



HAL
open science

L'enjeu rationnel du paradoxe de St Pétersbourg

Léo Gerville-Réache

► **To cite this version:**

| Léo Gerville-Réache. L'enjeu rationnel du paradoxe de St Pétersbourg. 2016. hal-01399519

HAL Id: hal-01399519

<https://hal.science/hal-01399519>

Preprint submitted on 19 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'enjeu rationnel du paradoxe de St Pétersbourg

Léo Gerville-Réache IMS – CNRS 5218 – Université de Bordeaux

Le jeu de St Pétersbourg est un problème imaginé par Nicolas Bernoulli en 1713. Il fut repris officiellement par son neveu Daniel en 1738 puis par D'Alembert en 1767 sous la forme suivante:

Pierre joue avec Paul à croix ou pile, avec cette condition que si Paul amène pile au premier coup, il donnera un écu à Pierre; s'il n'amène pile qu'au deuxième coup, deux écus; s'il n'amène pile qu'au troisième coup, quatre écus; au quatrième, huit écus; au cinquième, seize; et ainsi de suite jusqu'à ce que pile vienne; on demande l'espérance de Paul, ou ce qui est la même chose, ce qu'il doit demander à Pierre avant que le jeu commence, pour jouer avec lui à jeu égal, ou, comme on l'exprime d'ordinaire, pour son enjeu.

Les formules connues du calcul des probabilités font voir aisément, et tous les mathématiciens en conviennent, que si Pierre et Paul ne jouent qu'en un coup, Paul doit donner à Pierre un demi-écu; s'ils ne jouent qu'en deux coups, deux demis-écus; s'ils ne jouent qu'en trois coups, trois demis-écus; en quatre coups, quatre demis-écus, etc. D'où il est évident que si le nombre de coups est indéfini, comme on le propose ici, c'est-à-dire si le jeu ne doit cesser que quand pile viendra, ce qui peut mathématiquement parlant n'arriver jamais, Paul doit donner à Pierre une infinité de fois un demi-écu, c'est à dire une somme infinie.

Aucun mathématicien ne conteste cette conséquence; mais il n'en ait aucun qui ne sente et n'avoue que le résultat en est absurde, et qu'il n'y a pas de joueur qui voulût à un pareil jeu risquer seulement cinquante écus, et même beaucoup moins. Plusieurs grands mathématiciens se sont efforcés de résoudre ce cas singulier. Mais leurs solutions, qui ne s'accordent nullement, et qui sont tirées de circonstances étrangères à la question, prouvent seulement combien la question est embarrassante.

Réflexion

Ce paradoxe a fait le tour du monde (plusieurs fois) et les propositions d'analyses et de « solutions » sont très nombreuses. Comme souvent, derrière l'apparente simplicité de l'énoncé se cache un problème délicat : Ici, c'est celui de la cardinalité \aleph_0 des ensembles infinis dénombrables!

En effet, l'engagement de Paul, c'est à dire la promesse de payer Pierre rubis sur l'ongle quel que soit le nombre de lancers précédant pile, nécessite une réserve d'écus infinie. Les conditions du jeu imposent donc que la fortune de Paul soit infinie. La question est alors de savoir ce que l'on suppose de la fortune de Pierre. Deux cas sont envisageables : soit il dispose également d'une fortune infinie soit il ne dispose que d'une fortune finie.

Le premier cas place Pierre à égalité avec Paul, chacun disposant d'une fortune infinie. Dans cette situation, en quoi une mise infinie serait irrationnelle ; inéquitable ? Pour quelle raison Pierre refuserait-il de payer un enjeu infini ?

Numérotions les écus de la fortune de Paul. Cette fortune est donc en bijection avec l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} . Le cardinal de l'ensemble des écus pairs de Paul est également infini. Aussi mettons qu'il payera Pierre en écus pairs. Pierre, faisant de même, paye son enjeu avec l'ensemble de ses propres écus pairs. Quelle que soit l'issue de la partie, il est facile de voir que le cardinal de l'ensemble des écus de Pierre comme de Paul sera encore le même (\aleph_0). Quel que soit l'enjeu, fini ou infini, les joueurs ne risquent rien des cardinalités de leurs fortunes. Il n'y a donc aucune raison que l'un ou l'autre refuse de jouer. Un enjeu fini comme infini est clairement rationnel et équitable.

Dans le deuxième cas, Pierre ne peut proposer de miser qu'une somme inférieure ou égale à sa fortune finie. La question est alors de comprendre dans quelle mesure et selon quel raisonnement Paul doit-il accepter ou rejeter l'enjeu que proposera Pierre. L'analyse du cas où le cardinal de la fortune de Pierre est infini nous a également enseigné que Paul est indifférent à l'enjeu de Pierre. En effet, quel que soit l'enjeu et l'issue du jeu, Paul aura toujours une fortune de cardinal constant (\aleph_0). Aussi, Pierre, qui a ici une fortune finie proposera un enjeu nul. Enjeu que Paul n'a aucune raison de refuser d'avantage qu'un autre.

Conclusion

Il n'y a pas plus de paradoxe de St Pétersbourg que de paradoxe dans l'égalité entre le cardinal des entiers pairs et celui des entiers. Si la fortune de Pierre est finie, l'enjeu rationnel est de 0. Si sa fortune est infinie, tout enjeu (de 0 à l'infini) est rationnel.

Toute tentative d'analyse via le concept d'espérance mathématique est vaine puisque selon Kolmogorov, l'espérance du jeu n'est pas définie (série non absolument convergente). Aussi, la théorie des jeux selon Von Neumann et Morgenstern n'est ici, ni applicable ni remise en cause.

On pourrait ajouter quelques réflexions issues de la théorie des jeux sous l'hypothèse que la fortune de Paul fût finie mais il ne s'agirait plus d'analyser le jeu de St Pétersbourg.

Références

- [1] D'Alembert J., *Doutes et questions sur le calcul des probabilités*, p. 273-304, 1767.
- [2] Bernoulli D., *Specimen theoriae novae de mensura sortis*, in *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 5, 1738.
- [3] Kolmogorov A., *Foundation of the theory of probability*, Chelsea Publishing Company, (1933), 1950.
- [4] Von Neumann J. and Morgenstern O., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944.
- [5] Daniel Zajdenweber, *Équité et jeu de Saint-Pétersbourg*, *Revue économique* n°45(1), p. 21-46, 1994.
- [6] Krivine J.L. *Théorie axiomatique des ensembles*, Presses Universitaires de France, 1969.