



HAL
open science

Approche p-adique de la conjecture de Greenberg (cas totalement réel p-décomposé)

Georges Gras

► **To cite this version:**

Georges Gras. Approche p-adique de la conjecture de Greenberg (cas totalement réel p-décomposé). 2016. hal-01404933v2

HAL Id: hal-01404933

<https://hal.science/hal-01404933v2>

Preprint submitted on 30 Dec 2016 (v2), last revised 1 Apr 2017 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**APPROCHE p -ADIQUE DE LA CONJECTURE DE
GREENBERG
(CAS TOTALEMENT RÉEL p -DÉCOMPOSÉ)**

GEORGES GRAS

ABSTRACT. Let k be a totally real number field and let k_∞ be its cyclotomic \mathbb{Z}_p -extension for a prime $p > 2$. We give (Theorem 3.4) a sufficient condition of nullity of the Iwasawa invariants λ, μ , when p totally splits in k , and we obtain important tables giving quadratic fields and various p for which we can conclude that $\lambda = \mu = 0$. We show that the number of ambiguous p -classes of k_n (the n th stage in k_∞) is equal to the order of the torsion group \mathcal{T}_k , of the Galois group of the maximal Abelian p -ramified pro- p -extension of k (Theorem 4.7), for all $n \geq e$, where p^e is the exponent of U_k^*/\overline{E}_k (local vs global units). Thus we recover some classical results of Fukuda, Greenberg, Inatomi, Komatsu, Sumida, Taya, ... Then we establish analogs of Chevalley's formula using a family $(\Lambda_i)_{0 \leq i \leq m_n}$ of subgroups of k^\times containing E_k , in which any x is norm of an ideal of k_n . This family is attached to the classical filtration of the p -class group of k_n giving the theoretical algorithm computing its order in m_n steps. From this, we prove (Theorem 6.3) that $m_n \geq (\lambda \cdot n + \mu \cdot p^n + \nu)/v_p(\#\mathcal{T}_k)$ and that the condition $m_n = O(1)$ (i.e., $\lambda = \mu = 0$) essentially depends on the p -adic valuations of the $\frac{x_i^{p-1}-1}{p}$, $x_i \in \Lambda_i$, $p \mid p$, so that Greenberg's conjecture is strongly related to "Fermat quotients" of some elements of k^\times . Heuristics and statistical analysis of these Fermat quotients (Sections 6, 7, 8) show that they follow natural probabilities, whatever n , suggesting that $\lambda = \mu = 0$ (Heuristics 7.3, 7.4, 7.7). This would imply that for a proof of Greenberg's conjecture, some deep p -adic results (probably out of reach now) are necessary before referring to algebraic Iwasawa's theory.

1. INTRODUCTION

Nous appelons *Conjecture de Greenberg pour les corps de nombres totalement réels* k , le fait que les invariants d'Iwasawa $\lambda_p(k)$ et $\mu_p(k)$ de leur p -tour cyclotomique k_∞ sont nuls (quel que soit p). Comme la nullité de $\lambda_p(k)$ et $\mu_p(k)$ implique celle relative aux sous-corps de k , on peut supposer k/\mathbb{Q} Galoisienne réelle de degré d . Le corps k et le nombre premier p étant fixés, on désigne pour simplifier par λ, μ, ν les invariants d'Iwasawa pour k et p .

Dans l'approche classique, la décomposition de p dans k/\mathbb{Q} joue un rôle important et nous nous limiterons ici au cas où p est totalement décomposé. La raison est la suivante : la nullité du p -groupe des classes \mathcal{C}_{k_n} du n -ième

Date: 30 Décembre 2016.

1991 Mathematics Subject Classification. 11R23, 11R29, 11R37.

Key words and phrases. Greenberg's conjecture, Iwasawa's theory, p -class groups, S -units, class field theory, Fermat quotients, p -adic regulators, Leopoldt's conjecture.

étage k_n de k_∞ est, en supposant implicitement que p est totalement ramifié dans k_∞/k , équivalente à celle de chacun des deux facteurs de la formule des classes ambiges de Chevalley qui s'écrit dans ce cas :

$$(1) \quad \#\mathcal{C}_{k_n}^{G_n} = \#\mathcal{C}_k \cdot \frac{p^{n \cdot (t-1)}}{(E_k : E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))},$$

où $G_n = \text{Gal}(k_n/k)$, $t \mid d$ est le nombre d'idéaux premiers au-dessus de p dans k , \mathcal{C}_k est le p -groupe des classes de k , et E_k son groupe des unités.

Le cas $t = 1$ implique $E_k \subset N_{k_n/k}(k_n^\times)$ (formule du produit des symboles de restes normiques) et les invariants λ et μ dépendent essentiellement du comportement du p -groupe des classes de k par extension des idéaux dans la tour [Gre, Theorem 1, §4].

Le cas $t = d$ montrera que, sous la conjecture de Leopoldt, le facteur $\frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(E_k : E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))}$ a, pour tout $n \gg 0$, même valuation p -adique que le régulateur p -adique normalisé R_k de k (Théorème 4.7).

Si $1 < t < d$, l'étude se ramène grosso modo aux cas précédents, ce que l'on peut justifier au moyen du cas Abélien réel de degré d étranger à p , par découpage semi-simple (selon les caractères p -adiques de $\text{Gal}(k/\mathbb{Q})$, comme dans [Gra5], [H], [IS1], [IS2]) : si k' est le corps de décomposition

$$\text{de } p \text{ dans } k, \text{ alors } \#\mathcal{C}_k \cdot \frac{p^{n \cdot (t-1)}}{(E_k : E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))} \text{ s'écrit comme produit de}$$

$$\#\mathcal{C}_{k'} \cdot \frac{p^{n \cdot (t-1)}}{(E_{k'} : E_{k'} \cap N_{k'_n/k'}(k'_n{}^\times))}$$

et de

$$\#\mathcal{C}_k^* \cdot \frac{1}{(E_k^* : E_k^* \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))} = \#\mathcal{C}_k^*,$$

où l'on a posé $E_k = E_{k'} \oplus E_k^*$ (à un indice près étranger à p), où E_k^* est le sous-groupe des unités de norme 1 sur k' .

Autrement dit, on a $E_k^* \subset N_{k_n/k}(k_n^\times)$ pour tout n et on est ramené au cas totalement décomposé pour k' . Cependant, s'il existe un p -groupe de classes relatives \mathcal{C}_k^* dans k/k' , la question est analogue, en relatif, au cas non décomposé $t = 1$.

2. CONJECTURE DE GREENBERG (CAS TOTALEMENT DÉCOMPOSÉ)

Soit k un corps de nombres Galoisien réel de degré d et soit $p > 2$ un nombre premier totalement décomposé dans k . Soit \mathbb{Q}_∞ la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de \mathbb{Q} et $k_\infty := k\mathbb{Q}_\infty$ celle de k ; puisque p est non ramifié dans k/\mathbb{Q} , on a $k \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}$ et totale ramification de p dans k_∞/k .

On désigne par $k_n \subset k_\infty$ l'extension de degré p^n de k et par G_n son groupe de Galois. Soient \mathcal{C}_k et \mathcal{C}_{k_n} (resp. $\mathcal{C}_k^{S_k}$ et $\mathcal{C}_{k_n}^{S_{k_n}}$) les p -groupes des classes de k et k_n (resp. les S_k et S_{k_n} -groupes des classes de k et k_n) où S_k et S_{k_n} sont les ensembles des p -places de k et k_n respectivement (on a $\#S_k = \#S_{k_n} = d$). On a $\mathcal{C}_k^{S_k} := \mathcal{C}_k / \mathcal{C}_k(S_k)$ où $\mathcal{C}_k(S_k)$ est le sous-groupe de \mathcal{C}_k engendré par les p -classes des éléments de S_k (idem pour $\mathcal{C}_{k_n}^{S_{k_n}}$).

Théorème 2.1. [Gre, Theorem 2, (1976)]. *Sous les hypothèses et notations précédentes, et sous la conjecture de Leopoldt pour p dans k , les invariants $\lambda_p(k)$ et $\mu_p(k)$ d'Iwasawa sont nuls si et seulement si pour tout $n \gg 0$, on a $\mathcal{C}_{k_n}^{G_n} = \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})$ (i.e., le sous-groupe de \mathcal{C}_{k_n} formé des p -classes ambiges est égal au sous-groupe engendré par les p -classes des éléments de S_{k_n}).*

Dans cet énoncé interviennent le p -groupe des classes ambiges $\mathcal{C}_{k_n}^{G_n}$ et le groupe $\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})$ qui est un sous-groupe du p -groupe des classes des idéaux invariants $I_{k_n}^{G_n}$; on a l'isomorphisme classique :

$$\mathcal{C}_{k_n}^{G_n} / \mathcal{C}_{k_n}(I_{k_n}^{G_n}) \simeq E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times) / N_{k_n/k}(E_{k_n}),$$

où E_k et E_{k_n} sont les groupes des unités de k et k_n . Or seul $E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times)$, donné par le corps de classes local, est accessible en pratique, $N_{k_n/k}(E_{k_n})$ étant un invariant arithmétique non trivial associé à l'extension k_n/k , en relation avec les problèmes de capitulation de classes d'idéaux, ce qui explique la difficulté du calcul de λ et μ en termes d'unités globales (éventuellement comparées aux unités cyclotomiques du cadre Abélien comme dans [KS]). On a par ailleurs $\mathcal{C}_{k_n}(I_{k_n}^{G_n}) = \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}) \cdot j_{k_n/k}(\mathcal{C}_k)$, où $j_{k_n/k}$ est l'extension des classes de k à k_n ; la relation $\mathcal{C}_{k_n}^{G_n} = \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})$ implique donc, de plus, la condition $j_{k_n/k}(\mathcal{C}_k) \subseteq \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})$.

Remarque 2.2. Il est clair que si pour tout $n \gg 0$ on a $\mathcal{C}_{k_n}^{G_n} = 1$, la conjecture de Greenberg est vraie sous la forme $\lambda = \mu = \nu = 0$ et réciproquement ; or la condition $\mathcal{C}_{k_n}^{G_n} = 1$ pour tout $n \gg 0$ est équivalente à $\mathcal{C}_{k_1}^{G_1} = 1$ (Proposition 4.6) et cette propriété a lieu si et seulement si (cf. Relation (1) pour $t = d$) $\mathcal{C}_k = 1$ & $(E_k : E_k \cap N_{k_1/k}(k_1^\times)) = p^{d-1}$; or la seconde condition équivaut au fait que le régulateur p -adique normalisé R_k de k (au sens de [Gra6, Définition 2.3 (i)]) est une unité p -adique.

Il en résulte (Théorème 4.7 (ii)) que, sous la conjecture de Leopoldt, la condition $\lambda = \mu = \nu = 0$ équivaut à la nullité du groupe de torsion \mathcal{T}_k de $\text{Gal}(H_k^{\text{pr}}/k)$, où H_k^{pr} est la pro- p -extension Abélienne p -ramifiée maximale de k (en effet, $\#\mathcal{T}_k = \#\mathcal{C}_k \cdot R_k$), ce qui équivaut à la p -rationalité de k (notion définie dans [Gra1, § IV.3], [GJ], [JN], [MN]).

3. CONDITION SUFFISANTE DE NULLITÉ DE λ ET μ

Nous avons démontré dans [Gra3, (1973)], [Gra2, (1994)], et repris récemment dans [Gra4, Theorem 3.6, (2016)], le résultat suivant valable en toute généralité, ici énoncé dans le cas " $T = \emptyset$ " qui correspond aux groupes de classes au sens classique (l'énoncé n'utilisant que la ramification des places finies et l'éventuelle complexification des places à l'infini on doit utiliser le sens restreint) ; on désigne par I_K et P_K le groupe des idéaux de K et son sous-groupe des idéaux principaux (au sens restreint) :

Théorème 3.1. *Soit K/k une extension cyclique de corps de nombres, de groupe de Galois G . Soient \mathcal{C}_K et \mathcal{C}_k les groupes des classes au sens restreint de K et k respectivement. Soit e_q l'indice de ramification dans*

K/k d'un idéal premier \mathfrak{q} . Alors pour tout sous- G -module \mathcal{H} de \mathcal{C}_K et tout sous-groupe \mathcal{I} de I_K tel que $\mathcal{I} \cdot P_K/P_K = \mathcal{H}$, on a :

$$\#(\mathcal{C}_K/\mathcal{H})^G = \frac{\#\mathcal{C}_k \cdot \prod_{\mathfrak{q}} e_{\mathfrak{q}}}{[K : k] \cdot \#N_{K/k}(\mathcal{H}) \cdot (\Lambda : \Lambda \cap N_{K/k}(K^\times))},$$

où $N_{K/k}$ est la norme arithmétique et $\Lambda := \{x \in k^\times, (x) \in N_{K/k}(\mathcal{I})\}$.

Corollaire 3.2. Si $\mathcal{H} = \mathcal{C}_K(S_K)$, où S_K est un ensemble fini quelconque d'idéaux premiers de K , on obtient :

$$\#\mathcal{C}_K^{S_K G} = \frac{\#\mathcal{C}_k \cdot \prod_{\mathfrak{q}} e_{\mathfrak{q}}}{[K : k] \cdot \#\mathcal{C}_k(\text{NS}_K) \cdot (E_k^{\text{NS}_K} : E_k^{\text{NS}_K} \cap N_{K/k}(K^\times))},$$

où $N = N_{K/k}$ et $E_k^{\text{NS}_K} = \{x \in E_k^{S_k}, v_{\mathfrak{q}}(x) \equiv 0 \pmod{f_{\mathfrak{q}}} \forall \mathfrak{q} \in S_k\}$, où S_k est l'ensemble des idéaux premiers de k au-dessous de ceux de S_K et $f_{\mathfrak{q}}$ le degré résiduel de \mathfrak{q} dans K/k .

Jaulent a obtenu dans [J1, p. 177, (1986)] l'autre écriture :

$$\#\mathcal{C}_K^{S_K G} = \frac{\#\mathcal{C}_k^{S_k} \cdot \prod_{\mathfrak{q} \notin S_k} e_{\mathfrak{q}} \cdot \prod_{\mathfrak{q} \in S_k} e_{\mathfrak{q}} f_{\mathfrak{q}}}{[K : k] \cdot (E_k^{S_k} : E_k^{S_k} \cap N_{K/k}(K^\times))}.$$

Utiliser la relation $E_k^{S_k} \cap N_{K/k}(K^\times) = E_k^{\text{NS}_K} \cap N_{K/k}(K^\times)$ et la suite exacte $1 \rightarrow E_k^{S_k}/E_k^{\text{NS}_K} \rightarrow \langle S_k \rangle_{\mathbb{Z}}/\langle N_{K/k} S_K \rangle_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{C}_k(S_k)/\mathcal{C}_k(N_{K/k} S_K) \rightarrow 1$ pour comparer les deux expressions.

Remarques 3.3. Noter que la relation du Théorème 3.1 (et ses analogues) se met sous la forme du produit de deux entiers :

$$\#(\mathcal{C}_K/\mathcal{H})^G = \frac{[H_k : K \cap H_k]}{\#N_{K/k}(\mathcal{H})} \cdot \frac{\prod_{\mathfrak{q}} e_{\mathfrak{q}}}{[K : K \cap H_k] \cdot (\Lambda : \Lambda \cap N_{K/k}(K^\times))},$$

où H_k est le corps de classes de Hilbert de k ; si $K \cap H_k = k$, alors le premier facteur est égal à $\frac{\#\mathcal{C}_k}{\#N_{K/k}(\mathcal{H})}$ et le second à $\frac{[K : k]^{-1} \cdot \prod_{\mathfrak{q}} e_{\mathfrak{q}}}{(\Lambda : \Lambda \cap N_{K/k}(K^\times))}$.

La norme $N_{K/k} : \mathcal{C}_K \rightarrow \mathcal{C}_k$ a pour image le sous-groupe de \mathcal{C}_k isomorphe à $\text{Gal}(H_k/K \cap H_k)$.

(ii) Pour $K = k_n \subset k_\infty$, $G = G_n = \text{Gal}(k_n/k)$, et pour les ensembles de p -places S_k et S_{k_n} (p totalement décomposé dans k/\mathbb{Q}), la formule devient

$$\#\mathcal{C}_{k_n}^{S_{k_n} G_n} = \#\mathcal{C}_k^{S_k} \cdot \frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(E_k^{S_k} : E_k^{S_k} \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))}.$$

On peut énoncer, en désignant maintenant par \mathcal{C} les p -groupes de classes :

Théorème 3.4. Soit k un corps de nombres Galoisien réel de degré d et soit $p > 2$ un nombre premier totalement décomposé dans k ; on suppose que p vérifie la conjecture de Leopoldt dans k . Soit k_1 , de degré p sur k , le premier étage de la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de k .

Alors une condition suffisante pour que $\lambda = \mu = 0$ est que les deux conditions suivantes soient réalisées, où S_k est l'ensemble des p -places de k et $E_k^{S_k}$ le groupe des S_k -unités de k :

- (i) $\mathcal{C}_k^{S_k} = 1$ (i.e., S_k engendre le p -groupe des classes de k),
 (ii) $(E_k^{S_k} : E_k^{S_k} \cap N_{k_1/k}(k_1^\times)) = p^{d-1}$.

Démonstration. Soit $n \geq 1$ et considérons k_n . On a la suite exacte de G_n -modules :

$$1 \longrightarrow \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}) \longrightarrow \mathcal{C}_{k_n} \longrightarrow \mathcal{C}_{k_n}^{S_{k_n}} \longrightarrow 1,$$

qui conduit à :

$$1 \longrightarrow \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})^{G_n} \longrightarrow \mathcal{C}_{k_n}^{G_n} \longrightarrow \mathcal{C}_{k_n}^{S_{k_n}G_n} \longrightarrow H^1(G_n, \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})).$$

Comme p est totalement ramifié dans k_∞/k , $\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})^{G_n} = \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})$ et finalement on obtient :

$$1 \rightarrow \mathcal{C}_{k_n}^{G_n} / \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}) \rightarrow \mathcal{C}_{k_n}^{S_{k_n}G_n} = (\mathcal{C}_{k_n} / \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}))^{G_n} \rightarrow H^1(G_n, \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})),$$

qui fait que la condition $\mathcal{C}_{k_n}^{S_{k_n}G_n} = 1$ pour tout $n \gg 0$ implique la conjecture de Greenberg (Théorème 2.1) ; cette condition est équivalente (cf. Remarque 3.3 (ii)) à la réunion de la condition (i) et de la condition $(E_k^{S_k} : E_k^{S_k} \cap N_{k_n/k}(k_n^\times)) = p^{n \cdot (d-1)}$. D'après la Proposition 4.6, il suffit qu'elle soit satisfaite pour $n = 1$ pour qu'elle le soit pour tout n . \square

Remarques 3.5. (i) Pour le cas des corps quadratiques réels, cf. Section 5.

(ii) On a $H^1(G_n, \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})) = \nu_n \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})$ où ν_n est la norme algébrique pour G_n ; par conséquent, si $N_{k_n/k}$ est la norme arithmétique (ici surjective) et $j_{k_n/k}$ l'extension des classes, on a $\nu_n = j_{k_n/k} \circ N_{k_n/k}$.

On a $H^1(G_n, \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})) = 0$ si et seulement si ν_n est injective sur $\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})$, donc si et seulement si (l'image de ν_n étant $j_{k_n/k}(\mathcal{C}_k(S_k))$ car $N_{k_n/k}(S_{k_n}) = S_k$) on a l'isomorphisme $\nu_n : \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}) \xrightarrow{\sim} j_{k_n/k}(\mathcal{C}_k(S_k)) \subseteq \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})$ qui indique que $\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}) = j_{k_n/k}(\mathcal{C}_k(S_k))$; or $j_{k_n/k}(\mathcal{C}_k(S_k)) = \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})^{p^n}$ puisque si $\mathfrak{p} \in S_k$, on a $j_{k_n/k}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_n^{p^n}$, $\mathfrak{p}_n \mid \mathfrak{p}$ dans k_n , d'où $\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}) = \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})^{p^n}$ et $\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}) = 1$. On a donc $H^1(G_n, \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})) = 0$ si et seulement si $\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}) = 1$.

(iii) Si $\lambda = \mu = 0$, $\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})$ est borné dans la tour et on a $j_{k_n/k}(\mathcal{C}_k(S_k)) = \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})^{p^n} = 1$ pour $n \gg 0$ (capitulation de $\mathcal{C}_k(S_k)$ dans k_∞). De même il y a, pour tout n , capitulation de $\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})$ dans k_∞ .

4. SYMBOLES DE RESTES NORMIQUES

Par commodité, rappelons (d'après [Gra1, II.4.4.3]) une méthode de calcul des symboles de restes normiques de Hasse $\left(\frac{x, k_n/k}{\mathfrak{p}}\right) \in G_n := \text{Gal}(k_n/k)$, dans le cas particulier d'un corps de nombres Galoisien réel k avec $k_n \subset k_\infty$ de degré p^n sur k , et relativement à un idéal premier $\mathfrak{p} \mid p$ de k pour $p > 2$ totalement décomposé dans k/\mathbb{Q} . Dans ce cas, le conducteur de k_n/k divise (p^{n+1}) car on a, localement, $1 + p^{n+1} \alpha_0 = (1 + p \alpha'_0)^{p^n} = N_{k_n/k}(1 + p \alpha'_0)$, où α_0, α'_0 sont des p -entiers du produit des p -complétés de k . Le conducteur de \mathbb{Q}_n est p^{n+1} ($n \geq 1$).

Les calculs en question seront liés à la théorie des genres dont nous rappelons d'abord l'essentiel.

4.1. **Suite exacte des genres pour les sous-corps de k_∞/k .** On désigne par H_k et H_{k_n} les p -corps de classes de Hilbert de k et k_n . Dans le cas p totalement décomposé dans k , les groupes d'inertie $I_{\mathfrak{p}}(k_n/k)$ des $\mathfrak{p} \mid p$ dans k_n/k sont égaux à G_n .

On considère l'application ω_n qui associe à $x \in E_k$ la famille des symboles de Hasse $(\frac{x, k_n/k}{\mathfrak{p}}) \in G_n$, $\mathfrak{p} \mid p$. On obtient alors la suite exacte des genres interprétant la formule du produit des symboles de Hasse d'une unité (voir, e.g., [Gra1, Proposition IV.4.5.1] pour $T = S = \emptyset$) :

$$(2) \quad \begin{aligned} 1 \rightarrow E_k/E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times) &\xrightarrow{\omega_n} \Omega(k_n/k) \subseteq \bigoplus_{\mathfrak{p} \mid p} I_{\mathfrak{p}}(k_n/k) \\ &\xrightarrow{\pi_n} \text{Gal}(H_{k_n/k}/k_n H_k) \rightarrow 1, \end{aligned}$$

où $\Omega(k_n/k) := \left\{ (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \bigoplus_{\mathfrak{p} \mid p} I_{\mathfrak{p}}(k_n/k), \prod_{\mathfrak{p} \mid p} s_{\mathfrak{p}} = 1 \right\} \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{d-1}$ et où $H_{k_n/k}$ est le p -corps des genres de k_n défini comme la sous-extension maximale de H_{k_n} , Abélienne sur k , selon le schéma suivant où l'on sait que $H_{k_n/k}$ est fixe par l'image, par l'application d'Artin, de $\mathcal{C}_{k_n}^{1-\sigma_n}$, où σ_n est un générateur de G_n (en effet, le groupe des commutateurs $[\Gamma, \Gamma]$ de $\Gamma = \text{Gal}(H_{k_n/k})$ est $\text{Gal}(H_{k_n/k})^{1-\sigma_n}$, $\Gamma/\text{Gal}(H_{k_n/k})$ étant cyclique) :

$$\begin{array}{ccccc} k_n & \xrightarrow{\quad} & k_n H_k & \xrightarrow{\prod_{\mathfrak{p} \mid p} s'_{\mathfrak{p}}} & H_{k_n/k} & \xrightarrow{\simeq \mathcal{C}_{k_n}^{1-\sigma_n}} & H_{k_n} \\ G_n \Big| & & \Big| & & \Big| & & \\ k & \xrightarrow{\simeq \mathcal{C}_k} & H_k & \xrightarrow{\langle I_{\mathfrak{p}}(H_{k_n/k}/H_k) \rangle_{\mathfrak{p} \mid p}} & & & \end{array}$$

L'image de ω_n est contenue dans $\Omega(k_n/k)$ et l'application π_n est ainsi définie : à $(s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \bigoplus_{\mathfrak{p} \mid p} I_{\mathfrak{p}}(k_n/k)$, π_n associe le produit $\prod_{\mathfrak{p} \mid p} s'_{\mathfrak{p}}$ des relèvements $s'_{\mathfrak{p}}$ des $s_{\mathfrak{p}}$ dans les groupes d'inertie $I_{\mathfrak{p}}(H_{k_n/k}/H_k)$ qui engendrent $\text{Gal}(H_{k_n/k}/H_k)$; il résulte de la formule du produit que si $(s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ est dans $\Omega(k_n/k)$, $\prod_{\mathfrak{p} \mid p} s'_{\mathfrak{p}}$ fixe à la fois H_k et k_n , donc $k_n H_k$.

La suite exacte des genres montre que le noyau de π_n est $\omega_n(E_k)$.

On a, comme attendu, $[H_{k_n/k} : k_n] = \frac{\#\mathcal{C}_{k_n}}{\#\mathcal{C}_{k_n}^{1-\sigma_n}} = \#\mathcal{C}_{k_n}^{G_n}$. On montrera que

le degré $[H_{k_n/k} : k_n]$ (et donc $\#\mathcal{C}_{k_n}^{G_n}$) est constant à partir du rang $n = e$ donné par l'exposant p^e du groupe de torsion de $\text{Gal}(H_k^{\text{pr}}/H_k)$, où H_k^{pr} est la pro- p -extension Abélienne p -ramifiée maximale de k et que ce degré est égal à $\#\mathcal{T}_k$, où \mathcal{T}_k est le groupe de torsion de $\text{Gal}(H_k^{\text{pr}}/k)$ (cf. Théorèmes 4.7 et 4.8).

4.2. **Calcul effectif des symboles $(\frac{x, k_n/k}{\mathfrak{p}})$.** Soit $x \in k^\times$ et soit $\mathfrak{p} \mid p$ un idéal premier de k au-dessus de p (x n'est pas supposé étranger à \mathfrak{p}). Soit $x'_{\mathfrak{p}} \in k^\times$ (appelé un \mathfrak{p} -associé de x relativement à k_n/k) tel que (théorème des restes chinois) :

- (i) $x'_{\mathfrak{p}} x^{-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{n+1}}$,
- (ii) $x'_{\mathfrak{p}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{m+1}}$, pour tout $\mathfrak{p}' \mid p$, $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$.

Par la formule du produit, on a $\left(\frac{x'_p, k_n/k}{\mathfrak{p}}\right) = \prod_{\mathfrak{q}, \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} \left(\frac{x'_p, k_n/k}{\mathfrak{q}}\right)^{-1}$, et comme

$\left(\frac{x, k_n/k}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{x'_p, k_n/k}{\mathfrak{p}}\right)$ d'après (i) et la définition du \mathfrak{p} -conducteur de k_n/k ,

$\left(\frac{x, k_n/k}{\mathfrak{p}}\right) = \prod_{\mathfrak{q}, \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} \left(\frac{x'_p, k_n/k}{\mathfrak{q}}\right)^{-1}$. Calculons les symboles de ce produit :

- si $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}' \mid p$, $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$, $x'_p \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}'^{m+1}}$ et on a $\left(\frac{x'_p, k_n/k}{\mathfrak{p}'}\right) = 1$,
- si $\mathfrak{q} \nmid p$, \mathfrak{q} est non ramifié et dans ce cas, $\left(\frac{x'_p, k_n/k}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{k_n/k}{\mathfrak{q}}\right)^{v_{\mathfrak{q}}(x'_p)}$

(où $\left(\frac{k_n/k}{\mathfrak{q}}\right)$ est le symbole de Frobenius de \mathfrak{q} et $v_{\mathfrak{q}}$ la valuation \mathfrak{q} -adique).

Finalement, $\left(\frac{x, k_n/k}{\mathfrak{p}}\right) = \prod_{\mathfrak{q} \nmid p} \left(\frac{k_n/k}{\mathfrak{q}}\right)^{-v_{\mathfrak{q}}(x'_p)}$. Posons $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x) = \prod_{\mathfrak{q} \nmid p} \mathfrak{q}^{v_{\mathfrak{q}}(x'_p)}$

($\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x)$ est étranger à p), alors on a $(x'_p) =: \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(x'_p)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x) = \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(x)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x)$, et

on a obtenu $\left(\frac{x, k_n/k}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{k_n/k}{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x)}\right)^{-1}$ (inverse du symbole d'Artin de $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x)$).

On vérifie que $\left(\frac{k_n/k}{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x)}\right)$ ne dépend pas du choix de x'_p . Si $v_{\mathfrak{p}}(x) = 0$, alors $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x) = (x'_p)$. En dépit des notations, (x'_p) et $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x)$ dépendent de n .

D'après le théorème de relèvement normique dans k/\mathbb{Q} , l'image canonique de $\left(\frac{k_n/k}{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x)}\right) \in G_n$ dans $\text{Gal}(\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q}) \simeq \{a \in (\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z})^\times, a \equiv 1 \pmod{p}\}$,

isomorphe à $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, est le symbole d'Artin $\left(\frac{\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q}}{N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x))}\right)$ qui caractérise $\left(\frac{k_n/k}{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x)}\right)$ et où $N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x)) > 0$ (norme absolue).

Définition 4.1. On suppose p totalement décomposé dans k . Soit $x \in k^\times$.

(i) Si x est étranger à p , on définit les coefficients $\delta_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$, $\mathfrak{p} \mid p$, par la relation : $(x^{p-1} - 1) = p \cdot \prod_{\mathfrak{p} \mid p} \mathfrak{p}^{\delta_{\mathfrak{p}}(x)} \cdot \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$ étranger à p .

(ii) Si x n'est pas étranger à p , on définit les coefficients $\delta_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$ par les relations : $((x \cdot p^{-v_{\mathfrak{p}}(x)})^{p-1} - 1) = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^{\delta_{\mathfrak{p}}(x)} \cdot \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}$ étranger à p , $\mathfrak{p} \mid p$.

Ces définitions peuvent s'exprimer en termes de valuations logarithmiques et de groupes de classes logarithmiques introduits par Jaulent (cf. [J4], [J6, Théorème B] ainsi que [BJ] pour les aspects numériques ; voir aussi [Gra1, III.5] pour des généralités logarithmiques et cyclotomiques).

Lemme 4.2. Soit $x \in k^\times$ étranger à p et soit $\mathfrak{p} \mid p$ fixé. Soit $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x) = (x'_p)$, où x'_p est un \mathfrak{p} -associé de x relativement à k_n/k .

Alors on a $N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x)) \equiv x \pmod{\mathfrak{p}^{n+1}}$ et on a, pour tout $n \geq \delta_{\mathfrak{p}}(x)$, $\frac{1}{p} \cdot \log(N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x))) \equiv \alpha_{\mathfrak{p}}(x) \cdot p^{\delta_{\mathfrak{p}}(x)} \pmod{p^n}$, $\alpha_{\mathfrak{p}}(x) \in \mathbb{Z}_p^\times$.

Démonstration. On peut écrire (i) et (ii) définissant x'_p , sous la forme :

$$(i') \quad x'_p x^{-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{n+1}},$$

$$(ii') \quad x'_p \equiv 1 \pmod{\tau^{-1} \mathfrak{p}^{n+1}}, \text{ pour tout } \tau \in \text{Gal}(k/\mathbb{Q}), \tau \neq 1.$$

On a $N_{k/\mathbb{Q}}(x'_p) = \prod_{\tau \in \text{Gal}(k/\mathbb{Q})} (\tau x'_p) = x'_p \cdot \prod_{\tau \neq 1} (\tau x'_p)$ qui conduit à :

$$N_{k/\mathbb{Q}}(x'_p) \equiv x \pmod{\mathfrak{p}^{n+1}}.$$

Donc, pour $n > \delta_{\mathfrak{p}}(x)$, il vient en élevant la congruence ci-dessus à la puissance $p - 1$:

$$v_{\mathfrak{p}}(\mathbb{N}_{k/\mathbb{Q}}(x'_{\mathfrak{p}})^{p-1} - 1) = v_{\mathfrak{p}}(x^{p-1} - 1) = \delta_{\mathfrak{p}}(x) + 1;$$

mais comme $\mathbb{N}_{k/\mathbb{Q}}(x'_{\mathfrak{p}})$ est rationnel, on a $v_{\mathfrak{p}}(\mathbb{N}_{k/\mathbb{Q}}(x'_{\mathfrak{p}})^{p-1} - 1) = \delta_{\mathfrak{p}}(x) + 1$, d'où le lemme en prenant le "logarithme normalisé" $\frac{1}{p} \cdot \log$ (lequel est nul modulo p^n si $\delta_{\mathfrak{p}}(x) = n$). \square

Lemme 4.3. *Soient $\mathfrak{p} \mid p$ fixé et $x'_{\mathfrak{p}}$ un \mathfrak{p} -associé de x relativement à k_n/k ; soit $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x) = (x'_{\mathfrak{p}}) \cdot \mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}(x)}$. Alors on a $\mathbb{N}_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x)) \equiv x \cdot p^{-v_{\mathfrak{p}}(x)} \pmod{\mathfrak{p}^{n+1}}$, et on a, pour tout $n \geq \delta_{\mathfrak{p}}(x)$, $\frac{1}{p} \cdot \log(\mathbb{N}_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x))) \equiv \alpha_{\mathfrak{p}}(x) \cdot p^{\delta_{\mathfrak{p}}(x)} \pmod{p^n}$, $\alpha_{\mathfrak{p}}(x) \in \mathbb{Z}_p^{\times}$.*

Démonstration. On a $\mathbb{N}_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x)) = \mathbb{N}_{k/\mathbb{Q}}(x'_{\mathfrak{p}}) \cdot p^{-v_{\mathfrak{p}}(x)}$; on est ramené au calcul précédent via (i'), (ii'), où l'on aura $\mathbb{N}_{k/\mathbb{Q}}(x'_{\mathfrak{p}}) x^{-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{n+1}}$. Finalement, $\mathbb{N}_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x)) \equiv x \cdot p^{-v_{\mathfrak{p}}(x)} \pmod{\mathfrak{p}^{n+1}}$ qui conduit à :

$$v_{\mathfrak{p}}(\mathbb{N}_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x))^{p-1} - 1) = v_{\mathfrak{p}}((x \cdot p^{-v_{\mathfrak{p}}(x)})^{p-1} - 1) = \delta_{\mathfrak{p}}(x) + 1,$$

et à une conclusion analogue pour l'expression du logarithme. \square

Vu comme élément de $\{a \in (\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z})^{\times}, a \equiv 1 \pmod{p}\}$, le symbole d'Artin $\left(\frac{\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q}}{\mathbb{N}_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x))}\right)$ est représenté sous forme additive par le logarithme normalisé $\frac{1}{p} \cdot \log$ de $\mathbb{N}_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x)) > 0$. On identifie cet automorphisme d'Artin à $\frac{1}{p} \cdot \log(\mathbb{N}_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x))) =: \alpha_{\mathfrak{p}}(x) \cdot p^{\delta_{\mathfrak{p}}(x)} \pmod{p^n}$, $\alpha_{\mathfrak{p}}(x) \in \mathbb{Z}_p^{\times}$.

L'ordre de $\left(\frac{k_n/k}{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x)}\right)$ dans G_n est l'ordre de $\left(\frac{\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q}}{\mathbb{N}_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}(x))}\right)$ dans $\text{Gal}(\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q})$. On peut énoncer en résumé :

Théorème 4.4. *Soit k un corps de nombres Galoisien réel et soit $p > 2$ un nombre premier totalement décomposé dans k . Soit k_{∞} la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de k et, pour tout $n \geq 0$, soit k_n le sous-corps de k_{∞} de degré p^n sur k . Soit $x \in k^{\times}$ et soient $\delta_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$, pour $\mathfrak{p} \mid p$, les entiers définis par $\delta_{\mathfrak{p}}(x) + 1 := v_{\mathfrak{p}}((x p^{-v_{\mathfrak{p}}(x)})^{p-1} - 1)$ pour tout $\mathfrak{p} \mid p$ (Définition 4.1) :*

(i) *L'élément x est norme locale en $\mathfrak{p} \mid p$ dans k_n/k si et seulement si $\delta_{\mathfrak{p}}(x) \geq n$.*

(ii) *Pour $\mathfrak{p} \mid p$ fixé, soit $x'_{\mathfrak{p}}$ un \mathfrak{p} -associé de x relativement au calcul du symbole $\left(\frac{x, k_n/k}{\mathfrak{p}}\right)$. Alors, si $\delta_{\mathfrak{p}}(x) \leq n$, l'ordre et l'image de $\left(\frac{x, k_n/k}{\mathfrak{p}}\right)$ dans $\text{Gal}(\mathbb{Q}_n/\mathbb{Q})$ sont $p^{n-\delta_{\mathfrak{p}}(x)}$ et $\frac{1}{p} \cdot \log(\mathbb{N}_{k/\mathbb{Q}}((x'_{\mathfrak{p}}) \cdot p^{-v_{\mathfrak{p}}(x)})) =: \alpha_{\mathfrak{p}}(x) \cdot p^{\delta_{\mathfrak{p}}(x)} \pmod{p^n}$, $\alpha_{\mathfrak{p}}(x) \in \mathbb{Z}_p^{\times}$.*

(iii) *On a $\delta_{\mathfrak{p}}(\tau x) = \delta_{\tau^{-1}\mathfrak{p}}(x)$ pour tout $\mathfrak{p} \mid p$ et $\tau \in \text{Gal}(k/\mathbb{Q})$.*

Corollaire 4.5. *Si $x \in k^{\times}$ est partout norme locale en dehors de p dans k_n/k (i.e., (x) norme d'un idéal de k_n), il est alors partout norme locale (donc norme globale dans k_n/k) si et seulement si $\delta_{\mathfrak{p}}(x) \geq n$ pour tout $\mathfrak{p} \mid p$ (sauf un en raison de la formule du produit).*

D'un point de vue heuristique on a, a priori, $\delta_p(x) \geq 1$ avec la probabilité $\frac{1}{p}$, de sorte qu'en general $(\frac{x, k_n/k}{p}) = (\frac{k_n/k}{\mathfrak{a}_p(x)})^{-1}$ est un générateur de G_n , ce qui est très favorable pour la conjecture de Greenberg. Cependant, le cas de $x \in k^\times$ partout norme locale en dehors de p dans k_n/k montre que les $\delta_p(x)$ ne sont pas indépendants en raison de la formule du produit (considérée comme unique) ; on verra que ceci provient aussi, pour x étranger à p , du fait que $N_{k/\mathbb{Q}}(x)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$ (voir Section 8 pour une analyse).

Proposition 4.6. (i) Soit Λ un sous-groupe de k^\times tel que tout $x \in \Lambda$ soit partout norme locale en dehors de p dans k_n/k , pour $n \geq 1$ donné (i.e., x norme d'un idéal de k_n). On suppose que $(\Lambda : \Lambda \cap N_{k_1/k}(k_1^\times)) = p^{d-1}$; alors on a $(\Lambda : \Lambda \cap N_{k_n/k}(k_n^\times)) = p^{n \cdot (d-1)}$.

(ii) Si Λ est un sous-groupe de $E_k^{S_k}$, on a $(\Lambda : \Lambda \cap N_{k_n/k}(k_n^\times)) = p^{n \cdot (d-1)}$ pour tout $n \geq 1$ dès que ceci est vrai pour $n = 1$.

Démonstration. L'hypothèse signifie que $\omega_1(\Lambda) = \Omega(k_1/k)$ (cf. § 4.1). Il existe des éléments $x_i \in \Lambda$, $1 \leq i \leq d-1$, tels que $\Omega(k_1/k) = \bigoplus_{i=1}^{d-1} \langle \omega_1(x_i) \rangle$, où chaque $\omega_1(x_i) = ((\frac{x_i, k_1/k}{p}))_{p|p}$ est d'ordre p ; les $\omega_1(x_i)$ sont les images canoniques des $\omega_\infty(x_i) := ((\frac{x_i, k_\infty/k}{p}))_{p|p}$ (par restriction des symboles de Hasse) qui constituent une \mathbb{Z}_p -base topologique de $\Omega(k_\infty/k) \simeq \mathbb{Z}_p^{d-1}$ car toute relation $\prod_{i=1}^{d-1} \omega_\infty(x_i)^{a_i} = 1$, $a_i \in \mathbb{Z}_p$ non tous divisibles par p , conduit par restriction à une relation non triviale au niveau $n = 1$.

Au niveau n , $\omega_n(\Lambda) = \bigoplus_{i=1}^{d-1} \langle \omega_n(x_i) \rangle$, d'ordre $p^{n \cdot (d-1)}$. Pour les S_k -unités, la condition de normes locales en dehors de p dans k_n/k est satisfaite pour tout n (k_n/k est p -ramifiée). \square

4.3. Groupe de torsion de la p -ramification Abélienne. Soit \mathcal{T}_k le groupe de torsion du groupe de Galois de la pro- p -extension Abélienne p -ramifiée maximale H_k^{pr} de k . En appliquant la formule analytique classique donnant $\#\mathcal{T}_k$ dans le cas réel sous la conjecture de Leopoldt (cf. [Co, Appendix, (1975)], [Se2, (1978)], [Gra1, Remark III.2.6.5 (i)]), en tenant compte du fait que $H_k \cap k_\infty = k$, que p est totalement décomposé dans k , que $\frac{\prod_{p|p} N_{k/\mathbb{Q}}(p)}{p} = p^{d-1}$, et que le régulateur p -adique normalisé R_k est le régulateur p -adique classique précisément divisé par p^{d-1} , on a :

$$\#\mathcal{T}_k = \#\mathcal{C}_k \cdot \#\text{tor}_p(U_k/\overline{E}_k) \quad \& \quad \#\text{tor}_p(U_k/\overline{E}_k) \sim R_k,$$

en désignant par $U_k := \prod_{p|p} U_p^1$ le groupe des unités locales principales de k , et par \overline{E}_k l'adhérence de E_k dans U_k ou plus précisément l'image dans U_k de $E_k \otimes \mathbb{Z}_p$. Par abus, nous écrivons que ce régulateur R_k est égal à $p^{v_p(R_k)}$ bien qu'il soit (sous la conjecture de Leopoldt) un élément non nul de \mathbb{Z}_p défini à une unité p -adique près.

Posons $U_k^* := \{u \in U_k, N_{k/\mathbb{Q}}(u) = 1\}$. De fait, on a $\text{tor}_p(U_k/\overline{E}_k) = U_k^*/\overline{E}_k$, car si $u^{p^r} \in \overline{E}_k$, alors $N_{k/\mathbb{Q}}(u) = 1$ puisque $N_{k/\mathbb{Q}}(\overline{E}_k) = \{1\}$ et

que U_k est sans p -torsion ; enfin, U_k^* est un \mathbb{Z}_p -module libre de rang $d - 1$ dans lequel \overline{E}_k est d'indice fini (conjecture de Leopoldt).

Théorème 4.7. *Soit k un corps de nombres Galoisien réel de degré d dans lequel p est totalement décomposé. On suppose que la conjecture de Leopoldt est vraie pour p dans k . Soit \mathcal{T}_k le groupe de torsion du groupe de Galois de la pro- p -extension Abélienne p -ramifiée maximale H_k^{pr} de k et soit p^e l'exposant de U_k^*/\overline{E}_k . Alors :*

(i) *Pour tout n , il existe une injection ψ_n de $E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times)/E_k^{p^n}$ dans U_k^*/\overline{E}_k ; par conséquent $\frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(E_k : E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))}$ divise R_k et il en résulte que $\#\mathcal{C}_{k_n}^{G_n} = \#\mathcal{C}_k \cdot \frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(E_k : E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))}$ divise $\#\mathcal{T}_k$.*

(ii) *Pour tout $n \geq e$, l'application ψ_n est de plus surjective et dans ce cas les divisibilités précédentes sont des égalités. En particulier $\#\mathcal{C}_{k_n}^{G_n} = \#\mathcal{T}_k$, et on a la suite exacte $1 \rightarrow E_k^{p^n} \rightarrow E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times) \xrightarrow{\psi_n} U_k^*/\overline{E}_k \rightarrow 1$, pour tout $n \geq e$.*

Démonstration. Nous supposons dans la suite que tout nombre étranger à p est de fait congru à 1 modulo p (quitte à l'élever à la puissance $p - 1$).

Soit $\varepsilon \in E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times)$; par conséquent on a $\delta_{\mathfrak{p}}(\varepsilon) \geq n$ pour tout $\mathfrak{p} \mid p$ (Corollaire 4.5). Donc $\varepsilon = u_0^{p^n}$, $u_0 \in U_k^*$.

(α) (définition de ψ_n). Soit ψ_n l'application qui à $\varepsilon \in E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times)$ associe la classe de u_0 dans U_k^*/\overline{E}_k . L'application ψ_n est définie car il n'y a pas de p -torsion dans U_k^* .

(β) (calcul de $\text{Ker}(\psi_n)$). Si $u_0 \in \overline{E}_k$, alors $\varepsilon \in (\overline{E}_k)^{p^n}$ est arbitrairement proche d'un élément de $E_k^{p^n}$; en effet, $\varepsilon = \varepsilon'_N \cdot u_N$, $\varepsilon'_N \in E_k$, $u_N \rightarrow 1$ dans E_k pour $N \rightarrow \infty$, d'où $u_N \in E_k^{p^n}$ (conjecture de Leopoldt [Gra1, Théorème III.3.6.2 (iv)] en lien avec la constante de Kummer–Leopoldt [AN]) ; d'où $\varepsilon \in E_k^{p^n}$ et $\text{Ker}(\psi_n) = E_k^{p^n}$. A ce stade, puisque $(E_k : E_k^{p^n}) = p^{n \cdot (d-1)}$, on obtient pour tout n les divisibilités du (i).

(γ) (surjectivité pour $n \geq e$). Soit $u \in U_k^*$ et écrivons que $u^{p^e} \in \overline{E}_k$; pour $N \gg 0$, il existe $\varepsilon'_N \in E_k$ tel que $u^{p^e} = \varepsilon'_N \cdot u_N$, $u_N \rightarrow 1$. D'où $u_N = u_1^{p^N} = (u_1^{p^e})^{p^{N-e}}$, $u_1 \in U_k^*$ et $u_1^{p^e} =: \overline{\varepsilon} \in \overline{E}_k$ par définition de e . Donc $u_N = \overline{\varepsilon}'^{p^e}$ pour $N \gg 0$, auquel cas $u^{p^e} = \varepsilon'_N \cdot \overline{\varepsilon}'^{p^e}$; par conséquent il existe $u' = u \cdot \overline{\varepsilon}'^{-1}$ dans la classe de u' donc de u modulo \overline{E}_k tel que $u'^{p^e} = \varepsilon'_N$. Posons $\varepsilon := \varepsilon'_N \cdot u'^{p^{n-e}} = u'^{p^n}$ (car $n \geq e$) ; étant partout norme locale, $\varepsilon \in N_{k_n/k}(k_n^\times)$ et $\psi_n(\varepsilon)$ est la classe de u modulo \overline{E}_k , d'où la surjectivité de ψ_n , $\frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(E_k : E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))} = \#(U_k^*/\overline{E}_k)$ et $\#\mathcal{C}_{k_n}^{G_n} = \#\mathcal{T}_k$.

(δ) (calcul direct de l'ordre pour $n \geq e$). Puisque p^e annule U_k^*/\overline{E}_k , on a pour $n \geq e$, $U_k^*/\overline{E}_k = U_k^*/U_k^{*p^n}\overline{E}_k$ et la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \overline{E}_k/\overline{E}_k \cap U_k^{*p^n} \longrightarrow U_k^*/U_k^{*p^n} \longrightarrow U_k^*/U_k^{*p^n}\overline{E}_k \longrightarrow 1.$$

On a $\overline{E}_k/\overline{E}_k \cap U_k^{*p^n} = E_k/E_k \cap U_k^{*p^n}$; or $E_k \cap U_k^{*p^n} = E_k/E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times)$; d'où le résultat puisque $\#(U_k^*/U_k^{*p^n}) = p^{n \cdot (d-1)}$. \square

Théorème 4.8. *Soit k un corps de nombres Galoisien réel de degré d dans lequel p est totalement décomposé. On suppose que la conjecture de Leopoldt est vraie pour p dans k . Soit \mathcal{T}_k le groupe de torsion du groupe de Galois de la pro- p -extension Abélienne p -ramifiée maximale H_k^{pr} de k et soit p^e l'exposant de U_k^*/\overline{E}_k . Soit $H_{k_n/k}$ le p -corps des genres de k_n .*

(i) On a $[H_{k_n/k} : k_n] = \#\mathcal{T}_k$, pour tout $n \geq e$.

(ii) On a $k_\infty H_{k_e/k} = H_k^{\text{pr}}$ et par conséquent l'extension H_k^{pr}/k_∞ est non ramifiée.¹

(iii) Soit $\Lambda \supseteq E_k$ un sous-groupe de k^\times tel que tout $x \in \Lambda$ soit norme locale dans k_n/k en dehors de p , pour un entier $n \geq 0$ donné (i.e., (x) norme d'un idéal de k_n). Alors $\frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(\Lambda : \Lambda \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))}$ divise R_k .

Pour $E_k \subseteq \Lambda \subseteq E_k^{S_k}$, cette divisibilité a lieu pour tout n .

Démonstration. (i) Considérons les corps des genres $H_{k_e/k}$ et $H_{k_n/k}$ (cf. § 4.1) ; on a $H_{k_e/k} k_n \subseteq H_{k_n/k}$ en raison de la totale ramification de p dans k_∞/k et de l'Abélianité de $H_{k_e/k} k_n/k$. D'où la valeur stationnaire du degré $[H_{k_n/k} : k_n]$ puisque $[H_{k_n/k} : k_n] = \#\mathcal{C}_{k_n}^{G_n}$ et que $\#\mathcal{C}_{k_n}^{G_n} = \#\mathcal{T}_k$ pour tout $n \geq e$ d'après le Théorème 4.7 (ii). D'où (i) et par conséquent (ii).

(iii) On a les injections canoniques

$$E_k/E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times) \hookrightarrow \Lambda/\Lambda \cap N_{k_n/k}(k_n^\times) \hookrightarrow \Omega(k_n/k)$$

car les symboles de Hasse en p des $x \in \Lambda$ vérifient la formule du produit par hypothèse ; donc $\frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(\Lambda : \Lambda \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))}$ divise $\frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(E_k : E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))}$ qui divise R_k (Théorème 4.7 (i)). \square

Remarque 4.9. La théorie des genres dit que l'image par π_n de $\Omega(k_n/k)$ est $\text{Gal}(H_{k_n/k}/k_n H_k)$ et que le noyau de π_n est $\omega_n(E_k) \subseteq \Omega(k_n/k)$, où $\omega_n(\varepsilon) = \left(\left(\frac{\varepsilon, k_n/k}{p}\right)\right)_{p|p} \forall \varepsilon \in E_k$, et $\#\omega_n(E_k) = (E_k : E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))$; en introduisant le sous-groupe \mathcal{N}_k^n des $x \in k^\times$ partout norme locale en dehors de p , on a pour tout n , $\Omega(k_n/k) = \omega_n(\mathcal{N}_k^n) \simeq (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^{d-1}$, et $\pi_n(\Omega(k_n/k)) = \pi_n \circ \omega_n(\mathcal{N}_k^n) = \text{Gal}(H_{k_n/k}/k_n H_k)$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$ fixé, l'application :

$$\theta_n := \pi_n \circ \omega_n : \mathcal{N}_k^n \xrightarrow{\omega_n} \Omega(k_n/k) \xrightarrow{\pi_n} \text{Gal}(H_{k_n/k}/k_n H_k)$$

est surjective de \mathcal{N}_k^n sur $\text{Gal}(H_{k_n/k}/k_n H_k)$ et de noyau $E_k \cdot N_{k_n/k}(k_n^\times)$.

Par conséquent, l'image par θ_n d'un sous-groupe Λ de \mathcal{N}_k^n contenant E_k est un sous-groupe de $\text{Gal}(H_{k_n/k}/k_n H_k)$ isomorphe à $\omega_n(\Lambda)/\omega_n(E_k)$, où

¹Ce résultat et une partie du Théorème 4.7 sont aussi démontrés dans [T2, Theorem 1.1, Lemma 2.3] par introduction du corps des genres. Voir aussi [J6, Corollaire 6], [Ng3].

$\#\omega_n(\Lambda) = (\Lambda : \Lambda \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))$. Autrement dit, on a la suite exacte :

$$1 \rightarrow E_k/E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times) \longrightarrow \Lambda/\Lambda \cap N_{k_n/k}(k_n^\times) \xrightarrow{\theta_n} \theta_n(\Lambda) \subseteq \text{Gal}(H_{k_n/k}/k_n H_k) \rightarrow 1.$$

Si l'on considère l'image par π_n d'un sous-groupe de $\bigoplus_{\mathfrak{p}|p} I_{\mathfrak{p}}(k_n/k)$, non contenu dans $\Omega(k_n/k)$, celle-ci n'est pas nécessairement contenue dans $\text{Gal}(H_{k_n/k}/k_n H_k)$ par absence de la formule du produit sur les p -places.

Théorème 4.10. *Soit \mathcal{N}_k^n , pour $n \geq 0$ fixé, le sous-groupe des $x \in k^\times$ partout norme locale en dehors de p dans k_n/k (i.e., (x) norme d'un idéal de k_n) et soit $\theta_n := \pi_n \circ \omega_n$ (cf. §4.1).*

(i) *Pour tout sous-groupe Λ de \mathcal{N}_k^n contenant E_k , $\theta_n(\Lambda)$ est isomorphe à un sous-groupe de $\text{Gal}(H_{k_n/k}/k_n H_k)$, lequel est isomorphe à un quotient de $\text{Gal}(H_k^{\text{pr}}/k_\infty H_k) \simeq U_k^*/\overline{E}_k \subseteq \mathcal{T}_k$ et $\#\theta_n(\Lambda)$ divise R_k .*

Pour $r \leq n$, on a $\#\theta_r(\Lambda) \leq \#\theta_n(\Lambda)$.

(ii) *Si $n \geq e$, où p^e est l'exposant de U_k^*/\overline{E}_k , alors $\theta_n(\Lambda) \simeq \theta_e(\Lambda)$.*

(iii) *Si Λ est un sous-groupe de $E_k^{S_k}$, alors les $\#\theta_n(\Lambda)$ forment une n -suite croissante (stationnaire à partir de $n = e$) de diviseurs de R_k .*

Démonstration. Soit $r \leq n$. Comme $H_{k_r/k} \subseteq H_{k_n/k}$, pour $\mathfrak{p} | p$, les symboles $\left(\frac{x, H_{k_r/k}/H_k}{\mathfrak{p}}\right)$ sont les restrictions des $\left(\frac{x, H_{k_n/k}/H_k}{\mathfrak{p}}\right)$, et l'image de $\theta_n(x) = \prod_{\mathfrak{p}|p} \left(\frac{x, H_{k_n/k}/H_k}{\mathfrak{p}}\right)$ dans la surjection canonique :

$$\text{Gal}(H_{k_n/k}/k_n H_k) \longrightarrow \text{Gal}(H_{k_r/k}/k_r H_k)$$

est $\theta_r(x)$, et par conséquent on a une surjection $\theta_n(\Lambda) \longrightarrow \theta_r(\Lambda)$ d'où la relation entre les ordres. Si $n \geq e$, la surjection devient l'isomorphisme :

$$\text{Gal}(H_{k_n/k}/k_n H_k) \simeq \text{Gal}(H_{k_e/k}/k_e H_k)$$

du Théorème 4.8 (i), et $\theta_n(\Lambda)$ est isomorphe à $\theta_e(\Lambda)$ d'où le résultat. Si Λ est un sous-groupe de $E_k^{S_k}$, ce qui précède est valable quel que soit n \square

Remarques 4.11. (i) Certains résultats de théorie d'Iwasawa donnent des isomorphismes au niveau infini mettant en jeu le groupe \mathcal{T}_k (cf. [LMN, Lemma 4.7], [T1], [T2], [OT], [BaN, Lemme 3.1]), mais en réalité, il y a régularisation à un niveau fini explicite.

On peut également rappeler le comportement (lorsque $\mu = 0$) de λ dans les p -extensions (relations de Riemann–Hurwitz–Kida (e.g., [Iw], [Sin]), et l'analyse du phénomène en p -ramification à un niveau fini [Gra7]).

(ii) Si $\mathcal{T}_k = 1$ (i.e., k est p -rationnel, [Gra1, §IV.3], [GJ], [JN], [MN]), on a évidemment $\lambda = \mu = \nu = 0$; ceci s'applique dans de nombreux cas numériques, comme par exemple le corps cubique étudié dans [T3] pour $p = 5$. Plus généralement on trouvera de nombreux exemples dans ce cadre et une étude détaillée des régulateurs p -adiques dans [Gra6], qui représentent ici le facteur crucial puisque \mathcal{C}_k est non trivial que pour un nombre fini de p tandis que c'est seulement conjecturé pour R_k donc pour \mathcal{T}_k .

(iii) On a $\mathcal{T}_k = 1$ si et seulement si $\mathcal{C}_k = R_k = 1$, et alors la formule de points fixes donnant $\#\mathcal{T}_{k_n}^{G_n}$ ([Gra1, Théorème IV.3.3, §IV (b)], [MN]) conduit à $\mathcal{T}_{k_n} = 1$ car k_n/k est “ p -primitivement ramifiée”. D’où $\mathcal{C}_{k_n} = 1$ et $R_{k_n} = 1$ pour tout $n \geq 0$ (p -rationalité dans la tour).

(iv) Soit $p^{\tilde{e}}$ l’exposant de \mathcal{T}_k . Soit I_k le groupe des idéaux de k étrangers à p et, pour $n \geq \tilde{e}$, soit $\tilde{E}_k^n := \{x \in k^\times, (x) \in I_k^{p^n}\}$. Alors on peut établir (en utilisant les techniques du §7.4.2) une suite exacte de la forme :

$$1 \longrightarrow \{x \in k^\times, x \text{ étranger à } p\}^{p^n} \longrightarrow \tilde{E}_k^n \cap N_{k_n/k}(k_n^\times) \xrightarrow{\tilde{\psi}_n} \mathcal{T}_k \longrightarrow 1.$$

Remarques 4.12. (i) Une S_k -unité est norme locale en dehors de p dans k_n/k pour tout $n \geq 0$, tandis que pour $x \notin E_k^{S_k}$ ceci n’est pas possible : en effet, supposons (x) norme d’un idéal de k_n , pour tout n , et posons $(x) = \mathfrak{a} \cdot \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{p}^{c_{\mathfrak{p}}}$, \mathfrak{a} étranger à p , $c_{\mathfrak{p}} \geq 0$; si $\mathfrak{l}^{\mathfrak{c}_l}$ est la composante \mathfrak{l} -primaire de \mathfrak{a} pour l’idéal premier \mathfrak{l} , pour un idéal premier $\mathfrak{L}_n \mid \mathfrak{l}$ de k_n , il existe $\tau_n \in \mathbb{Z}[G_n]$ tel que $\mathfrak{l}^{\mathfrak{c}_l} = N_{k_n/k}(\mathfrak{L}_n^{\tau_n}) = \mathfrak{l}^{f_l^{\tau_n(1)}}$, où f_l^n est le degré résiduel de \mathfrak{l} dans k_n/k et $\tau_n(1) \in \mathbb{Z}$ est l’image de τ_n par l’application d’augmentation. Les f_l^n étant strictement croissants pour $n \gg 0$, ceci est impossible sauf si $\tau_n(1) = 0$, auquel cas $c_l = 0$ et x est une S_k -unité.

Par conséquent, si $x \notin E_k^{S_k}$, il n’y a pas de formule du produit portant uniquement sur les p -places dans k_n/k pour n au-delà d’une certaine valeur dépendant des degrés résiduels des $\mathfrak{l} \mid (x)$ dans k_∞/k .

(ii) Le cadre de la conjecture de Greenberg et l’introduction de la filtration des groupes de classes \mathcal{C}_{k_n} par les $\mathcal{C}_{k_n}(\mathcal{I}_i^n)$ qui sont les sous-groupes des classes annulées par $(1 - \sigma_n)^i$, $0 \leq i \leq m_n - 1$, mettra en jeu les groupes :

$$\Lambda_i^n = \{x \in k^\times, (x) \in N_{k_n/k}(\mathcal{I}_i^n)\}$$

et le calcul de $(\Lambda_i^n : \Lambda_i^n \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))$, où :

$$N_{k_n/k}(\mathcal{I}_i^n) = \langle N_{k_n/k}(\mathfrak{A}_i^1), \dots, N_{k_n/k}(\mathfrak{A}_i^{r_i}) \rangle_{\mathbb{Z}},$$

les idéaux $\mathfrak{A}_i^j \in \mathcal{I}_i^n$ étant étrangers à p .

Donc Λ_i^n (étranger à p) ne contiendra pas de S_k -unités autres que les unités et l’aspect algorithmique se ramènera à l’étude des $x \in \Lambda_i^n$ et de leurs symboles normiques donnés par leurs quotients de Fermat en les $\mathfrak{p} \mid p$, ce qui constitue une approche différente de la conjecture de Greenberg.

5. ASPECTS NUMÉRIQUES – CAS DES CORPS QUADRATIQUES RÉELS

Soient \mathfrak{p}_1 et \mathfrak{p}_2 les deux idéaux premiers de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ au-dessus de p et S_k leur ensemble. Les S_k -unités génératrices modulo les unités sont données par π_1 et sa \mathbb{Q} -conjuguée π_2 , et sont telles que $(\pi_j) = \mathfrak{p}_j^{h_0}$ où h_0 est l’ordre de la classe des \mathfrak{p}_j , $j = 1, 2$.

Lemme 5.1. *Soit $\alpha \in k^\times$ étranger à p tel que $N_{k/\mathbb{Q}}(\alpha)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$, pour $n \geq 1$; alors on a (cf. Définition 4.1) $\delta_{\mathfrak{p}_1}(\alpha) = \delta_{\mathfrak{p}_2}(\alpha)$ ou bien $\delta_{\mathfrak{p}_1}(\alpha) \geq n$ & $\delta_{\mathfrak{p}_2}(\alpha) \geq n$. Donc si $\alpha^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$, on a $\alpha^{p-1} = 1 + p \cdot p^{\delta_p(\alpha)} \cdot \beta$, avec $\delta_p(\alpha) < n$ et β étranger à p .*

Démonstration. Soient $\omega_j \in k^\times$, $j = 1, 2$, deux nombres conjugués tels que $v_{\mathfrak{p}_j}(\omega_j) = 1$ et $\omega_1 \cdot \omega_2 = p\beta'$, avec β' étranger à p , et posons $\alpha^{p-1} =: \alpha_1^{p-1} = 1 + p \cdot \omega_1^{\delta_{\mathfrak{p}_1}(\alpha)} \omega_2^{\delta_{\mathfrak{p}_2}(\alpha)} \cdot \beta_1$, β_1 étranger à p , et soit α_2 le conjugué de α_1 . On a $N_{k/\mathbb{Q}}(\alpha)^{p-1} = (\alpha_1 \cdot \alpha_2)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$; donc on obtient :

$$\begin{aligned} & \omega_1^{\delta_{\mathfrak{p}_1}(\alpha)} \cdot \omega_2^{\delta_{\mathfrak{p}_2}(\alpha)} \cdot \beta_1 + \omega_2^{\delta_{\mathfrak{p}_1}(\alpha)} \cdot \omega_1^{\delta_{\mathfrak{p}_2}(\alpha)} \cdot \beta_2 \\ & \quad + p^{1+\delta_{\mathfrak{p}_1}(\alpha)+\delta_{\mathfrak{p}_2}(\alpha)} \cdot \beta_1 \beta_2 \beta' \equiv 0 \pmod{p^n}; \end{aligned}$$

si $\delta_{\mathfrak{p}_1}(\alpha) < n$ ou $\delta_{\mathfrak{p}_2}(\alpha) < n$, il vient nécessairement $\delta_{\mathfrak{p}_1}(\alpha) = \delta_{\mathfrak{p}_2}(\alpha)$. \square

Remarque 5.2. Dans cette situation pour les corps quadratiques, les $\delta_{\mathfrak{p}}(\alpha)$ seront notés $\delta_p(\alpha)$. Ceci vaut pour un $\alpha \in k^\times$ étranger à p et partout norme locale en dehors de p dans k_n/k (i.e., norme d'un idéal de k_n); en effet, le conducteur de \mathbb{Q}_n/\mathbb{Q} étant p^{n+1} , on a $N_{k/\mathbb{Q}}(\alpha)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$.

Pour une unité ε de k , on a (indépendamment de n) $\varepsilon^{p-1} = 1 + p \cdot p^{\delta_p(\varepsilon)} \cdot \beta$, $\delta_p(\varepsilon) \geq 0$, avec β étranger à p .

5.1. Calcul pratique des symboles normiques des S_k -unités. Pour le calcul des $\left(\frac{\pi_j, k_n/k}{\mathfrak{p}_1}\right)$ et $\left(\frac{\pi_j, k_n/k}{\mathfrak{p}_2}\right)$, $j = 1, 2$, on remarque que les π_j sont normes locales en dehors de p et que la formule du produit permet de ne calculer que les $\left(\frac{\pi_j, k_n/k}{\mathfrak{p}_1}\right)$ par exemple; mais l'action de $\text{Gal}(k/\mathbb{Q}) =: \{1, \tau\}$ montre que $\left(\frac{\tau(\pi_j), k_n/k}{\tau(\mathfrak{p}_1)}\right) = \tau\left(\frac{\pi_j, k_n/k}{\mathfrak{p}_1}\right)\tau^{-1} = \left(\frac{\pi_j, k_n/k}{\mathfrak{p}_1}\right)$.

On est donc ramené au seul calcul de $\left(\frac{\pi_2, k_n/k}{\mathfrak{p}_1}\right)$ avec π_2 étranger à \mathfrak{p}_1 . On a à résoudre le système de congruences définissant un \mathfrak{p}_1 -associé x' de $x = \pi_2$ (pour $n > \delta_{\mathfrak{p}_1}(\pi_2)$):

$$(3) \quad \begin{aligned} x' &\equiv \pi_2 \pmod{\pi_1^{n+1}}, \\ x' &\equiv 1 \pmod{\pi_2^{n+1}}, \end{aligned}$$

On détermine une "relation de Bézout" $U_1 \cdot \pi_1^{n+1} + U_2 \cdot \pi_2^{n+1} = 1$, où $U_1, U_2 \in \mathbb{Z}_{k,(p)}$ (anneau des p -entiers de k), ce qui conduit à la solution $x' = U_1 \cdot \pi_1^{n+1} + U_2 \cdot \pi_2^{n+1} \cdot \pi_2 \pmod{p^{n+1}}$ pour laquelle on a bien les congruences ci-dessus. L'idéal $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_1}(x)$ est alors (x') dont on prend la norme dans k/\mathbb{Q} pour caractériser le symbole d'Artin pour k_n/k dont on calcule l'ordre dans $(\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z})^\times$ qui est de la forme $p^{n-\delta_{\mathfrak{p}_1}(\pi_2)}$.

Le cas de ε est identique à partir du \mathfrak{p}_1 -associé $x'' = U_1 \cdot \pi_1^{n+1} + U_2 \cdot \pi_2^{n+1} \cdot \varepsilon \pmod{p^{n+1}}$.

5.2. Programmes PARI. Le programme ci-après (d'après [P]) fournit les informations suivantes :

$m, h =$ nombre de classes de k , $\varepsilon = u + v\sqrt{m} =$ unité fondamentale de k , $u, v \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $S_k =: \{\pi_1, \pi_2\}$, $z_\pi = p^{-\delta_{\mathfrak{p}_1}(\pi_2)}$ et $z_\varepsilon = p^{-\delta_p(\varepsilon)}$, et aussi n_π et n_ε qui figurent les symboles de Hasse de π_2 et ε dans $\Omega(k_n/k)$.

La conjecture de Greenberg est vérifiée dès que $\mathcal{d}_k(S_k) = \mathcal{C}_k$ et que l'un au moins des nombres z_π ou z_ε est égal à 1 (i.e., $\delta_{\mathfrak{p}_1}(\pi_2) = 0$ ou $\delta_p(\varepsilon) = 0$)

car le symbole de Hasse correspondant engendre G_n pour tout n (si ceci a lieu pour z_e , c'est que le régulateur normalisé $R_k \sim \frac{1}{p} \log(\varepsilon)$ est égal à 1). En pratique le programme utilise un n de l'ordre de 8 qui suffit largement dans tous les résultats numériques obtenus pour avoir les *valeurs exactes* de z_π et z_e , mais d'après la Proposition 4.6, il suffit de prendre $n_0 = 1$ (donc $n = n_0 + 1 = 2$ et des calculs modulo p^2 seulement) pour obtenir tous les cas où le test est positif (i.e., $z_\pi = 1$ ou $z_e = 1$).

Les mentions "PROBLÈME-NORMIQUE" (resp. "PROBLÈME-CLASSES") indiquent que $z_\pi < 1$ et $z_e < 1$ (resp. que S_k n'engendre pas \mathcal{C}_k).

```
{m = 10^4; p = 11; n0 = 7; n = n0 + 1; while(m < 10^4 + 10^3, m = m + 1;
if(core(m) == m & kronecker(m, p) == 1, y = x; Q = x^2 - m; K = bnfinit(Q, 1);
M = m; q = Mod(m, 4); if(q! = 1, M = 4 * m);
E = quadunit(M); h = qfbclassno(M); e1 = component(E, 2); e2 = component(E, 3);
if(q == 1, e2 = e2/2; e1 = e1 + e2); E = e1 + e2 * x;
D = divisors(h); nh = numdiv(h); for(k = 1, nh, d = component(D, k);
Sm = bnfisintnorm(K, -p^d); Sp = bnfisintnorm(K, p^d);
if(component(matsize(Sm), 2) > 1, pi1 = component(Sm, 1); k = nh);
if(component(matsize(Sp), 2) > 1, pi1 = component(Sp, 1); k = nh); h0 = d);
delta = valuation(h, p) - valuation(h0, p);
pi2 = -component(pi1, 1) + component(pi1, 2) * x;
print(""); print("m = ", m, " h = ", h, " E = ", E); print("p = ", p, " S = ", pi1, "", pi2);
Pi1 = pi1^n; Pi2 = pi2^n; Z = bezout(Pi1, Pi2);
U1 = component(Z, 1); U2 = component(Z, 2);
P = y^2 - Mod(m, p^n); Y = Mod(y, P); x = Y; A1 = eval(U1); A2 = eval(U2);
B1 = eval(Pi1); B2 = eval(Pi2); b1 = eval(pi1); b2 = eval(pi2); e = eval(E);
XP1 = Mod(A1 * B1 + A2 * B2 * b2, P); XPe = Mod(A1 * B1 + A2 * B2 * e, P);
n1 = norm(XP1)^(p-1); ne = norm(XPe)^(p-1);
z1 = znorder(n1)/p^n0; ze = znorder(ne)/p^n0;
if(z1 + ze < 1, print("PROBLEME - NORMIQUE"));
if(delta! = 0, print("PROBLEME - CLASSES")); print(z1, "", ze); x = y)}
```

Donnons l'extrait suivant pour $30007 \leq m \leq 30097$, $m \equiv 1 \pmod{3}$, et $p = 3$ (la dernière colonne donne la structure du 3-groupe des classes du premier étage k_1) :

m	h	z_π	z_e	\mathcal{C}_{k_1}	m	h	z_π	z_e	\mathcal{C}_{k_1}
30001	1	1	1	1	30055	2	1/27	1/27	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
30007	2	1/9	1/3	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	30058	4	1	1	1
30010	8	1	1	1	30061	1	1	1	1
30013	1	1/3	1	1	30067	2	1	1	1
30019	4	1	1/3	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	30070	4	1	1/3	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
30022	4	1/3	1	1	30073	4	1	1/27	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
30031	2	1/3	1/3	$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	30079	2	1	1	1
30034	2	1	1	1	30085	2	1/3	1	1
30043	18	1	1	$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$	30091	1	1	1	1
30046	2	1	1	1	30094	8	1	1/3	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
30049	1	1	1/3	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	30097	1	1	1	1

Si le nombre de classes est divisible par p , il faut vérifier si le p -groupe des classes de k est engendré par les idéaux premiers au-dessus de p , sinon la conclusion n'est pas valable. Pour cela le programme retient l'ordre h_0 de la classe de \mathfrak{p}_1 pour lequel $\mathfrak{p}_1^{h_0} = (\pi_1)$; si les valuations p -adiques de h_0 et du nombre de classes h sont égales, ceci veut dire que \mathcal{C}_k est cyclique et engendré par la p -classe de \mathfrak{p}_1 .

Par exemple, dans le cas de $m = 30043$ où $h = 18$, la S_k -unité génératrice est $317 + 2\sqrt{m}$, de norme 3^9 , et par conséquent la classe de \mathfrak{p}_1 , d'ordre $h_0 = 9$, est génératrice de \mathcal{C}_k .

La méthode est extrêmement simple et le programme très rapide pour n'importe quel p ; pour les 22794 valeurs de m inférieures à 10^5 , on a 19993 valeurs pour lesquelles on peut conclure que $\lambda_3 = \mu_3 = 0$. Mais dès que p est un peu grand le test est presque toujours positif et montre que $\lambda_p = \mu_p = 0$.

Pour chaque p , $3 \leq p \leq 541$, on obtient le tableau suivant selon le programme de comptage ci-après indiquant successivement le nombre C_1 de $m \leq 10^4$ (tels que p soit décomposé dans $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$), le nombre C_2 de cas donnant $\lambda_p = \mu_p = 0$, et $C_1 - C_2$ (cas non résolus) :

p	C_1	C_2	$C_1 - C_2$	p	C_1	C_2	$C_1 - C_2$
3	2279	2042	237	67	2993	2993	0
5	2534	2459	75	71	2994	2994	0
7	2660	2599	61	73	3001	3001	0
11	2781	2759	22	79	3001	3000	1
13	2822	2808	14	83	3002	3002	0
17	2873	2860	13	89	3008	3007	1
19	2886	2877	9	97	3011	3011	0
23	2908	2904	4	101	3010	3009	1
29	2936	2931	5	103	3005	3004	1
31	2944	2939	5
37	2960	2958	2	149	3020	3019	1
41	2968	2967	1
43	2971	2971	0	193	3023	3022	1
47	2971	2971	0	197	3029	3028	1
53	2983	2982	1
59	2986	2984	2	211	3027	3026	1
61	2988	2988	0

Les nombres p , $223 \leq p \leq 541$, ou absents du tableau, donnent $\lambda_p = \mu_p = 0$ pour tous les $m \leq 10^4$ tels que p soit décomposé dans $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

```
{for(j = 2, 100, C1 = 0; C2 = 0; m = 1; p = prime(j); n0 = 1; n = n0 + 1;
while(m < 10^4, m = m + 1; if(core(m) == m&kroner(m, p) == 1, C1 = C1 + 1;
y = x; Q = x^2 - m; K = bnfinit(Q, 1); M = m; q = Mod(m, 4); if(q! = 1, M = 4 * m);
E = quadunit(M); h = qfbclassno(M); e1 = component(E, 2); e2 = component(E, 3);
if(q == 1, e2 = e2/2; e1 = e1 + e2); E = e1 + e2 * x;
D = divisors(h); nh = numdiv(h); for(k = 1, nh, d = component(D, k);
Sm = bnfisintnorm(K, -p^d); Sp = bnfisintnorm(K, p^d);
if(component(matsize(Sm), 2) > 1, pi1 = component(Sm, 1); k = nh);
if(component(matsize(Sp), 2) > 1, pi1 = component(Sp, 1); k = nh); h0 = d);
delta = valuation(h, p) - valuation(h0, p);
pi2 = -component(pi1, 1) + component(pi1, 2) * x;
Pi1 = pi1^n; Pi2 = pi2^n; Z = bezout(Pi1, Pi2);
U1 = component(Z, 1); U2 = component(Z, 2);
P = y^2 - Mod(m, p^n); Y = Mod(y, P); x = Y; A1 = eval(U1); A2 = eval(U2);
B1 = eval(Pi1); B2 = eval(Pi2); b1 = eval(pi1); b2 = eval(pi2); e = eval(E);
XP1 = Mod(A1 * B1 + A2 * B2 * b2, P); XPe = Mod(A1 * B1 + A2 * B2 * e, P);
n1 = norm(XP1)^(p-1); ne = norm(XPe)^(p-1);
z1 = znorder(n1)/p^n0; ze = znorder(ne)/p^n0;
if(z1 + ze > 1&delta == 0, C2 = C2 + 1; x = y)); print(C1, "", C2)}
```

Dans [Su] il y a deux exemples plus délicats (pour $p = 3$) :

(i) $m = 2659$, $h = 3$, $\varepsilon = 63190881\sqrt{m} + 3258468890$, $\pi_1 = -2\sqrt{m} + 103$ qui dans notre table est indiqué avec $z_\pi = \frac{1}{3}$ et $z_e = \frac{1}{3^2}$ (mais \mathcal{C}_k est engendré par S_k). Il faut alors d'autres calculs explicites dans la tour pour démontrer que $\lambda_3 = \mu_3 = 0$ (cf. [FT1], [FK], [KS], [IS1], [IS2] utilisant les unités cyclotomiques).

(ii) $m = 12007$, $h = 3$, $\varepsilon = 65199591367431507\sqrt{m} + 7144340241111277688$, $\pi_1 = 429331\sqrt{m} + 47044570$, avec $z_\pi = \frac{1}{3^6}$ et $z_e = \frac{1}{3^2}$ (\mathcal{C}_k est engendré par S_k). Dans ce cas, la vérification utilise les fonctions L p -adiques, de nombreux arguments et aussi [IS1], [IS2].

Voir d'autres raisonnements dans [BJ], [CN], [F1], [FK], [FT1], [FT2], [I], [KS], [LMN], [Ni] (cas $p = 2$), [T1], [T2] (pour des corps cubiques totalement réels et $p = 3$), et bien d'autres.

Pour une table plus complète ($p = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$), prière de se connecter à : <https://www.dropbox.com/s/8wgjdkbm1m04xu4/R>

Il y a identité des valeurs de $\delta_{p_1}(\pi_2)$ et $\delta_p(\varepsilon)$, pour $p = 3$, avec celles de la table de [FT1]. Pour une table plus importante (mais avec $n_0 = 1$ seulement), utiliser : <https://www.dropbox.com/s/tcqfp41plz3u60/R>

Le programme suivant calcule la structure des groupes des classes de k et de k_1 pour $p = 3$; les bornes b et B de l'intervalle $[b, B]$ des m testés peut être choisie quelconque car le programme n'utilise que les $m \equiv 1 \pmod{3}$ de cet intervalle :

```
{b = 10^6; B = 10^3; b = b - component(Mod(b, 3), 2) + 1; m = b;
while(m < b + B, m = m + 3; if(core(m) == m, K = bnfinit(x^2 - m, 1);
hm = bnrinit(K, 1); hm = component(hm, 5);
R = component(polcompositum(x^3 - 3 * x + 1, x^2 - m), 1);
H = bnrinit(bnfinit(R, 1), 1); F = component(H, 5); G = component(F, 1);
print("m = ", m, " hm = ", hm, " structure = ", F))}
```

Ce qui donne les quelques exemples suivants avec $\mathcal{C}_{k_1} \neq 1$ (sous la forme $[\#\mathcal{C}_{k_1}, [\text{structure}]]$) :

m	\mathcal{C}_k	\mathcal{C}_{k_1}	m	\mathcal{C}_k	\mathcal{C}_{k_1}
1000003	[3, [3]]	[27, [3, 3, 3]]	1000126	[2, [2]]	[24, [6, 2, 2]]
1000018	[4, [4]]	[12, [12]]	1000135	[4, [2, 2]]	[12, [6, 2]]
1000042	[36, [18, 2]]	[36, [18, 2]]	1000147	[30, [30]]	[90, [30, 3]]
1000051	[4, [2, 2]]	[12, [6, 2]]	1000159	[1]	[3, [3]]
1000093	[12, [6, 2]]	[48, [6, 2, 2, 2]]	1000177	[1]	[12, [6, 2]]
1000099	[1]	[3, [3]]	1000189	[1]	[9, [3, 3]]
1000102	[2, [2]]	[18, [6, 3]]	1000198	[12, [12]]	[36, [36]]

6. FILTRATION DES \mathcal{C}_{k_n} – DÉFINITION DES GROUPES DE NOMBRES Λ_i^n

On revient au cas général d'un corps de nombres Galoisien réel k de degré d et où $p > 2$ est un nombre premier totalement décomposé dans k . On suppose que la conjecture de Leopoldt est vérifiée pour p dans k .

Dans cette section nous reprenons l'analyse de la conjecture de Greenberg sous la forme directe du "calcul" du p -groupe des classes de k_n selon l'algorithme défini dans [Gra4], et en utilisant des idéaux étrangers à p pour représenter les classes.

6.1. Introduction de la filtration des \mathcal{C}_{k_n} . Si l'on pose pour simplifier $M^n := \mathcal{C}_{k_n}$, $k_n \subset k_\infty$ de degré p^n sur k et de groupe de Galois $G_n =: \langle \sigma_n \rangle$, il existe une filtration ainsi définie :

Définition 6.1. Pour n fixé, $(M_i^n)_{i \geq 0}$ est la i -suite croissante de sous- G_n -modules de M^n définie (avec $M_0^n := 1$) par $M_{i+1}^n/M_i^n := (M^n/M_i^n)^{G_n}$, pour $0 \leq i \leq m_n - 1$, où m_n est le plus petit entier i tel que $M_i^n = M^n$.

Remarques 6.2. (i) Pour $i = 0$, on obtient $M_1^n = (M^n)^{G_n}$.

(ii) On a $M_{i+1}^n = \{c \in M^n, c^{1-\sigma_n} \in M_i^n\}$; Ainsi :

$$M_i^n = \{c \in M^n, c^{(1-\sigma_n)^i} = 1\}.$$

(iii) Pour n fixé, la i -suite des $\#(M_{i+1}^n/M_i^n)$, $0 \leq i \leq m_n$, est décroissante vers 1 en raison des injections :

$$M_{i+1}^n/M_i^n \hookrightarrow M_i^n/M_{i-1}^n \hookrightarrow \dots \hookrightarrow M_2^n/M_1^n \hookrightarrow M_1^n$$

définies par l'opération de $1 - \sigma_n$, et est majorée par $\#M_1^n$.

Ensuite, pour les sous- G_n -modules $M_i^n =: \mathcal{C}_{k_n}(\mathcal{I}_i^n)$ de M^n , on a la formule générale du Théorème 3.1 qui devient dans notre cas particulier :

$$(4) \quad \#(M_{i+1}^n/M_i^n) = \frac{\#\mathcal{C}_k}{\#\mathbb{N}_{k_n/k}(M_i^n)} \cdot \frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(\Lambda_i^n : \Lambda_i^n \cap \mathbb{N}_{k_n/k}(k_n^\times))},$$

où $\Lambda_i^n := \{x \in k^\times, (x) \in \mathbb{N}_{k_n/k}(\mathcal{I}_i^n)\}$ contient E_k , et où tout $x_i \in \Lambda_i^n$ est par nature norme locale en dehors de p dans k_n/k . On a alors :

$$(5) \quad \#M^n = \prod_{i=0}^{m_n-1} \#(M_{i+1}^n/M_i^n).$$

Pour n fixé, les M_i^n et $\mathbb{N}_{k_n/k}(M_i^n)$ définissent des i -suites croissantes de sous-groupes de \mathcal{C}_{k_n} et \mathcal{C}_k respectivement ; donc on a $M_{m_n}^n = \mathcal{C}_{k_n}$ et $\mathbb{N}_{k_n/k}(M_{m_n}^n) = \mathcal{C}_k$. On obtient que, pour n fixé, les i -suites d'entiers :

$$\frac{\#\mathcal{C}_k}{\#\mathbb{N}_{k_n/k}(M_i^n)} \text{ et } \frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(\Lambda_i^n : \Lambda_i^n \cap \mathbb{N}_{k_n/k}(k_n^\times))}, \quad i \geq 0,$$

sont respectivement des i -suites décroissantes de diviseurs de $\#\mathcal{C}_k$ et de R_k , en raison, pour la seconde, des injections (Théorème 4.8 (iii)) :

$$\begin{aligned} E_k/E_k \cap \mathbb{N}_{k_n/k}(k_n^\times) &\hookrightarrow \dots \hookrightarrow \Lambda_i^n/\Lambda_i^n \cap \mathbb{N}_{k_n/k}(k_n^\times) \\ &\hookrightarrow \Lambda_{i+1}^n/\Lambda_{i+1}^n \cap \mathbb{N}_{k_n/k}(k_n^\times) \hookrightarrow \dots \end{aligned}$$

les $\#(M_{i+1}^n/M_i^n)$ étant des diviseurs de $\#\mathcal{T}_k = \#\mathcal{C}_k \cdot R_k$. Par conséquent, on a au rang final $i = m_n$, en utilisant ce qui précède pour $M_{m_n}^n = \mathcal{C}_{k_n}$:

$$\mathbb{N}_{k_n/k}(M_{m_n}^n) = \mathcal{C}_k \text{ et } (\Lambda_{m_n}^n : \Lambda_{m_n}^n \cap \mathbb{N}_{k_n/k}(k_n^\times)) = p^{n \cdot (d-1)},$$

ce qui explique que $\#\mathcal{C}_{k_n}$ dépend essentiellement du nombre de pas m_n selon le résultat fondamental suivant.

Théorème 6.3. Soit k un corps de nombres Galoisien réel dans lequel p est totalement décomposé et vérifie la conjecture de Leopoldt. Soit \mathcal{T}_k le groupe de torsion du groupe de Galois de la pro- p -extension Abélienne p -ramifiée maximale de k (cf. § 4.3).

Soit $N_{\text{Iw}} \geq 0$ tel que la formule d'Iwasawa $\#\mathcal{C}_{k_n} = p^{\lambda \cdot n + \mu \cdot p^n + \nu}$ soit valable pour tout $n \geq N_{\text{Iw}}$.

(i) On a les inégalités $m_n \leq \lambda \cdot n + \mu \cdot p^n + \nu \leq v_p(\#\mathcal{T}_k) \cdot m_n$ pour tout $n \geq N_{\text{Iw}}$, où v_p désigne la valuation p -adique. Si $\mathcal{T}_k = 1$, alors $\lambda = \mu = \nu = 0$.

(ii) Si $\mathcal{T}_k \neq 1$, alors $m_n = c(n) \cdot (\lambda \cdot n + \mu \cdot p^n + \nu)$, $\frac{1}{v_p(\#\mathcal{T}_k)} \leq c(n) \leq 1$, avec en particulier l'inégalité principale sur le nombre de pas m_n de l'algorithme :

$$m_n \geq \frac{1}{v_p(\#\mathcal{T}_k)} (\lambda \cdot n + \mu \cdot p^n + \nu), \text{ pour tout } n \geq N_{\text{Iw}}.$$

Démonstration. Comme $\#(M_{i+1}^n/M_i^n) \geq p$ pour $0 \leq i \leq m_n - 1$, soit $\#\mathcal{C}_{k_n} = \#M^n \geq p^{m_n}$ en utilisant la relation (5), on en déduit l'inégalité $m_n \leq \lambda \cdot n + \mu \cdot p^n + \nu$; ensuite, d'après la relation (4) et le fait que $\#(M_{i+1}^n/M_i^n) \mid \#\mathcal{T}_k$, on a $\#(M_{i+1}^n/M_i^n) \leq \#\mathcal{T}_k$ pour $0 \leq i \leq m_n - 1$; d'où $\#\mathcal{C}_{k_n} \leq (\#\mathcal{T}_k)^{m_n}$ par (5), ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 6.4. Une heuristique raisonnable est que m_n reste, pour tout n , d'une valeur moyenne fonction de $\text{Gal}(k/\mathbb{Q})$ et de \mathcal{T}_k et non de n . Or, pour tout $n \gg 0$, les $\#(M_{i+1}^n/M_i^n)$ forment, à partir de $\#M_1^n$, une i -suite décroissante d'entiers divisant $\#\mathcal{T}_k$; une telle suite ne peut avoir, pour λ ou μ non nuls, au moins $\frac{1}{v_p(\#\mathcal{T}_k)} (\lambda \cdot n + \mu \cdot p^n + \nu)$ termes non triviaux sauf à établir un lien de type particulier avec les normes d'idéaux $\mathfrak{A}_i \in \mathcal{I}_i^n$ utilisés dans la tour, ce qui philosophiquement semble exclu, à notre avis, car ceci implique l'existence, pour $n \rightarrow \infty$, d'au moins un diviseur $t^n \neq 1$ de $\#\mathcal{T}_k$ tel que $\#(M_{i+1}^n/M_i^n) = t^n$ pour $O(1) \cdot (\lambda \cdot n + \mu \cdot p^n + \nu)$ valeurs consécutives de $i \in [1, m_n]$.

En faisant l'hypothèse très faible que la probabilité de $\#(M_{i+1}^n/M_i^n) \geq p$, pour $m_n = O(n)$ pas consécutifs de l'algorithme, est de la forme $\frac{1}{p^{f(n)}}$, où $f(n) \rightarrow \infty$ avec n , on peut admettre, sur un plan heuristique assez évident, qu'à partir d'un certain $n \gg N_{\text{Iw}}$, ceci n'est plus vraisemblable, auquel cas c'est l'existence même de la formule d'Iwasawa qui suggère la nullité de λ et μ et l'existence de i_0 assez grand tel que $\#(M_{i_0+1}^n/M_{i_0}^n) = 1$ pour tout $n \gg 0$ (i.e., $m_n \leq i_0$ pour tout n).

Nous approfondirons cet aspect, concernant i_0 , en examinant séparément les deux facteurs :

$$\frac{\#\mathcal{C}_k}{\#\text{N}_{k_n/k}(M_i^n)} \quad \text{et} \quad \frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(\Lambda_i^n : \Lambda_i^n \cap \text{N}_{k_n/k}(k_n^\times))}$$

et en énonçant les Heuristiques 7.3 et 7.4, puis nous donnerons des justifications probabilistes très naturelles (§ 7.4.2) et des statistiques numériques (Section 8).

A cet effet, rappelons l'algorithme qui permet de passer de Λ_i^n à Λ_{i+1}^n , et qui détermine le nombre de pas m_n , pour analyser les phénomènes en jeu, car dès qu'un $x \in \Lambda_{i+1}^n$ se rajoute aux éléments de Λ_i^n , ses $\delta_{\mathfrak{p}}(x)$, $\mathfrak{p} \mid p$, ont une grande probabilité d'être nuls ou au moins inférieurs aux précédents, ce qui donne la i -suite croissante des indices $(\Lambda_i^n : \Lambda_i^n \cap \text{N}_{k_n/k}(k_n^\times))$.

6.2. Algorithme de calcul des Λ_i . On omet l'indice n qui est fixé et on se place dans l'extension $K \subset k_\infty$ de degré p^n et de groupe de Galois $G =: \langle \sigma \rangle$ d'ordre p^n . On désigne pour simplifier par N la norme arithmétique $N_{K/k}$ et on pose $M := \mathcal{C}_K$.

(i) Pour le calcul de $M_1 = M^G$ à partir de $M_0 = 1$ et $\mathcal{I}_0 = 1$, on a $\#M_1 = \#\mathcal{C}_k \cdot \frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(\Lambda_0 : \Lambda_0 \cap N(K^\times))}$ avec $\Lambda_0 = \{x_0 \in k^\times, (x_0) \in N(1)\} = E_k$.

On considère les $x_0 \in \Lambda_0$ qui sont normes d'un élément $y_1 \in K^\times$. Donc $(x_0) = N(y_1) = (1)$, ce qui conduit à l'existence de $\mathfrak{A}_1 \in I_K$ tel que $\mathfrak{A}_1^{1-\sigma} = (y_1)$, où \mathfrak{A}_1 est défini à un idéal invariant près ; donc ici, puisque les idéaux premiers de K au-dessus de p sont invariants, on peut prendre \mathfrak{A}_1 étranger à p . On a $\mathcal{C}_K(\mathfrak{A}_1) \in M_1$. Réciproquement, si $\mathcal{C}_K(\mathfrak{A}'_1) \in M_1$, \mathfrak{A}'_1 choisi étranger à p dans sa classe, il existe $y'_1 \in K^\times$ tel que $\mathfrak{A}'_1{}^{1-\sigma} = (y'_1)$, donnant $N(y'_1) = x'_0 \in \Lambda_0 \cap N(K^\times)$. Ainsi y'_1 est étranger à p .

Les classes de ces idéaux \mathfrak{A}_1 engendrent M_1 et on pose :

$$\mathcal{I}_1 = \langle \mathfrak{A}_1^1, \dots, \mathfrak{A}_1^{r_1} \rangle.$$

Ceci suppose que l'on a résolu suffisamment d'équations normes pour engendrer M_1 . Par exemple, le cas $x_0 = y_1 = 1$ conduit normalement à inclure dans \mathcal{I}_1 des idéaux ambiges représentant les classes de k et les idéaux \mathfrak{P} de K au-dessus de p ; en effet, \mathfrak{A}_1 est défini à un idéal invariant près, ce qui peut changer la classe car \mathfrak{A}_1 peut être principal et non $\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{P}$; mais on peut toujours représenter la classe de \mathfrak{P} par un idéal \mathfrak{A}' de K étranger à p . On obtient $N(M_1)$ comme sous-groupe de \mathcal{C}_k , à partir de $N(\mathcal{I}_1) = \langle N(\mathfrak{A}_1^1), \dots, N(\mathfrak{A}_1^{r_1}) \rangle$; alors il vient $\Lambda_1 = \{x_1 \in k^\times, (x_1) \in N(\mathcal{I}_1)\}$ et, toujours au niveau n fixé :

$$\#(M_2/M_1) = \frac{\#\mathcal{C}_k}{\#N(M_1)} \times \frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(\Lambda_1 : \Lambda_1 \cap N(K^\times))}.$$

On vérifie qu'en dépit de la non unicité de \mathcal{I}_1 , le groupe Λ_1 est unique modulo $N(K^\times)$.

(ii) Pour le calcul de \mathcal{I}_2 , on considère les éléments x_1 de Λ_1 qui sont normes d'un $y_2 \in K^\times$; alors $(x_1) = N(y_2) = N(\mathfrak{B}_1)$, $\mathfrak{B}_1 \in \mathcal{I}_1$, donc il existe $\mathfrak{A}_2 \in I_K$ tel que $\mathfrak{A}_2^{1-\sigma} \cdot \mathfrak{B}_1 = (y_2)$, avec \mathfrak{A}_2 choisi étranger à p . On a $\mathcal{C}_K(\mathfrak{A}_2)^{1-\sigma} \in M_1$. Inversement, si $\mathcal{C}_K(\mathfrak{A}'_2) \in M_2$, \mathfrak{A}'_2 étranger à p , il existe $y'_2 \in K^\times$ tel que $\mathfrak{A}'_2{}^{1-\sigma} \cdot \mathfrak{B}'_1 = (y'_2)$, avec $\mathfrak{B}'_1 \in \mathcal{I}_1$, d'où $N(\mathfrak{B}'_1) = N(y'_2) =: (x'_1)$, $x'_1 \in \Lambda_1 \cap N(K^\times)$.

Ces idéaux de la forme $\mathfrak{A}_2^1, \dots, \mathfrak{A}_2^{r_2}$, sont ajoutés à \mathcal{I}_1 (puisque $M_2 \supseteq M_1$) pour former :

$$\mathcal{I}_2 = \langle \mathfrak{A}_1^1, \dots, \mathfrak{A}_1^{r_1} ; \mathfrak{A}_2^1, \dots, \mathfrak{A}_2^{r_2} \rangle,$$

d'où $N(\mathcal{I}_2)$ et $\Lambda_2 = \{x_2 \in k^\times, (x_2) \in N(\mathcal{I}_2)\}$, etc. On obtient donc des groupes Λ_i , étrangers à p , uniques modulo $N(K^\times)$, tels que :

$$E_k \subseteq \Lambda_1 \subseteq \dots \subseteq \Lambda_i \subseteq \dots$$

On suppose implicitement que chaque \mathcal{I}_i est formé d'idéaux étrangers à p . Dans le cas $\mathcal{C}_k = 1$, les groupes Λ_i sont engendrés par les unités $\varepsilon \in E_k$ et les $\alpha_i^j \in k^\times$, générateurs des $N(\mathfrak{A}_i^j)$, ce qui simplifie l'expression de Λ_i .

Cette description n'a pas lieu d'être effective dans la tour k_∞ , mais elle montre comment se déterminent les éléments x_i des Λ_i^n dont on rappelle que tout repose sur leurs \mathfrak{p} -quotients de Fermat, $\mathfrak{p} \mid p$, à partir de l'écriture $x_i^{p-1} = 1 + p \cdot \beta(x_i)$, conduisant à $\delta_{\mathfrak{p}}(x_i) = v_{\mathfrak{p}}(\beta(x_i)) \geq 0$.

Une heuristique classique est que, pour \mathfrak{p} fixé, les $\delta_{\mathfrak{p}}(x)$, $x \in k^\times$, sont aléatoires et indépendants. Cependant, il est nécessaire de préciser cet aspect pour le cas des idéaux \mathfrak{A}_i de k_n constituant les groupes \mathcal{I}_i^n pour lesquels $N_{k_n/k}(\mathcal{I}_i^n)$ conduit aux nombres x_i . Nous montrerons au § 7.4.2 et dans la Section 8 ce qu'il en est au plan probabiliste en utilisant des programmes établissant des statistiques très convaincantes.

Auparavant, examinons de façon plus numérique un cas non trivial, mais le plus simple possible, en supposant la conjecture fautive.

6.3. La i -suite des Λ_i^n sous les hypothèses $\mathcal{C}_k = 1$ & $\lambda \geq 1$. Pour fixer les idées, supposons que k est un corps quadratique réel, que $p > 2$ est décomposé, que $\#\mathcal{C}_k = 1$, que $\delta_p(\varepsilon) \geq 1$, et que (en posant pour simplifier $\mathfrak{p}_1 =: \mathfrak{p}$ et $\pi_2 =: \pi$) on a $\delta_{\mathfrak{p}}(\pi) \geq 1$ (cf. Section 5).

Par exemple, $m = 103$, $\varepsilon = 22419\sqrt{103} + 227528$, $\pi = \sqrt{103} + 10$, pour lesquels k est principal, $\delta_p(\varepsilon) = 1$ et $\delta_{\mathfrak{p}}(\pi) = 1$; ainsi la condition suffisante du Théorème 3.4 n'est pas vérifiée. On a donc $\#\mathcal{T}_k = R_k = p$ et la relation de divisibilité du Théorème 4.7 (i) pour tout n .

Soit n fixé pour lequel la formule d'Iwasawa est applicable, posons à nouveau $K := k_n$, $M := \mathcal{C}_K$, et supposons par exemple $\lambda = 1$ ($\mu = 0$, $\nu \in \mathbb{Z}$); on a donc au niveau n , $\#M = p^{n+\nu}$ et puisque $\delta_p(\varepsilon) = 1$:

$$\#M_1 = \frac{p^n}{(\Lambda_0 : \Lambda_0 \cap N_{K/k}(K^\times))} = p, \quad \text{avec } \Lambda_0 = E_k.$$

On a $\mathcal{I}_1 = \langle \mathfrak{A}_1 \rangle$ obtenu de la façon suivante : pour une puissance convenable ε' de l'unité fondamentale ε (de fait, sous l'hypothèse faite, nécessairement $\varepsilon' = \varepsilon^{p^{n-1}}$), on a $\varepsilon' = N(y_1)$, $y_1 \in K^\times$, d'où $(y_1) = \mathfrak{A}_1^{1-\sigma}$ avec \mathfrak{A}_1 étranger à p tel que la classe de \mathfrak{A}_1 soit d'ordre p puisque M_1 est d'ordre p .

Posons $\mathfrak{A}_1^p = (z_1)$, $z_1 \in K^\times$, et $N_{K/k}(\mathfrak{A}_1) = (\alpha_1)$, $\alpha_1 \in k^\times$; on obtient $\alpha_1^p = N_{K/k}(z_1) \cdot \eta_1$ où η_1 est une unité de k . Soit alors $\omega = \omega_n$ l'application qui à $x \in k^\times$ associe dans $\Omega(K/k) \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ la famille des symboles de restes normiques dans K/k . On obtient $\omega(\eta_1) = \omega(\alpha_1^p) = \omega(\alpha_1)^p \in \Omega(K/k)^p$; or, en raison de l'hypothèse $\delta_p(\varepsilon) = 1$, on a $\omega(\eta_1) \in \Omega(K/k)^p$, et par conséquent $\omega(\alpha_1)$, donc $\delta_p(\alpha_1)$, peut a priori prendre toute valeur de façon équiprobable dans $\Omega(K/k)$ (sans la condition $\omega(\eta_1) \in \Omega(K/k)^p$, l'algorithme se serait arrêté avant, la relation $\omega(\eta_1) = \omega(\alpha_1^p)$ étant alors absurde). On a donc obtenu $N_{K/k}(\mathcal{I}_1) = \langle N_{K/k}(\mathfrak{A}_1) \rangle = \langle (\alpha_1) \rangle$, d'où :

$$\#(M_2/M_1) = \frac{p^n}{(\Lambda_1 : \Lambda_1 \cap N_{K/k}(K^\times))}, \quad \text{avec } \Lambda_1 = \langle \varepsilon, \alpha_1 \rangle.$$

Puisque $\delta_p(\varepsilon) = 1$, l'algorithme ne peut se terminer par $M = M_1$ que si $\delta_p(\alpha_1)$ est nul; sinon l'algorithme se poursuit, et en supposant $\delta_p(\alpha_1) \geq 1$, il faut prendre un élément convenable de Λ_1 , de la forme $\alpha_1^u \cdot \varepsilon^v$, $u, v \in \mathbb{Z}$, comme norme de y_2 dans K/k et on obtient, puisque $N_{K/k}(\mathfrak{A}_1) = (\alpha_1)$, une

relation de la forme $\mathfrak{A}_2^{1-\sigma} \mathfrak{A}_1^u = (y_2)$ dans K pour définir \mathcal{I}_2 . Mais M_2/M_1 est annulé par p , et en supposant $M_2 \neq M_1$, on aura $\mathfrak{A}_2^p = \mathfrak{A}_1^w \cdot (z_2)$, $w \in \mathbb{Z}$, $z_2 \in K^\times$, d'où $N_{K/k}(\mathfrak{A}_2^p) = (\alpha_1^w) N_{K/k}(z_2)$ qui conduit, en posant $(\alpha_2) = N_{K/k}(\mathfrak{A}_2)$, à $\omega(\alpha_2^p) = \omega(\alpha_2)^p = \omega(\alpha_1^w \cdot \eta_2)$ pour une unité η_2 de k (or $\omega(\alpha_1)$ et $\omega(\eta_2)$ sont dans $\Omega(K/k)^p$). Comme précédemment, $\omega(\alpha_2)$ n'est soumis a priori à aucune obstruction pour conduire éventuellement à $\delta_p(\alpha_2) = 0$.

L'algorithme pour K se poursuit avec des calculs analogues et on obtient :

$$(6) \quad \omega(\alpha_1^p) \in \omega(\Lambda_0), \omega(\alpha_2^p) \in \omega(\Lambda_1), \dots, \omega(\alpha_{i+1}^p) \in \omega(\Lambda_i), \dots$$

$$\text{où } \Lambda_i = \langle \varepsilon, \alpha_1, \dots, \alpha_i \rangle.$$

et où les $\#\omega(\Lambda_i) = (\Lambda_i : \Lambda_i \cap N_{K/k}(K^\times))$ forment une i -suite croissante, ici majorée par p^{n-1} puisque $\#(M_{i+1}/M_i) = \frac{p^n}{\#\omega(\Lambda_i)} = p$ pour $0 \leq i \leq m_n - 1$, donc stationnaire à la valeur p^{n-1} dès l'indice 0 ; chaque fois la relation $\omega(\alpha_{i+1}^p) \in \omega(\Lambda_i)$ permet, statistiquement, une "décroissance" des $\delta_p(\alpha_i)$, ce qui semble contradictoire avec un nombre de pas m_n tel que $m_n \geq n + \nu$ découlant de l'hypothèse $\lambda = 1$, $v_p(\#\mathcal{T}_k) = 1$ (cf. Théorème 6.3).

Une autre façon d'aborder ces questions heuristiques est la suivante (avec les mêmes hypothèses que ci-dessus) :

Représentons la classe de \mathfrak{A} dans K par un idéal premier \mathfrak{L} de K ; on a $N_{K/k}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{l}^{f^n} =: (\beta)^{f^n} =: (\alpha)$ où $\mathfrak{l} = (\beta)$ est l'idéal premier de k en-dessous de \mathfrak{L} et f^n son degré résiduel dans K/k (autrement dit, $\alpha = \beta^{f^n} \cdot \eta$, $\eta \in E_k$). Or la condition normique $\delta_p(\alpha) = 0$ ne peut avoir lieu que si $f^n = 1$ (i.e., \mathfrak{l} totalement décomposé dans K/k), puisque $\delta_p(\eta) \geq 1$ par hypothèse sur $\delta_p(\varepsilon)$; ainsi $\delta_p(\alpha) = 0$ implique, pour ℓ en-dessous de \mathfrak{l} , $\ell^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$. Mais on montrera au § 8.1 au moyen du théorème de Tchebotarev qu'une classe de k_n est toujours (donc *nécessairement*) représentable par un \mathfrak{L} totalement décomposé dans K/k .

Or les $\mathfrak{P} \in S_K$ sont de degré résiduel 1 dans k_∞/k . Ceci explique en partie la condition nécessaire et suffisante de Greenberg (Théorème 2.1) qui semble la seule "possibilité raisonnable" pour avoir $\mathcal{C}_{k_n}^{G_n} = \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})$ pour tout $n \gg 0$.

On a donc, sous l'hypothèse $\#\mathcal{T}_k = p$, $\lambda = 1$, $\#(M_{i+1}/M_i) = p$ pour environ n pas ; or on peut conjecturer que pour $n \gg 0$ on a $M = M_{O(1)}$. Le programme du § 5.2, donne pour $m = 103$, $\mathcal{C}_{k_1} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, ce qui prouve qu'au premier étage on a un M_2 distinct de M_1 (probabilité 1/3). Ensuite on obtient $\mathcal{C}_{k_2} \simeq \mathcal{C}_{k_3} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, qui suppose également $M = M_2 \neq M_1$ au second et troisième étage. Par des méthodes de type "spiegelungssatz" on montre que $\lambda = 0$ (cf. [BaN], [CN], [FT1]).

7. HEURISTIQUES SUR LES PROPRIÉTÉS DES FILTRATIONS DANS k_∞/k

Ici, contrairement aux études précédentes, on fixe l'étape i des algorithmes et on considère les n -suites des groupes M_i^n et Λ_i^n , pour $n \rightarrow \infty$.

7.1. Approche générale. On étudie les entiers $\#(M_{i+1}^n/M_i^n)$ pour i fixé et $n \rightarrow \infty$ à partir de leurs deux facteurs donnés par la Formule (4).

Lemme 7.1. *Pour tout $i \geq 0$ fixé, les $\#(M_{i+1}^n/M_i^n)$ forment une n -suite croissante stationnaire de diviseurs de $\#\mathcal{T}_k$, et les $\#M_i^n$ définissent une n -suite croissante stationnaire d'entiers.*

Démonstration. Le cas de la n -suite ($i = 0$) $\#(M_1^n/M_0^n) = \#M_1^n = \#\mathcal{C}_k \cdot \frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(E_k : E_k \cap \mathbb{N}_{k_n/k}(k_n^\times))}$ est clair (Théorème 4.7). Considérons pour $i \geq 0$

fixé celle définie par $\#(M_{i+1}^n/M_i^n) = \frac{\#\mathcal{C}_k}{\#\mathbb{N}_{k_n/k}(M_i^n)} \cdot \frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(\Lambda_i^n : \Lambda_i^n \cap \mathbb{N}_{k_n/k}(k_n^\times))}$,

où $\Lambda_i^n = \{x \in k^\times, (x) \in \mathbb{N}_{k_n/k}(\mathcal{I}_i^n)\}$.

Comme $M_i^n = \{c \in M^n, c^{(1-\sigma_n)^i} = 1\}$, on a $\mathbb{N}_{k_n+h/k}(M_i^{n+h}) \subseteq \mathbb{N}_{k_n/k}(M_i^n)$ pour tout $h \geq 0$, et la n -suite d'entiers $\frac{\#\mathcal{C}_k}{\#\mathbb{N}_{k_n/k}(M_i^n)} =: p^{c_i^n}$ est croissante,

donc stationnaire à une valeur notée $p^{c_i^\infty} \mid \#\mathcal{C}_k$, à partir d'un certain rang. Le second facteur $\frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(\Lambda_i^n : \Lambda_i^n \cap \mathbb{N}_{k_n/k}(k_n^\times))} =: p^{\rho_i^n}$ définit une n -suite

croissante stationnaire à une valeur notée $p^{\rho_i^\infty} \mid R_k$ (Théorème 4.10), à partir d'un certain rang, et au total le premier point du lemme en résulte pour la n -suite $\#(M_{i+1}^n/M_i^n)$; on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \#(M_{i+1}^n/M_i^n) = p^{c_i^\infty} \cdot p^{\rho_i^\infty} \mid \#\mathcal{T}_k$.

Enfin si l'on suppose par récurrence sur $i \geq 0$ la n -suite $\#M_i^n$ croissante stationnaire, la propriété en résulte pour la n -suite $\#M_{i+1}^n$. \square

La i -suite des $p^{c_i^\infty} \cdot p^{\rho_i^\infty}$ est décroissante; en effet, c'est le cas pour les i -suites $\#(M_{i+1}^n/M_i^n) = p^{c_i^n} \cdot p^{\rho_i^n}$ pour tout n fixé (cf. Remarque 6.2 (iii)), et de même pour la limite sur $n \rightarrow \infty$ qui conduit à une i -suite stationnaire, mais non nécessairement de limite 1; en effet, on a seulement que $p^{c_i^\infty} \cdot p^{\rho_i^\infty}$ divise $\#\mathcal{T}_k$ et il convient d'examiner chacun des deux facteurs.

Définition 7.2. *On dira que le processus limite sur i est fini (ce qui équivaut à $\lambda = \mu = 0$) s'il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p^{c_{i_0}^\infty} \cdot p^{\rho_{i_0}^\infty} = 1$; dans ce cas, pour tout $n \gg 0$, $\#M^n$ est une constante notée p^ν , indépendante de n .*

7.2. Comportement heuristique de $\omega_n(\Lambda_i^n) \subseteq \Omega(k_n/k)$, $n \rightarrow \infty$. Indépendamment du premier facteur, le processus limite sur i peut être infini (i.e., $p^{\rho_i^\infty} \neq 1$ pour tout i) si pour tout i il existe $n \gg 0$ tel que $\omega_n(\Lambda_i^n) \subsetneq \Omega(k_n/k)$ ou encore $(\Lambda_i^n : \Lambda_i^n \cap \mathbb{N}_{k_n/k}(k_n^\times)) < p^{n \cdot (d-1)}$. Par conséquent la finitude du processus limite dans ce cas ne peut provenir que de l'heuristique suivante, en raison des propriétés des quotients de Fermat (nous y reviendrons § 7.4.2) :

Heuristique 7.3. *On considère les groupes Λ_i^n associés à l'ensemble des algorithmes de détermination des sous-groupes M_i^n , $0 \leq i \leq m_n$, des filtrations des $M^n := \mathcal{C}_{k_n}$, $n \geq 0$. Alors il existe i_1 assez grand, indépendant*

de n , tel que $\frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(\Lambda_{i_1}^n : \Lambda_{i_1}^n \cap \mathbb{N}_{k_n/k}(k_n^\times))} = 1$ pour $n \rightarrow \infty$.

On peut remplacer i_1 par une fonction $i_1(n)$ telle que $\frac{i_1(n)}{n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.

Dans le cas quadratique p -principal, la finitude du processus est assurée dès que $\delta_p(x) = 0$ pour un $x \in \Lambda_{i_1}^{n_1}$ pour un certain n_1 assez grand, puisqu'alors $\omega_n(x)$ engendre $\Omega(k_n/k)$ pour tout $n \geq n_1$ et cela vient du fait que $\omega_1(x)$ est d'ordre p (donc $\omega_n(x)$ d'ordre p^n pour tout n).

7.3. Comportement heuristique de $N_{k_n/k}(M_i^n) \subseteq \mathcal{C}_k$, $n \rightarrow \infty$. Si $\mathcal{C}_k \neq 1$, la non finitude du processus limite sur i peut provenir du fait que pour tout i il existe $n \gg 0$ tel que $N_{k_n/k}(M_i^n) \subsetneq \mathcal{C}_k$ (i.e., $p^{c_i^\infty} \neq 1$) où l'on rappelle que pour $M_i^n = \mathcal{C}_{k_n}(\mathcal{I}_i^n)$, $N_{k_n/k}(\mathcal{I}_i^n)$ permet la poursuite de l'algorithme à partir des $x_i = N_{k_n/k}(y_i) \in \Lambda_i^n \cap N_{k_n/k}(k_n^\times)$ par définition tels que $(x_i) = N_{k_n/k}(\mathfrak{B}_i)$, $\mathfrak{B}_i \in \mathcal{I}_i^n$, et conduisant à $\mathfrak{A}_{i+1}^{1-\sigma_n} \cdot \mathfrak{B}_i = (y_i)$ pour obtenir à partir de ce $\mathfrak{A}_{i+1} \in \mathcal{I}_{i+1}^n$ (a priori aléatoire) la p -classe de $N_{k_n/k}(\mathfrak{A}_{i+1})$ dans \mathcal{C}_k .

On a, pour tout n et tout $h \geq 0$ (i fixé), le diagramme suivant où les normes N_{k_{n+h}/k_n} définies sur M^{n+h} et $(M^{n+h})^{(1-\sigma_{n+h})^i}$ sont surjectives, mais non celle définie sur M_i^{n+h} (qui peut être ni injective ni surjective) :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & M_i^{n+h} & \longrightarrow & M^{n+h} & \xrightarrow{(1-\sigma_{n+h})^i} & (M^{n+h})^{(1-\sigma_{n+h})^i} \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow N_{k_{n+h}/k_n} & & \downarrow N_{k_{n+h}/k_n} \\ 1 & \longrightarrow & M_i^n & \longrightarrow & M^n & \xrightarrow{(1-\sigma_n)^i} & (M^n)^{(1-\sigma_n)^i} \longrightarrow 1. \end{array}$$

On a $N_{k_{n+1}/k_n}(M_i^{n+1}) \subseteq M_i^n$ et on peut supposer, *en modifiant \mathcal{I}_i^n modulo les idéaux principaux*, que l'on a $N_{k_{n+1}/k_n}(\mathcal{I}_i^{n+1}) \subseteq \mathcal{I}_i^n$ et par conséquent que, *pour tout h fixé*, $E_k \subseteq \Lambda_i^{n+h} \subseteq \dots \subseteq \Lambda_i^{n+h-j} \subseteq \dots \subseteq \Lambda_i^n$, mais on ne peut pas définir de n -suite Λ_i^n (i fixé) décroissante infinie contenant E_k .

On peut, indépendamment ou non de l'Heuristique 7.3, supposer qu'il existe $n_2 \gg 0$ tel que pour $n \geq n_2$, les n -suites des $\frac{\#\mathcal{C}_k}{\#N_{k_n/k}(M_i^n)}$ sont égales

à $p^{c_i^\infty} \neq 1$, pour $0 \leq i \leq m_n - 1$. Ceci signifie que sous l'hypothèse $\lambda \geq 1$ ou $\mu \geq 1$, l'algorithme habituel au niveau n devrait comporter $m_n = O(\lambda \cdot n + \mu \cdot p^n)$ " i -étapes" successives (cf. Théorème 6.3), avec $N_{k_n/k}(M_i^n) \subsetneq \mathcal{C}_k$, et ceci pour n arbitrairement grand.

Or on peut se baser sur l'heuristique naturelle suivante stipulant que les classes des idéaux de k de la forme $N_{k_n/k}(\mathfrak{A}_i)$ (ou $N_{k_n/k}(\mathcal{L}_i)$ avec \mathcal{L}_i premier totalement décomposé dans k_n/k) sont aléatoires, indépendantes, et se répartissent dans le groupe fini \mathcal{C}_k selon les probabilités standard dans la mesure où $N_{k_n/k}(\mathcal{C}_{k_n}) = \mathcal{C}_k$ (voir le § 7.4.2 pour des justifications supplémentaires) :

Heuristique 7.4. *On considère les sous-groupes $N_{k_n/k}(M_i^n)$ associés à l'ensemble des algorithmes de calcul des sous-groupes M_i^n , $0 \leq i \leq m_n$, des filtrations des $M^n := \mathcal{C}_{k_n}$, $n \geq 0$. Alors il existe i_2 , assez grand, indépendant de n , tel que $N_{k_n/k}(M_{i_2}^n) = \mathcal{C}_k$ pour $n \rightarrow \infty$.*

On peut remplacer i_2 par une fonction $i_2(n)$ telle que $\frac{i_2(n)}{n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.

Dans le cas quadratique où l'on suppose $\#\mathcal{C}_k = p$, la finitude du processus limite est assurée dès que la classe d'un $\mathfrak{A} \in \mathcal{I}_{i_2}^{n_2}$ est non p -principale.

Remarque 7.5. Dans le cas où p est non décomposé dans le corps totalement réel k et en supposant k_∞/k totalement ramifiée en l'unique $\mathfrak{p} \mid p$, le critère de Greenberg est que $\lambda = \mu = 0$ si et seulement si \mathcal{C}_k capitule dans un k_{n_0} [Gre, Theorem 1] (critère indépendant de la conjecture de Leopoldt). On a dans ce cas, pour tout $n \geq 0$ et tout i , $0 \leq i \leq m_n$,

$$\#(M_{i+1}^n/M_i^n) = \frac{\#\mathcal{C}_k}{\#\mathbb{N}_{k_n/k}(M_i^n)},$$

le “facteur normique” étant toujours trivial en raison de la formule du produit.

La i -suite des Λ_i^n (n fixé) est alors telle que tout $x_i \in \Lambda_i^n$ est de la forme $\mathbb{N}_{k_n/k}(y_i)$, $y_i \in k_n^\times$, et $(x_i) = \mathbb{N}_{k_n/k}(\mathfrak{B}_i)$ pour un idéal \mathfrak{B}_i de k_n , de sorte qu'il existe \mathfrak{A}_{i+1} étranger à p de k_n tel que $\mathfrak{A}_{i+1}^{1-\sigma_n} \cdot (y_i) = \mathfrak{B}_i$; d'où $\mathbb{N}_{k_n/k}(\mathfrak{A}_{i+1})$ dont la classe dans $\mathbb{N}_{k_n/k}(M_{i+1}^n) \supseteq \mathbb{N}_{k_n/k}(M_i^n)$ assure la croissance de la i -suite $\#\mathbb{N}_{k_n/k}(M_i^n) \mid \#\mathcal{C}_k$.

L'algorithme est donc identique et définit, pour chaque $n \gg 0$, la i -suite croissante des diviseurs $\#\mathbb{N}_{k_n/k}(M_i^n)$ de $\#\mathcal{C}_k$ pour laquelle, sous l'hypothèse $\lambda \geq 1$ ou $\mu \geq 1$, l'algorithme devrait comporter un palier de $O(\lambda \cdot n + \mu \cdot p^n)$ “ i -étapes” consécutives pour lesquelles $\mathbb{N}_{k_n/k}(M_i^n) \subsetneq \mathcal{C}_k$, ce qui est totalement irréaliste lorsque $n \rightarrow \infty$.

Ce premier cas de la conjecture de Greenberg est donc susceptible de l'Heuristique 7.4 précédente affirmant l'existence de i_2 assez grand tel que $\mathbb{N}_{k_n/k}(M_{i_2}^n) = \mathcal{C}_k$ pour $n \rightarrow \infty$.

7.4. Autres propriétés p -adiques dans k_∞/k . On a les propriétés locales et globales suivantes qui confortent l'absence d'obstruction dans les considérations et heuristiques probabilistes précédentes sur les propriétés normiques des nombres et idéaux dans k_∞/k :

7.4.1. Propriétés locales dans k_n/k . On considère le corps k_n pour $n \geq 0$ fixé et les d normes locales dans k_n/k en chaque $\mathfrak{p} \mid p$; on désigne par \mathfrak{p}_n l'unique idéal de k_n au-dessus de \mathfrak{p} . La proposition suivante est une formulation un peu différente des calculs de la Section 4.

Proposition 7.6. *Soit π_n (resp. π_{n+h}) une uniformisante du complété \bar{k}_n de k_n en $\mathfrak{p}_n \mid p$ (resp. de celui de k_{n+h} en $\mathfrak{p}_{n+h} \mid p$).*

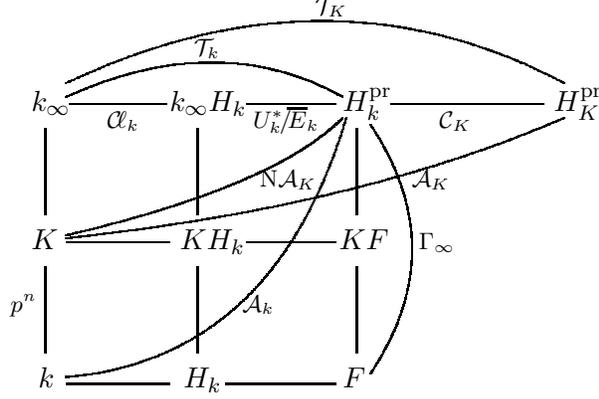
(i) *Pour tout $h \geq 1$ et toute unité locale α_{n+h} de \bar{k}_{n+h} , il existe une unité locale α_n de \bar{k}_n telle que $\mathbb{N}_{\bar{k}_{n+h}/\bar{k}_n}(1 + \alpha_{n+h} \cdot \pi_{n+h}) = 1 + \alpha_n \cdot \pi_n$.*

(ii) *Il existe une unité locale β_n de \bar{k}_n telle que $(1 + \alpha_{n+h} \cdot \pi_{n+h})^{p^h} = 1 + \beta_n \cdot \pi_n$, pour tout $h \geq 1$.*

(iii) *Soient $U_{\mathfrak{p}_n}^1$ et $U_{\mathfrak{p}}^1$ les groupes d'unités locales principales de \bar{k}_n et \bar{k} . Alors l'indice de $\mathbb{N}_{\bar{k}_n/\bar{k}}(U_{\mathfrak{p}_n}^1)$ dans $U_{\mathfrak{p}}^1$ est égal à p^n .*

Démonstration. Utiliser [Se1, Ch. V, §3, Lemme 5 & Ch. V, §3, Lemme 4] pour le premier point. Le second est immédiat et le dernier est la théorie du corps de classes local dans l'extension totalement ramifiée \bar{k}_n/\bar{k} . \square

7.4.2. *Propriétés globales en p -ramification Abélienne.* On considère (sous la conjecture de Leopoldt pour p) le schéma suivant où l'on pose $K = k_n$ pour simplifier et où H_k^{pr} et H_K^{pr} sont les pro- p -extensions Abéliennes p -ramifiées maximales de k et K ; on désigne par F une extension de k , contenant le p -corps de classes de Hilbert H_k de k , telle que H_k^{pr} soit le composé direct de F et k_∞ sur k .



On considère les symboles d'Artin $\left(\frac{H_k^{\text{pr}}/k}{\cdot}\right)$ et $\left(\frac{H_K^{\text{pr}}/K}{\cdot}\right)$ sur $I_k \otimes \mathbb{Z}_p$ et $I_K \otimes \mathbb{Z}_p$, où I_k et I_K sont les groupes des idéaux étrangers à p de k et K . Leurs images sont respectivement les groupes de Galois \mathcal{A}_k et \mathcal{A}_K ; les noyaux de ces symboles d'Artin sont les groupes d'idéaux principaux infinitésimaux $\mathcal{P}_{k,\infty} \subset I_k \otimes \mathbb{Z}_p$ et $\mathcal{P}_{K,\infty} \subset I_K \otimes \mathbb{Z}_p$, où $\mathcal{P}_{k,\infty}$ est l'ensemble des idéaux (x_∞) où $x_\infty \in k^\times \otimes \mathbb{Z}_p$ est d'image triviale dans U_k , et de même dans K (cf. [Gra1, Theorem III.2.4, Proposition III.2.4.1], [J2, § 2]).

Les groupes \mathcal{T}_k et \mathcal{T}_K sont les groupes de torsion respectifs de \mathcal{A}_k et \mathcal{A}_K . L'application $N_{K/k}$ sur $I_K \otimes \mathbb{Z}_p$ induit la restriction $\mathcal{A}_K \rightarrow \mathcal{A}_k$ qui s'exprime par la suite exacte suivante, où $\Gamma_\infty = \text{Gal}(H_k^{\text{pr}}/F)$ et où $N_{K/k}(\mathcal{A}_K)$ est d'indice p^n dans \mathcal{A}_k :

$$1 \longrightarrow \mathcal{C}_K \longrightarrow \mathcal{A}_K \longrightarrow N_{K/k}(\mathcal{A}_K) = \Gamma_\infty^{p^n} \oplus \mathcal{T}_k \longrightarrow 1.$$

Il en résulte que si $\mathfrak{A} \in I_K$ (idéal ordinaire vu dans $I_k \otimes \mathbb{Z}_p$), $N_{K/k}(\mathfrak{A})$ peut s'écrire, modulo des idéaux principaux infinitésimaux, sous la forme :

$$N_{K/k}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{a}^{p^n} \cdot \mathfrak{t}, \quad \text{avec } \mathfrak{a}, \mathfrak{t} \in I_k \otimes \mathbb{Z}_p, \quad \left(\frac{H_k^{\text{pr}}/k}{\mathfrak{a}}\right) \in \Gamma_\infty \quad \text{et} \quad \left(\frac{H_k^{\text{pr}}/k}{\mathfrak{t}}\right) \in \mathcal{T}_k.$$

Pour $n \gg 0$, \mathfrak{a}^{p^n} est p -principal et de la forme (α) , avec $\alpha \equiv 1 \pmod{p^{n'}}$ où $n' \rightarrow \infty$ avec n ; pour la détermination des $\delta_p(x)$ pour $x \in k^\times$, étranger à p , de la forme $(x) = N_{K/k}(\mathfrak{A})$, on aura $(x) = (\alpha) \cdot \mathfrak{t}$ où le nombre α est "négligeable" quant à ses $\delta_p(\alpha)$, et les $\delta_p(x)$ ne dépendront que de \mathfrak{t} ; d'une certaine manière, on peut dire que les groupes $N_{K/k}(\mathcal{I}_i^n)$ sont engendrés (modulo des (α_i) "quasi-infinitésimaux") par des $\mathfrak{t}_i \in \mathcal{T}_k$, et que les groupes Λ_i^n sont obtenus via les idéaux principaux (x_i) qui s'en déduisent.

On suppose que les idéaux \mathfrak{A} de K sont des variables aléatoires ainsi que les $N_{K/k}(\mathfrak{A})$, ce qui suggère que la composante \mathfrak{t} est une variable aléatoire telle que (par restriction à F) $\left(\frac{F/k}{\mathfrak{t}}\right)$ parcourt uniformément $\text{Gal}(F/k) \simeq \mathcal{T}_k$, ce qui a les conséquences essentielles suivantes :

(i) La classe de \mathfrak{t} parcourt uniformément \mathcal{C}_k .

(ii) Lorsque $\mathfrak{t} = (x)$, puisque $\text{Gal}(F/H_k) \simeq \text{Gal}(H_k^{\text{pr}}/k_\infty H_k) \simeq U_k^*/\overline{E}_k$ est d'exposant p^e , on a $x^{p^e} = x_\infty \cdot \varepsilon$, $\varepsilon \in E_k \otimes \mathbb{Z}_p$, x_∞ infinitésimal (donc $N_{k/\mathbb{Q}}(x) = 1$ dans $U_{\mathbb{Q}}$) et l'image de x est définie dans U_k^*/\overline{E}_k . Ainsi les familles $(\delta_p(x))_{p|p}$ modulo les $(\delta_p(\varepsilon))_{p|p}$ parcourent un domaine représentatif effectif fini, ne dépendant que de E_k , et soumis aux probabilités habituelles sur les quotients de Fermat (dans le cas quadratique, si $\delta_p(\varepsilon) = r \geq 1$, ce domaine est $[0, r[$ car si $\delta_p(x) \geq r$, $\delta_p(x \cdot E_k) = [r, \infty[$). Si l'on revient aux i -suites des $N_{K/k}(\mathcal{I}_i^n)$, représentant $N_{K/k}(M_i^n)$, et aux groupes $\Lambda_i^n = \{x \in k^\times, (x) \in N_{K/k}(\mathcal{I}_i^n)\}$, ce qui précède justifie à nouveau les Heuristiques 7.3, 7.4 et l'existence de $i_0 \geq \max(i_1, i_2)$, indépendant de n , assurant la finitude du processus limite (Définition 7.2) et conduisant à l'Heuristique probabiliste finale 7.7).

7.5. Conjecture de Greenberg faible. Elle s'énonce (pour k réel, p -décomposé) sous la forme : " $\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}) = 1$ pour tout $n \implies \lambda = \mu = 0$ " (voir [J6, §10] pour différentes conditions équivalentes sous la conjecture de Gross-Kuzmin et [Ng1], [Ng2] pour une preuve dans le cadre Abélien sous certaines hypothèses sur les unités cyclotomiques). Or le critère de Greenberg (Théorème 2.1) s'énonce :

$$\lambda = \mu = 0 \text{ si et seulement si } \mathcal{C}_{k_n}^{G_n} = \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}) \text{ pour tout } n \gg 0.$$

d'où il résulte l'implication conjecturale qui serait à démontrer :

$$\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}) = 1 \text{ pour tout } n \implies \mathcal{C}_{k_n}^{G_n} = 1 \text{ pour tout } n \gg 0.$$

Puisque $\#\mathcal{C}_{k_n}^{G_n} = \#\mathcal{T}_k$ pour $n \geq e$ (Théorème 4.7 (ii)), ceci devient :

$$\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}) = 1 \text{ pour tout } n \implies k \text{ est } p\text{-rationnel (i.e., } \lambda = \mu = \nu = 0).$$

Si l'on suppose k non p -rationnel (e.g., $p = 3$, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{103})$ où $\mathcal{C}_k = 1$), alors nécessairement $\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}) \neq 1$ pour tout $n \gg 0$.²

D'après la Remarque 3.5 (ii), on a $H^1(G_n, \mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})) = 0$ si et seulement si $\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}) = 1$, donc si et seulement si $\mathcal{C}_{k_n}^{G_n} = \mathcal{C}_{k_n}^{S_{k_n}G_n}$ (autrement dit, dans ce cas, la condition suffisante du Théorème 3.4 est aussi nécessaire).

Dans le cadre de l'algorithme déterminant, au niveau n , les i -suites M_i^n et Λ_i^n , la condition $\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n}) = 1$ ne modifie en rien les aspects probabilistes du §7.4.2 précédent, puisqu'on ne travaille qu'avec des idéaux étrangers à p pour représenter les classes de k_n , calculer leurs normes dans \mathcal{C}_k et les quotients de Fermat des $x \in \Lambda_i^n$; la conjecture faible ne semble pas être de nature différente de celle de la conjecture générale.

7.6. Heuristique finale. Les Heuristiques 7.3, 7.4, et les arguments du §7.4 se résumeraient par l'existence de i_0 assez grand, indépendant de n , tel que pour tout $n \gg 0$, \mathcal{C}_{k_n} soit atteint au i_0 -ième pas de l'algorithme au plus ; ceci est alors équivalent à $\#\mathcal{C}_{k_n} = p^\nu$ pour tout $n \gg 0$. Pour $1 \leq i \leq i_0$, on a donc une suite de diviseurs successifs de $\#\mathcal{T}_k$, de la forme

²Noter que les $\mathcal{C}_{k_{n+h}}(S_{k_{n+h}})$ se surjectent (par la norme) sur $\mathcal{C}_{k_n}(S_{k_n})$, ce qui fait que si l'un des groupes est nul à un étage $n_0 \gg 0$, ils sont tous nuls pour $n \leq n_0$.

$\{\#\mathcal{T}_k, \dots, t_i, \dots, 1\}$, définis comme les maximum sur n des $\#(M_{i+1}^n/M_i^n)$ pour chaque $i \geq 0$ fixé (cf. § 7.1).

Pour tout $n \gg 0$ on a $m_n \leq m_{n+h} \leq i_0$ pour tout $h \geq 0$ et par conséquent stabilisation de la structure des \mathcal{C}_{k_n} (cf. exemples de stabilisations donnés dans [KS] pour $p = 3$ non nécessairement décomposé dans k/\mathbb{Q}).

On peut donc proposer l’heuristique probabiliste suivante (précisant les fondements p -adiques de la conjecture de Greenberg) :

Heuristique 7.7. *Soit k un corps de nombres totalement réel et soit $p > 2$ totalement décomposé dans k/\mathbb{Q} . Soit \mathcal{T}_k le groupe de torsion du groupe de Galois de la pro- p -extension Abélienne p -ramifiée maximale de k ; on suppose $\mathcal{T}_k \neq 1$. On considère l’algorithme associé à la filtration de \mathcal{C}_{k_n} , $n \geq 1$ fixé, et la i -suite des groupes Λ_i^n , $1 \leq i \leq m_n$, pour laquelle $m_n \geq \frac{1}{v_p(\#\mathcal{T}_k)} (\lambda \cdot n + \mu \cdot p^n + \nu)$ (Théorème 6.3). Alors :*

(i) *La probabilité que, pour un $x \in \Lambda_i^n$, $x \neq 1$, on ait $\delta_{\mathfrak{p}}(x) \geq r$ (resp. $\delta_{\mathfrak{p}}(x) = 0$), pour tout $\mathfrak{p} \mid p$, est $\frac{1}{p^{r(d-1)}}$ (resp. $1 - \frac{1}{p^{d-1}}$).*

(ii) *Soit $c \in \mathcal{C}_k$. La probabilité que, pour un idéal $\mathfrak{A} \neq 1$ de k_n étranger à p , la p -classe de $N_{k_n/k}(\mathfrak{A})$ soit égale à c , est $\frac{1}{\#\mathcal{C}_k}$.*

(iii) *Pour λ ou μ non nuls, la probabilité d’avoir $\#\mathcal{C}_{k_n} \sim p^{\lambda \cdot n + \mu \cdot p^n}$ est $\frac{1}{p^{O(1) \cdot (\lambda \cdot n + \mu \cdot p^n)}}$, lorsque $n \rightarrow \infty$.*

7.7. Perspectives. Cette heuristique (même imparfaite) montre la légitimité de la conjecture de Greenberg mais aussi que la n -suite des $\#\mathcal{C}_{k_n}$ est probablement très rapidement stationnaire, ce qui est plutôt un élément favorable pour une approche plus analytique. Il semble en effet difficile de trouver des arguments théoriques qui “obligerait” les classes des normes $N_{k_n/k}(\mathfrak{A})$ d’idéaux aléatoires \mathfrak{A} de k_n à ne pas se répartir uniformément dans \mathcal{C}_k , ou les quotients de Fermat successifs des $x \in k^\times$ à ne pas suivre des lois binomiales reposant sur la probabilité de nullité en $1 - \frac{1}{p}$ (voire encore plus proches de 1 comme nous l’avons longuement analysé dans [Gra5] et [Gra6] pour les nombres algébriques en général).

Cette question risque de rester sans réponse, d’autant plus qu’un éminent mathématicien français m’avait conforté en affirmant, dans un échange au sujet des quotients de Fermat des rationnels (Janvier 2012) :

“Or vous savez bien que c’est la pire des situations : quand quelque chose est aléatoire (par exemple un quotient de Fermat) on est souvent complètement désarmé pour le démontrer”.

Tout ceci explique la difficulté exclusivement “théorie d’Iwasawa algébrique” concernant les invariants λ, μ, ν de la limite projective des \mathcal{C}_{k_n} pour le cas totalement réel en l’absence d’une conjecture très ambitieuse qui gouvernerait beaucoup de problèmes arithmétiques analogues où interviennent de tels objets p -adiques “aléatoires”, d’autant plus que tout ce qui précède repose sur la conjecture de Leopoldt ; or celle-ci revient à dire grosso modo que la probabilité, pour le régulateur R_k , d’être divisible par p^n est en

$\frac{1}{p^{f(n)}}$, $f(n) \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire analogue à celle de l'Heuristique 7.7 (iii), et que $R_k = 0$ est "presque sûrement" impossible.

On peut donc se demander si une approche de type transcendance p -adique ne serait pas mieux adaptée puisque c'est l'une des voies démontrant quelques cas de la conjecture de Leopoldt.

Tout ceci est aussi lié à un point de vue différent qui est celui de fixer le corps k et de faire tendre p vers l'infini, auquel cas un cadre conjectural analogue [Gra6, Section 7] conduirait à la p -rationalité de k pour tout premier $p \gg 0$, donc à la conjecture de Greenberg pour laquelle on aurait $\lambda = \mu = \nu = 0$, indépendamment de toute technique d'Iwasawa.

8. STATISTIQUES SUR LES $\delta_p(x)$ ET LES CLASSES DES $N_{k_n/k}(\mathfrak{A})$

Le point essentiel est le comportement, pour n fixé, des "quotients de Fermat" $\mathfrak{p}^{\delta_p(x_i)}$ (Définition 4.1), pour les $x_i \in \Lambda_i^n$ tels que $(x_i) \in N_{k_n/k}(\mathcal{I}_i^n)$ ainsi que les classes des idéaux $N_{k_n/k}(\mathfrak{A}_i)$ où les $\mathfrak{A}_i \in \mathcal{I}_i^n$ représentent les classes de M_i^n . On a alors $\omega_n(\Lambda_i^n) = \Omega(k_n/k)$ et $N_{k_n/k}(M_i^n) = \mathcal{C}_k$, pour $i = m_n$.

L'étape de l'algorithme calculant le $(i+1)$ -ième sous-groupe M_{i+1}^n de la filtration repose sur les $x_i = N_{k_n/k}(y_i) \in \Lambda_i^n \cap N_{k_n/k}(k_n^\times)$, tels que $(x_i) = N_{k_n/k}(\mathfrak{B}_i)$, $\mathfrak{B}_i \in \mathcal{I}_i^n$, ce qui conduit à $\mathfrak{A}_{i+1}^{1-\sigma^n} \cdot \mathfrak{B}_i = (y_i)$, \mathfrak{A}_{i+1} étranger à p . D'après le Théorème 6.3, en supposant $\mathcal{T}_k \neq 1$, l'hypothèse $\lambda \geq 1$ doit conduire à au moins $\frac{1}{v_p(\#\mathcal{T}_k)}(\lambda \cdot n + \mu \cdot p^n + \nu)$ valeurs consécutives de l'indice i pour lesquelles tous les x_i sont tels que $\delta_p(x_i) \geq 1$ pour certains $\mathfrak{p} \mid p$ de telle sorte que $\omega_n(\Lambda_i^n) \subsetneq \Omega(k_n/k)$ (ce qui se lit au niveau $n = 1$), ce qui rend indispensable la confrontation avec l'expérimentation numérique. Pour cela on commence par un cadre simple, mais non trivial, utilisant des idéaux \mathfrak{A}_i premiers dans le cas $\mathcal{C}_k = 1$.

8.1. Représentation des classes par des idéaux premiers \mathfrak{L}_i . D'après le théorème de Tchebotarev, il existe une infinité de nombres premiers ℓ tels que, pour $\mathfrak{L}' \mid \ell$ dans H_{k_n} , $\left(\frac{H_{k_n}/\mathbb{Q}}{\mathfrak{L}'}\right)$ soit l'élément de $\text{Gal}(H_{k_n}/k_n)$ qui correspond à $c \in \mathcal{C}_{k_n}$ par le corps de classes sur k_n ; comme H_{k_n}/k_n est Abélienne, ce Frobenius ne dépend que de l'idéal premier \mathfrak{L} de k_n au-dessous de \mathfrak{L}' . L'image de $\left(\frac{H_{k_n}/k_n}{\mathfrak{L}}\right)$ dans $\text{Gal}(H_{k_n}/k_n)$ est encore c et est représentée par \mathfrak{L} totalement décomposé dans k_n/\mathbb{Q} .

Autrement dit, lorsque par exemple k est principal, en se limitant à des idéaux premiers \mathfrak{L} totalement décomposés dans k_n/\mathbb{Q} et en considérant $\mathfrak{l} = (\alpha)$ pour l'idéal premier $\mathfrak{l} = N_{k_n/k}(\mathfrak{L})$ de k en-dessous de \mathfrak{L} , on peut effectuer des statistiques sur les valeurs prises par les $\delta_p(\alpha)$ *indépendamment de tout contexte conjecture de Greenberg* puisque les \mathfrak{L}_i seront aléatoirement certains \mathfrak{L} particuliers.

On reprend ici les même hypothèse simplificatrices faites au § 6.3, où le corps $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ est principal et les entiers $\delta_p(\varepsilon)$ et $\delta_p(\pi)$ non nuls, de sorte que la condition suffisante du Théorème 3.1 ne s'applique pas (en

réalité, les résultats n'en dépendent pas, sauf pour le dénombrement des corps k par rapport à certaines propriétés, cf. Remarque 8.2).

Le nombre α tel que $N_{k_n/k}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{l} = (\alpha)$ est un entier de k (unique à une unité près) de norme $\ell = \mathfrak{l} \cap \mathbb{Z}$ sur \mathbb{Q} , où $\ell^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$. On a $\alpha^{p-1} = 1 + p \cdot p^{\delta_p(\alpha)} \cdot \beta$, β étranger à p , si $\delta_p(\alpha) < n$.

(i) Dans l'expérimentation numérique, pour $p = 3$, on prend n assez grand de sorte que l'on compte dans C_r les nombres premiers $\ell \equiv \pm 1 \pmod{3^{n+1}}$ pour lesquels $\delta_p(\alpha) = r$, où r varie de 0 à $n - 1$ au plus et on compare le résultat aux probabilités naturelles $\frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, \dots, \frac{2}{3^r}, \dots$.

```
{p = 3; m = 397; n = 12; B = 1013; M = p(n+1); Q = x2 - m; K = bnfinit(Q, 1);
C0 = 0; C1 = 0; C2 = 0; C3 = 0; C4 = 0; C5 = 0; NL = 0;
for(t = -1, 0, L = 2 * t + 1; while(L < B, L = L + 2 * M;
if(isprime(L) == 1 & kronecker(L, m) == 1, NL = NL + 1;
Sm = bnfisintnorm(K, -L); Sp = bnfisintnorm(K, L);
if(component(matsize(Sm), 2) > 1, A = component(Sm, 1));
if(component(matsize(Sp), 2) > 1, A = component(Sp, 1));
AA = (Mod(A, Q)2 - 1)/3; v = valuation(AA, 3);
if(v == 0, C0 = C0 + 1); if(v == 1, C1 = C1 + 1); if(v == 2, C2 = C2 + 1);
if(v == 3, C3 = C3 + 1); if(v == 4, C4 = C4 + 1); if(v >= 5, C5 = C5 + 1));
print(p, "", m, "", n, "", B);
print(NL, "", C0, "", C1, "", C2, "", C3, "", C4, "", C5); print("");
print(C0/NL + 0.0, "", C1/NL + 0.0, "", C2/NL + 0.0, "", C3/NL + 0.0, "",
C4/NL + 0.0, "", C5/NL + 0.0); print(""); S = 0.0; for(j = 1, 8, S = S + (p-1.0)/p(5+j));
print(2./3, "", 2./9, "", 2./27, "", 2./81, "", 2./243, "", S)}
```

On obtient la remarquable confirmation du fait que les $\delta_p(\alpha)$ se répartissent de façon indépendante de la condition $\ell \equiv \pm 1 \pmod{3^{n+1}}$, quel que soit n . On considère l'exemple ci-dessous pour lequel $\delta_p(\varepsilon) = \delta_p(\pi) = 1$:

$$p = 3, \quad m = 103, \quad n = 12, \quad \ell \equiv \pm 1 \pmod{3^{13}}, \quad 1 < \ell < 10^{13}.$$

Il y a alors $N_L = 325791$ nombres premiers ℓ dans l'intervalle, dont respectivement $C_0 = 217142$, $C_1 = 72364$, $C_2 = 24287$, $C_3 = 8140$, $C_4 = 2581$, $C_5 = 1277$, sont tels que $\delta_p(\alpha) = 0, 1, 2, 3, 4$ et $\delta_p(\alpha) \geq 5$.

proportions		probabilités
$C_0 = 0.6665070551$	$\frac{2}{3}$	$= 0.6666666666$
$C_1 = 0.2221178608$	$\frac{2}{3^2}$	$= 0.2222222222$
$C_2 = 0.0745477929$	$\frac{2}{3^3}$	$= 0.0740740740$
$C_3 = 0.0249853433$	$\frac{2}{3^4}$	$= 0.0246913580$
$C_4 = 0.0079222569$	$\frac{2}{3^5}$	$= 0.0082304526$
$C_5 = 0.0039196908$	$\sum_{j \geq 6} \frac{2}{3^j}$	$= 0.0041152263$

Le même calcul pour $m = 2149$, où $\delta_p(\varepsilon) = \delta_p(\pi) = 3$, conduit à des résultats similaires : $N_L = 325538$, $C_0 = 216955$, $C_1 = 72406$, $C_2 = 24145$, $C_3 = 8060$, $C_4 = 2680$, $C_5 = 1292$.

En prenant $m = 397$, et des $\ell \equiv \pm 1 \pmod{3^{101}}$, on obtient les valeurs très stables : $N_L = 12174$, $C_0 = 8119$, $C_1 = 2659$, $C_2 = 898$, $C_3 = 337$, $C_4 = 101$, $C_5 = 60$, conduisant à la proportion 0.6669130934 de $\delta_p(\alpha) = 0$.

(ii) Dans le cas général, on suppose toujours p décomposé dans k et $\mathcal{C}_k = 1$. Le programme est un peu plus complexe car on souhaite obtenir tous les ℓ vérifiant la condition $\ell^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$ (on utilise les puissances ρ^k , $1 \leq k \leq p-1$, d'une racine primitive $(p-1)$ -ième de l'unité $\rho \pmod{p^{n+1}}$).

```

{p = 7; m = 44853; n = 5; B = 1012; M = p(n+1); Q = x2 - m; K = bnfinit(Q, 1);
ro = znprimroot(M)(pn); C0 = 0; C1 = 0; C2 = 0; C3 = 0; C4 = 0; C5 = 0; NL = 0;
for(k = 1, p - 1, R = Mod(ro, M)k; L = component(R, 2); while(L < B, L = L + M;
if(isprime(L) == 1 & kronecker(L, m) == 1, NL = NL + 1;
Sm = bnfisintnorm(K, -L); Sp = bnfisintnorm(K, L);
if(component(matsize(Sm), 2) > 1, A = component(Sm, 1));
if(component(matsize(Sp), 2) > 1, A = component(Sp, 1));
AA = (Mod(A, Q)(p-1) - 1)/p; v = valuation(AA, p);
if(v == 0, C0 = C0 + 1); if(v == 1, C1 = C1 + 1); if(v == 2, C2 = C2 + 1);
if(v == 3, C3 = C3 + 1); if(v == 4, C4 = C4 + 1); if(v >= 5, C5 = C5 + 1));
print(p, "", m, "", n, "", B); print(NL, "", C0, "", C1, "", C2, "", C3, "", C4, "", C5);
print(""); print(C0/NL + 0.0, "", C1/NL + 0.0, "", C2/NL + 0.0, "",
C3/NL + 0.0, "", C4/NL + 0.0, "", C5/NL + 0.0); print("");
S = 0.0; for(j = 1, 10, S = S + (p - 1.0)/p(5+j));
print((p - 1.0)/p, "", (p - 1.0)/p2, "", (p - 1.0)/p3, "", (p - 1.0)/p4, "", (p - 1.0)/p5, "", S)}
    
```

On considère dans l'exemple ci-dessous, pour lequel $\delta_p(\varepsilon) = \delta_p(\pi) = 1$:

$$p = 7, \quad m = 44853, \quad n = 5, \quad \ell^{p-1} \equiv 1 \pmod{7^6}, \quad 1 < \ell < 10^{12}.$$

Il y a alors $N_L = 1118955$ nombres ℓ dans l'intervalle, dont respectivement $C_0 = 959051$, $C_1 = 137487$, $C_2 = 19121$, $C_3 = 2841$, $C_4 = 381$ et $C_5 = 74$, sont tels que $\delta_p(\alpha) = 0, 1, 2, 3, 4$ et $\delta_p(\alpha) \geq 5$.

proportions		probabilités
$C_0 = 0.8570952361$	$\frac{6}{7}$	$= 0.8571428571$
$C_1 = 0.1228708929$	$\frac{6}{7^2}$	$= 0.1224489795$
$C_2 = 0.0170882653$	$\frac{6}{7^3}$	$= 0.0174927113$
$C_3 = 0.0025389760$	$\frac{6}{7^4}$	$= 0.0024989587$
$C_4 = 0.0003404962$	$\frac{6}{7^5}$	$= 0.0003569941$
$C_5 = 0.0000661331$	$\sum_{j \geq 6} \frac{6}{7^j}$	$= 0.0000059499$

On considère enfin le cas suivant pour lequel $\delta_p(\varepsilon) = \delta_p(\pi) = 1$:

$$p = 29, \quad m = 683, \quad n = 5, \quad \ell^{p-1} \equiv 1 \pmod{29^6}, \quad 1 < \ell < 10^{15}.$$

Il y a alors $N_L = 728880$ nombres ℓ dans l'intervalle, dont respectivement $C_0 = 703535$, $C_1 = 24450$, $C_2 = 857$, $C_3 = 38$, $C_4 = 0$ et $C_5 = 0$, sont tels que $\delta_p(\alpha) = 0, 1, 2, 3, 4$ et $\delta_p(\alpha) \geq 5$.

proportions		probabilités
$C_0 = 0.9652274722$	$\frac{28}{29}$	$= 0.9655172413$
$C_1 = 0.0335446163$	$\frac{28}{29^2}$	$= 0.0332936979$
$C_2 = 0.0011757765$	$\frac{28}{29^3}$	$= 0.0011480585$
$C_3 = 0.0000521347$	$\frac{28}{29^4}$	$= 0.0000395882$
$C_4 = 0$	$\frac{28}{29^5}$	$= 0.0000013651$
$C_5 = 0$	$\sum_{j \geq 6} \frac{28}{29^j}$	$= 0.0000000487$

Les groupes $\Lambda_i^n = \{x_i \in k^\times, (x_i) \in N_{k_n/k}(\mathcal{I}_i^n)\}$, $1 \leq i \leq m_n$, sont (dans le contexte particulier étudié) de la forme $\Lambda_i^n = \langle \varepsilon, \alpha_1, \dots, \alpha_i \rangle$ (cf. (6)), pour $1 \leq i \leq m_n$ et la probabilité d'avoir m_n générateurs (autre ε) suit une loi binomiale *indépendamment de la valeur de $n \rightarrow \infty$* , ce qui suggère une probabilité nulle d'avoir par exemple $\lambda \geq 1$ c'est-à-dire $m_n = O(n)$ (Théorème 6.3).

8.2. Statistiques sur m_n . Rappelons, pour l'algorithme, que si $x_i = N_{k_n/k}(y_i) \in \Lambda_i^n \cap N_{k_n/k}(k_n^\times)$, où $(x_i) = N_{k_n/k}(\mathfrak{B}_i) \in N_{k_n/k}(\mathcal{I}_i^n)$, la relation $\mathfrak{A}_{i+1}^{1-\sigma^n} \cdot \mathfrak{B}_i = (y_i)$ fournit le nouvel \mathfrak{A}_{i+1} dont on calcule $N_{k_n/k}(\mathfrak{A}_{i+1})$ pour constituer Λ_{i+1}^n , puis les $\delta_p(x_{i+1})$, etc. Considérons alors un corps

quadratique k et le n -ième étage de k_∞ pour lequel on souhaite tester l'indépendance des $\delta_p(x_i) \geq 0$, $x_i \in \Lambda_i^n$, obtenus successivement par l'algorithme de calcul de \mathcal{C}_{k_n} pour $0 \leq i \leq m_n - 1$ et de même celle des classes des $N_{k_n/k}(\mathfrak{A}_i)$ dans \mathcal{C}_k .

Comme la recherche par programme des idéaux \mathfrak{A}_i de l'algorithme et des $x_i \in k^\times$ tels que $(x_i) = N_{k_n/k}(\mathfrak{B}_i)$ est particulièrement difficile on procède de façon indirecte par le biais du calcul de m_n ($n = 1$ en pratique) à partir de celui de $\#\mathcal{C}_{k_n}$. Pour étudier les deux facteurs composant $\#(M_{i+1}^n/M_i^n)$ on considère le cas où $\mathcal{C}_k = 1$ (resp. $\delta_p(\varepsilon) = 0$) qui permet des statistiques

$$\text{sur } \frac{p^{n \cdot (d-1)}}{(\Lambda_i^n : \Lambda_i^n \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))} \left(\text{resp. } \frac{\#\mathcal{C}_k}{\#N_{k_n/k}(M_i^n)} \right).$$

8.2.1. *Calcul de m_n dans le cas $\mathcal{C}_k = 1$.* On se place dans les conditions pour lesquelles le nombre de classes ambiges dans k_n/k est égal à p , donc avec la seule hypothèse :

$$(E_k : E_k \cap N_{k_n/k}(k_n^\times)) = p,$$

qui équivaut au fait que le régulateur $R_k \sim \frac{1}{p} \cdot \log(\varepsilon)$, de l'unité fondamentale ε de k , est égal à p ou encore que $\delta_p(\varepsilon) = 1$. Il en résulte qu'il est équivalent de faire des statistiques sur l'ordre de \mathcal{C}_{k_n} lorsque $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ varie, ce que PARI effectue assez rapidement ; en effet, on a la filtration correspondante $(M_i^n)_{i \geq 0}$, de $M^n = \mathcal{C}_{k_n}$, telle que $\#(M_{i+1}^n/M_i^n) = p$ pour

$$0 \leq i \leq m_n - 1, \text{ et telle que } \#\mathcal{C}_{k_n} = \prod_{i=0}^{m_n-1} \#(M_{i+1}^n/M_i^n) = p^{m_n}.$$

On a $M^n = M_1^n$ si et seulement si $M_2^n = M_1^n$, ce qui est équivalent à $\delta_p(\alpha_1) = 0$, de probabilité $1 - \frac{1}{p}$. Ensuite, on a $M^n = M_2^n$ si et seulement si $M_2^n \neq M_1^n$ et $M_3^n = M_2^n$, ce qui est équivalent à $\delta_p(\alpha_1) \geq 1$ et $\delta_p(\alpha_2) = 0$, de probabilité $(1 - \frac{1}{p}) \cdot \frac{1}{p}$, etc.

Remarque 8.1. Noter que puisque $N_{k/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = 1$, la condition $R_k \equiv 0 \pmod{p}$ est équivalente à $\delta_p(\varepsilon) \geq 1$ et est donc de probabilité $\frac{1}{p}$, alors que pour $x \in k^\times$ arbitraire, la condition $\delta_{\mathfrak{p}}(x) \geq 1$ pour tout $\mathfrak{p} \mid p$ est de probabilité $\frac{1}{p^2}$ (cf. Lemme 5.1 et Remarque 5.2).

Plus généralement, si $\alpha = 1 + p \cdot p^r \cdot \beta$, $0 \leq r < n$, est tel que $N_{k/\mathbb{Q}}(\alpha) \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$ (ce qui est le cas lorsque (α) est norme d'un idéal de k_n) on a la relation exceptionnelle $\beta + \beta' + p^{r+1} \cdot \beta \beta' = u \cdot p^{n-r}$ qui reflète la formule du produit et qui modifie la probabilité de p -divisibilité de β en $\frac{1}{p}$ au lieu de $\frac{1}{p^2}$ puisque $p \mid \beta$ équivaut à $p \mid \beta'$, et donc modifie les probabilités pour $\delta_p(\alpha)$.

Si α est une unité ε , on a $\beta' + \beta \cdot \varepsilon' = 0$ qui rend la propriété ci-dessus vraie pour tout n .

Les deux programmes suivants ($k = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$, $p = 3$) justifient à nouveau le phénomène, pour $y \in k^\times$, selon la proximité p -adique de $N_{k/\mathbb{Q}}(y)$ avec 1 :

(i) Cas où l'on impose que la norme de l'élément aléatoire y soit assez proche de 1 (on peut remplacer 9 par toute puissance de 3 plus grande, le résultat est inchangé) :

```
{m = 7; Q = x^2 - m; X = Mod(x, Q); N = 10^4; NY = 0.0; NY0 = 0.0;
B = 10^6; for(k = 1, B, a = random(N); b = random(N);
Y = a * X + b; n = norm(Y); if(Mod(n^2, 9) == 1, NY = NY + 1;
Z = (Y^2 - 1)/3; z = norm(Z); if(valuation(z, 3) == 0, NY0 = NY0 + 1));
print(NY0/NY)}
```

Densité de $\delta_p(y) = 0$ obtenue : $0.6667092445 \sim \frac{2}{3}$.

(ii) Cas sans conditions (i.e., aucune condition de norme locale en dehors de p pour y) :

```
{m = 7; Q = x^2 - m; X = Mod(x, Q);
pi1 = X - 2; pi2 = X + 2; N = 10^4; NY = 0.0; NY0 = 0.0;
B = 10^6; for(k = 1, B, a = random(N); b = random(N); Y = a * X + b; n = norm(Y);
if(Mod(n, 3) != 0, NY = NY + 1; Z = (Y^2 - 1)/3; Z1 = Z * pi1; Z2 = Z * pi2;
v1 = valuation(component(Z1, 2), 3); v2 = valuation(component(Z2, 2), 3);
v = min(v1, v2); if(v == 0, NY0 = NY0 + 1)); print(NY0/NY)}
```

Densité de $\min(\delta_p(y), \delta_{p'}(y)) = 0$ obtenue : $0.8881668501 \sim \frac{8}{9}$.

Dans le cas $n = 1$, il suffit de supposer $R_k \equiv 0 \pmod{p}$, donc que k est tel que $\delta_p(\varepsilon) \geq 1$ (probabilité $\frac{1}{p}$). Autrement dit, ε est partout norme locale et n'intervient pas dans les raisonnements. L'indépendance des α_i est alors mesurée par les probabilités $\frac{p-1}{p^h}$ d'avoir $\#\mathcal{C}_{k_1} = p^h$, $h \geq 1$.

En effet, α_i est norme locale en dehors de p (i.e., $N_{k/\mathbb{Q}}(\alpha_i)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$), et la probabilité que p divise $\frac{\alpha_i^{p-1} - 1}{p}$ est $\frac{1}{p}$; la probabilité de $\delta_p(\alpha_i) = 0$ est donc $1 - \frac{1}{p}$. Pour $h \geq 1$ la probabilité de divisibilité par p^h est $\frac{1}{p^h}$, et par conséquent la probabilité que $\#\mathcal{C}_{k_1} = p^h$ est $(1 - \frac{1}{p}) \cdot \frac{1}{p^{h-1}} = \frac{p-1}{p^h}$.

```
{p = 3; Cyclo = polsubcyclo(p^2, p); C1 = 0; C2 = 0; C3 = 0; C4 = 0; CM = 0;
b = 1; B = 3 * 10^5; m = b; while(m < b + B, m = m + 1;
if(core(m) == m & kronecker(m, p) == 1, M = m; t = Mod(m, 4);
if(t! = 1, M = 4 * m); h = qfbclassno(M); if(valuation(h, p) == 0, E = quadunit(M);
e1 = component(E, 2); e2 = component(E, 3); if(t == 1, e2 = e2/2; e1 = e1 + e2);
E = Mod(e1 + e2 * x, x^2 - m); EE = component(E^(p-1) - 1, 2);
vale = valuation(EE, p) - 1; if(vale == 1, CM = CM + 1;
P = polcompositum(Cyclo, x^2 - m); R = component(P, 1); K = bnfinit(R, 1);
H = bnrinit(K, 1); G = component(component(H, 5), 1); w = valuation(G, p);
if(w == 1, C1 = C1 + 1); if(w == 2, C2 = C2 + 1);
if(w == 3, C3 = C3 + 1); if(w >= 4, C4 = C4 + 1)))));
print(CM, "", C1, "", C2, "", C3, "", C4); print(C1/CM + 0.0, "", C2/CM + 0.0, "",
C3/CM + 0.0, "", C4/CM + 0.0); S = 0.0; for(j = 0, 8, S = S + (p^2 - 1)/p^(8+2*j));
print((p^2 - 1.0)/p^2, "", (p^2 - 1.0)/p^4, "", (p^2 - 1.0)/p^6, "", S)}
```

Le programme ci-dessus (écrit pour $n = 1$) est valable pour tout $p \geq 3$, mais pour $p > 3$, le temps de calcul devient prohibitif; pour $n > 1$ remplacer $\text{polsubcyclo}(p^2, p)$ par $\text{polsubcyclo}(p^{n+1}, p^n)$.

Pour $p = 3$ et $B = 3 \cdot 10^5$ on obtient les valeurs numériques $C_M = 18928$, $C_1 = 16857$, $C_2 = 1814$, $C_3 = 221$, $C_4 = 36$ et le tableau suivant :

proportions		probabilités
$\frac{C_1}{C_M} = 0.8905853761$	$\frac{8}{9}$	$= 0.8888888888$
$\frac{C_2}{C_M} = 0.0958368554$	$\frac{8}{9^2}$	$= 0.0987654320$
$\frac{C_3}{C_M} = 0.0116758241$	$\frac{8}{9^3}$	$= 0.0109739368$
$\frac{C_4}{C_M} = 0.0019019442$	$\sum_{j \geq 0} \frac{8}{9^{4+j}}$	$= 0.0013717421$

Remarque 8.2. La différence de nature entre d'une part les résultats numériques obtenus ici sur le comportement "fictif" des $\delta_p(\alpha_i)$ déduit du calcul effectif de $\#\mathcal{C}_{k_n}$, et d'autre part les expérimentations du §8.1 sur la représentation des classes par des idéaux premiers \mathfrak{L} décomposés dans k_n/\mathbb{Q} , provient des faits suivants : dans l'écriture $\varepsilon = N_{k_n/k}(y_1)$ qui conduit à $(y_1) = \mathfrak{A}_1^{1-\sigma}$, comme \mathfrak{A}_1 est défini modulo les idéaux invariants, l'algorithme (non unique) reste valable si l'on prend $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}'_1 \cdot \mathfrak{P}_1$, où \mathfrak{A}'_1 est étranger à p et où $\mathfrak{P}_1 \in \langle S_{k_n} \rangle$ est arbitraire ; on a alors $N_{k_n/k}(\mathfrak{A}_1) = N_{k_n/k}(\mathfrak{A}'_1) \cdot N_{k_n/k}(\mathfrak{P}_1) = (\alpha_1)$ avec $\alpha_1 = \alpha'_1 \cdot \eta_1$, où η_1 est une S_k -unité arbitraire. Or $\#(M_2^n/M_1^n) = \frac{p^n}{(\Lambda_1 : \Lambda_1 \cap N_{k_n/k}(k_n^\times))}$, où $\Lambda_1 = \langle \varepsilon, \alpha_1 \rangle$, et la condition $M^n = M_1^n$ a lieu si et seulement si $M_2^n = M_1^n$, soit $\delta_p(\alpha_1) = 0$; si la S_k -unité η_1 est non norme dans k_n/k , quel que soit α'_1 on peut faire en sorte que $\alpha_1 = \alpha'_1 \cdot \eta_1$ soit norme, auquel cas on a au contraire $M_2^n \neq M_1^n$. Autrement dit, cette statistique, dénombrant les corps k tels que $M^n = M_{m_n}^n$, $m_n \geq 1$, par l'algorithme utilisant des idéaux étrangers à p , élimine les corps k dont les S_k -unités sont normes ; ceci se propage pour chaque M_i^n , mais on évite ainsi le calcul laborieux des S_k -unités non unités et de leurs symboles de Hasse.

On montre, pour $n = 1$, que l'on passe d'une statistique à l'autre en multipliant par $\frac{p+1}{p^r}$, $r \geq 1$, celle relative aux idéaux premiers \mathfrak{L} totalement décomposés dans k_1/\mathbb{Q} ; les vraies densités sont celles obtenues via la représentation "fictive" des classes de k_1 par les idéaux \mathfrak{L} (densité des corps k tels que $\#\mathcal{C}_{k_1} = \#\mathcal{C}_{k_1}^{G_1} = p$, égale à $\frac{p-1}{p}$).

8.2.2. *Calcul de m_n dans le cas $\delta_p(\varepsilon) = 0$.* On a le programme suivant, pour $p = 3$ et $n = 1$, lorsque $\#\mathcal{C}_k = p$ et lorsque l'unité fondamentale ε vérifie $\delta_p(\varepsilon) = 0$, auquel cas $\omega_n(\Lambda_i^n) = 1$ pour tout i et tout n , et $\#(M_{i+1}^n/M_i^n) = \frac{\#\mathcal{C}_k}{\#\mathbb{N}_{k_n/k}(M_i^n)}$. On suppose que le critère du Théorème

3.4 ne s'applique pas. On a évidemment $\#\mathcal{C}_{k_1} = p^w$, $w \geq 1$. Alors le programme fournit $C_r := \#\{k = \mathbb{Q}(\sqrt{m}), w = r\}$.

```
{p = 3; n = 1; b = 103; B = 106; Cyclo = polsubcyclo(p(n+1), pn);
C2 = 0; C3 = 0; C4 = 0; C5 = 0; CM = 0; m = b; while(m < B, m = m + 1;
if(core(m) == m & kronecker(m, p) == 1,
Q = x2 - m; K = bnfinit(Q, 1); M = m; t = Mod(m, 4); if(t! = 1, M = 4 * m);
h = qfbclassno(M); v = valuation(h, p); if(v == 1, T = 0; hh = h/pv;
D = divisors(hh); nh = numdiv(hh); for(k = 1, nh, d = component(D, k);
Sm = bnfisintnorm(K, -pd); Sp = bnfisintnorm(K, pd);
if(component(matsize(Sm), 2) > 1, Am = Mod(component(Sm, 1), Q);
vm = valuation(component(Sm, 1), p); if(vm == 0, k = nh; T = 1));
if(component(matsize(Sp), 2) > 1, Ap = Mod(component(Sp, 1), Q);
vp = valuation(component(Sp, 1), p); if(vp == 0, k = nh; T = 1));
E = quadunit(M); e1 = component(E, 2); e2 = component(E, 3);
if(t == 1, e2 = e2/2; e1 = e1 + e2); E = Mod(e1 + e2 * x, Q);
EE = component(E(p-1) - 1, 2); vale = valuation(EE, p) - 1;
if(vale == 0 & T == 1, CM = CM + 1; P = polcompositum(Cyclo, Q);
R = component(P, 1); KK = bnfinit(R, 1); HH = bnrinit(KK, 1);
H = component(component(HH, 5), 1); w = valuation(H, p);
if(w == 2, C2 = C2 + 1); if(w == 3, C3 = C3 + 1); if(w == 4, C4 = C4 + 1);
```

```

if(w >= 5, C5 = C5 + 1); print(m, "", CM, "", C2, "", C3, "", C4, "", C5);
print(C2/CM + 0.0, "", C3/CM + 0.0, "", C4/CM + 0.0, "", C5/CM + 0.0);
S = 1 - (p^2 - 1.0)/p^2 - (p^2 - 1.0)/p^4 - (p^2 - 1.0)/p^6 - (p^2 - 1.0)/p^8;
print((p^2 - 1.0)/p^2, "", (p^2 - 1.0)/p^4, "", (p^2 - 1.0)/p^6, "", (p^2 - 1.0)/p^8, "", S)
    
```

On obtient alors les résultats numériques suivants pour $m \leq 10^6$, $C_M = 4703$, $C_2 = 4232$, $C_3 = 417$, $C_4 = 52$, $C_5 = 3$:

proportions		probabilités
$\frac{C_2}{C_M} = 0.8998511588$	$\frac{8}{9}$	$= 0.8888888888$
$\frac{C_3}{C_M} = 0.0886668084$	$\frac{8}{9^2}$	$= 0.0987654320$
$\frac{C_4}{C_M} = 0.0110567722$	$\frac{8}{9^3}$	$= 0.0109739368$
$\frac{C_5}{C_M} = 0.0006378907$	$\sum_{j \geq 0} \frac{8}{9^{4+j}}$	$= 0.0013717421$

9. CONCLUSION

Cette étude (qui a, au moins pour la première partie, des points communs avec par exemple les approches de [F1], [FK], [FT1], [FT2], [Gre], [I], [IS1], [IS2], [Su], [T1], [T2]) montre que la question de la conjecture de Greenberg est essentiellement p -adique et sans doute moins “théorie d’Iwasawa algébrique” qu’admis généralement, le cas Abélien pouvant être de nature plus particulière en raison des “formules analytiques p -adiques” du nombre de classes introduisant les unités cyclotomiques et conduisant, avec des hypothèses “ad hoc”, à de nombreux travaux spécifiques (voir [F2], [BaN], [BeN], [KS], [Ng1], [Ng2] et leurs références), bien que nous pensions que la version fonctions L p -adiques classique (e.g., [Sin], [W] et beaucoup d’autres) ne soit qu’une traduction analytique de l’aspect “modules sur l’algèbre d’Iwasawa”.

Le passage à la limite (algébrique ou analytique p -adique) est au demeurant plus concis que les calculs aux niveaux finis, pourtant nécessaires pour localiser les profonds phénomènes arithmétiques sous-jacents.

En effet, d’un point de vue théorie d’Iwasawa, le problème porte sur la détermination du quotient de Herbrand $q(\mathcal{X}_k) := \#(\mathcal{X}_k^G)/\#({}^G\mathcal{X}_k)$ de $\mathcal{X}_k := \varprojlim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{k_n}$, où \mathcal{X}_k^G (resp. ${}^G\mathcal{X}_k$) est le noyau (resp. le conoyau) de l’opération de $1 - \sigma$ sur \mathcal{X}_k , où σ est un générateur topologique de $G := \text{Gal}(k_\infty/k)$ (voir [J6, § 1 & § 4] et [Ng3, § 3] pour quelques rappels ainsi que [Ng3]).

Si la détermination de ${}^G\mathcal{X}_k$ équivaut grosso modo aux résultats du § 4.3, c’est-à-dire à la théorie du corps de classes global, la détermination de \mathcal{X}_k^G semble non triviale et probablement liée aux considérations p -adiques précédentes où l’on rencontre manifestement des problèmes de type “quotients de Fermat” de nombres algébriques dont les heuristiques impliquent facilement que les conjectures énoncées sont très raisonnables ; par exemple, la conjecture de Greenberg, sous la conjecture de Leopoldt, pour les corps totalement réels p -décomposés devient triviale lorsque le corps k est p -rationnel (i.e., $\mathcal{T}_k = 1$), mais autrement fort peu accessible lorsque $\mathcal{T}_k \neq 1$.

Pour conclure, nous nous proposons de faire quelques remarques sur les groupes \mathcal{T}_{k_n} dans la tour cyclotomique, ce qui nous paraît plus canonique en raison de la spécificité de ces groupes de torsion associés à la

p -ramification Abélienne et plus susceptibles d’une approche essentiellement p -adique de la conjecture de Greenberg. Pour tout n , on a encore $\#\mathcal{T}_{k_n} = \#\mathcal{C}_{k_n} \cdot \#(U_{k_n}^*/\overline{E}_{k_n})$ avec des notations analogues à celles du §4.3 où les \mathbb{Z}_p -modules $U_{k_n}^*$ et \overline{E}_{k_n} sont \mathbb{Z}_p -libres de \mathbb{Z}_p -rangs $d \cdot p^n - 1$. On peut également noter $R_{k_n} = \#(U_{k_n}^*/\overline{E}_{k_n})$ le régulateur convenablement normalisé de k_n .

Il resterait à étudier la formule d’Iwasawa $\#\mathcal{T}_{k_n} =: p^{\tilde{\lambda} \cdot n + \tilde{\nu}}$ (en supposant pour simplifier que $\tilde{\mu} = 0$) telle que $p^{\tilde{\lambda}} := \frac{\#\mathcal{T}_{k_{n+1}}}{\#\mathcal{T}_{k_n}}$ lorsque $n \rightarrow \infty$; sous la conjecture de Greenberg pour k , on a $\#\mathcal{C}_{k_{n+1}} = \#\mathcal{C}_{k_n} = p^\nu$, pour tout $n \gg 0$, auquel cas $p^{\tilde{\lambda}} = \frac{R_{k_{n+1}}}{R_{k_n}}$.

On a $\tilde{\lambda} = 0$ si et seulement si $\mathcal{T}_k = 1$ (i.e., k est p -rationnel) pour les raisons suivantes : les “transferts” $j_{k_{n+h}/k_n} : \mathcal{T}_{k_n} \rightarrow \mathcal{T}_{k_{n+h}}$ sont injectifs pour tous n, h (sous la conjecture de Leopoldt pour p dans la tour) [Gra1, IV.2, Theorem 2.1] ; on a en particulier $\mathcal{T}_{k_{n+h}}^{\text{Gal}(k_{n+h}/k_n)} = j_{k_{n+h}/k_n}(\mathcal{T}_{k_n}) \simeq \mathcal{T}_{k_n}$ puisque k_{n+h}/k_n est p -primitivement ramifiée [Gra1, Theorem IV.3.3].

Considérons alors $\nu_{k_{n+1}/k_n} := j_{k_{n+1}/k_n} \circ N_{k_{n+1}/k_n}$ (la norme arithmétique est surjective ; cf. Schéma du §7.4.2) ; si $\tilde{\lambda} = 0$, on a $\mathcal{T}_{k_{n+1}} = j_{k_{n+1}/k_n}(\mathcal{T}_{k_n})$ et puisque l’on a $N_{k_{n+1}/k_n} \circ j_{k_{n+1}/k_n} = p$, on obtient, à partir de l’égalité précédente, $\mathcal{T}_{k_n} = \mathcal{T}_{k_n}^p$, d’où $\mathcal{T}_{k_n} = 1$, et comme $\mathcal{T}_{k_n}^{G_n} \simeq \mathcal{T}_k$, on a $\mathcal{T}_k = 1$. Réciproque évidente. On notera que $\tilde{\lambda} = 0$ implique $\tilde{\nu} = 0$.

Ainsi $\tilde{\lambda} = 0$ implique $\mathcal{C}_{k_n} = R_{k_n} = 1$ pour tout n (p -rationalité dans la tour), ce qui peut suggérer que $\tilde{\lambda}$ est davantage accessible puisqu’il est facile de trouver des corps k non p -rationnels et que $\#\mathcal{T}_{k_n}$ est essentiellement donné par le résidu de la fonction zêta p -adique de k_n (cf. [Co], [Se2], [W]), ce qui permet, comme dans [CN], [IS1], [IS2], d’en déduire des cas de nullité de λ lorsque $\tilde{\lambda} \geq 1$.

On remarque que $\frac{\#\mathcal{T}_{k_n}}{\#\mathcal{T}_k} = \#(\mathcal{T}_{k_n}/\mathcal{T}_{k_n}^{G_n})$ et que le calcul de $(\mathcal{T}_{k_n}/\mathcal{T}_{k_n}^{G_n})^{G_n}$ serait le second pas de l’algorithme définissant la filtration habituelle dans le cadre différent de la p -ramification Abélienne qui, à notre connaissance, n’a pas été étudié.

Remerciements. Je remercie J.-F. Jaulent et T. Nguyen Quang Do pour de nombreux échanges, commentaires et indications (techniques et bibliographiques).

BIBLIOGRAPHIE

- [AN] J. Assim, T. Nguyen Quang Do, *Sur la constante de Kummer–Leopoldt d’un corps de nombres*, Manuscripta Math.115, 1 (2004), 55–72.
<https://www.researchgate.net/publication/225914673>
- [BJ] K. Belabas, J.-F. Jaulent, *The logarithmic class group package in PARI/GP*, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon (Théorie des Nombres) 2016, 5–18.
<https://www.math.u-bordeaux.fr/~jjaulent/Articles/bnflog.pdf>

- [BaN] R. Badino, T. Nguyen Quang Do, *Sur les égalités du miroir et certaines formes faibles de la conjecture de Greenberg*, Manuscripta Math. 116, 3 (2005), 323–340. <https://www.researchgate.net/publication/226875893>
- [BeN] J.-R. Belliard, T. Nguyen Quang Do, *On modified circular units and annihilation of real classes*, Nagoya Math. J. 177 (2005), 77–115. http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.nmj/1114632159
- [CN] L. Caputo, F.A.E. Nuccio, *A criterion for Greenberg’s conjecture*, Proc. of the Amer. Math. Soc. 136, 8 (2008), 2741–2744. <http://www.ams.org/journals/proc/2008-136-08/S0002-9939-08-09283-6/>
- [Co] J. Coates, *p -adic L -functions and Iwasawa’s theory*, In: *Algebraic Number Fields*, Proc. of Durham Symposium 1975, New York-London (1977), 269–353.
- [F1] T. Fukuda, *Greenberg’s Conjecture and Relative Unit Groups for Real Quadratic Fields*, Journal of Number Theory 65, 1 (1997), 23–39. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X97921260>
- [F2] T. Fukuda, *Cyclotomic Units and Greenberg’s Conjecture for Real Quadratic Fields*, Math. Comp. (65), 215 (1996), 1339–1348. <http://www.ams.org/journals/mcom/1996-65-215/S0025-5718-96-00730-2/>
- [FK] T. Fukuda, K. Komatsu, *On \mathbb{Z}_p -extensions of real quadratic fields*, J. Math. Soc. Japan 38 (1986), 95–102. https://www.jstage.jst.go.jp/article/jmath1948/38/1/38_1_95/_pdf
- [FT1] T. Fukuda, H. Taya, *The Iwasawa λ -invariants of \mathbb{Z}_p -extensions of real quadratic fields*, Acta Arith. 69, 3 (1995), 277–292. <http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/aa/aa69/aa6936.pdf>
- [FT2] T. Fukuda, H. Taya, *Computational research on Greenberg’s conjecture for real quadratic fields*, Mem. School Sci. Eng. Waseda Univ. 58 (1994), 175–203.
- [GJ] G. Gras, J-F. Jaulent, *Sur les corps de nombres réguliers*, Math. Z. 202 (1989), 343–365. <https://eudml.org/doc/174095>
- [Gra1] G. Gras, *Class Field Theory: from theory to practice*, SMM, Springer-Verlag, 2003; second corrected printing 2005.
- [Gra2] G. Gras, *Classes généralisées invariantes*, J. Math. Soc. Japan 46, 3 (1994), 467–476. <http://projecteuclid.org/euclid.jmsj/1227104692>
- [Gra3] G. Gras, *Sur les ℓ -classes d’idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier ℓ , I & II* (Thèse d’Etat), Annales de l’Institut Fourier, 23, 3 (1973), 1–48 & 23, 4 (1973), 1–44. http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_3_1_0 http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_4_1_0
- [Gra4] G. Gras, *Invariant generalized ideal classes – Structure theorems for p -class groups in p -extensions. A Survey* (2016), to appear in Proceedings – Mathematical Sciences, Indian Academy of Sciences. <https://www.dropbox.com/s/oh00jtyxudj3ekt/invariant.generalized.classes.revision>
- [Gra5] G. Gras, *Nombre de φ -classes invariantes. Application aux classes des corps abéliens*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 106 (1978), 337–364. http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1978__106__337_0
- [Gra6] G. Gras, *Les θ -régulateurs locaux d’un nombre algébrique : Conjectures p -adiques*, Canadian Journal of Mathematics, 68, 3 (2016), 571–624. <http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2015-026-3>
- [Gra7] G. Gras, *No general Riemann-Hurwitz formula for relative p -class groups*, Journal of Number Theory 171 (2017), 213–226. <https://www.researchgate.net/publication/288060081>
- [Gre] R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Amer. J. Math. 98 (1976), 263–284. http://www.jstor.org/stable/2373625?seq=1#page_scan_tab_contents
- [H] Y. Hiroshi, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Manuscripta Math. 79, 6 (1993), 1–6. http://www.digizeitschriften.de/download/PPN365956996_0079/PPN365956996_0079___log4.pdf
- [I] A. Inatomi, *On \mathbb{Z}_p -extensions of real Abelian fields*, Kodai Math. J. 12 (1989), 420–422. http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.kmj/1138039105

- [IS1] H. Ichimura, H. Sumida, *On the Iwasawa invariants of certain real abelian fields, II*, Internat. J. Math. 7 (1996), 721–744. <http://www.worldscientific.com/doi/pdfplus/10.1142/S0129167X96000384>
- [IS2] H. Ichimura, H. Sumida, *On the Iwasawa invariants of certain real abelian fields*, Tohoku Math. J. 49 (1997), 203–215. http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.tmj/1178225147
- [Iw] K. Iwasawa, *Riemann–Hurwitz formula and p -adic Galois representations for number fields*, Tohoku Math. J. 33, 2 (1981), 263–288. https://www.jstage.jst.go.jp/article/tmj1949/33/2/33_2_263/_pdf
- [J1] J-F. Jaulent, *L'arithmétique des ℓ -extensions* (Thèse d'Etat, Université de Franche-Comté, Besançon), Publ. Math. Fac. Sci. Besançon (Théorie des Nombres), Années 1984/86. http://pmb.univ-fcomte.fr/1986/Jaulent_these.pdf
- [J2] J-F. Jaulent, *Théorie ℓ -adique globale du corps de classes*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux 10, 2 (1998), 355–397. <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~jjaulent/Articles/THCDC.pdf>
- [J3] J-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux 6 (1994), 301–325. <https://www.math.u-bordeaux.fr/~jjaulent/Articles/CILog.pdf>
- [J4] J-F. Jaulent, *Normes cyclotomiques naïves et unités logarithmiques* (2016). <http://arxiv.org/abs/1609.01901>
- [J5] J-F. Jaulent, *Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min*, Annales. Math. Québec, 2016, 1–22. <http://link.springer.com/article/10.1007/s40316-016-0069-3>
- [J6] J-F. Jaulent, *Note sur la conjecture de Greenberg* (2016). <https://arxiv.org/abs/1612.00718>
- [JN] J-F. Jaulent, T. Nguyen Quang Do, *Corps p -rationnels, corps p -réguliers et ramification restreinte*, J. Théorie des Nombres de Bordeaux 5 (1993), 343–363. <https://www.researchgate.net/publication/236865222>
- [KS] J.S. Kraft, R. Schoof, *Computing Iwasawa modules of real quadratic number fields*, Compositio Math. 97 (1995), 135–155. <http://imaging.uniroma2.it/~schoof/ks.pdf>
- [LMN] M. Le Floch, A. Movahhedi, T. Nguyen Quang Do, *On capitulation cokernels in Iwasawa Theory*, American Journal of Mathematics 127, 4 (2005), 851–877. http://www.unilim.fr/pages_perso/matthieu.lefloch/coker3.pdf
- [MN] A. Movahhedi, T. Nguyen Quang Do, *Sur l'arithmétique des corps de nombres p -rationnels*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987–88, Progress in Mathematics Volume 81, 1990, 155–200. <https://www.researchgate.net/publication/236865321>
- [Ng1] T. Nguyen Quang Do, *Sur la conjecture faible de Greenberg dans le cas abélien p -décomposé*, Int. J. of Number Theory 2, 1 (2006), 49–64. <http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S1793042106000395>
- [Ng2] T. Nguyen Quang Do, *Sur une forme faible de la conjecture de Greenberg II*. <https://www.researchgate.net/publication/278961782>
- [Ng3] T. Nguyen Quang Do, *Formules de genres et conjecture de Greenberg* (preprint 2016). <https://www.researchgate.net/publication/311846783>
- [Ni] Y. Nishino, *On the Iwasawa Invariants of the Cyclotomic \mathbb{Z}_2 -Extensions of Certain Real Quadratic Fields*, Tokyo J. Math. 29, 1 (2006), 239–245. <https://projecteuclid.org/euclid.tjm/1166661877>
- [OT] M. Ozaki, H. Taya, *A note on Greenberg's conjecture for real abelian number fields*, Manuscripta Math. 88, 3 (1995), 311–320. <http://link.springer.com/article/10.1007/BF02567825>
- [P] K. Belabas and al., *Pari/gp, Version 2.5.3*, Laboratoire A2X, Univ. Bordeaux I. <http://sagemath.org/>
- [Se1] J-P. Serre, *Corps Locaux*, Actualités Scientifiques et Industrielles 1296, Hermann, quatrième édition revue et corrigée 2004.
- [Se2] J-P. Serre, *Sur le résidu de la fonction zêta p -adique d'un corps de nombres*, C.R. Acad. Sci. Paris 287, Série I (1978), 183–188.

- [Sin] W. Sinnott, *On p -adic L -functions and the Riemann-Hurwitz genus formula*, *Comp. Math.* 53, 1 (1984), 3–17.
http://www.numdam.org/item?id=CM_1984__53_1_3_0
- [Su] H. Sumida, *On Capitulation of S -Ideals in \mathbb{Z}_p -Extensions*, *Journal of Number Theory* 86 (2001), 163–174.
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X00925617>
- [T1] H. Taya, *On cyclotomic \mathbb{Z}_p -extensions of real quadratic fields*, *Acta Arithmetica* LXXIV, 2 (1996), 107–119.
<http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/aa/aa74/aa7422.pdf>
- [T2] H. Taya, *On p -adic zeta functions and \mathbb{Z}_p -extensions of certain totally real number fields*, *Tohoku Math. J.* 51, 1 (1999), 21–33.
https://www.jstage.jst.go.jp/article/tmj1949/51/1/51_1_21/_pdf
- [T3] H. Taya, *Iwasawa λ_5 and μ_5 -invariants of a totally real cubic field with discriminant 1396*. <http://id.nii.ac.jp/1138/00000408/>
- [W] L.C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, Graduate Texts in Math. 83, Springer enlarged second edition 1997.
<http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-1-4612-1934-7>

VILLA LA GARDETTE, CHEMIN CHÂTEAU GAGNIÈRE, F-38520 LE BOURG D'OISANS,
http://www.researchgate.net/profile/Georges_Gras
E-mail address: g.mn.gras@wanadoo.fr