$$\int_{\mathbf{W}} f(w) \lambda(dw) = \int_{\mathbf{W}} (f \times f_g)(w) \lambda_g(dw) + \int_{\mathbf{W}} f(w) \mu_g(dw) \leq +\infty.$$

DEFINITION 3. Si $\int_{\mathbf{W}} (f \times f_g)(w) \lambda_g(dw) < +\infty$, on dit que f est continûment intégrable pour la λ -métrique g . Si $\int_{\mathbf{W}} f(w) \mu_g(dw) < +\infty$, on dit que f est singulièrement intégrable pour g . Une g -renormalisation de $\int_{\mathbf{W}} f(w) \lambda(dw)$ est donnée par $\int_{\mathbf{W}} (f \times f_g)(w) \lambda_g(dw)$ si f est continûment intégrable et $\int_{\mathbf{W}} f(w) \mu_g(dw)$ si f est singulièrement intégrable.

Pourquoi définir les λ -métriques? On s'est posé la question, il y a quelques années, si le couple (\mathbf{W}, λ) faisait intervenir une interaction entre les coordonnées d'une carte (W, ϕ) de \mathbf{W} et si cette interaction permettait de régulariser les intégrales divergentes

$$\int_{\mathbf{W}} f(w) \lambda(dw) = +\infty.$$

On a été amené ainsi à utiliser des méthodes probabilistes qui permettent de définir le degré d'indépendance entre les coordonnées. La notion de λ -métrique s'en

déduit immédiatement, le théorème de décomposition de Lebesgue nous permet de définir une notion de régularisation qui est incomplète si on se réfère à [1], cette régularisation dépend du choix de la λ -métrique. Il est nécessaire de définir une notion de régularisation par désintégration de la mesure car le théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym est un cas particulier de désintégration.

4. Régularisation dimensionnelle

On note $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbf{W}, \mathcal{A})$, l'espace de Banach complexe formé des mesures complexes sur $(\mathbf{W}, \mathcal{A})$ muni de la norme

$$\|\nu\| = |\nu|(\mathbf{W}),$$

où $|\nu|$ est la variation totale de ν . Une application

$$\mu : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbf{W}, \mathcal{A}), \quad z \in U \rightarrow \mu(z) \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbf{W}, \mathcal{A})$$

est dérivable en z si elle est dérivable au sens de Banach. Par la suite, on suppose que la variété est de dimension finie. Si μ est dérivable en chaque point $z \in U$, on note $D_z\mu$ sa différentielle, on pose

$$\mu'(z) = D_z\mu(1) \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbf{W}, \mathcal{A}),$$

et si $\text{dom}(\mu)$ est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels $\mu(z)$ est défini, on a

$$\text{dom}(\mu') \subset \text{dom}(\mu),$$

μ' est l'application dérivée de μ . Soit λ une mesure positive σ -finie sur $(\mathbf{W}, \mathcal{A})$, on dit que z_0 est un pôle de μ d'ordre λ si il existe un voisinage ouvert U de z_0 tel que $U \setminus \{z_0\} \subset \text{dom}(\mu)$ et

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in U \setminus \{z_0\}}} \mu(z)(A) = \lambda(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad (4.1)$$

si 4.1 est vérifié alors on dit que $\mu(z)$ converge ponctuellement vers λ et si

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in U \setminus \{z_0\}}} \|\mu(z) - \lambda\| = 0,$$

on dit que la convergence est normale et que z_0 est un pôle normal de μ d'ordre λ . Soit f une fonction mesurable, on note $f\mu(z)$ la mesure complexe, si elle existe, définie par

$$f\mu(z)(A) = \int_A f(w) \mu(z)(dw), \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

et $\text{dom}(f\mu)$, l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $f\mu(z) \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbf{W}, \mathcal{A})$. On note

$$\mathcal{O} = \{z \in \text{dom}(\mu) \subset \mathbb{C} : f \in \mathbf{L}^1(|\mu(z)|)\}.$$

LEMMA 2. $\mathcal{O} = \text{dom}(f\mu)$.

PROOF. Formellement, $\forall A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} |f\mu(z)(A)| &\leq |f\mu(z)|(A) = |f| |\mu(z)|(A) \\ &\leq |f| |\mu(z)|(\mathbf{W}) = \int_{\mathbf{W}} |f(w)| |\mu(z)|(dw) < +\infty \end{aligned}$$

si $z \in \mathcal{O}$, on a l'inclusion $\mathcal{O} \subset \text{dom}(f\mu)$. Réciproquement, si $z \in \text{dom}(f\mu)$ alors

$$\|f\mu(z)\| = |f\mu(z)|(\mathbf{W}) = \|f\|_{\mathbf{L}^1(|\mu(z)|)} < +\infty.$$

□

LEMMA 3. Soit f une fonction mesurable bornée sur \mathbf{W} , l'application

$$\widehat{f}(z) = \int_{\mathbf{W}} f(w) \mu(z) (dw)$$

est une fonction holomorphe sur $\text{dom}(\mu')$ et

$$\widehat{f}'(z) = \int_{\mathbf{W}} f(w) \mu'(z) (dw) \quad (4.2)$$

PROOF. $\forall z \in \text{dom}(\mu')$, on vérifie que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\widehat{f}(z+h) - \widehat{f}(z)}{h} = \int_{\mathbf{W}} f(w) \mu'(z) (dw), \quad (4.3)$$

on a

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\widehat{f}(z+h) - \widehat{f}(z)}{h} - \int_{\mathbf{W}} f(w) \mu'(z) (dw) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbf{W}} f(w) \left(\frac{\mu(z+h) - \mu(z)}{h} - \mu'(z) \right) (dw) \right| \\ &\leq \int_{\mathbf{W}} |f(w)| \left| \frac{\mu(z+h) - \mu(z) - \mu'(z).h}{h} \right| (dw) \\ &\leq \|f\|_{\infty} \left\| \frac{\mu(z+h) - \mu(z) - \mu'(z).h}{h} \right\| \end{aligned}$$

or

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\mu(z+h) - \mu(z) - \mu'(z).h}{h} \right\| = 0,$$

donc, 4.3 est vérifiée. \square

Si la fonction f est une fonction \mathcal{A} -mesurable sur \mathbf{W} à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a les définitions suivantes.

DEFINITION 4. Une fonction mesurable f sur \mathbf{W} est μ -holomorphe sur un ouvert \mathbf{U} de \mathbb{C} si et seulement si l'application \widehat{f} définie par

$$\widehat{f}(z) = \int_{\mathbf{W}} f(w) \mu(z) (dw), \quad w \in \mathbf{U}$$

est holomorphe sur \mathbf{U} . L'application f est μ -méromorphe sur un ouvert connexe \mathbf{U} , si \widehat{f} est méromorphe sur \mathbf{U} .

NOTATION 2. On pose $d^z \mu(w) = \mu(z) (dw)$ et $\widehat{f}(z) = \int_{\mathbf{W}} f(w) d^z \mu(w)$ pour se ramener à la notation de régularisation dimensionnelle.

Soit f une fonction mesurable positive sur $(\mathbf{W}, \mathcal{A})$, à valeurs dans $[0, +\infty]$ et λ une mesure positive, une régularisation dimensionnelle de $\int_{\mathbf{W}} f(w) d\lambda(w)$ est la donnée d'une application

$$\mu : \text{dom}(\mu) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbf{W}, \mathcal{A}),$$

telle que $p = \dim \mathbf{W} \notin \text{dom}(\mu)$, \widehat{f} est holomorphe sur \mathcal{O} , p est un pôle d'ordre fini ou infini pour \widehat{f} et

$$\lim_{z \rightarrow p} \widehat{f}(z) = \int_{\mathbf{W}} f(w) \lambda(dw).$$

DEFINITION 5. *On dit que l'application μ est localement bornée sur \mathbf{U} si pour tout compact $\mathbf{K} \subset \mathbf{U}$, il existe une mesure positive $\mu_{\mathbf{K}}$ telle que*

$$\sup_{z \in \mathbf{K}} |\mu(z)|(A) \leq \mu_{\mathbf{K}}(A), \forall A \in \mathcal{A}.$$

En particulier, pour toute fonction g mesurable sur $(\mathbf{W}, \mathcal{A})$, à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a

$$\int_{\mathbf{W}} g(w) |\mu(z)|(dw) \leq \int_{\mathbf{W}} g(w) \mu_{\mathbf{K}}(dw) \leq +\infty, \forall z \in \mathbf{K}$$

donc, si μ est localement bornée sur \mathbf{U}

$$\left| \widehat{f}(z) - \widehat{s}_n(z) \right| \leq \int_{\mathbf{W}} (f(w) - s_n(w)) |\mu(z)|(dw) \leq \int_{\mathbf{W}} (f(w) - s_n(w)) \mu_{\mathbf{K}}(dw),$$

le théorème de convergence monotone de Lebesgue implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{W}} (f(w) - s_n(w)) \mu_{\mathbf{K}}(dw) = 0$$

et de l'inégalité

$$\sup_{z \in \mathbf{K}} \left| \widehat{f}(z) - \widehat{s}_n(z) \right| \leq \int_{\mathbf{W}} (f(w) - s_n(w)) \mu_{\mathbf{K}}(dw)$$

on en déduit la convergence uniforme de la suite \widehat{s}_n vers \widehat{f} sur \mathbf{K} .

THEOREM 1. *Si μ est localement borné sur \mathbf{U} et dérivable au sens de Banach sur \mathbf{U} alors pour toute fonction mesurable f sur $(\mathbf{W}, \mathcal{A})$ à valeurs dans $[0, +\infty]$, la fonction f est μ -holomorphe.*

Soit $p = \dim \mathbf{W}$, s'il existe un voisinage ouvert \mathbf{U} de $p \in \mathbb{C}$ pour lequel μ soit localement borné sur $\mathbf{U} \setminus \{p\}$ alors \widehat{f} est holomorphe $\mathbf{U} \setminus \{p\}$. Si p est un pôle de μ d'ordre λ et $\widehat{f}(\mathbf{U} \setminus \{p\})$ ne soit pas dense dans \mathbb{C} , ou bien \widehat{f} est holomorphe sur \mathbf{U} , ou bien p est un pôle d'ordre n de \widehat{f} . Sous ces hypothèses, la régularisation dimensionnelle de $\int_{\mathbf{W}} f(w) d\lambda(w)$ est a_0 dans le développement

$$\widehat{f}(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-p)^k$$

et $\sum_{k=-n}^1 a_k (z-p)^k$ est le contre-terme.

REMARK 3. *Si f est bornée*

$$\widehat{f}(z) - \int_{\mathbf{W}} f(w) \lambda(dw) = \int_{\mathbf{W}} f(w) (\mu(z) - \lambda)(dw)$$

et

$$\begin{aligned} \left| \widehat{f}(z) - \int_{\mathbf{W}} f(w) \lambda(dw) \right| &\leq \int_{\mathbf{W}} |f(w)| |\mu(z) - \lambda|(dw) \\ &\leq \|f\|_{\infty} \|\mu(z) - \lambda\|(\mathbf{W}) \\ &= \|f\|_{\infty} \|\mu(z) - \lambda\|. \end{aligned}$$

En particulier, si p est un pôle normal de μ , d'ordre λ , on a

$$\lim_{z \rightarrow p} \widehat{f}(z) = \int_{\mathbf{W}} f(w) \lambda(dw),$$

le resultat est encore vrai si p est un pôle de μ , d'ordre λ .

5. Régularisation dimensionnelle par désintégration

DEFINITION 6. Une mesure complexe signée sur $(\mathbf{W}, \mathcal{A})$ est une application

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} + i\overline{\mathbb{R}} \text{ avec } \mu(A) = \operatorname{Re}(\mu)(A) + i \operatorname{Im}(\mu)(A), \forall A \in \mathcal{A}$$

et telle que $\operatorname{Re}(\mu)$ et $\operatorname{Im}(\mu)$ sont des mesures signées.

Si μ est une mesure complexe signée alors

$$\operatorname{Re}(\mu) = \operatorname{Re}(\mu)^+ - \operatorname{Re}(\mu)^- \text{ et } \operatorname{Im}(\mu) = \operatorname{Im}(\mu)^+ - \operatorname{Im}(\mu)^- \quad (5.1)$$

où $\operatorname{Re}(\mu)^+$, $\operatorname{Re}(\mu)^-$ sont des mesures positives dont au moins l'une d'entre elles est finie et il en est de même pour $\operatorname{Im}(\mu)^+$, $\operatorname{Im}(\mu)^-$.

DEFINITION 7. On dit que μ est σ -finie si les mesures positives, non finies, dans les décompositions 5.1, sont σ -finies.

Une mesure complexe signée sur $(\mathbf{W}, \mathcal{A})$, telle que $\operatorname{Re}(\mu)^-$ et $\operatorname{Im}(\mu)^-$ sont des mesures identiquement nulles, est dite à composantes positives.

Soit \mathbf{U} un ouvert connexe de \mathbb{C} . Sur $(\mathbf{U} \times \mathbf{W}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{A})$ et $(\mathbf{U}, \mathcal{B})$, on se fixe respectivement, μ une mesure complexe signée qui est σ -finie et une mesure complexe signée ν à composantes positives, σ -finie. Soit

$$\pi : \mathbf{U} \times \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{U}, \pi(z, w) = z,$$

la ν -désintégration fibre à fibre de μ par π sur \mathbf{U} , est la donnée d'une famille de mesures complexes signées $\mu(z)$, σ -finies, telles que pour tout $z \in \mathbf{U}$, $\mu(z)$ est concentrée sur $\pi^{-1}(z) = \{z\} \times \mathbf{W}$ et pour tout $C \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$, l'application

$$z \in \mathbf{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mu(z)(C) \in \mathbb{C},$$

est une fonction \mathcal{B} -mesurable, avec

$$\mu(C) = \int_{\mathbf{U}} \mu(z)(C) \nu(dz).$$

Si \mathbf{W} est une variété de dimension p , $\mathbf{U} \times \mathbf{W}$ est un "espace polonais", on peut appliquer le théorème de désintégration aux mesures $\operatorname{Re}(\mu)^\pm$, $\operatorname{Re}(\nu)$ et $\operatorname{Im}(\mu)^\pm$, $\operatorname{Im}(\nu)$, si on suppose que $\pi_\#(\mu)$ ne charge pas les ensembles ν -négligeables. Alors

$$\pi_\# \operatorname{Re} \mu^\pm(dw) = \operatorname{Re}(\mu)^\pm(z)(\mathbf{U} \times \mathbf{W}) \times \operatorname{Re}(\nu)(dz),$$

$$\pi_\# \operatorname{Im} \mu^\pm(dw) = \operatorname{Im}(\mu)^\pm(z)(\mathbf{U} \times \mathbf{W}) \times \operatorname{Im}(\nu)(dz)$$

et

$$\pi_\# \mu(dw) = \mu(z)(\mathbf{U} \times \mathbf{W}) \times \nu(dz)$$

avec

$$\begin{aligned} \mu(z)(\mathbf{U} \times \mathbf{W}) &= \operatorname{Re}(\mu)^+(z)(\mathbf{U} \times \mathbf{W}) - \operatorname{Re}(\mu)^-(z)(\mathbf{U} \times \mathbf{W}) \\ &+ i \left(\operatorname{Im}(\mu)^+(z)(\mathbf{U} \times \mathbf{W}) - \operatorname{Im}(\mu)^-(z)(\mathbf{U} \times \mathbf{W}) \right). \end{aligned}$$

THEOREM 2. Avec les hypothèses précédentes sur les mesures

$$\mu = \operatorname{Re}(\mu) + i \operatorname{Im}(\mu), \nu = \operatorname{Re}(\nu) + i \operatorname{Im}(\nu)$$

où $\operatorname{Re}(\mu)$, $\operatorname{Im}(\mu)$ sont des mesures signées σ -finies sur $\mathbf{U} \times \mathbf{W}$ et $\operatorname{Re}(\nu)$, $\operatorname{Im}(\nu)$ sont des mesures positives σ -finies sur \mathbf{U} , on a

$$\pi_\# \mu(dw) = \mu(z)(\mathbf{U} \times \mathbf{W}) \times \nu(dz),$$

l'application

$$z \in U \rightarrow \mu(z)(\mathbf{U} \times \mathbf{W})$$

est la densité de Radon-Nikodym de $\pi_{\#}\mu$ par rapport à ν et

$$\mu(C \cap (B \times \mathbf{W})) = \int_B \mu(z)(C) \nu(dz), \forall C \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \text{ et } B \in \mathcal{B},$$

cette désintégration est unique à un ensemble ν -négligeable près.

PROOF. On applique le théorème de désintégration fibre à fibre aux paires $(\operatorname{Re}(\mu)^+, \operatorname{Re}(\nu))$, $(\operatorname{Re}(\mu)^-, \operatorname{Re}(\nu))$, $(\operatorname{Im}(\mu)^+, \operatorname{Im}(\nu))$ et $(\operatorname{Im}(\mu)^-, \operatorname{Im}(\nu))$. \square

On pose $d^z\mu(A) = \mu(z)(\mathbf{U} \times A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$ et $\forall z \in \mathbf{U}$, $d^z\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbf{W}, \mathcal{A})$, telle que l'application

$$\mu : z \in \mathbf{U} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mu(z) = d^z\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbf{W}, \mathcal{A})$$

est dérivable au sens de Banach sur \mathbf{U} , on dit qu'une application mesurable f sur \mathbf{W} admet une régularisation dimensionnelle par désintégration si μ est une régularisation dimensionnelle. Dans ce qui suit, on généralise cette notion de désintégration à un fibré vectoriel.

6. Désintégration sur les fibrés vectoriels

On se fixe un fibré vectoriel

$$\zeta = (E(\zeta), \pi, \mathbf{W}, \mathcal{F})$$

la fibre \mathcal{F} est un espace de Banach réel ou complexe et \mathbf{W} est une variété. Sur \mathbf{W} et E_{ζ} muni de leur tribu borélienne, on se fixe une mesure positive ν , σ -finie et une mesure complexe signée μ , σ -finie. On suppose que la mesure $\pi_{\#}\mu$ ne charge pas les ensembles ν -négligeables, l'espace total du fibré est un espace polonais et π est mesurable pour les tribus boréliennes. On peut appliquer le théorème de ν -désintégration fibre à fibre de μ par π telle que la famille de mesures obtenue

$$\{\mu^w\}_{w \in \mathbf{W}}$$

sur $(E_{\zeta}, \mathcal{T}_{E_{\zeta}})$, indexée par $w \in \mathbf{W}$ vérifie, μ^w est concentrée sur la fibre $\pi^{-1}(w)$ et $\forall A \in \mathcal{T}_{E_{\zeta}}$, l'application $w \rightarrow \mu^w(A)$ est une application $\mathcal{T}_{\mathbf{W}}$ -mesurable avec

$$\mu(A) = \int_{\mathbf{W}} \mu^w(A) \nu(dw).$$

REMARK 4. On identifie la mesure μ^w sur $E(\zeta)$ à la restriction $\mu^w|_{\pi^{-1}(w)}$ qui est une mesure sur la fibre $E_w(\zeta)$.

Soient deux cartes de trivialisations en $w \in \mathbf{W}$,

$$\phi_{\alpha} : E_{W_{\alpha}}(\zeta) \rightarrow W_{\alpha} \times \mathcal{F}, \phi_{\alpha}(u) = (\pi(u), \varphi_{\alpha}(u))$$

$$\phi_{\beta} : E_{W_{\beta}}(\zeta) \rightarrow W_{\beta} \times \mathcal{F}, \phi_{\beta}(u) = (\pi(u), \varphi_{\beta}(u)),$$

et $w \in W_{\alpha} \cap W_{\beta}$, on définit les mesures images sur $W_{\alpha} \times \mathcal{F}$ et $W_{\beta} \times \mathcal{F}$

$$\mu_{\alpha}(O) = (\phi_{\alpha})_{\#}\mu(O), O \in \mathcal{T}_{W_{\alpha}} \otimes \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$$

$$\text{et } \mu_{\beta}(O) = (\phi_{\beta})_{\#}\mu(O), O \in \mathcal{T}_{W_{\beta}} \otimes \mathcal{T}_{\mathcal{F}},$$

si on pose $\varphi_{\alpha}(w) = \varphi_{\alpha}|_{\pi^{-1}(w)}$, les mesures images

$$\mu_{\alpha}^w = (\varphi_{\alpha}(w))_{\#}\mu^w \text{ et } \mu_{\beta}^w = (\varphi_{\beta}(w))_{\#}\mu^w$$

sur \mathcal{F} , sont les désintégrations fibre à fibre des mesures μ_α et μ_β par, respectivement, ϕ_α et ϕ_β . On a pour tout $O \in \mathcal{T}_{W_\alpha \cap W_\beta} \otimes \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$

$$\mu_\alpha(O) = \mu(\phi_\alpha^{-1}(O)) = \int_{\mathbf{W}} \mu^w(\phi_\alpha^{-1}(O)) \nu(dw) = \int_{\mathbf{W}} \mu_\alpha^w(O) \nu(dw)$$

et

$$\mu_\beta(O) = \mu(\phi_\beta^{-1}(O)) = \int_{\mathbf{W}} \mu^w(\phi_\beta^{-1}(O)) \nu(dw) = \int_{\mathbf{W}} \mu_\beta^w(O) \nu(dw),$$

les cocycles

$$g_{\alpha\beta} : W_\alpha \cap W_\beta \rightarrow \text{GL}(\mathcal{F}),$$

$$g_{\alpha\beta}(w) = \varphi_\alpha(w) \circ \varphi_\beta(w)^{-1} \in \text{GL}(\mathcal{F}) \text{ et } w \in W_\alpha \cap W_\beta$$

sont (ν, μ) -stables si

$$\mu_\alpha^w(F) = \mu_\beta^w(F), \forall F \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}, \forall w \in W_\alpha \cap W_\beta.$$

NOTATION 3. $\text{O}(\mathcal{F}) = \{L \in \text{GL}(\mathcal{F}) : \det(L) = \pm 1\}$.

LEMMA 4. *Si le fibré ζ est un fibré de dimension finie, avec groupe de structure $\mathcal{G} \subset \text{O}(\mathcal{F})$, les cocycles sont (ν, μ) -stables.*

PROOF. On a, $\forall F \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$

$$\begin{aligned} \mu_\alpha^w(F) &= \mu^w(\varphi_\alpha(w)^{-1}(F)) = \mu^w(\varphi_\beta(w)^{-1} \circ \varphi_\beta(w) \circ \varphi_\alpha(w)^{-1}(F)) \\ &= \mu_\beta^w(g_{\alpha\beta}^{-1}(w)(F)) = g_{\alpha\beta}(w)_\# \mu_\beta^w(F) \\ &= |\det(g_{\alpha\beta}(w))| \mu_\beta^w(F) = \mu_\beta^w(F). \end{aligned}$$

□

THEOREM 3. *Avec les mêmes hypothèses que précédemment, il existe une application*

$$\mu_\# : \mathbf{W} \rightarrow \mathcal{M}_s(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}}), \mu_\#(w) = \mu_\#^w \in \mathcal{M}_s(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}}) \quad (6.1)$$

telle que pour toute carte de trivatisation

$$\phi : E_W(\zeta) \rightarrow W \times \mathcal{F}, \phi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$$

on ait

$$\mu_\#^w = \varphi(w)_\# \mu^w.$$

REMARK 5. $\mathcal{M}_s(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ décrit l'ensemble des mesures complexes signées sur \mathcal{F} muni de sa tribu borélienne. Lorsque μ est une mesure complexe alors

$$\mu_\# : \mathbf{W} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}}), \mu_\# \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$$

où $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ est l'espace de Banach des mesures complexes sur $(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$.

Dans ce qui suit le fibré ζ est un fibré de dimension finie avec groupe de structure $\mathcal{G} \subset \text{O}(\mathcal{F})$. On se place dans l'hypothèse où μ est une mesure complexe alors l'application $\mu_\#$ est à valeurs dans l'ensemble des mesures complexes $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ qui est un espace de Banach pour la norme $\|\mu_\#^w\| = |\mu_\#^w|(\mathcal{F})$. Si \mathbf{W} est une variété de Banach, on dit que la désintégration est dérivable au sens de Banach si $\mu_\#$ est dérivable comme application de \mathbf{W} dans $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$. La désintégration est de classe C^n si $\mu_\#$ est de classe C^n .

Soit \mathbf{F} une fonction mesurable pour la tribu $\mathcal{T}_{E_\zeta} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{W}}$, de $E_\zeta \times \mathbf{W}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a

$$\int_{E_\zeta} \mathbf{F}(u, \pi(u)) \mu(du) = \int_{\mathbf{W}} \int_{E_\zeta} \mathbf{F}(u, w) \mu^w(du) \nu(dw)$$

et si \mathbf{f} est une application, mesurable pour la tribu \mathcal{T}_{E_ζ} , de E_ζ à valeurs dans $[0, +\infty]$ et \mathbf{g} est une application, mesurable pour la tribu $\mathcal{T}_{\mathbf{W}}$, de \mathbf{W} à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a

$$\int_{E_\zeta} \mathbf{f}(u) \mathbf{g}(\pi(u)) \mu(du) = \int_{\mathbf{W}} \widehat{\mathbf{f}}(w) \mathbf{g}(w) \nu(dw) \quad (6.2)$$

où

$$\widehat{\mathbf{f}}(w) = \int_{E_\zeta} \mathbf{f}(u) \mu^w(du), \quad (6.3)$$

est une fonction mesurable pour la tribu $\mathcal{T}_{\mathbf{W}}$. Si $\mathbf{f} \in L^1(\mu)$ alors 6.3 est définie ν presque partout pour $w \in \mathbf{W}$ et la formule 6.2 reste vraie si $\mathbf{f} \in L^p(\theta\mu)$ et $\mathbf{g} \in L^q(\nu)$ avec

$$p \in [1, +\infty], q = \frac{p}{p-1} \in [1, +\infty], \theta(u) = h(\pi(u))^{p-1}$$

où h est la densité de Radon-Nikodym de $\pi\#\mu$ par rapport à ν [3].

Soit f une application $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ -mesurable de \mathcal{F} à valeurs dans $[0, +\infty]$, on propose de définir une notion de régularisation en considérant \mathcal{F} comme la fibre d'un fibré $\zeta = (E_\zeta, \pi, \mathbf{W}, \mathcal{F})$ à groupe de structure \mathcal{G} . On suppose que \mathcal{F} est muni d'une mesure positive λ pour laquelle

$$\int_{\mathcal{F}} f(x) \lambda(dx) = +\infty,$$

et que le groupe de structure \mathcal{G} conserve la mesure λ , c'est-à-dire que

$$\lambda(g(F)) = \lambda(F), \forall g \in \mathcal{G}, \forall F \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}. \quad (6.4)$$

On définit la fonction $f_{\mathcal{G}}$ à partir de la fonction f . Si le groupe \mathcal{G} est localement compact, on note ρ la mesure de Haar probabiliste définie sur \mathcal{G} [4] et pour chaque $x \in \mathcal{F}$, l'application

$$\tilde{f}(x) : g \in \mathcal{G} \rightarrow \tilde{f}(x)(g) \in \mathbb{R}, \tilde{f}(x)(g) = f \circ g(x)$$

permet de définir l'application moyenne

$$f_{\mathcal{G}}(x) = \int_{\mathcal{G}} \tilde{f}(x)(g) \rho(dg), \rho(\mathcal{G}) = 1.$$

LEMMA 5. Si f est une fonction mesurable sur $(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$, à valeurs dans $[0, +\infty]$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}(\mathcal{F})$, alors

$$f_{\mathcal{G}}(g(x)) = f_{\mathcal{G}}(x), \forall x \in \mathcal{F}, \forall g \in \mathcal{G}$$

et

$$\int_{\mathcal{F}} f_{\mathcal{G}}(x) \lambda(dx) = \int_{\mathcal{F}} f(x) \lambda(dx) \leq +\infty.$$

PROOF. Par définition, l'invariance à gauche de la mesure de Haar implique que

$$f_{\mathcal{G}}(g(x)) = f_{\mathcal{G}}(x), \forall x \in \mathcal{F}, \forall g \in \mathcal{G},$$

et par le théorème de Fubini appliquée aux fonctions mesurables positives, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} f_{\mathcal{G}}(x) \lambda(dx) &= \int_{\mathcal{F}} \left(\int_{\mathcal{G}} \tilde{f}(x)(g) \rho(dg) \right) \lambda(dx) \\ &= \int_{\mathcal{G}} \left(\int_{\mathcal{F}} f \circ g(x) \lambda(dx) \right) \rho(dg), \end{aligned}$$

le théorème de changement de variable appliqué aux applications linéaires et la relation 6.4, permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} f_{\mathcal{G}}(x) \lambda(dx) &= \int_{\mathcal{G}} \left(\int_{\mathcal{F}} f(x) |\det g(x)| \lambda(dx) \right) \rho(dg) \\ &= \int_{\mathcal{G}} \left(\int_{\mathcal{F}} f(x) d\lambda(x) \right) \rho(dg) \\ &= \int_{\mathcal{G}} \rho(dg) \int_{\mathcal{F}} f(x) \lambda(dx) = \int_{\mathcal{F}} f(x) \lambda(dx). \end{aligned}$$

□

Pour toute carte de trivialisations W_{α} et

$$\phi_{\alpha} : E_{\zeta}(W_{\alpha}) \rightarrow W_{\alpha} \times \mathcal{F}, \phi_{\alpha}(u) = (\pi(u), \varphi_{\alpha}(u)),$$

on définit l'application

$$\mathbf{f}_{\alpha} : E_{\zeta}(W_{\alpha}) \rightarrow [0, +\infty], \mathbf{f}_{\alpha}(u) = f_{\mathcal{G}}(\varphi_{\alpha}(u)).$$

LEMMA 6. Sur $E_{\zeta}(W_{\alpha}) \cap E_{\zeta}(W_{\beta}) = E_{\zeta}(W_{\alpha} \cap W_{\beta})$,

$$\mathbf{f}_{\alpha} |_{E_{\zeta}(W_{\alpha} \cap W_{\beta})} = \mathbf{f}_{\beta} |_{E_{\zeta}(W_{\alpha} \cap W_{\beta})}.$$

PROOF. Soit $w \in W_{\alpha} \cap W_{\beta}$,

$$E_{\zeta}(w) \rightarrow \{w\} \times \mathcal{F}, \phi_{\alpha}(w)(u) = (w, \varphi_{\alpha}(w)(u))$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\alpha}(u) &= f_{\mathcal{G}} \circ \varphi_{\alpha}(w)(u) = f_{\mathcal{G}} \left(\varphi_{\alpha}(w) \circ \varphi_{\beta}(w)^{-1}(\varphi_{\beta}(w)(u)) \right) \\ &= f_{\mathcal{G}}(g_{\alpha\beta}(w)(\varphi_{\beta}(w)(u))) = \mathbf{f}_{\beta}(u), \forall u \in E_{\zeta}(w) \end{aligned}$$

par stabilité de $f_{\mathcal{G}}$ par rapport à \mathcal{G} . □

On note \mathbf{f} , l'application définie sur E_{ζ} par $\mathbf{f} |_{E_{\zeta}(W_{\alpha})} = \mathbf{f}_{\alpha}$, quelque soit la carte de trivialisations W_{α} de ζ . Le groupe \mathcal{G} , la fibre \mathcal{F} et la variété base \mathbf{W} , permettent de construire à isomorphisme près, un unique fibré vectoriel ζ avec groupe de structure \mathcal{G} , de fibre \mathcal{F} et de base \mathbf{W} . On munit \mathbf{W} d'une mesure positive ν , σ -finie, et E_{ζ} d'une mesure complexe signée μ . Le groupe de structure \mathcal{G} est contenu dans $O(\mathcal{F})$ donc, on peut définir l'application 6.1

$$\mu_{\#} : \mathbf{W} \rightarrow \mathcal{M}_s(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}}), \mu_{\#}(w) = \mu_{\#}^w$$

où $\mathcal{M}_s(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ est l'espace des mesures complexes signées sur $(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$. On note

$$\text{dom}(\mu_{\#}) = \{w \in \mathbf{W} : \mu_{\#}^w \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})\}$$

où $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ est l'espace de Banach des mesures complexes pour la norme

$$\|\mu_{\#}^w\| = |\mu_{\#}^w|(\mathcal{F}),$$

$|\mu_{\#}^w|$ représente la variation totale de $\mu_{\#}^w$. L'application \mathbf{f} est une application, mesurable pour la tribu $\mathcal{T}_{E_{\zeta}}$, de E_{ζ} à valeurs dans $[0, +\infty]$, par 6.3 l'application $\widehat{\mathbf{f}}$ est mesurable pour la tribu $\mathcal{T}_{\mathbf{W}}$.

DEFINITION 8. *La mesure positive λ de \mathcal{F} est une mesure (μ, ν) -asymptotique en $w_0 \in \mathbf{W}$ si*

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \mu_{\#}^w(F) = \lambda(F), \forall F \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}},$$

sous cette hypothèse, on dit que la convergence est simple en w_0 .

Dans ce qui suit, le choix de la variété \mathbf{W} est \mathbb{K}^n , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et on se fixe un groupe de structure \mathcal{G} localement compact contenu dans $\mathbf{O}(\mathcal{F})$. Soit ζ un fibré de fibre \mathcal{F} , de base \mathbb{K}^n avec groupe de structure \mathcal{G} et un couple de mesures μ sur E_{ζ} , ν sur \mathbb{K}^n pour lesquelles la mesure λ de \mathcal{F} est une mesure (μ, ν) -asymptotique en o . Si $\widehat{\mathbf{f}}$ a un développement en série de Laurent de la forme

$$\widehat{\mathbf{f}}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^p} a_n x^n, \quad x^n = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_p^{n_p},$$

$$n = (n_1, n_2, \dots, n_p) \text{ et } a_n \in \mathbb{K},$$

la régularisée de

$$\int_{\mathcal{F}} f(x) \lambda(dx) = \int_{\mathcal{F}} f_{\mathcal{G}}(x) \lambda(dx) \text{ est } \mathcal{R} \int_{\mathcal{F}} f(x) \lambda(dx) = a_0,$$

le contre-terme est $\sum_{n \in (\mathbb{N}^-)^p} a_n x^n$. On a

$$\widehat{\mathbf{f}}(w) = \int_{E_{\zeta}} \mathbf{f}(u) \mu^w(du) = \int_{\mathcal{F}} f_{\mathcal{G}}(x) \mu_{\#}^w(dx),$$

la convergence simple en $o \in \mathbb{K}^n$ implique que

$$\lim_{w \rightarrow o} \int_{\mathcal{F}} f_{\mathcal{G}}(x) \mu_{\#}^w(dx) = \int_{\mathcal{F}} f_{\mathcal{G}}(x) \lambda(dx) = \int_{\mathcal{F}} f(x) \lambda(dx),$$

en particulier, si $\int_{\mathcal{F}} f(x) \lambda(dx) < +\infty$ alors

$$\widehat{\mathbf{f}}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^p} a_n x^n \text{ et } a_0 = \int_{\mathcal{F}} f(x) \lambda(dx).$$

REMARK 6. *Dans le cas où $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$ et f est une fonction radiale, on prend pour fibré ζ , le fibré de fibre \mathbb{R}^n munie de la mesure de Lebesgue λ , de groupe de structure $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$. La mesure positive ν , σ -finie est la mesure de Lebesgue et sur l'espace total on se donne une mesure complexe μ . telle que la paire (μ, ν) telle que la mesure de Lebesgue est (μ, ν) -asymptotique en $o \in \mathbb{R}^n$ pour régulariser*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \lambda(dx).$$

7. Généralisation aux variétés de Banach

Soit f une application $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ -mesurable sur \mathcal{B} à valeurs dans $[0, +\infty]$, où \mathcal{B} est une variété de Banach munie d'une mesure positive λ sur $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ qui est σ -finie. On suppose que

$$\int_{\mathcal{B}} f(x) \lambda(dx) = +\infty,$$

pour régulariser cette intégrale on se fixe une base \mathbf{W} munie d'une structure de variété analytique réelle ou complexe. L'idée est de regarder la variété \mathcal{B} comme la fibre d'un fibré de base \mathbf{W} . Si on se donne un sous-groupe \mathcal{G} de difféomorphismes $\text{Diff}(\mathcal{B})$, on peut construire un unique fibré de base \mathbf{W} , avec groupe de structure \mathcal{G} . Le groupe \mathcal{G} est défini par,

$$\mathcal{G} \subset \{h \in \text{Diff}(\mathcal{B}) : \lambda(h(B)) = \lambda(B), \forall B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}\}$$

et on suppose que \mathcal{G} est localement compact, avec ces hypothèses on construit le fibré

$$\zeta = (E_{\zeta}, \pi, \mathbf{W}, \mathcal{B}),$$

et on se donne un recouvrement localement fini de \mathbf{W} par des cartes $\{W_{\alpha}\}$ et des cocycles

$$g_{\alpha\beta} : W_{\alpha} \cap W_{\beta} \rightarrow \mathcal{G} \subset \text{Diff}(\mathcal{B}).$$

On définit, à isomorphisme de fibré près, le fibré ζ . Soient des mesures μ et ν , sur respectivement E_{ζ} et \mathbf{W} , qui sont complexe signée pour μ , positive pour ν et σ -finies telles que, $\pi_{\#}(\mu)$ ne charge pas les ensembles ν -négligeables et vérifient les hypothèses précédentes. La désintégration fibre à fibre de la mesure μ par ν , le long de π permet de définir une famille de mesures $\{\mu^w\}_{w \in \mathbf{W}}$, μ^w est concentrée sur la fibre $\pi^{-1}(w)$ et telle que

$$w \rightarrow \mu^w(A), \forall A \in \mathcal{T}_{E_{\zeta}}$$

est mesurable car les cocycles conservent la mesure λ , on en déduit que si

$$\phi_{\alpha} : E_{\zeta}(W_{\alpha}) \rightarrow W_{\alpha} \times \mathcal{F}, \phi_{\alpha}(u) = (\pi(u), \varphi_{\alpha}(u))$$

est une carte de trivialisatation de ζ alors

$$\mu_{\#}^w = \varphi_{\alpha}(w)_{\#}(\mu^w|_{\pi^{-1}(w)}), \varphi_{\alpha}(w) = \varphi_{\alpha}|_{\pi^{-1}(w)}$$

est une mesure sur \mathcal{B} indépendante du choix de la carte de trivialisatation ϕ_{α} . La conservation par les cocycles de $f_{\mathcal{G}}$ permet de construire \mathbf{f} et

$$\widehat{\mathbf{f}}(w) = \int_{E_{\zeta}} \mathbf{f}(u) \mu^w(du) = \int_{\mathcal{B}} f_{\mathcal{G}}(x) \mu_{\#}^w(dx).$$

On procède de la même façon que précédemment pour définir une notion de régularisation. A partir de la convergence simple en w_0 , si $\widehat{\mathbf{f}}$ est analytique sur $W \setminus \{w_0\}$ et admet un développement en série de Laurent

$$\widehat{\mathbf{f}} \circ \varphi(\mathbf{x}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^p} a_n \mathbf{x}^n, \varphi(o) = w_0 \quad (7.1)$$

où φ est une carte analytique au voisinage de w_0

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{x}_1^{n_1} \cdots \mathbf{x}_p^{n_p}, \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_p) \in W \text{ et } n = (n_1, \cdots, n_p) \in \mathbb{Z}^p$$

la φ -régularisée de $\int_{\mathcal{B}} f(x) \lambda(dx)$ est

$$\mathcal{R} \int_{\mathcal{B}} f_{\mathcal{G}}(x) \lambda(dx) = a_0,$$

il nous reste à vérifier que

$$\int_{\mathcal{B}} f(x) d\lambda(x) = \int_{\mathcal{B}} f_{\mathcal{G}}(x) d\lambda(x). \quad (7.2)$$

LEMMA 7. $\forall g \in \mathcal{G}$, $\int_{\mathcal{B}} f(x) \lambda(dx) = \int_{\mathcal{B}} f \circ g(x) \lambda(dx)$ pour f mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$ et

$$\int_{\mathcal{B}} f(x) \lambda(dx) = \int_{\mathcal{B}} f_{\mathcal{G}}(x) \lambda(dx).$$

PROOF. Si $f = \mathbf{1}_B$ alors $\int_{\mathcal{B}} f(x) \lambda(dx) = \int_{\mathcal{B}} f \circ g(x) \lambda(dx)$ par définition de \mathcal{G} . La relation est vraie pour toute fonction simple

$$s = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{1}_{B_i},$$

or il existe une suite croissante de fonctions simples positives [2]

$$0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq \dots \leq f$$

telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = f(x), \forall x \in \mathcal{B}$$

on applique le théorème de convergence croissante de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} f(x) \lambda(dx) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{B}} s_n(x) \lambda(dx) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{B}} s_n \circ g(x) \lambda(dx) \\ &= \int_{\mathcal{B}} f \circ g(x) \lambda(dx), \forall g \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Vérifions l'équation 7.2, si ρ est la mesure de Haar probabiliste sur le groupe localement compact \mathcal{G} alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} f_{\mathcal{G}}(x) \lambda(dx) &= \int_{\mathcal{G}} \left(\int_{\mathcal{B}} f \circ g(x) \lambda(dx) \right) \rho(dg) = \int_{\mathcal{G}} \left(\int_{\mathcal{B}} f(x) \lambda(dx) \right) \rho(dg) \\ &= \int_{\mathcal{G}} \rho(dg) \int_{\mathcal{B}} f(x) \lambda(dx) = \int_{\mathcal{B}} f(x) d\lambda(x). \end{aligned}$$

□

La φ -régularisée de $\int_{\mathcal{B}} f(x) \lambda(dx)$ dépend du choix de la carte φ en w_0 . Peut-on définir une notion de régularisation qui soit indépendante du choix de la carte. Pour qu'il en soit ainsi, il faut parler de stabilité locale de la mesure μ en w_0 .

DEFINITION 9. La désintégration de μ par ν est localement stable en w_0 si pour tout difféomorphisme analytique local

$$\theta : W \subset \mathbf{W} \rightarrow \theta(W) \subset \mathbf{W}, \theta(w_0) = w_0,$$

il existe un voisinage ouvert U de w_0 tel que

$$\mu_{\#}^{\theta(w)} = \mu_{\#}^w, \forall w \in U.$$

REMARK 7. *La relation*

$$\mu^{\theta(w)} = \mu^w,$$

implique que $\mu^{\theta(w)}$ et μ^w sont des mesures identiquement nulles si $\theta(w) \neq w$ car $\mu^{\theta(w)}$ et μ^w sont des mesures de E_ζ concentrée sur les fibres respectives $E_\zeta(\{\theta(w)\})$ et $E_\zeta(\{w\})$.

PROPOSITION 2. *Soient φ et ψ deux cartes analytiques en w_0 , si la désintégration de μ par ν est localement stable en w_0 alors la φ -régularisation et la ψ -régularisation de $\int_{\mathcal{B}} f(x) \lambda(dx)$ sont les mêmes.*

DEFINITION 10. *La désintégration discrète de μ par ν en w_0 est définie par la propriété suivante, pour tout difféomorphisme analytique local θ défini sur un voisinage U de w_0 , il existe un ensemble discret \mathcal{D} contenant w_0 dans son adhérence $\text{Adh}(\mathcal{D})$ pour lequel*

$$\mu_{\#}^{\theta(w)} = \mu_{\#}^w, \forall w \in \mathcal{D} \cap U.$$

PROPOSITION 3. *Soient φ et ψ deux cartes analytiques en w_0 , si la désintégration de μ par ν en w_0 est discrète alors la φ -régularisation et la ψ -régularisation de $\int_{\mathcal{B}} f(x) \lambda(dx)$ sont les mêmes.*

PROOF. Soient φ et ψ deux cartes analytiques locales, on pose $\theta = \psi \circ \varphi^{-1}$, θ est difféomorphisme analytique local défini sur U , il existe un ensemble discret \mathcal{D} tel que $\mu_{\#}^{\theta(w)} = \mu_{\#}^w, \forall w \in \mathcal{D} \cap U$ et w_0 est dans son adhérence $\text{Adh}(\mathcal{D})$. Soit \mathbf{x} tel que $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathcal{D} \cap U$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{f}} \circ \varphi(\mathbf{x}) &= \int_{\mathcal{B}} f_{\mathcal{G}}(x) \mu_{\#}^{\varphi(\mathbf{x})}(dx) = \int_{\mathcal{B}} f_{\mathcal{G}}(x) \mu_{\#}^{\theta(\psi(\mathbf{x}))}(dx) \\ &= \int_{\mathcal{B}} f_{\mathcal{G}}(x) \mu_{\#}^{\psi(\mathbf{x})}(dx) = \widehat{\mathbf{f}} \circ \psi(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

l'ensemble des \mathbf{x} pour lesquels $\widehat{\mathbf{f}} \circ \varphi(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{f}} \circ \psi(\mathbf{x})$ est un ensemble contenant un ensemble discret qui à o dans son adhérence. Le théorème d'unicité analytique implique que

$$\widehat{\mathbf{f}} \circ \varphi(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{f}} \circ \psi(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in V,$$

où V est un voisinage ouvert de $o \in \mathbb{R}^p$. L'unicité de la ψ -régularisation et la φ -régularisation s'en déduit. \square

REMARK 8. *On peut regarder la régularisation dimensionnelle, lorsque l'espace de base est un ouvert connexe de \mathbb{C} et \mathcal{B} est une variété réelle de dimension n .*

8. Conclusion

On a vu dans [1], plusieurs procédés de régularisation. Le travail proposé dans ce document est un complément pour étendre la notion de régularisation. La première méthode, développée dans cet article, consiste à déterminer l'indépendance des coordonnées d'une carte par rapport à la mesure avec laquelle on intègre et de faire intervenir les λ -métriques pour régulariser certaines intégrales divergentes. Mais le choix de la λ -métrique ouvre beaucoup de régularisations possibles. La deuxième méthode consiste à donner un sens mathématique à la renormalisation dimensionnelle. Cette construction permet de généraliser un procédé de régularisation en considérant l'espace mesuré sur lequel on intègre comme la fibre d'un fibré avec groupe de structure défini à l'aide de la mesure λ et la fonction f , de fibre l'espace

mesuré et dont l'espace de base est une variété analytique. Si on choisit pour espace de base \mathbb{C} , on a une régularisation du type régularisation dimensionnelle.

References

- [1] Jonot J.L., "Sur quelques méthodes de régularisation des intégrales divergentes, application à la renormalisation", 2016. <hal-01281271>
- [2] Rudin W., "Real and Complex Analysis", McGraw-Hill(1978)
- [3] Villani C., "Intégration et Analyse de Fourier", cedricvillani.org/wp-content/uploads/2013.
- [4] Weil A., "Mesure de Haar", Séminaire de Mathématiques(1933-1939)
E-mail address: jean-louis.jonot@ac-versailles.fr