



**HAL**  
open science

## Modèles d'endommagement à gradient et simulation numérique des phénomènes de rupture fragile

Corrado Maurini, Blaise Bourdin, Tianyi Li, Jean-Jacques Marigo, Erwan Tanne

### ► To cite this version:

Corrado Maurini, Blaise Bourdin, Tianyi Li, Jean-Jacques Marigo, Erwan Tanne. Modèles d'endommagement à gradient et simulation numérique des phénomènes de rupture fragile. 12e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01400446

**HAL Id: hal-01400446**

**<https://hal.science/hal-01400446>**

Submitted on 22 Nov 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Modèles d'endommagement à gradient et simulation numérique des phénomènes de rupture fragile

C. Maurini<sup>1</sup>, B. Bourdin<sup>2</sup>, T. Li<sup>4</sup>, J.-J. Marigo<sup>3</sup>, E. Tanné<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Institut Jean Le Rond d'Alembert, Université Pierre et Marie Curie and CNRS, corrado.maurini@upmc.fr

<sup>2</sup> Department of Mathematics, Louisiana State University, US, bourdin@math.lsu.edu

<sup>3</sup> Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique {marigo,tanne}@lms.polytechnique.fr

<sup>4</sup> Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables, EDF R&D, tianyi-externe.li@edf.fr

**Résumé** — Le but de cette contribution est d'illustrer les résultats fondamentaux obtenus sur la modélisation et simulation numérique des phénomènes de rupture fragile dans le cadre de l'approche variationnelle à la mécanique de la rupture. On illustre à l'aide d'exemples numériques comment les modèles d'endommagement à gradient peuvent être utilisés pour rendre compte des phénomènes d'initiation et nucléation. Dans le cas de chargement thermique (choc thermique), on montre qu'on peut prédire la nucléation d'un réseaux complexe de fissures et sa propagation en bon accord avec les résultats théoriques et expérimentaux.

**Mots clés** — Endommagement, rupture, méthodes énergétiques.

## 1 Introduction

Les modèles d'endommagement sont souvent utilisés pour la simulation numérique des phénomènes de fissuration dans les solides. Les approches énergétiques basées sur une formulation variationnelle constituent un cadre théorique clair pour établir les liens entre les modèles d'endommagement [5, 7, 8] et les modèles de rupture [2, 4]. Le but de cette contribution est d'illustrer par des exemples les résultats fondamentaux obtenus sur la modélisation et la simulation numérique des phénomènes de rupture fragile dans le cadre de l'approche variationnelle à la mécanique de la rupture dans les dernières années [1, 3, 9, 10, 12]. Nous considérons des modèles d'endommagement dont l'évolution quasi-statique est formulée comme un problème de minimisation de la fonctionnelle énergie totale

$$\mathcal{E}(u, \alpha) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} a(\alpha) A_0 \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx + \frac{G_c}{c_w} \int_{\Omega} \left( \frac{w(\alpha)}{\ell} + \ell \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \right) dx, \quad (1)$$

sous une contrainte d'irréversibilité sur la variable d'endommagement. Ici on dénote avec  $u$  le champ de déplacement,  $\alpha$  le champ d'endommagement,  $\varepsilon(u)$  les déformations linéarisées,  $A_0$  le tenseur d'élasticité,  $G_c$  la ténacité du matériau, et  $\ell$  un paramètre matériel qui a la dimension physique d'une longueur. Les fonctions  $a$  et  $w$  identifient la loi de comportement du modèle d'endommagement, représentant la modulation de la rigidité et de la dissipation volumique d'énergie avec l'endommagement, respectivement. On assume que  $a$  décroît de 1 à 0 et  $w$  croît de 0 à 1 pour  $\alpha$  qui croît de 0 à 1. Des résultats théoriques permettent d'établir que, sur pour une large classe de fonctions  $a$  et  $w$ , ces modèles d'endommagement sont énergiquement équivalents au modèle de rupture de Griffith dans les sens où, pour  $\ell \rightarrow 0$ , les minima *globaux* de (1) convergent vers le minima globaux de l'énergie du modèle de Griffith, somme de l'énergie élastique du milieu fissuré et de l'énergie de fissuration proportionnelle à la mesure des surfaces fissurées.

Nous étudions l'évolution quasi-statique de l'endommagement dans la structure déterminée par la minimisation *locale* de (1) sous la contrainte d'irréversibilité, en montrant qu'on peut rendre compte des phénomènes d'initiation et de propagation de fissures avec des morphologies complexes sans aucune hypothèse supplémentaire.

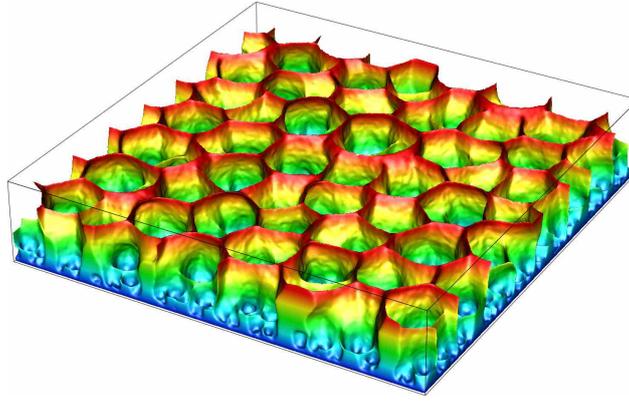


FIGURE 1 – Réseau hexagonal de fissures engendré par un choc thermique : résultats d’une simulation numérique obtenue avec le modèle d’endommagement à gradient [3]. Le chargement est donnée par un choc thermique sur la surface inférieur du bloc, qui est libre aux bords et sans forces volumiques.

## 2 Choix du modèle d’endommagement

Pour reproduire la phénoménologie typique de la rupture des matériaux fragiles, les fonctions  $a$  et  $w$  doivent respecter deux propriétés fondamentales [1] :

- *Dissipation finie à la rupture totale* :  $w(1) < \infty$ . Cette propriété est nécessaire pour pouvoir associer une énergie de rupture finie à une localisation de l’endommagement correspondante à une fissure.
- *Adoucissement en contraintes* :  $w'(\alpha)/s'(\alpha)$ ,  $s = a^{-1}$  étant la modulation de la souplesse, doit être une fonction décroissante de  $\alpha$ , au moins pour tout  $\alpha$  assez élevé. Cette propriété, liée à la non-convexité de l’énergie totale, est nécessaire pour introduire des phénomènes de localisation et perte de l’unicité des solutions à endommagement homogène.

On illustre les résultats analytiques et numériques obtenus avec 3 modèles particuliers :

- (AT)

$$a(\alpha) = (1 - \alpha)^2, \quad w(\alpha) = \alpha^2.$$

correspondant au modèle utilisé dans [2] et couramment utilisé dans la littérature récente de calculs numériques. Dans ce modèle, ayant une limite d’élasticité nulle, la réponse homogène est caractérisée par une phase durcissante suivi d’une phase adoucissante.

- (LE)

$$a(\alpha) = (1 - \alpha)^2, \quad w(\alpha) = \alpha.$$

correspondant à une modification minimale de (AT), qui, tout en gardant une dépendance quadratique de l’énergie par rapport à  $\alpha$ , introduit une contrainte limite d’élasticité [9].

- (LS)

$$a(\alpha) = \frac{1 - w(\alpha)}{1 + (k - 1)w(\alpha)}, \quad w(\alpha) = 1 - (1 - \alpha)^2.$$

correspondant à un modèle paramétré par  $k \geq 1$  dont la réponse homogène est caractérisée par une phase élastique linéaire et une phase où la contrainte décroît linéairement avec la déformation (Linear Softening), avec une pente dépendant de  $k$ .

Tous ces modèles sont purement *phénoménologiques* et *macroscopiques*, n’étant pas basés sur une approche *micromécanique*.

### 2.1 Propagation, nucléation, initiation et réseaux complexes de fissures

On illustre les propriétés fondamentales des modèles d’endommagement à gradient ci-dessous et leur utilisation pour la simulation numérique en rupture fragile à l’aide d’expériences numériques suivantes :

1. Propagation d’une fissure droite, montrant comment la localisation d’endommagement représentant une fissure se propage suivant le critère de Griffith [6, 11].

2. Nucléation dans une barre en traction homogène, montrant la dépendance du chargement critique à la nucléation de la longueur interne et des autres paramètres du modèle [9].
3. Nucléation dans une barre trouée, montrant la dépendance du chargement critique à la nucléation de la taille du défaut et des paramètres du modèle.
4. Initiation à partir d'une singularité de la forme d'une entaille, montrant la dépendance du chargement critique à l'initiation de l'angle de l'entaille et des paramètres du modèle.
5. Morphogenèse et propagation des réseaux complexes de fissures sous chargement thermique en 2D et 3D [3].

Dans chaque cas, les résultats numériques sont appuyés par des résultats analytiques ou semi-analytiques. La figure 1 illustre le réseau tridimensionnel de fissures obtenu dans le dernier cas.

## Références

- [1] H. AMOR, J.-J. MARIGO et C. MAURINI. Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57 (2009), p. 1209–1229.
- [2] B. BOURDIN, G.-A. FRANCFORT et J.-J. MARIGO. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (2000), p. 787–826.
- [3] B. BOURDIN, J.-J. MARIGO, C. MAURINI et P. SICSIC. Morphogenesis and Propagation of Complex Cracks Induced by Thermal Shocks. *Physical Review Letters* 112 (2014), p. 014301.
- [4] G. FRANCFORT et J.-J. MARIGO. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46 (1998), p. 1319–1342.
- [5] M. FRÉMOND et B. NEDJAR. Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International of Solids and Structures* 33 (1996), p. 1083–1103.
- [6] V. HAKIM et A. KARMA. Laws of crack motion and phase-field models of fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57 (2009), p. 342–368.
- [7] E. LORENTZ et S. ANDRIEUX. Analysis of non-local models through energetic formulations. *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), p. 2905–2936.
- [8] E. LORENTZ et V. GODARD. Gradient damage models : Toward full-scale computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (2011), p. 1927–1944.
- [9] K. PHAM, H. AMOR, J.-J. MARIGO et C. MAURINI. Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture. *International Journal of Damage Mechanics* 20 (2011), p. 618–652.
- [10] K. PHAM, J.-J. MARIGO et C. MAURINI. The issues of the uniqueness and the stability of the homogeneous response in uniaxial tests with gradient damage models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 59 (2011), p. 1163–1190.
- [11] P. SICSIC et J.-J. MARIGO. From Gradient Damage Laws to Griffith's Theory of Crack Propagation. *Journal of Elasticity* (2012), p. 1–20.
- [12] P. SICSIC, J.-J. MARIGO et C. MAURINI. Initiation of a periodic array of cracks in the thermal shock problem : A gradient damage modeling. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 63 (2014), p. 256–284.