



HAL
open science

Un modèle néo-ricardien : la formalisation de Garbellini

Yoann Verger

► **To cite this version:**

| Yoann Verger. Un modèle néo-ricardien : la formalisation de Garbellini. 2016. hal-01407318

HAL Id: hal-01407318

<https://hal.science/hal-01407318>

Preprint submitted on 1 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un modèle néo-ricardien : la formalisation de Garbellini

Yoann Verger

December 1, 2016

Abstract

Ce papier a pour but d'exposer le modèle développé par GARBELLINI ([2, 1, 3]). Le développement des propositions mathématiques sera suivi d'exemples numériques afin de clarifier le propos.

1 Nouvelles perspectives

GARBELLINI ([3]) essaye récemment de reprendre le système de PASINETTI et d'en étendre l'analyse.

Elle souligne tout d'abord la différence entre les sous-systèmes simples définis par Pasinetti en 1973 (secteurs verticalement intégrés,[4]) et les hypers sous-systèmes définis en 1988 (secteurs hyper-verticalement intégrés, [6]). Les premiers décomposent le système industriel global en sous-systèmes produisant un unique bien. Ce bien est ensuite consommé, ou utilisé en tant que capital fixe ou circulant, ou les deux à la fois. Les seconds décomposent le système industriel global en sous-système produisant un unique bien *de consommation*.

Les hypers sous-systèmes sont ainsi indépendants les uns des autres, et évoluent en fonction de l'évolution de la demande concernant le bien de consommation produit. Les sous-systèmes simples sont par contre dépendants les uns des autres, dès que le système n'est plus stationnaire : ils évoluent en fonction de l'évolution de la consommation finale du bien produit, mais aussi en fonction des investissements nécessaires pour supporter les évolutions des consommation finale des autres biens.

Elle souligne aussi que la théorie de la valeur sur laquelle s'appuie Pasinetti n'est pas une théorie de la valeur travail pure. Comme on le voit dans l'équation suivante :

$$\mathbf{p} = \mathbf{I}^{(i)} \left[\mathbf{I} - (\pi - g - r_i) \mathbf{M}^{(i)} \right]^{-1} w \quad (1)$$

les prix, c'est-à-dire la valeur, s'appuient sur des quantités de travail physiques ($\mathbf{I}^{(i)}$) et des quantités équivalentes à du travail physique ($[\mathbf{I} - (\pi - g - r_i) \mathbf{M}^{(i)}]^{-1}$),

Ces dernières quantités sont appelées *équivalents-travail* par Pasinetti in 1981 ([5]), et sa théorie de la valeur est donc une théorie de la valeur équivalent-travail.

Les prix sont par ailleurs définis à *l'équilibre* (équilibre du système de prix), c'est-à-dire lorsque que tous les revenus sont dépensés (revenus du travail et

du capital - Pasinetti ne traite pas du problème de la rente). L'équilibre du système physique définit quant à lui une situation de plein emploi de la force de travail et des capacités productives. Ces deux équilibres sont posés comme des états possibles du système, et ainsi on peut étudier les conditions nécessaires pour arriver à ces états. Mais ils ne sont en aucun cas vu comme des états vers lesquels le système se dirige (Garbellini et Wirkierman).

Elle aborde ensuite le problème de l'étude des variables économiques. Elle montre, au niveau d'un hyper sous-système, que le ratio valeur du capital sur valeur de l'output dépend uniquement de la technologie et de la différence entre le taux de profit et le taux de croissance de la consommation du bien considéré. Le ratio capital/output est donc indépendant de la distribution du surplus entre profit et salaire.

Il est aussi indépendant du ratio valeur du capital sur quantité de travail, qui lui dépend, au niveau de chaque hyper sous-système, du salaire, du taux de profit et de la technologie. Ces 2 ratios, tout comme le produit par travailleur, ont par contre la même caractéristique : au niveau agrégé, c'est-à-dire en prenant en compte l'ensemble des hyper sous-systèmes, ils sont dépendant de la structure de la demande finale (alors qu'ils en sont indépendants au niveau non-agrégé).

Elle revient enfin sur le système naturel, ou pré-institutionnel décrit par Pasinetti ([6]). Le but de ce système naturel est de définir une théorie de la distribution qui soit déterminée uniquement par les caractéristiques techniques du système, et non par des caractéristiques institutionnelles. Pour cela, Pasinetti assigne au taux de profit et au taux de salaire des objectifs : le premier doit permettre de réaliser les investissements nécessaires pour soutenir le taux de croissance du secteur considéré (il y a ainsi un taux de profit différent pour chaque secteur) et le deuxième doit permettre d'acheter tous les biens de consommations produits. Garbellini souligne alors que ce système naturel entre en contradiction avec le système capitaliste réel : en effet, un taux de profit naturel étant associé à chaque bien de consommation, si un bien de consommation est également utilisé comme capital circulant, on lui associerait un deuxième taux de profit naturel, celui du secteur verticalement hyper-intégré où il est utilisé en tant que capital circulant. Or l'industrie réelle produisant ce bien gagne le même taux de profit sur chaque unité, d'où la contradiction entre système naturel et réel.

L'avantage du système naturel (avec des taux de profits naturels) est par contre de revenir à une théorie de la valeur travail, les prix de chaque secteurs étant proportionnels à la quantité de travail utilisée directement, indirectement et hyper-indirectement pour produire le bien de consommation considéré.

2 Le système de Garbellini ([2])

Elle démarre tout d'abord avec un système sans capital fixe, avec \mathbf{q} le vecteur des quantités totales ; \mathbf{x} le vecteur des demandes finales pour les biens de consommation ; \mathbf{j} le vecteur des demandes finales pour les biens intermédiaires (capitaux circulants, ou biens d'investissement) ; \mathbf{y} le vecteur des demandes finales, avec $y_i = x_i + j_i$; \mathbf{A} la matrice des coefficients inter-industries ; \mathbf{a}_{ni} le vecteur des besoins directs en travail ; \mathbf{a}_{in} le vecteur des coefficients des demandes per capita pour les biens de consommation, avec $x_i = a_{in}x_n$; \mathbf{a}_{k_in} le vecteur des coefficients des demandes per capita pour les biens intermédiaires,

avec $j_i = a_{k_{in}}x_n$; \mathbf{s} le vecteur des quantités intermédiaires nécessaires pour produire les quantités q_i ; \mathbf{p}_i le vecteur des prix ; \mathbf{r} le vecteur des taux de croissance des demandes per capita (en moyenne) pour les biens de consommation (tous les vecteurs sont des vecteurs colonnes).

La population totale est x_n , le taux de croissance de la population, g .

2.1 Etat stationnaire : système physique

En situation stationnaire, sans croissance, le système de production devient :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} = \mathbf{a}_{in}x_n \quad (2)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{x} \quad (3)$$

Ainsi les quantités produites sont égales à :

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x} \quad (4)$$

Une période, ou situation d'équilibre, est pour Pasinetti ([5]) caractérisée par un plein emploi de la force de travail et un plein emploi des capacités productives existantes. A la recherche de cette situation d'équilibre, on peut poser l'équation supplémentaire :

$$x_n = \mathbf{a}_{ni}^T \mathbf{q} \quad (5)$$

Le système à résoudre devient alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{a}_{in} \\ -\mathbf{a}_{ni}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6)$$

On peut poser le problème comme un problème de recherche de valeur propre. En posant :

$$\overline{\mathbf{A}}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{a}_{in} \\ \mathbf{a}_{ni}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\overline{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

On peut poser le système 6 ainsi :

$$\begin{cases} (\lambda_q \mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}_q) \overline{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \\ \lambda_q^* = 1 \end{cases} \quad (9)$$

Pour que le vecteur propre solution $\overline{\mathbf{q}}$ soit réel et positif, il faut que λ_q^* soit la valeur maximale de la matrice non-négative $\overline{\mathbf{A}}_q$. On peut écrire l'équation caractéristique ainsi :

$$\mathbf{a}_{ni}^T (\lambda_q \mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}_q)^{-1} \mathbf{a}_{in} = \lambda_q \quad (10)$$

Avec $\lambda_q^* = 1$, on obtient la condition pour que le système à résoudre ait des solutions non-triviales :

$$\mathbf{a}_{ni}^T (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_{in} = 1 \quad (11)$$

Si cette condition est remplie, et que λ_q^* est la valeur propre maximale de $\overline{\mathbf{A}}_q$, alors \mathbf{q} est un vecteur réel et positif égal à :

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_{in} \bar{x}_n \quad (12)$$

En posant \bar{x}_n comme une donnée exogène. La condition 11 est mathématique : du point de vue économique, c'est une condition macro-économique assurant le plein emploi.

2.2 Etat stationnaire : système de prix

Le système de prix peut se poser ainsi :

$$\mathbf{p}^T = w \mathbf{a}_{ni}^T + \mathbf{p}^T \mathbf{A} (1 + \pi) \quad (13)$$

A la différence du premier système par contre, il n'y a pas de données exogènes permettant de définir le niveau des prix. On choisit alors un numéraire, par exemple le salaire en posant $w = \bar{w}$. La solution pour le vecteur des prix est alors :

$$\mathbf{p}^T = \bar{w} \mathbf{a}_{ni}^T [\mathbf{I} - \mathbf{A} (1 + \pi)]^{-1} \quad (14)$$

L'équilibre est alors atteint lorsque tous les revenus sont dépensés, ce qui se traduit par l'équation supplémentaire :

$$w x_n + \mathbf{p}^T \mathbf{A} \pi \mathbf{q} = \mathbf{p}^T \mathbf{y} \quad (15)$$

Le système de prix devient alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}^T & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A} (1 + \pi) & -(\mathbf{I} - \mathbf{A} (1 + \pi)) (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_{in} \\ -\mathbf{a}_{ni}^T & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}^T \quad (16)$$

Ou, en posant le salaire comme une donnée exogène :

$$\mathbf{p}^T = \frac{\bar{w} \left(\mathbf{a}_{ni}^T + \frac{x_n}{\mathbf{q}} \right)}{\left(\mathbf{I} - \mathbf{A} + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{q}} \right)} \quad (17)$$

$$\pi = \frac{(\mathbf{p}^T \mathbf{y} - \bar{w} x_n)}{\mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q}} \quad (18)$$

On peut également le poser comme un problème de recherche de valeur propre, en posant au préalable :

$$\overline{\mathbf{A}}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{A} (1 + \pi) & (\mathbf{I} - \mathbf{A} (1 + \pi)) (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_{in} \\ \mathbf{a}_{ni}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

On peut alors réécrire le système ainsi :

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{p}}^T (\lambda_p \mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}_p) = \mathbf{0} \\ \lambda_p^* = 1 \end{cases} \quad (20)$$

L'équation caractéristique avec $\lambda_p^* = 1$ peut s'écrire ainsi :

$$\mathbf{a}_{ni}^T (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_{in} = 1 \quad (21)$$

C'est-à-dire la même condition que pour le système physique. Economiquement, il s'agit encore d'une condition macroéconomique pour que tous les revenus soient dépensés.

La conditions de non-négativité des prix est alors que :

$$\frac{1}{1 + \pi} \geq \lambda_A^{max} \quad (22)$$

Avec λ_A^{max} la valeur propre maximale de \mathbf{A} . On peut réécrire la condition ainsi :

$$\pi \leq \frac{1 - \lambda_A^{max}}{\lambda_A^{max}} \quad (23)$$

Attention : dans système stationnaire, il n'y a pas besoin d'investissement (qui servent à modifier la production). L'équation 15 n'est donc vérifiée dans ce cas-là que si le taux de profit est nul : le taux de profit naturel est égal à 0. Par contre, comme on va le voir dans la sous-section suivante, dès qu'il y a croissance (de la population ou de la consommation), il faut des investissements et donc il existe un taux de profit naturel positif.

2.3 Croissance

A partir de maintenant, le taux de croissance de la population g est supposé positif et les taux de croissance r_i de la demande pour chaque bien sont supposés différents de 0. La croissance de la demande pour chaque bien est alors égale à $g + r_i$, et le produit net devient :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{j} = \mathbf{a}_{in}x_n + \mathbf{a}_{k_in}x_n \quad (24)$$

La solution pour le calcul des quantités physiques à produire devient :

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{a}_{in} + \mathbf{a}_{k_in}) \bar{x}_n \quad (25)$$

La condition macro-économique pour le plein emploi est :

$$\mathbf{a}_{ni}^T (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{a}_{in} + \mathbf{a}_{k_in}) = 1 \quad (26)$$

On peut ainsi dimensionner les investissements per capita à réaliser pour assurer un plein emploi (que l'on peut appeler investissements naturels per capita). Ils doivent être de la forme :

$$\mathbf{a}_{k_in} = \left(\mathbf{a}_{ni}^T (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right)^{-1} * \left(1 - \mathbf{a}_{ni}^T (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{a}_{in} \right) \quad (27)$$

Mais on s'aperçoit alors que ces investissements per capita peuvent être négatifs. Inversement, on peut les poser exogènes comme les demandes de biens de consommation, et définir le changement technique (via un changement de productivité du travail) nécessaire pour satisfaire la croissance :

$$\mathbf{a}_{ni}^T = 1 * \left[(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{a}_{in} + \mathbf{a}_{k_in}) \right]^{-1} \quad (28)$$

Par ailleurs, la solution à l'équilibre pour le système de prix ne change pas.

3 Secteur verticalement hyper-intégrés

3.1 Relations pour une période

Dans le système recomposé par secteurs verticalement hyper-intégrés, les investissements \mathbf{j} dépendent de l'évolution de la demande en biens de consommation \mathbf{x} (les coefficients \mathbf{a}_{kin} ne sont plus indépendants des coefficients \mathbf{a}_{in}). Le taux de croissance de chaque secteur hyper-intégré i est noté :

$$g + r_i = c_i \quad (29)$$

Les quantités produites par chaque secteur hyper-intégré sont :

$$\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{A}\mathbf{q}^{(i)} + c_i\mathbf{A}\mathbf{q}^{(i)} + \mathbf{x}^{(i)} \quad (30)$$

Avec $\mathbf{x}^{(i)}$ le vecteur de demande finale comportant des 0 et le seul indice non nul x_i . En définissant la matrice \mathbf{H} comme :

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}(\mathbf{B} - \mathbf{A})^{-1} \quad (31)$$

, (avec ici $\mathbf{B} \equiv \mathbf{I}$), GARBELLINI montre que les quantités produites par secteurs peuvent se réécrire ainsi :

$$\mathbf{q}^{(i)} = (\mathbf{I} + \mathbf{H})(\mathbf{I} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{c}})^{-1}\mathbf{x}^{(i)} \quad (32)$$

Avec $\hat{\mathbf{c}}$ la matrice diagonale comportant sur sa diagonale principale les différents c_i . Les quantités dont on a besoin produites en agrégé sont égales à :

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{H}(\mathbf{I} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{c}})^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x} \quad (33)$$

Une autre manière de définir la matrice \mathbf{M} est donnée par Pasinetti ([6]) :

$$\mathbf{M}^{(i)} = \mathbf{A}[\mathbf{I} - (1 + c_i)\mathbf{A}]^{-1} \quad (34)$$

Les quantités intermédiaires produites par secteur peuvent alors s'écrire :

$$\mathbf{s}^{(i)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{A}\mathbf{M}^{(i)}\mathbf{x}^{(i)} + c_i\mathbf{A}\mathbf{M}^{(i)}\mathbf{x}^{(i)} \quad (35)$$

La capacité productive requise pour chaque secteur est ainsi décomposée en trois parties : la capacité productive directe $\mathbf{A}\mathbf{x}^{(i)}$ servant à produire une unité du bien de consommation i , la capacité productive indirecte $\mathbf{A}\mathbf{M}^{(i)}\mathbf{x}^{(i)}$ servant à renouveler les quantités intermédiaires consommées, et la capacité productive hyper-indirecte $c_i\mathbf{A}\mathbf{M}^{(i)}\mathbf{x}^{(i)}$ servant à faire croître la capacité productive du secteur. Le vecteur colonne \mathbf{m}_i^* de la matrice $\mathbf{M}^{(i)}$ est l'unité de capacité productive verticalement hyper-intégrée du secteur i .

La quantité de travail en agrégé est égale à :

$$x_n = \mathbf{a}_{ni}^T\mathbf{q} = \mathbf{v}^T(\mathbf{I} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{c}})^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{z}^T\mathbf{x} \quad (36)$$

Avec $\mathbf{v}^T = \mathbf{a}_{ni}^T(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. La quantité de travail requise par secteur est donnée par :

$$x_n^{(i)} = \mathbf{a}_{ni}^T\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{a}_{ni}^T\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{a}_{ni}^T\mathbf{M}^{(i)}\mathbf{x}^{(i)} + c_i\mathbf{a}_{ni}^T\mathbf{M}^{(i)}\mathbf{x}^{(i)} \quad (37)$$

On peut définir un coefficient de travail verticalement hyper-intégré par le $i^{\text{ème}}$ composant, l_i^* , du vecteur suivant ([6]) :

$$\mathbf{l}^{(i)} = \mathbf{a}_{ni}^T [\mathbf{I} - (1 + c_i) \mathbf{A}]^{-1} \quad (38)$$

Maintenant, que devient la condition macro-économique de plein-emploi 26 ? Elle peut se réécrire de la manière suivante :

$$\mathbf{a}_{ni}^T \mathbf{a}_{in} + \mathbf{a}_{ni}^T \mathbf{M}^{(i)} \mathbf{a}_{in} + \mathbf{a}_{ni}^T \mathbf{M}^{(i)} \hat{\mathbf{c}} \mathbf{a}_{in} = 1 \quad (39)$$

Concernant le système de prix, en déclarant un taux de profit “naturel” π_i^* égal dans chaque sous-système i au taux de croissance c_i de ce dernier, on obtient :

$$\mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{a}_{ni}^T [\mathbf{I} - (1 + \pi_i^*) \mathbf{A}]^{-1} w = \mathbf{l}^{(i)} w \quad (40)$$

On peut également calculer le prix d’une unité de capacité productive verticalement intégrée via :

$$\mathbf{p}_k^{(i)} = \mathbf{p}^{(i)} \mathbf{M}^{(i)} = \mathbf{l}^{(i)} \mathbf{M}^{(i)} w \quad (41)$$

Le $i^{\text{ème}}$ composant de ce vecteur est le prix de l’unité de capacité productive considérée.

Pour les prix “en agrégé” ou pour avoir des prix uniques, GARBELLINI emploie la procédure suivante. Elle commence par définir la matrice $\bar{\mathbf{M}}$ comme étant la matrice avec pour chaque colonne l’unité de capacité productives \mathbf{m}_i^* de chaque secteur i (en incluant également les secteurs produisant des biens intermédiaires). Puis elle définit le vecteur $\bar{\mathbf{l}}$ comme le vecteur ligne comportant comme éléments tous les coefficients de travail verticalement hyper-intégré l_i^* . Alors, en définissant la matrice $\bar{\Phi} = [\mathbf{I} - \bar{\mathbf{M}}(\pi \mathbf{I} - \hat{\mathbf{c}})]^{-1}$, les prix sont dépendants du taux de profit uniforme π choisi (on ne peut plus parler de taux de profit naturel s’il est uniforme pour tous les secteurs) et sont calculés ainsi :

$$\mathbf{p} = w \bar{\mathbf{l}} \bar{\Phi} \quad (42)$$

Les prix des unités de capacités productives au niveau du système avec un taux de profit uniforme sont :

$$\mathbf{p}_k = w \bar{\mathbf{l}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\Phi} \quad (43)$$

La condition macro-économique pour que tous les revenus soient dépensés s’avère être la même que la condition de plein emploi :

$$\bar{\mathbf{l}} \mathbf{a}_{in} = 1 \quad (44)$$

On peut alors calculer le ratio capital/output du secteur i ainsi, en définissant ϕ_i comme la colonne i de la matrice $\bar{\Phi}$:

$$\gamma_i = \frac{w \bar{\mathbf{l}} \bar{\mathbf{M}} \phi_i}{w \bar{\mathbf{l}} \phi_i} \quad (45)$$

Le calcul du ratio au niveau du système entier est le suivant :

$$\Gamma = \frac{w\bar{\mathbf{I}}\bar{\mathbf{M}}\bar{\Phi}\mathbf{a}_{in}}{w\bar{\mathbf{I}}\bar{\Phi}\mathbf{a}_{in}} \quad (46)$$

On peut également calculer le ratio capital/travail du secteur i :

$$\theta_i = \frac{w\bar{\mathbf{I}}\bar{\mathbf{M}}\phi_i}{l_i^*} \quad (47)$$

Le calcul du ration au niveau du système entier est le suivant :

$$\Theta = \frac{w\bar{\mathbf{I}}\bar{\mathbf{M}}\bar{\Phi}\mathbf{a}_{in}}{\bar{\mathbf{I}}\mathbf{a}_{in}} \quad (48)$$

On peut enfin calculer le produit par travailleur au niveau sectoriel :

$$y_i = \frac{w\bar{\mathbf{I}}\phi_i}{l_i^*} \quad (49)$$

Et au niveau du système entier :

$$Y = \frac{w\bar{\mathbf{I}}\bar{\Phi}\mathbf{a}_{in}}{\bar{\mathbf{I}}\mathbf{a}_{in}} \quad (50)$$

3.2 Dynamique sur plusieurs périodes ([1])

Les liaisons entre les différentes périodes, lorsque les taux de consommation varient au cours du temps, amènent la question des investissement pour prévoir l'accroissement (ou la diminution) de la consommation future. En posant un indice de temps sur chaque variable, les relations deviennent :

$$\mathbf{M}_t^{(i)} = \mathbf{A} [\mathbf{I} - (1 + c_{i,t+1}) \mathbf{A}]^{-1} \quad (51)$$

Ainsi la consommation de la période suivante devient nécessaire pour le calcul des unités de capacité productive requises pour la période actuelle.

De même, la condition de plein emploi et de dépenses de tous les revenus devient :

$$\mathbf{a}_{ni,t}^T \mathbf{a}_{in,t} + \mathbf{a}_{ni,t}^T \mathbf{M}_t^{(i)} \mathbf{a}_{in,t} + \mathbf{a}_{ni,t}^T \mathbf{M}_t^{(i)} \hat{\mathbf{c}}_{t+1} \mathbf{a}_{in,t} = 1 \quad (52)$$

Les coefficients de travail verticalement hyper-intégrés se retrouvent via :

$$\mathbf{l}_t^{(i)} = \mathbf{a}_{ni,t}^T [\mathbf{I} - (1 + c_{i,t+1}) \mathbf{A}]^{-1} \quad (53)$$

Enfin la matrice de transformation des équivalents-travail en prix devient :

$$\bar{\Phi}_t = [\mathbf{I} - \bar{\mathbf{M}}_t (\pi \mathbf{I} - \hat{\mathbf{c}}_{t+1})]^{-1} \quad (54)$$

4 Introduction du capital fixe

Travail exploratoire : il s'agit ici de comprendre le travail de Lavoie (1995) et de voir comment l'introduction de capital fixe modifie le modèle de Garbellini. L'intérêt est de comprendre comment introduire la notion de capacité de production inutilisée (ou de son taux d'utilisation), et donc d'affiner la dynamique d'investissement.

Lavoie construit un modèle sans capital circulant, mais avec du capital fixe. Il y a deux secteurs, l'un produisant un bien de consommation et l'autre, du capital fixe (une machine). Il n'y a pas d'usure des machines, c'est-à-dire qu'une fois achetée la machine reste indéfiniment la propriété du secteur propriétaire (l'accroissement de la capacité de production est fait une fois pour toute).

L'intérêt du modèle est que les marges de profits dans chaque secteur sont déterminées en fonction d'un taux de rendement réalisé sur le capital fixe (différent du taux de rendement cible, c'est-à-dire celui que l'on cherche à obtenir afin que les machines soient effectivement rentables). Ainsi son système de prix est le suivant (avec l'indice c pour le secteur bien de consommation et l'indice m pour le secteur machine) :

$$p_c q_c = (1 + \pi_c) w l_c q_c \quad (55)$$

$$p_m q_m = (1 + \pi_m) w l_m q_m \quad (56)$$

La particularité est donc qu'il existe un lien entre les marges de profit π_i dans chaque secteur et un taux de rendement réalisé sur le capital. Ce lien s'exprime ainsi :

$$\pi_c w l_c q_c = r_c p_m m_c \quad (57)$$

$$\pi_m w l_m q_m = r_m p_m m_m \quad (58)$$

Avec r_i le taux de rendement réalisé sur le capital dans le secteur i et m_i le nombre de machines dans le secteur i . Ce taux de rendement est donc égal au profit réalisé divisé par le coût d'achat du capital fixe :

$$\frac{\pi_c w l_c q_c}{p_m m_c} = r_c \quad (59)$$

$$\frac{\pi_m w l_m q_m}{p_m m_m} = r_m \quad (60)$$

On peut ainsi réécrire le système de prix ainsi :

$$p_c q_c = w l_c q_c + r_c p_m m_c \quad (61)$$

$$p_m q_m = w l_m q_m + r_m p_m m_m \quad (62)$$

Le système des quantités dépend lui de l'investissement réalisé dans chaque secteur et de la consommation. En supposant que la consommation provient de l'entièreté des salaires et de la part non épargnée du profit ($1 - s_p$), on obtient les équations suivantes :

$$q_c = \frac{w}{p_c} (l_c q_c + l_m q_m) + (1 - s_p) \frac{p_m}{p_c} (r_c m_c + r_m m_m) \quad (63)$$

$$q_m = g_c m_c + g_m m_m \quad (64)$$

Avec g_i le taux d'accumulation du secteur i . Chez Lavoie le taux d'accumulation (ou fonction d'investissement) est calculé comme une fonction linéaire du taux d'utilisation u_i :

$$g_i = a u_i + b \quad (65)$$

Le taux d'utilisation est défini ainsi :

$$u_i = \frac{q_i}{q_i^{max}} \quad (66)$$

Avec q_i^{max} la production maximale possible défini pour chaque secteur via un facteur multiplicateur du nombre de machines :

$$q_i^{max} = k_i m_i \quad (67)$$

Ainsi on peut réécrire le système physique ainsi :

$$q_c = \frac{w}{p_c} (l_c q_c + l_m q_m) + (1 - s_p) \frac{p_m}{p_c} (r_c m_c + r_m m_m) \quad (68)$$

$$q_m = \left(a \frac{q_c}{k_c m_c} + b \right) m_c + \left(a \frac{q_m}{k_m m_m} + b \right) m_m \quad (69)$$

Les variable exogènes sont : a , b , m_c , m_m , k_c , k_m , w , l_c , l_m et s_p . Les variables endogènes sont r_c , r_m , p_c , p_m , q_c et q_m , soit au nombre de six. Il manque donc deux équations pour résoudre le système. Celles-ci nous sont fournies par l'expression du taux de marge en fonction d'un taux de rendement cible r_i^o et d'un taux d'utilisation cible u_i^o définis de manière exogène pour chaque secteur :

$$\pi_c = \frac{r_c^o p_m m_c}{w l_c q_c^o} \quad (70)$$

$$\pi_m = \frac{r_m^o p_m m_m}{w l_m q_m^o} \quad (71)$$

Avec q_i^o la production cible défini en fonction du taux d'utilisation cible :

$$q_i^o = q_i^{max} u_i^o \quad (72)$$

On peut ainsi réécrire les équations concernant les taux de marge ainsi :

$$\pi_c = \frac{r_c^o p_m m_c}{w l_c q_c^{max} u_c^o} \quad (73)$$

$$\pi_m = \frac{r_m^o p_m m_m}{w l_m q_m^{max} u_m^o} \quad (74)$$

Ou encore, en utilisant le ratio capacité maximal/capital :

$$\pi_c = \frac{r_c^o p_m}{w l_c k_c u_c^o} \quad (75)$$

$$\pi_m = \frac{r_m^o p_m}{w l_m k_m u_m^o} \quad (76)$$

On peut alors réécrire les 6 équations du modèle :

$$p_c q_c = \left(1 + \frac{r_c^o p_m}{w l_c k_c u_c^o}\right) w l_c q_c \quad (77)$$

$$p_m q_m = \left(1 + \frac{r_m^o p_m}{w l_m k_m u_m^o}\right) w l_m q_m \quad (78)$$

$$r_c = \frac{\pi_c w l_c q_c}{p_m m_c} \quad (79)$$

$$r_m = \frac{\pi_m w l_m q_m}{p_m m_m} \quad (80)$$

$$q_c = \frac{w}{p_c} (l_c q_c + l_m q_m) + (1 - s_p) \frac{p_m}{p_c} (r_c m_c + r_m m_m) \quad (81)$$

$$q_m = \left(a \frac{q_c}{k_c m_c} + b\right) m_c + \left(a \frac{q_m}{k_m m_m} + b\right) m_m \quad (82)$$

A quoi sert ce modèle ? A observer comment l'investissement est relié au taux d'utilisation du capital. Ce taux n'est pas présent chez Sraffa, car pour lui il est intégré dans la technique utilisée : à chaque période le prix d'un bien comprendra les coûts de travail, de capital circulant et d'amortissement du capital fixe, que ce dernier ait été utilisé ou non. Ainsi une entreprise avec un taux d'utilisation faible aura un coût de production unitaire plus élevé que la même entreprise avec un taux d'utilisation fort. Mais bien sûr Sraffa ne dit rien sur les dynamiques d'investissement, son modèle étant statique.

La dynamique chez Lavoie est la suivante : si le taux d'utilisation est haut, on investit. Si celui-ci n'est pas haut, on investit moins (on ne peut pas désinvestir car on ne peut pas vendre une machine). Si le taux d'utilisation est égal au taux d'utilisation cible, on obtient le taux de rendement cible. La traverse kaleckienne enfin consiste à faire varier le taux de rendement cible, afin de voir l'impact sur les quantités produites et sur les fonctions d'accumulation. On observe que si le taux de rendement cible augmente, la part du surplus dédiée au salaire (le salaire réel) diminue, ce qui entraîne une baisse de la consommation en bien finaux. Les quantités produites deviennent plus faibles, les taux d'utilisation également, et l'accumulation ralentit. Par contre le rapport entre le nombre des machines des deux secteurs est indéfini : il peut augmenter ou diminuer suite à la traverse.

5 Exemple numérique

5.1 Système stationnaire

Un petit exemple numérique ne peut pas faire de mal, au point où on en est.

Prenons un système de production composé de deux secteurs produisant des biens de consommation : du sel et du pain. Pour obtenir du sel, il faut du travail et de l'énergie. Pour obtenir du pain, il faut du blé, du travail et de l'énergie. Il faut ainsi prendre en compte deux secteurs supplémentaires produisant des biens intermédiaires : la production d'énergie et la production de blé, nécessitant tous deux du travail et de l'énergie.

On peut ainsi construire une matrice des coefficients inter-industries, avec les processus en colonne, les biens utilisés en ligne :

$$\mathbf{A} = \begin{array}{l} \text{énergie } (e) \\ \text{sel } (s) \\ \text{blé } (b) \\ \text{pain } (p) \end{array} \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_e & \mathbf{a}_s & \mathbf{a}_b & \mathbf{a}_p \\ \left[\begin{array}{cccc} 0,5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad (83)$$

Le vecteur des coefficients (initiaux) de travail par industrie est posé ainsi :

$$\mathbf{a}_{ni}^T = [0,5 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \quad (84)$$

Maintenant que le système industriel est défini, il nous faut préciser la forme de la demande. On peut commencer en définissant une première phase pour $0 \leq t < 10$ et en posant une demande constante dans le temps et indépendante des revenus. Soit le vecteur des coefficients des demandes finales per capita :

$$\bar{\mathbf{a}}_{in} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \\ 0 \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad (85)$$

Et soit la population totale (qui est composé uniquement d'adultes travaillant) :

$$\bar{x}_n = 8 \quad (86)$$

Alors le vecteur de la demande finale devient :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} = \bar{\mathbf{a}}_{in} \bar{x}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (87)$$

On va étudier maintenant comment le système productif répond à la demande. Il faut tout d'abord remarquer que le taux de chômage peut être non nul : c'est le principe de la demande effective de Keynes qui dirige le système de production.

On en déduit le vecteur des quantités produites, via le système 4 :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (88)$$

Il y a-t-il plein emploi ? Pour en être sûr, il faut que l'équation 5 soit vérifiée :

$$\mathbf{a}_{ni}^T \mathbf{q} = 8 \quad (89)$$

La condition macro-économique de plein emploi est vérifiée. Trop de demande, il y aurait de l'inflation. Trop peu, il y aurait du chômage. On peut regarder directement si cette condition est vérifiée en vérifiant que l'équation 11 est égale à 1.

Pour le système des prix, on peut choisir comme numéraire le salaire :

$$\bar{w} = 1 \quad (90)$$

Alors, en posant le taux de profit :

$$\pi = \frac{2}{5} \quad (91)$$

Et en posant le système 14, on obtient les prix de production :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{38}{3} \end{bmatrix} \quad (92)$$

Mais l'équilibre est-il vérifié, c'est-à-dire tous les revenus sont-ils dépensés ? Pour cela il faut se reporter à l'équation 15 et calculer l'ensemble des revenus :

$$wx_n + \mathbf{p}^T \mathbf{A} \pi \mathbf{q} = 16 \quad (93)$$

Et vérifier s'ils sont égaux à l'ensemble des dépenses. Or il n'y a de dépense que concernant les biens de consommation (puisque'il n'y a pas d'investissement, le système étant à l'état stationnaire) :

$$\mathbf{p}^T \mathbf{y} = \mathbf{p}^T \mathbf{x} = 16 \quad (94)$$

Si les capitalistes épargnent l'ensemble ou une fraction de leur revenus (provenant du taux de profit appliqué) il n'y a pas d'équilibre, les salaires servant pour les dépenses de consommation étant égaux à :

$$wx_n = 8 \quad (95)$$

On n'a donc équilibre du système de prix que si le taux de profit est entièrement consacré à la consommation. Une manière plus simple de le dire est que le taux de profit naturel du système est nul, comme on le vérifie via l'équation 18. Les prix naturels sont alors égaux à :

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (96)$$

5.2 Système dynamique

5.2.1 Trois phases d'évolution de la consommation, analyse classique

Supposons maintenant que dans une deuxième phase, pour $10 \leq t < 20$, la population se mette à augmenter. Soit le taux de croissance de la population égal à :

$$\bar{g} = 0,02 \quad (97)$$

La population au temps t est alors égale à :

$$x_{n,t} = 8 * \exp^{0,02*t} \quad (98)$$

A ce niveau là, on observe uniquement une croissance proportionnelle. Les quantités produites évoluent de manière proportionnelle à l'augmentation de la population, mais les prix naturels et le taux de profit naturel ne changent pas.

Enfin, dans une troisième phase, pour $20 \leq t < 30$, supposons que les coefficients de demande *per capita* des biens de consommation soient égaux à :

$$\bar{\mathbf{a}}_{in,t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \\ 0 \\ \frac{3}{20} * \exp^{0,02*t} \end{bmatrix} \quad (99)$$

Ce dont on s'intéresse dans cette partie, ce sont les conditions nécessaires permettant au système de répondre à cette demande qui évolue. Pour satisfaire l'augmentation de la demande, il faut des investissements. Ceux-ci peuvent être décrits en posant des coefficients de demande pour les biens d'investissements, $\mathbf{a}_{kin,t}$. Ces derniers doivent être reliés aux coefficients de demande pour les biens de consommation : ils sont déterminés par le système si on veut être sûr d'avoir un plein emploi. Mais posons-les d'abord de manière arbitraire :

$$\bar{\mathbf{a}}_{kin,t} = \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,04 \\ 0,04 \\ 0,04 \end{bmatrix} \quad (100)$$

Le vecteur de la demande finale est alors :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_t + \mathbf{j}_t = (\bar{\mathbf{a}}_{in,t} + \bar{\mathbf{a}}_{kin,t}) \bar{x}_{n,t} = \begin{bmatrix} 0,04 * \frac{1}{8} * \exp^{0,02*t} \\ (1 + 0,02)^t + 0,04 * \frac{1}{8} * \exp^{0,02*t} \\ 0,04 * \frac{1}{8} * \exp^{0,02*t} \\ (1 + 0,02)^{2t} + 0,04 * \frac{1}{8} * \exp^{0,02*t} \end{bmatrix} \quad (101)$$

On peut alors calculer les quantités à produire pour la période 1 suivant l'équation 25 :

$$\mathbf{q}_1 \sim \begin{bmatrix} 12,2 \\ 2,7 \\ 1,7 \\ 1,4 \end{bmatrix} \quad (102)$$

Il y-t-il alors plein emploi ? Les quantités de travail requises sont égales à :

$$\mathbf{a}_{ni}^T \mathbf{q}_1 \sim 11,9 \quad (103)$$

Alors que la population est alors de :

$$x_{n,1} = 8,16 \quad (104)$$

On a ainsi trop de travail par rapport au nombre de travailleurs. Les coefficients de demande per capita pour des nouveaux investissements doivent être revus à la baisse. La solution est trouvée via le système 27 :

$$\mathbf{a}_{k_in,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{400} \end{bmatrix} \quad (105)$$

On a alors la production suivante :

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 8,16 \\ 2,04 \\ 1,02 \\ 1,02 \end{bmatrix} \quad (106)$$

Les quantités de travail requises sont :

$$\mathbf{a}_{ni}^T \mathbf{q}_1 = 8,16 \quad (107)$$

On est bien à l'équilibre, c'est-à-dire un plein emploi, mais avec des demandes pour les investissements négatives. En fait c'est logique : si la technologie n'évolue pas, qu'en situation initiale on a un plein emploi et que la demande per capita augmente, on se retrouve dans l'impossibilité de satisfaire ladite demande. Il faut introduire du progrès technique, et il faut que ce progrès technique soit suffisant pour satisfaire la demande afin que l'on garantisse l'équilibre et en même temps que l'on produise assez de biens pour satisfaire la demande.

Concernant les prix, en conservant le salaire comme numéraire et un taux de profit égal à $\frac{2}{5}$, les prix sont inchangés par rapport au système à l'état stationnaire. En effet les prix ne dépendent que de la technologie employée et du partage du surplus entre salaire et profit. Par contre introduire un changement technique induit un changement dans les prix relatifs naturels.

On définit ainsi un vecteur des coefficients de travail qui évolue au cours du temps. Dans un premier temps, on pose que l'évolution de la productivité dans chaque processus suit exactement l'évolution de la demande pour le bien produit par le processus en question.

On a ainsi, pour la troisième période :

$$\mathbf{a}_{ni}^T = [0,5 \quad 1 \quad 1 \quad 1 * \exp^{0,02*t}] \quad (108)$$

On peut maintenant calculer toutes les variables durant les 3 phases décrites précédemment. On utilise pour la 2^{ème} et la 3^{ème} période un taux de croissance de la population $g = 0,1$. On utilise de même à la 3^{ème} période un taux de croissance de la consommation per capita de pain $r_4 = 0,1$.

On remarque que les demandes concernant les investissements sont toujours négatives : le progrès technique n'est pas suffisant pour couvrir la demande.

Figure 1: Consommation et investissement per capita pendant la phase 1

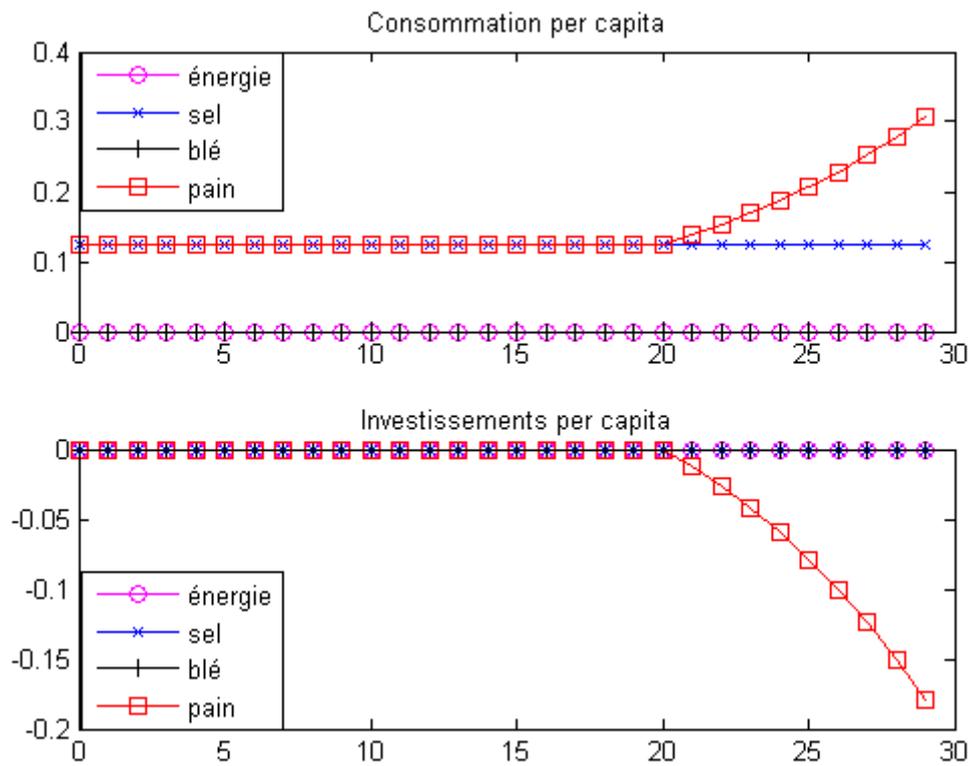


Figure 2: Quantités produites

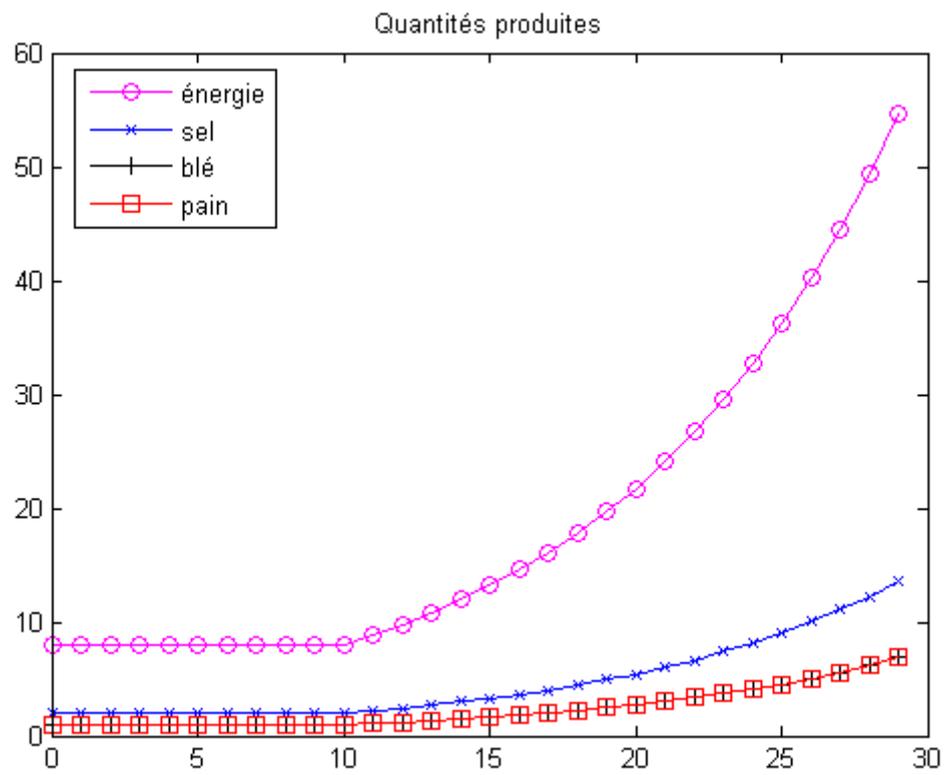


Figure 3: Prix et taux de profit naturels : ils restent stationnaires.

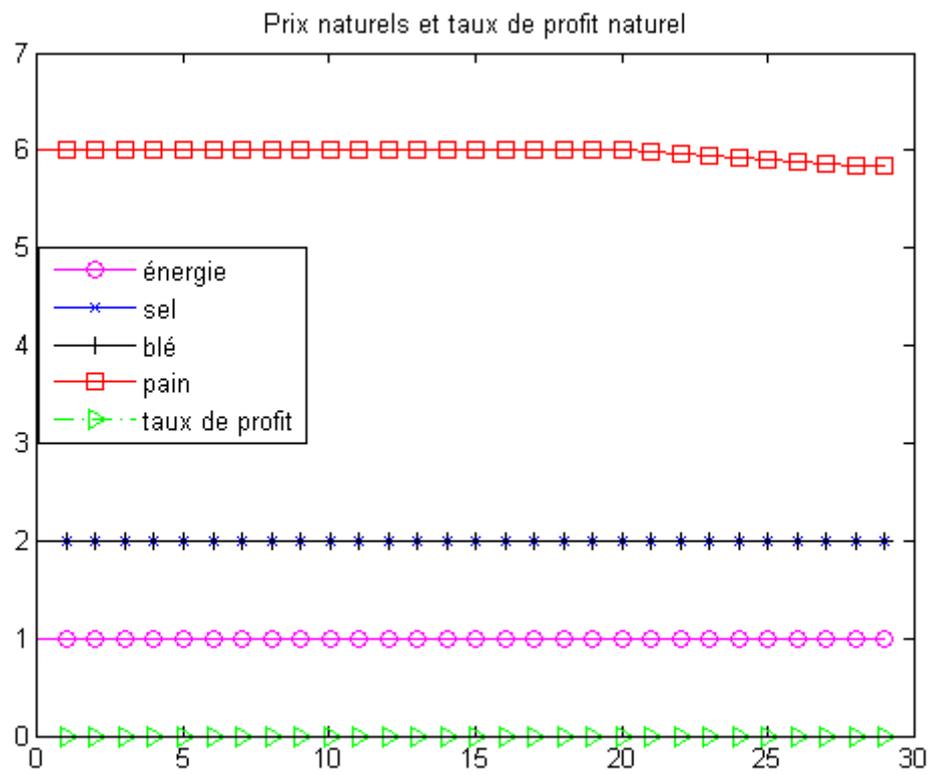


Figure 4: Demande et production effective, population et travail disponible : on voit que la demande n'est pas satisfaite, mais qu'il n'y a pas de chômage

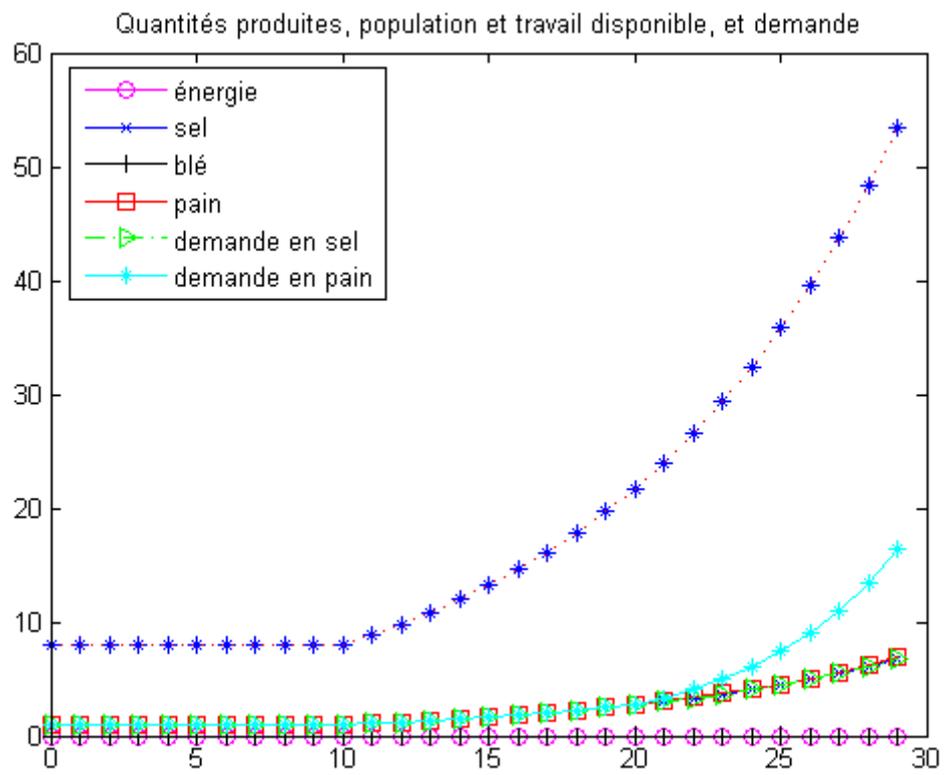
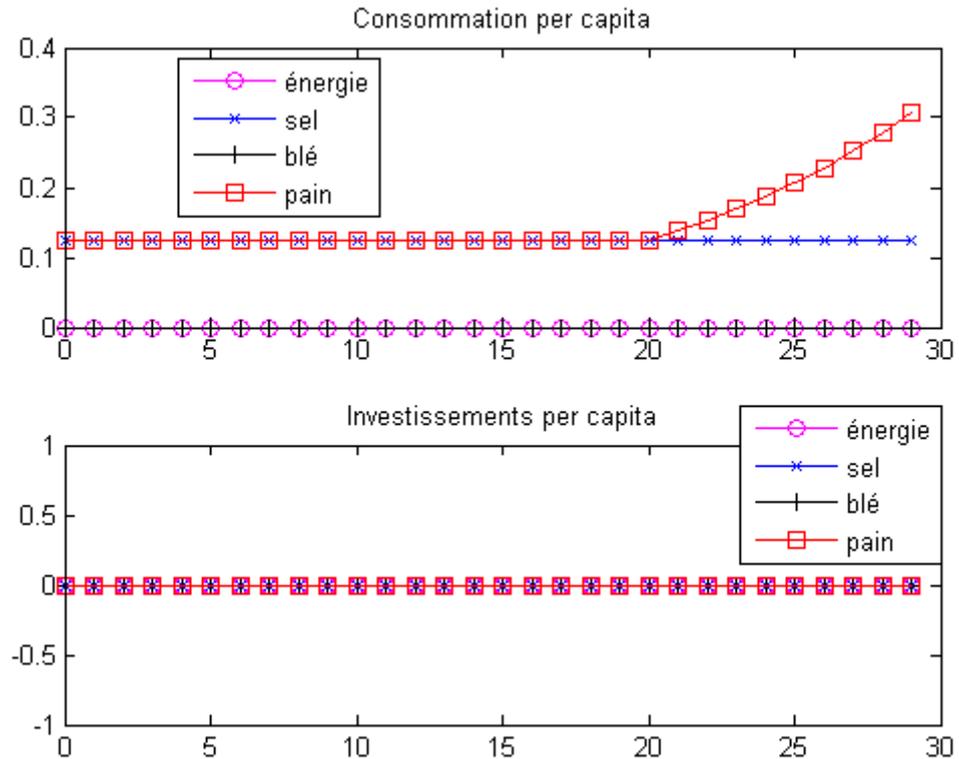


Figure 5: Coefficients de demande per capita pour des biens de consommation et pour des biens intermédiaires



On peut alors renverser le raisonnement et décider que le progrès technique est la variable décidée par le système, via l'équation 28. On pose, par exemple, une demande en bien d'investissement nulle, ce qui nous permet d'obtenir les résultats suivants :

La solution obtenue n'est pas entièrement satisfaisante, la productivité par travailleur dans les secteurs du pain, du blé et du sel devenant infinie (comme si tout était devenu mécanisé, sans travail humain d'aucune sorte pour la production). On peut donc décider de ne faire varier la productivité que dans un seul secteur : par exemple, on pose qu'il n'y a des gains de productivité que dans le secteur de l'énergie. Les coefficients de travail des autres secteurs sont égaux à 1, celui du secteur de l'énergie est calculé comme précédemment, mais via l'équation 52. On obtient les résultats suivants :

5.2.2 Analyse avec les secteurs verticalement hyper-intégrés

Le nombre de secteurs (verticalement hyper-intégrés) est égal au nombre des différents biens de consommation produits : ils sont ici au nombre de 2, le secteur du sel et le secteur du pain. Le vecteur et la matrice de l'évolution des consommations finales se définit ainsi (pour la troisième phase) :

Figure 6: Coefficients de travail, prix relatifs et taux de profit naturel

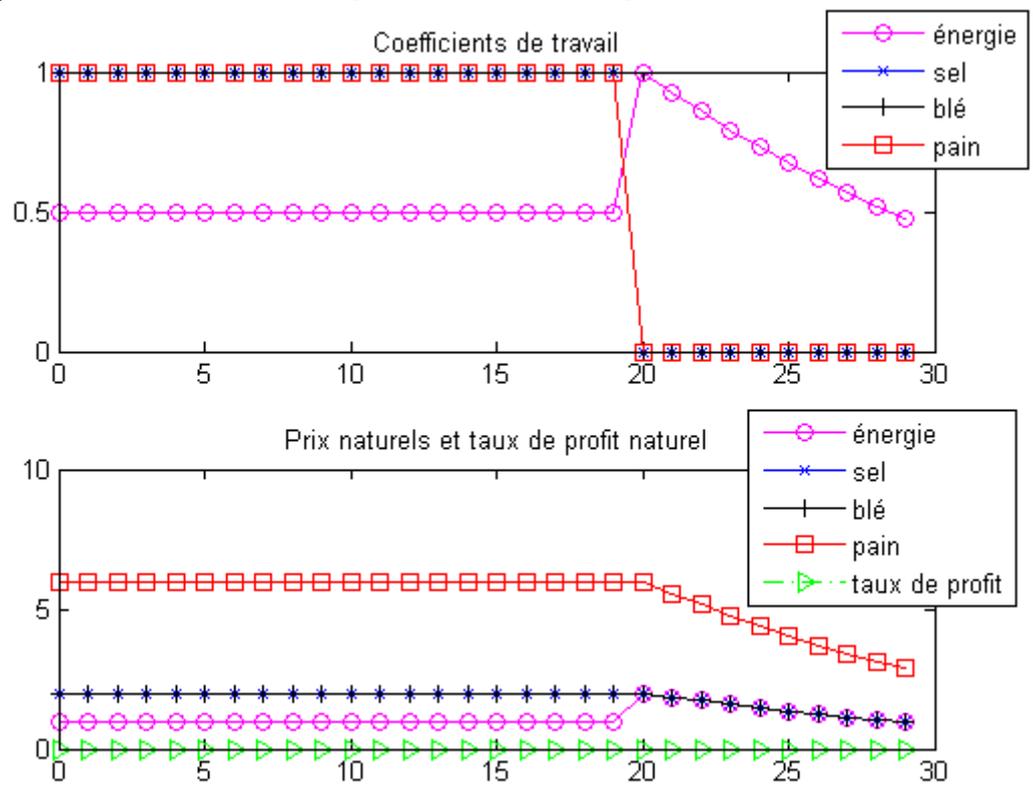


Figure 7: Quantités produites

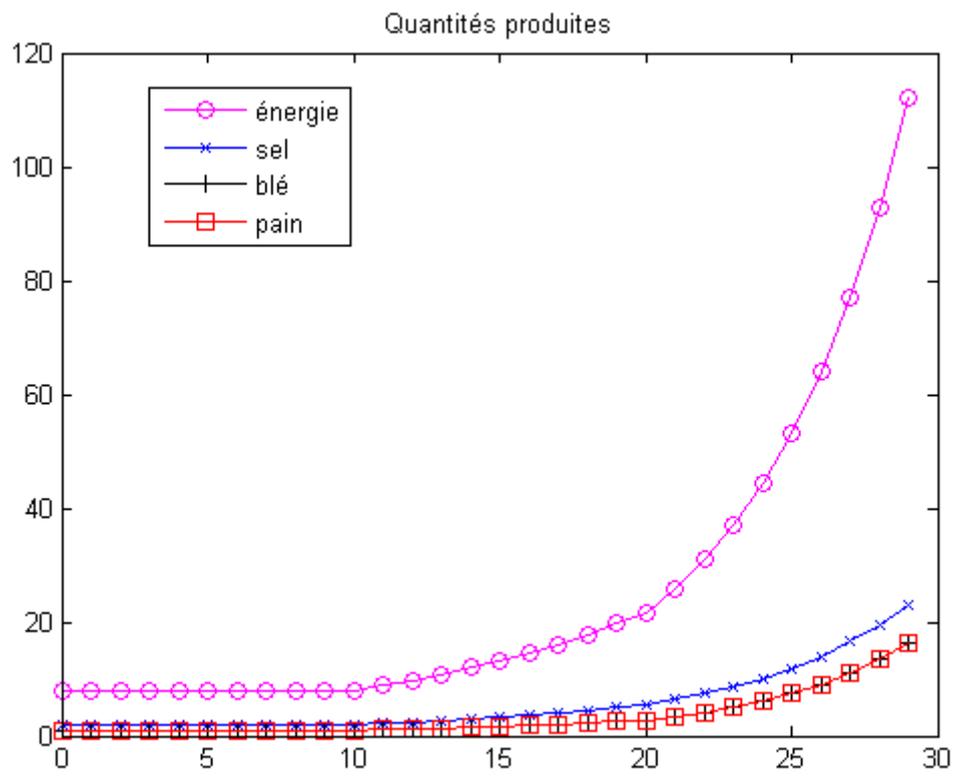


Figure 8: Offre et demande en biens de consommation et en travail

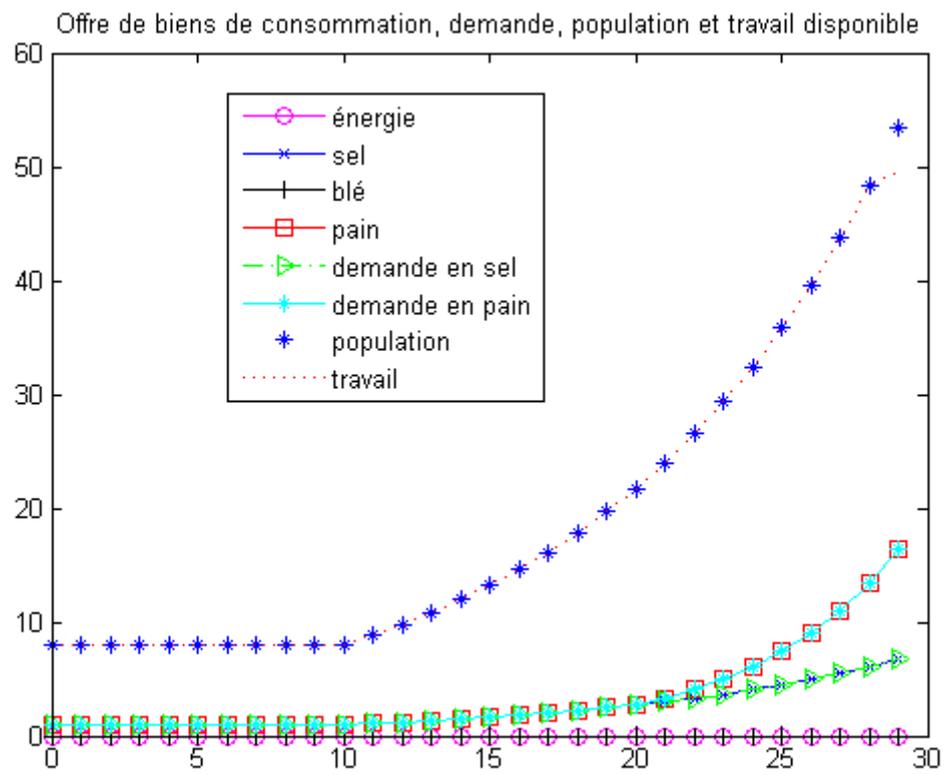


Figure 9: Coefficients de travail, prix et taux de profit : le coefficient de travail devenant nul dans le secteur de l'énergie, le prix de l'énergie devient également nul

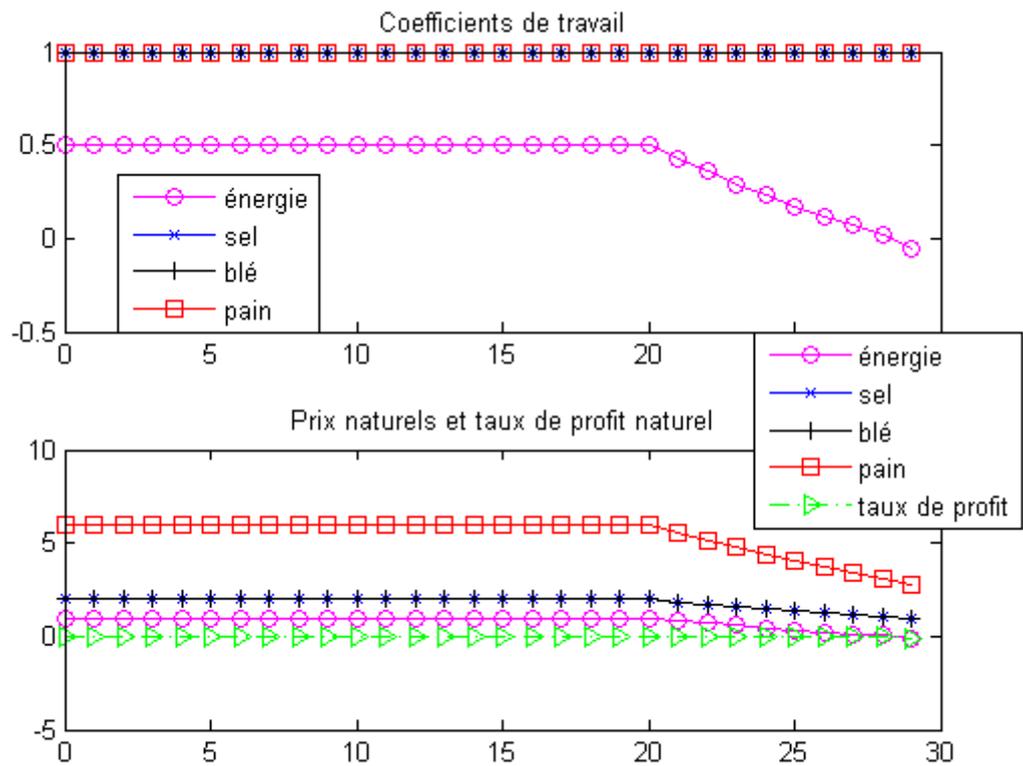
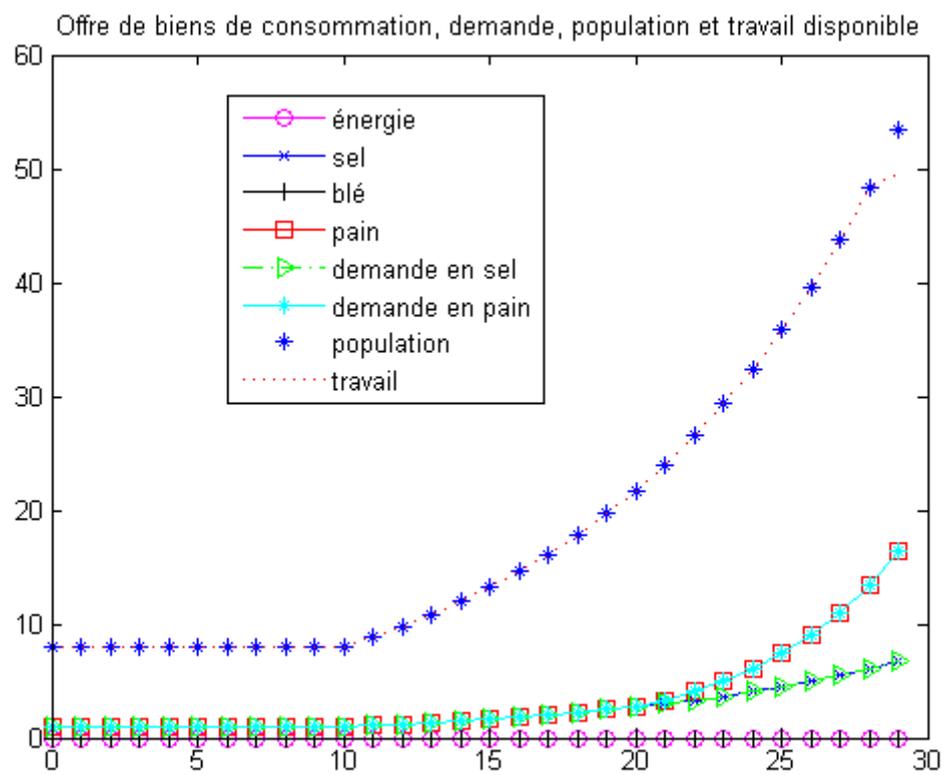


Figure 10: Offre et demande : on obtient les mêmes figures que précédemment



$$\mathbf{c} = g\mathbf{e} + \bar{\mathbf{r}}_{i,t} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 + 0,1 \end{bmatrix} \quad (109)$$

$$\hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 + 0,1 \end{bmatrix} \quad (110)$$

La matrice \mathbf{H} , exprimant les quantités physiques directement et indirectement (c'est-à-dire pour ces dernières servant à la reproduction du capital circulant) requises en tant que stock pour la production d'une unité de chaque bien, aussi appelée matrice des unités de capacités productives verticalement intégrées, est égale à :

$$\mathbf{H} = \begin{array}{c} \text{énergie } (e) \\ \text{sel } (s) \\ \text{blé } (b) \\ \text{pain } (p) \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{a}_e \quad \mathbf{a}_s \quad \mathbf{a}_b \quad \mathbf{a}_p \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad (111)$$

Pour information, la matrice de Léontiev associée est égale à :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (112)$$

On y voit pour chaque colonne i les quantités de matière utilisées pour la production d'une unité du bien i , ainsi que cette unité produite. Alternativement, dans la matrice \mathbf{H} , on voit pour chaque colonne uniquement les quantités de matière utilisées (uniquement les quantités intermédiaires, et non les quantités finales).

Le vecteur \mathbf{v} , exprimant les quantités de travail directement et indirectement requises pour la production d'une unité de chaque bien, aussi appelé vecteur des coefficients de travail verticalement intégrés, est égal à :

$$\mathbf{v} = [1 \quad 2 \quad 2 \quad 6] \quad (113)$$

Lorsque le système devient croissant, la matrice \mathbf{H} est modifiée : il faut maintenant prendre en compte les investissements à réaliser pour pouvoir continuer à répondre à la demande. On définit alors les matrices $\mathbf{M}^{(i)}$ via l'équation 34. En l'occurrence, on effectue une opération logique sur le système étudié, en le réduisant à seulement 2 hyper-sous systèmes, caractérisés respectivement par les matrices $\mathbf{M}^{(2)}$ (production de sel) et $\mathbf{M}^{(4)}$ (production de pain). Celles-ci sont, lors de la première période ($g = 0 ; r_4 = 0$) :

$$\mathbf{M}^{(2)} = \mathbf{M}^{(4)} = \mathbf{H} \quad (114)$$

Lors de la deuxième période ($g = 0,1 ; r_4 = 0$) :

$$\mathbf{M}^{(2)} = \mathbf{M}^{(4)} \sim \begin{bmatrix} 1,11 & 2,22 & 2,22 & 7,11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (115)$$

Lors de la troisième période ($g = 0, 1 ; r_4 = 0, 1$) :

$$\mathbf{M}^{(2)} \sim \begin{bmatrix} 1,11 & 2,22 & 2,22 & 7,11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (116)$$

$$\mathbf{M}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1,25 & 2,5 & 2,5 & 8,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (117)$$

La deuxième colonne de la matrice $\mathbf{M}^{(2)}$ représente l'unité de capacité productive verticalement hyper-intégrée du secteur verticalement hyper-intégré du sel ; la quatrième colonne de la matrice $\mathbf{M}^{(4)}$ représente l'unité de capacité productive verticalement hyper-intégrée du secteur verticalement hyper-intégré du pain (il s'agit d'un bien composite en l'occurrence).

L'évolution des coefficients de travail verticalement hyper-intégrés sont les suivants :

Pour les prix, on dispose d'un système de prix différents selon le sous-système considéré. En déclarant un taux de profit "naturel" égal dans chaque sous-système i au taux de croissance c_i de ce dernier, on obtient des prix selon les équations 40 et 41, et on peut voir leur évolution ci-dessous :

On peut ensuite calculer les prix "agrégés", ainsi que les prix des unités des différentes capacités productives, en agrégé, suivant les équations 42 et 43 (ici avec un taux de profit nul) :

Enfin, en utilisant les équations 45 à 50 on peut établir l'évolution des grandeurs économiques caractérisant le système :

Selon PASINETTI ([6]), on peut suivre l'évolution du système dans son ensemble en regardant d'un côté l'évolution des coefficients de travail verticalement hyper-intégrés en fonction du taux de croissance de chaque hyper sous-système :

Et de l'autre côté les prix de chaque bien et de leur unité de capacité productive, comme représenté dans la figure 12.

References

- [1] Nadia Garbellini. Structural change and economic growth: Production in the long run - a generalisation in terms of vertically hyper-integrated sectors. 2010.
- [2] Nadia Garbellini. Structural change and economic growth: Production in the short run - a generalisation in terms of vertically hyper-integrated sectors. 2010.

Figure 11: Coefficients de travail verticalement hyper-intégrés

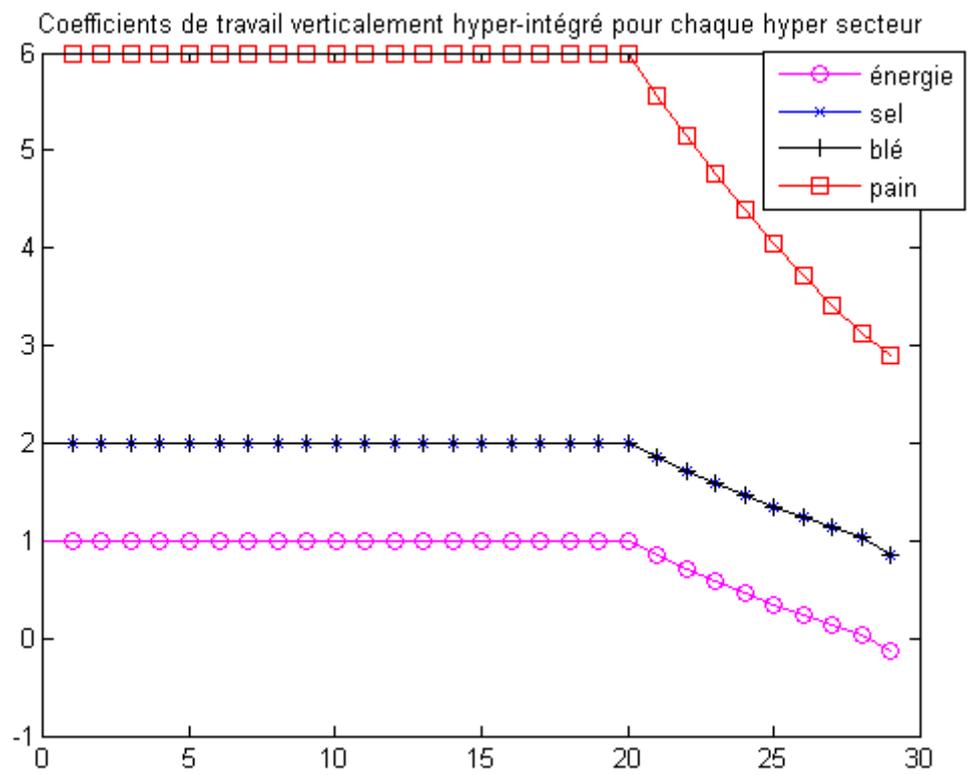


Figure 12: Prix des biens de consommation et des unités de capacité productive dans les 2 secteurs (la dernière valeur, pour $t = 29$, est fausse)

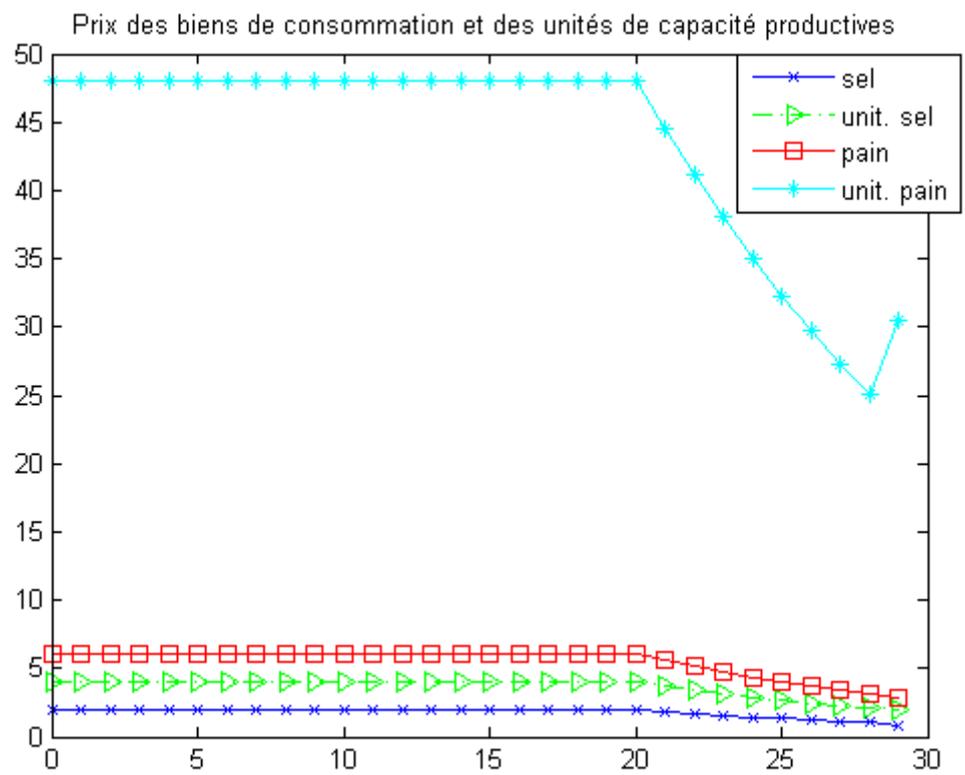


Figure 13: Prix agrégés des biens de consommation et des unités de capacité productive avec $\pi = 0$, on retrouve les prix calculé précédemment en figure 9

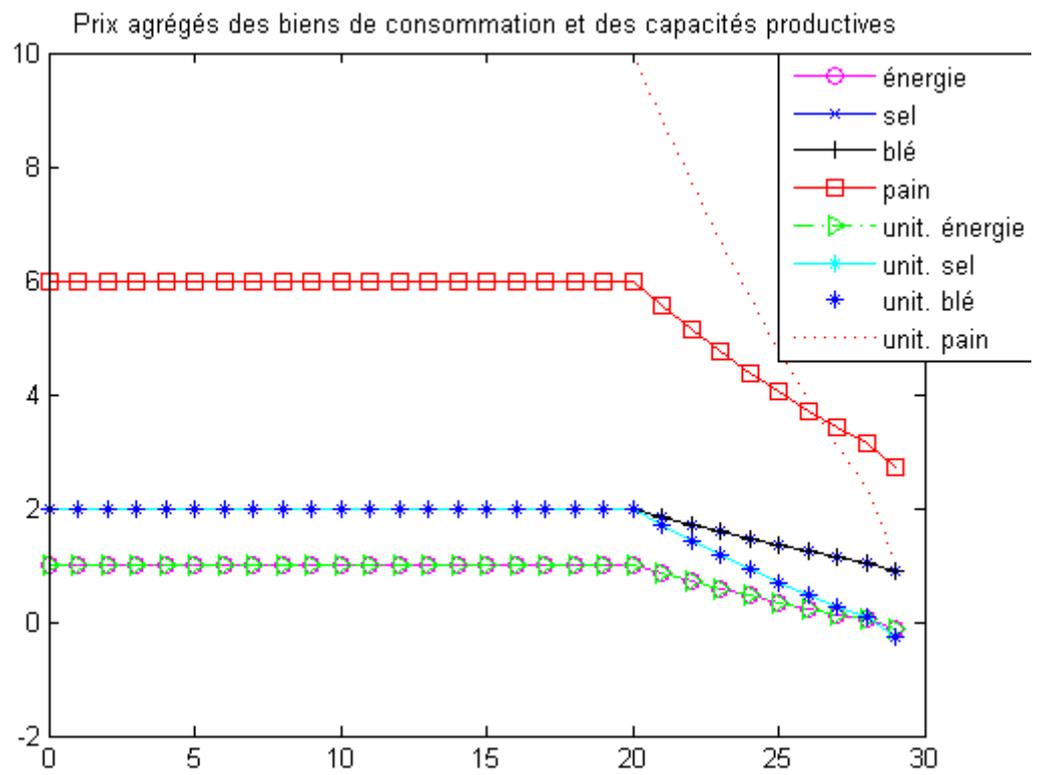


Figure 14: Les différentes grandeurs économiques mesurables

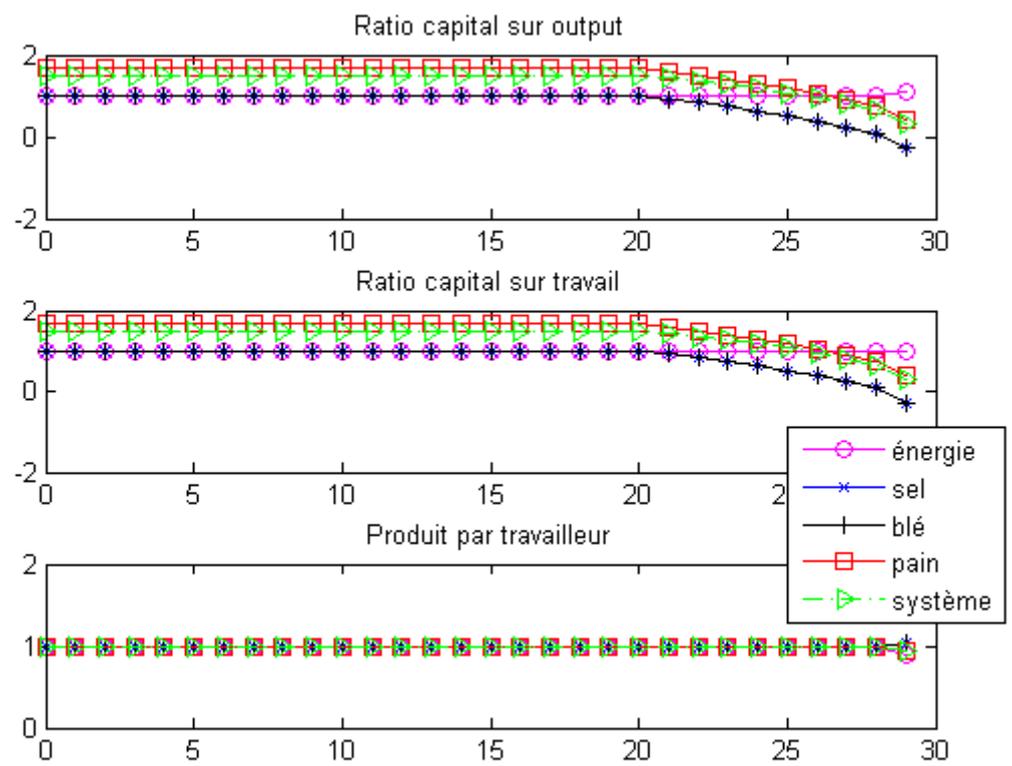
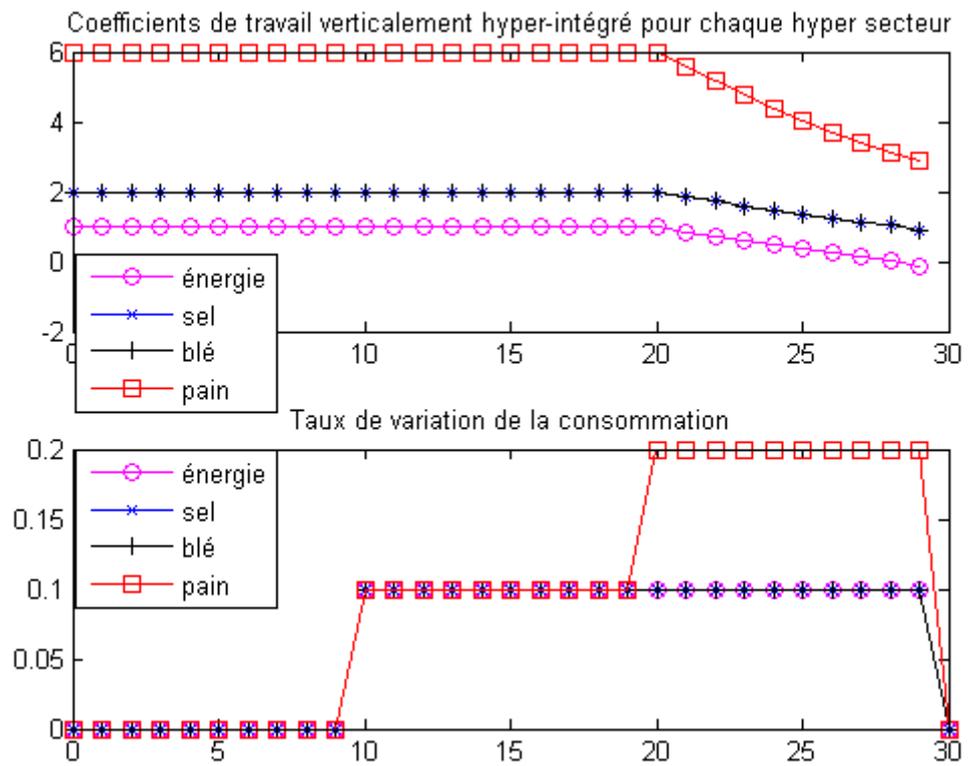


Figure 15: L'évolution des taux de consommation et des coefficients de travail verticalement hyper-intégrés



- [3] Nadia Garbellini. Vertical hyper-integration and the ‘natural’ economic system - a reply to criticisms. 2011.
- [4] Luigi L. Pasinetti. The notion of vertical integration in economic analysis. *Metroeconomica*, 25:1–29, 1973.
- [5] Luigi L. Pasinetti. *Structural Change and Economic Growth; A Theoretical Essay on the Dynamics of the Wealth of Nations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [6] Luigi L. Pasinetti. Growing subsystems, vertically hyperintegrated sectors and the labour theory of value. *Cambridge Journal of Economics*, 12(1):125–134, 1988.