



HAL
open science

Une approche isogéométrique pour la thermo-mécanique en grandes transformations dans un contexte multiphysique à objets

Lei Zhang, Dominique Eyheramendy

► To cite this version:

Lei Zhang, Dominique Eyheramendy. Une approche isogéométrique pour la thermo-mécanique en grandes transformations dans un contexte multiphysique à objets. 12e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01400453

HAL Id: hal-01400453

<https://hal.science/hal-01400453>

Submitted on 22 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Une approche isogéométrique pour la thermo-mécanique en grandes transformations dans un contexte multiphysique à objets

L. Zhang¹, D. Eyheramendy¹

¹ LMA CNRS UPR 7051, Ecole Centrale Marseille, {lei.zhang, dominique.eyheramendy}@centrale-marseille.fr

Résumé — Dans ce travail, nous présentons un travail préliminaire sur une approche isogéométrique pour des problèmes multiphysiques en grandes transformations dans un contexte logiciel générique. Nous évaluons le potentiel en terme de performances numériques d'une formulation isogéométrique en visant la simulation d'une pièce élastomérique en multiphysique. Cette étude donne le cadre de base d'une implémentation générique à objets en Java faisant écho aux éléments finis, dans un contexte de code de calcul recherche.

Mots clés — méthode isogéométrique, thermomécanique, élastomères, grandes transformations, code orienté-objet

1. Introduction

La méthode isogéométrique a été introduite en 2005 dans [1]. La principale idée était initialement d'utiliser directement les primitives d'infographie et de CAO dans le cadre de la simulation numérique. Par rapport à la classique et largement admise méthode des éléments finis, cette approche offre un avantage industriel incontestable, tant d'un point de vue économique que technique, étant donné qu'elle affranchit la simulation numérique d'une partie généralement coûteuse et source de d'erreur numérique, le maillage. D'un point de vue purement numérique, cette méthode semble offrir un potentiel important dans de nombreux domaines de la mécanique. Le principe de la méthode consiste à travailler comme pour la méthode des éléments finis dans un cadre variationnel classique. Le second aspect de la méthode repose sur l'utilisation de fonctions d'interpolation de type B-Spline ou NURBS (voir [2]) en lieu et place des traditionnelles fonctions polynomiales. Les fonctions B-Spline ou NURBS sont des fonctions paramétriques qui permettent de représenter fidèlement des géométries complexes, voir de manière exacte lorsque il s'agit de coniques par exemple pour les NURBS (voir [2] ou [6]). Toutes les formes de raffinement h , p ou k (voir [5]) conservent exactement la géométrie (pas de modification de celle-ci) et restent donc conforme à la CAO définie initialement.

Cette méthode numérique est aujourd'hui en plein essor dans de nombreux développements dans tous les domaines de la mécanique, grâce notamment à la richesse des fonctions B-Spline ou NURBS et à la possibilité de travailler sur des éléments de haut degré. Il est également plus aisé de gérer la continuité sur le patch. Initialement proposée pour l'élasticité linéaire [1], de nombreux domaines ont depuis été adressés : convection-diffusion, Navier-Stokes, plaque/coques, milieux incompressibles, ... Une des difficultés de bases dans la méthode isogéométrique demeure cependant l'intégration numérique (nécessité d'avoir un grand nombre de points d'intégration), problème adressé dans de nombreux travaux (voir par exemple [3]). Pour palier à cette difficulté, des versions de type collocation sont aujourd'hui étudiées (voir par exemple [4]).

Dans ce travail, nous présentons les étapes d'études préliminaires au développement de formulations isogéométriques appliquées aux structures élastomériques sous conditions de charges mécaniques et thermiques cycliques ou non. Dans un premier temps, nous présentons une approche à objets unifiée éléments finis/isogéométrique. A partir de là, nous évaluerons les performances de la méthode isogéométrique pour milieu incompressible au travers de formulations classiques de type \bar{B}

en petites déformations. Enfin, une formulation d'élasticité nonlinéaire non-isotherme en grandes transformations sera étudiée.

2. Un cadre logiciel à objets unifié méthode des éléments finis/méthode isogéométrique

La méthode isogéométrique est aujourd'hui largement étudiée par de nombreuses équipes dans le monde. Une bonne référence pour aborder le problème est de se référer à [6]. Cela s'accompagne bien entendu de nombreux développements logiciels. Parmi eux par exemple, on trouve le développement de tutoriaux de base en Matlab (voir [7]). Cela constitue un bon outil pour appréhender la méthode isogéométrique. Quelques auteurs ont proposé des développements à objets [8] et développé une analyse comparative des méthodes éléments finis et isogéométrique en terme logiciel, le tout dans un contexte plutôt orienté sur formulation déplacements ou mixtes classiques de la mécanique des solides/structures. Ils ont montré que ce type de formulation s'adapte facilement aux codes éléments finis classiques. Nous proposons ici un formalisme à objet unifié, méthode éléments finis / méthode isogéométrique, qui étend la notion d'élément dans un cadre multiphysique. La Figure 1 montre l'extension de la notion d'élément pour formulations en physiques multiples dans un code objet (voir par exemple [9], [10] et [11]). L'élément multiphysique englobe au niveau local (élémentaire) le support de l'intégration numérique pour chaque champ discret décrit par un patch, équivalent du champ éléments finis défini localement par une interpolation. L'approche vise à comparer aisément modèles éléments finis/isogéométriques sur la base d'une écriture de formulation unique pour ces différentes discrétisations.

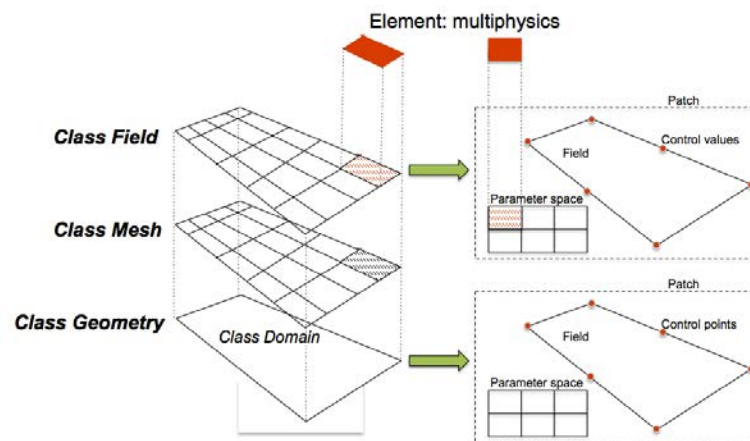


Figure 1 – Intégration de champs discrets éléments finis et isogéométriques dans un cadre à objets

3. Etude comparative de formulations de la mécanique

L'objectif étant de simuler des pièces élastomériques en grandes transformations, nous évaluons le potentiel de la méthode isogéométrique dans un premier temps sur un problème d'élasticité linéaire pour un milieu incompressible. Une approche de type projection \bar{B} classique est étudiée (voir [9]). Nous pouvons constater que même avec un faible nombre de degrés de libertés (points de contrôle) comme le montre les figures 2a et 2b le niveau de performance de la méthode isogéométrique est

excellent avec une projection degré 2/degré 1 (courbe bleu). La figure 2c illustre le potentiel de la formulation en grandes déformations d'un problème d'élasticité thermo-mécanique. D'un point de vue qualitatif, en éléments finis, il ne nous ait pas possible d'atteindre le même angle de torsion qu'avec la méthode isogéométrique.

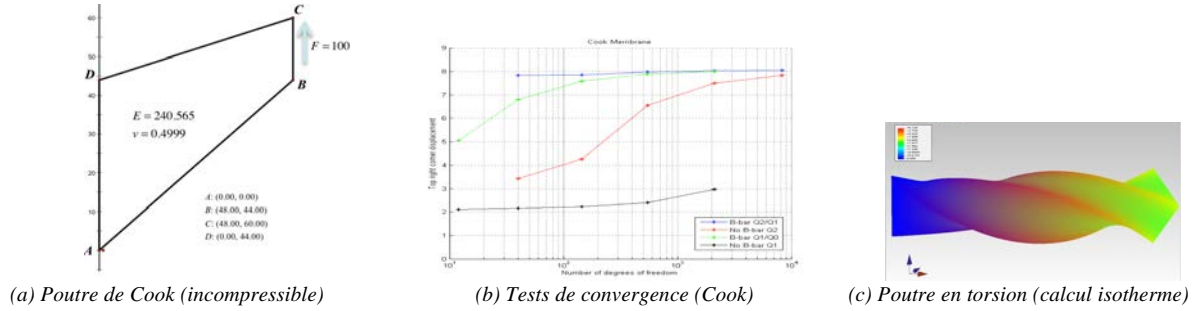


Figure 2 – Quelques résultats numériques pour la méthode isogéométrique

4. Une approche thermoélastique géométriquement nonlinéaire

Nous considérons le formalisme développé dans la cadre de la mécanique pour la méthode isogéométrique appliqué à un problème multiphysique : formulation thermomélastique nonlinéaire en grande transformations en transitoire. Le problème de référence est décrit dans la suite.

Soit la capacité thermique c_E et la chaleur latente l_E qui dépendent linéairement de la température θ :

$$c_E = c_E^0 + c * (\theta - \theta_0), \quad l_E = \frac{\theta}{\theta_0} l_E^0$$

Où c est une constant, c_E^0 et l_E^0 sont respectivement le capacité thermique et la chaleur latente à température constante $\theta = \theta_0$ et déformation nulle $E = 0$.

On suppose un modèle matériau isotrope et élastique et on peut écrire l'énergie libre d'Helmholtz de la façon suivante :

$$\psi(E, \theta) = \frac{1}{2\rho_0} (E : C : E) - (l_E^0 : E) \frac{\theta - \theta_0}{\theta} + (c_E^0 - c * \theta_0) * \left(\theta - \theta_0 - \theta \ln \frac{\theta}{\theta_0} \right) - \frac{1}{2} c (\theta - \theta_0)^2$$

Où C est le tenseur d'élasticité.

De manière classique, on peut obtenir les expressions du tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff 2 et de l'entropie :

$$S = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial E} = C : E - \frac{\rho_0}{\theta_0} l_E^0 (\theta - \theta_0), \quad \eta = \frac{1}{\theta_0} l_E^0 : E + (c_E^0 - c * \theta_0) \ln \frac{\theta}{\theta_0} + c (\theta - \theta_0)$$

On peut définir le coefficient de dilatation thermique α_0 par rapport à la chaleur latente (tenseur symétrique d'ordre 2) :

$$3(\lambda + 2\mu/3)\alpha_0 I = \frac{\rho_0}{\theta_0} l_E^0$$

Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff 2 peut alors s'exprimer :

$$S = \lambda \text{tr}(E)I + 2\mu E - 3(\lambda + 2\mu/3)\alpha_0(\theta - \theta_0)$$

Où λ et μ sont les coefficients de Lamé et I représente le tenseur d'identité d'ordre deux. On considère les équations d'équilibres classiques et équation de la chaleur classique comme par exemple dans [13].

Un test 3D de traction sur poutre de section transversale carrée de 4 mm^2 et de longueur $l = 100 \text{ mm}$, est réalisé pour évaluer la formation isogéométrique est proposé (voir Figure 3). La poutre est partiellement encastree à une des extrémités. Les températures sont imposées à chaque extrémité. Les données matériau sont données Figure 4. Un schéma d'intégration en temps implicite est utilisé et le problème est résolu de manière couplée. La charge appliquée (densité surfacique d'effort) dépend linéairement du temps (voir Figure 3). Dans la Figure 5, on montre la carte des températures en surface pour $t=1 \text{ s}$.

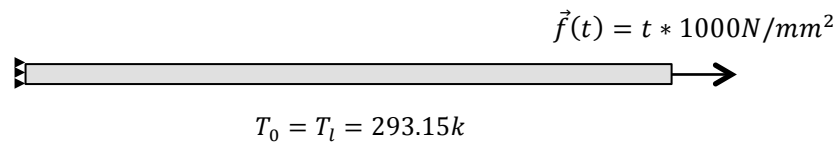


Figure 3 – Conditions de bord, condition initiales et chargement mécanique sur la poutre

Module d'élasticité isostatique	λ	164 206	N/mm^2
Module de cisaillement	μ	80 194	N/mm^2
Masse volumique	ρ_0	$7,8 \times 10^{-9}$	Ns^4/mm^4
Conductivité thermique	k	45	N/sK
Capacité thermique	c_E	460×10^6	$\text{mm}^2/\text{s}^2\text{K}$
Coefficient de dilatation thermique	α_0	$1,5 \times 10^{-5}$	$1/\text{K}$

Figure 4 – Données matériau pour le test de la poutre

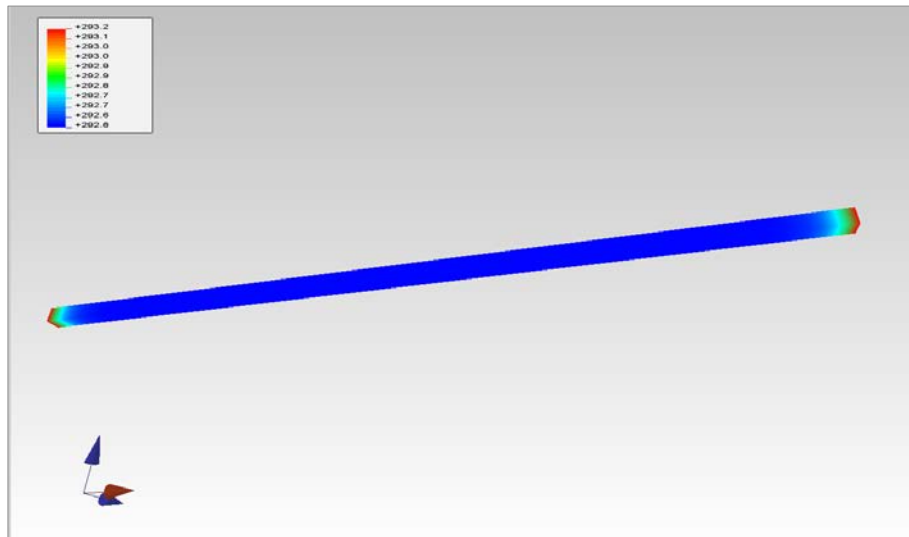


Figure 5 – Répartition des températures à $t=0.5s$ le long de la poutre

Le graphe des températures le long de la ligne moyenne de la poutre est donné Figure 6 pour différents types de discrétisation (FEM –Eléments finis- ou IGA –Analyse isogéométrique-) à $t=0.5 s$. Pour la méthode des éléments finis des éléments trilineaires sont utilisés. En raffinant le maillage, la solution converge vers la répartition de température en pointillés verts. Dans ce test qualitatif, pour la méthode isogéométrique, on voit que l'on obtient l'allure de la solution pour un nombre de degrés de libertés bien moindre que pour la méthode des éléments finis, basé sur des fonctions B-Splines de degré $p=1$ à $p=4$. Ces résultats préliminaires montrent bien que sur ce type de problème que l'on peut tirer parti des propriétés de fonctions B-Splines ou des NURBS pour les interpolations, afin d'obtenir des solutions très satisfaisantes qualitativement à nombre de degré de liberté nettement plus faible, même si le coup global du calcul mérite discussion.

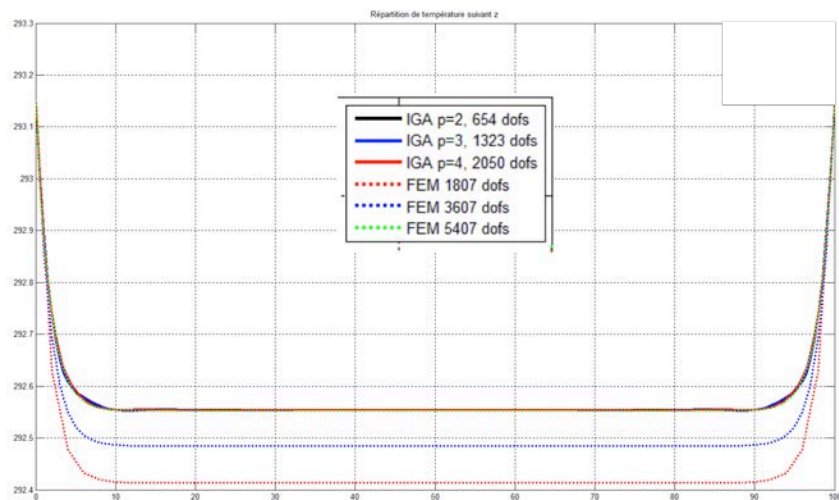


Figure 5 – Graphe des températures à $t=0.5s$ le long la ligne moyenne de la poutre

5. Conclusion

Dans cette communication, nous avons apporté une nouvelle approche à objets unificatrice de la méthode des éléments finis et de la méthode isogéométrique. L'approche à objets proposée offre l'avantage de pouvoir évaluer des modèles de discrétisation et d'analyse différents (isogéométrique et éléments finis) sur une seule et même formulation. Sur la base de travaux existants, nous comparons des méthodes éléments finis et isogéométriques en petits déplacements/petites déformations pour milieux incompressibles (approche de type \bar{B}). De même, nous comparons les performances de méthodes éléments en élasticité linéaire en grandes transformations pour une formulation Lagrangienne totale. Enfin, nous étudions une formulation thermomécanique en grandes transformations avec pour objectif final la simulation de pièces en élastomères. Des résultats préliminaires portant sur une formulation thermo-hyperélastique en grandes transformations montrent le potentiel de l'analyse isogéométrique dans ce contexte, avec notamment des convergences plus rapides en fonction du nombre de degré de liberté sur des cas d'intérêt dans la simulation de pièces élastomériques en analyse thermomécanique.

Références

- [1] T.J.R Hughes, J.A Cottrell, Y. Bazilevs. Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement , *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 194, 4135-4195, 2005.
- [2] L. Piegl, W. Tiller. *The NURBS book*, Springer-Verlag, 1997.
- [3] T.J.R Hughes, A. Reali, G. Sangalli. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199, 301-313, 2010.
- [4] F. Auricchio, L. Beirão Da Veiga, T.J.R Hughes, A. Reali, G. Sangalli. Isogeometric collocation methods, *Math. Models and Meth. In Appl. Sciec.*, 20(11), 2075-2107, 2010.
- [5] J.A Cottrell, T.J.R Hughes, A. Reali. Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis, *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 196, 4160-4183, 2007.
- [6] J.A Cottrell, T.J.R Hughes, Y. Bazilev, *Isogeometric analysis : Towards integration of CAD and FEA*, John Wiley & Son, 2009.
- [7] A.V Vuong, C. Heinrich, B. Simon. ISOGAT : A 2D tutorial MATLAB code for Isogeometric Analysis, *Comp. Aid. Geom. Design*, 27, 644-655, 2010.
- [8] D. Rypl, B. Patzak. From the finite element analysis to the isogeometric analysis in an object oriented computing environment, *Adv. In Soft. Eng.*, 44, 116-125, 2012.
- [9] D. Eyheramendy and F. Oudin, Object-oriented finite elements: From Smalltalk to Java, In *Trends in Engineering Computational Technology* Eds. M. Papadrakakis and B.H.V. Topping, ©Saxe-Cobourg Publications, Chap. 2 (2008) pp. 17-40.
- [10] D. Eyheramendy, R. Saad and F. Oudin-Dardun, Advanced object-oriented paradigms for parallel computational mechanics, *Computational Science, Engineering and Technology Series :27*, ©Saxe-Cobourg Publications, Chap. 6 (2011) pp. 135-157.
- [11] D. Eyheramendy, S. Lejeunes, R. Saad, L. Zhang. *Advances in symbolic and numerical approaches in computational mechanics*, ©Saxe-Cobourg Publications (2014).

- [12] T. Elguedj, Y. Bazilevs and V.M. Calo. \bar{B} and \bar{F} projections methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher order NURBS elements, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 197, 2732-2762, 2008.
- [13] G.A. Holzpfel, *Nonlinear solid mechanics, A continuum approach for Engineering*, John Wiley & Son, 2000.
- [14] P. Erbs and A. Duster, Accelerated staggered coupling schemes for problems of thermoelasticity at finite strains, *Computers and Mathematics with Applications* 64, 2408-2430, 2012.