



**HAL**  
open science

## Négation de croyances graduelles

Bénédicte Legastelois, Marie-Jeanne Lesot, Adrien Revault d'Allonnes

► **To cite this version:**

Bénédicte Legastelois, Marie-Jeanne Lesot, Adrien Revault d'Allonnes. Négation de croyances graduelles. Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, Nov 2016, La Rochelle, France. hal-01399248

**HAL Id: hal-01399248**

**<https://hal.science/hal-01399248v1>**

Submitted on 5 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Négation de croyances graduelles : une discussion

## Negation of Graded Beliefs : a discussion

Bénédicte Legastelois<sup>1</sup>

Marie-Jeanne Lesot<sup>1</sup>

Adrien Revault d'Allonnes<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS, LIP6 UMR 7606, 4 place Jussieu 75005 Paris, France

<sup>2</sup> Université Paris 8, LIASD EA 4383, FR-93526, Saint-Denis, France

### Résumé :

La négation est une opération centrale dans la construction de systèmes logiques et elle joue un rôle essentiel dans les outils de raisonnement et de manipulation d'information. Cet article considère le problème de la négation pour la manipulation de croyances graduelles, dans le cadre d'une logique doxastique pondérée : il étudie trois interprétations de la négation pour ces informations de haut niveau, qui transfèrent respectivement la négation aux trois composantes des croyances graduelles : la formule à propos de laquelle une croyance est exprimée, la modalité de croyance et le degré de croyance. Il discute le choix de cadres formels appropriés dans chaque cas, en considérant les logiques modales, floue et multi-valuée.

### Mots-clés :

Croyances, raisonnement, logiques modales, logiques pondérées, logique doxastique.

### Abstract:

Negation is a key element in the construction of logical systems and plays a central role in reasoning and information manipulation tools. This paper considers the issue of negating graded beliefs, in the framework of a graded doxastic logic. It studies three interpretations of negation for these high level pieces of information, where negation is transferred to the three components of graded beliefs : the formula about which a belief is expressed, the belief modality and the belief level. The paper discusses the choice of appropriate formal frameworks for each of these, considering modal, fuzzy and many-valued logics.

### Keywords:

Belief reasoning, modal logic, weighted logic, doxastic logic.

## 1 Introduction

La notion de croyances graduelles étend la notion de croyance classique par une modulation, représentée par un degré de croyance, qui peut être exprimé numériquement ou, linguistiquement, par un adverbe. Elle permet d'augmenter leur expressivité et, par exemple, de faire la distinction entre les forces des deux assertions 'je crois à un degré 0.8 que les licornes existent' et 'je crois à un degré 0.2 que les extra-terrestres

existent', les valeurs numériques pouvant être remplacées par des adverbes, par exemple 'fermement' pour le degré 0.8 et 'un peu' pour 0.2.

Cet article considère la problématique de la négation de telles croyances graduelles et propose de discuter des interprétations possibles d'une assertion de la forme 'il n'est pas vrai que  $\varphi$  est crue à un degré  $\alpha$ ', où  $\varphi$  est une formule logique et  $\alpha$  un degré de croyance.

À titre d'exemple, considérons que l'un des auteurs de l'article croie fermement que les licornes existent, au contraire des deux autres : l'un croit, mais *non fermement*, qu'elles existent; l'autre *ne croit pas*, fermement, qu'elles existent. Ces deux points de vue, distincts, diffèrent également de celui qui croit fermement que les licornes *n'existent pas* : ces trois assertions constituent bien trois négations de la croyance initiale, mais varient selon l'objet sur lequel elles portent, et illustrent la difficulté de la définition d'une telle négation.

Cet article se place dans une approche de raisonnement, visant à offrir des outils de manipulation logique des croyances et propose de modéliser chacun des trois types de négation illustrés ci-dessus, en examinant des formalismes spécifiques pouvant être envisagés pour chacun d'entre eux, en particulier les logiques modales, floue et multi-valuée.

Il existe de nombreux travaux sur les croyances graduelles, qui travaillent principalement sur le degré de croyance, en considérant différentes structures arithmétiques pour le représenter. On peut citer, à titre d'exemples, les probabilités,

les probabilités subjectives, les possibilités ou les fonctions de croyance évidentielles. Cependant, ces modèles sont principalement basés sur la notion de certitude que l’agent associe à la véracité du fait considéré [1] et ne se focalisent pas sur le niveau de croyance, potentiellement indépendant de cette véracité. Un type particulier est également observé lorsqu’un agent raisonne sur les croyances d’un autre [2, 10] : cette incertitude modélisée dans un cadre possibiliste [8, 9] offre une variante graduelle de la logique méta-épistémique [2], là où cet article se concentre sur les croyances d’un seul agent.

Le choix de l’une des sémantiques précédentes pour le degré détermine le plus souvent l’interprétation de la négation. Cet article considère le cas où le degré de croyance est interprété sans faire d’hypothèse sur les critères qui en déterminent le niveau, autorisant d’autres composantes que la certitude à entrer en jeu, en particulier en ne prenant pas en compte, ou du moins pas uniquement, la véracité du fait considéré. Il examine ainsi la question de la négation de façon générale, dans un cadre de raisonnement dans le formalisme de logiques reposant sur de telles notions non factuelles, modales en particulier, s’attachant à distinguer les trois interprétations illustrées ci-dessus.

La section 2 formalise la tâche de négation de croyances graduelles et les trois interprétations, qui sont étudiées tour à tour dans les sections 3 à 5. Dans chacun des cas, le principe en est d’abord détaillé, le choix d’un cadre formel approprié est discuté, les outils qu’il offre pour la modélisation de la négation sont rappelés, en soulignant leur expressivité et leur richesse ; enfin, leur transposition au cas des croyances graduelles est examinée. La conclusion et les perspectives sont présentées dans la section 6.

## 2 Formalisation de la négation des croyances graduelles

Cette section présente d’abord les notations utilisées, puis formalise les trois interprétations de leur négation, illustrées dans l’introduction.

### 2.1 Notations

La notion de croyance graduelle étend celle de croyance par la mesure du degré auquel un fait est cru. Nous proposons de la noter  $B(\varphi, \alpha)$ , lue ‘ $\varphi$  est crue à un degré  $\alpha$ ’ : cette notation représente simultanément (i) le type de modalité non factuelle considérée, la croyance,  $B$  ; (ii) la formule,  $\varphi$ , à propos de laquelle la croyance est exprimée ; et (iii) le degré associé,  $\alpha$ .

Avec cette notation, la phrase ‘l’agent croit fermement que les licornes existent’ s’écrit  $B(\varphi, \alpha)$ , où  $\varphi$  est la formule ‘les licornes existent’ et  $\alpha$  un degré représentant ‘fermement’. La mise en correspondance des termes linguistiques avec des valeurs numériques sort du cadre de cet article, on peut néanmoins, à titre d’exemple, choisir ici  $\alpha = 0.8$ .

La négation d’une croyance graduelle s’exprime linguistiquement comme ‘il n’est pas vérifié que  $\varphi$  est crue à un degré  $\alpha$ ’. Nous proposons de la noter  $\mathcal{N}(B(\varphi, \alpha))$ , où  $\mathcal{N}$  est un opérateur de négation général dont l’interprétation et la proposition de modélisations adéquates font l’objet de cet article.

Cette notation spécifique souligne la différence avec la négation classique  $\neg$  : celle-ci conduirait à écrire  $\neg B(\varphi, \alpha)$  et pourrait amener à transposer des résultats classiques associés à l’opérateur  $\neg$  au cas des croyances graduelles.

### 2.2 Objets de la négation des croyances graduelles

Comme illustré dans l’introduction, la négation d’une croyance graduelle  $B(\varphi, \alpha)$  peut être interprétée de diverses manières, selon la composante sur laquelle porte la négation. Formellement, trois formules peuvent être examinées :

	transfert de $\mathcal{N}$ sur
$B(\mathcal{N}_1(\varphi), \beta)$	la formule
$B(\varphi, \mathcal{N}_2(\alpha))$	le degré
$\mathcal{N}_3(B)(\varphi, \gamma)$	la modalité

$\mathcal{N}_1$ ,  $\mathcal{N}_2$  et  $\mathcal{N}_3$  sont trois déclinaisons de l'opérateur global de négation  $\mathcal{N}$ , qui sont discutées dans les sections suivantes. Les degrés, possiblement distincts,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\mathcal{N}_2(\alpha)$  sont utilisés pour ne pas imposer de contraintes a priori sur leurs relations ou leurs égalités, également discutées ci-dessous.

### 3 De $\mathcal{N}(B(\varphi, \alpha))$ à $B(\mathcal{N}_1(\varphi), \beta)$ : négation de la formule

#### 3.1 Principe

Lorsque l'on considère le transfert de la négation à la formule crue,  $\varphi$ , c'est-à-dire  $B(\mathcal{N}_1(\varphi), \gamma)$ , la négation s'appliquant à une formule logique est naturellement interprétée comme la négation logique :  $\mathcal{N}_1 \equiv \neg$ .

La question est alors de savoir si l'assertion  $\mathcal{N}(B(\varphi, \alpha))$ , lue 'il n'est pas vrai que  $\varphi$  est crue à un degré  $\alpha$ ', permet de tirer des conclusions sur la croyance en  $\neg\varphi$ , formellement notée  $B(\neg\varphi, \beta)$  : alors que le tiers exclu ne permet pas à  $\varphi$  et  $\neg\varphi$  d'être simultanément vraies, des croyances partielles en  $\varphi$  et  $\neg\varphi$  sont possibles simultanément, conduisant à examiner des contraintes éventuelles sur leurs degrés respectifs. En considérant l'exemple illustratif, s'il n'est 'pas vrai qu'un agent croit fermement que les licornes existent', croit-il que les licornes *n'existent pas* et, si c'est le cas, dans quelle mesure ?

#### 3.2 Cadre formel considéré : logiques modales pondérées

Les questions précédentes sont traditionnellement étudiées dans le cadre de logiques pondérées, par exemple possibiliste ou floue, dans lesquelles les degrés sont, le plus souvent, liés à la véracité du fait considéré. Nous examinons ici le cadre des logiques modales pondérées : ce sont des logiques non factuelles qui ne reposent pas sur ce principe et qui permettent de manipuler des savoirs et des croyances, par le biais de

l'opérateur  $\Box$  [6, 3]. Ainsi, la logique doxastique [14] interprète l'opérateur modal comme un opérateur de croyance, offrant un formalisme pour représenter et raisonner avec les croyances.

Leurs variantes pondérées permettent de combiner la représentation de modalités, ici la croyance, et de degrés numériques : elles introduisent des opérateurs modaux de la forme  $\Box_\alpha$  où  $\alpha$  est un nombre. Elles sont principalement définies sémantiquement, considérant des définitions enrichies des cadres de Kripke [11, 5, 15, 4] ou introduisant des fonctions de comptage dans la définition sémantique de l'opérateur modal [13, 12, 20, 16].

#### 3.3 Négation en logiques modales

**Logiques modales classiques** La combinaison de l'opérateur modal  $\Box$  avec la négation soulève la question des relations entre les formules  $F_1 = \Box\varphi$ ,  $F_2 = \neg\Box\varphi$ ,  $F_3 = \Box\neg\varphi$  et, en appliquant à la fois les négations interne et externe, c'est-à-dire avant et après l'opérateur modal,  $F_4 = \neg\Box\neg\varphi$  (soit  $F_4 = \Diamond\varphi$ ). Le fait qu'il existe ces 4 variantes souligne la richesse de sens que la négation peut exprimer en logique modale.

L'application à la formule  $\Box\varphi$  de la loi du tiers exclu, par compatibilité avec la logique classique, implique que  $\Box\varphi \vee \neg\Box\varphi$  est une tautologie, ce qui établit une relation entre  $F_1$  et  $F_2$ , et, de façon similaire, entre  $F_3$  et  $F_4$ .

Les relations entre  $F_1$  et  $F_4$  sont établies par les axiomes (D) et (CD), réciproques l'un de l'autre :

$$(D) \quad \vdash \Box\varphi \rightarrow \neg\Box\neg\varphi \quad (1)$$

$$(CD) \quad \vdash \neg\Box\neg\varphi \rightarrow \Box\varphi \quad (2)$$

En les appliquant à  $\neg\varphi$  et en utilisant la propriété de double négation  $\neg\neg\varphi = \varphi$ , on peut établir des relations similaires entre  $F_2$  et  $F_3$ .

En termes doxastiques, l'axiome (D) exprime le fait que, si  $\varphi$  est crue, alors son contraire ne l'est pas : il est impossible de croire à la fois une

formule et son contraire.  $(D)$  est donc considéré comme modélisant une des facettes de la rationalité supposée de l'agent dont les croyances sont représentées. Il est inclus dans la définition axiomatique classique de la logique doxastique,  $KD45$  [14].

Sa réciproque,  $(CD)$ , exprime une cohérence similaire, mais complémentaire, en exprimant que si une formule n'est pas crue, son contraire l'est : sa prémisse s'applique à une absence de croyance et sa conclusion à une croyance. En réécrivant l'implication avec une négation et une disjonction,  $(CD)$  impose donc que l'agent croie soit une formule, soit son contraire, conduisant à une forme modale du tiers exclu selon laquelle  $\Box\neg\varphi \vee \Box\varphi$  est une tautologie. Cette contrainte ne permet donc pas de modéliser un état d'esprit neutre, perplexe ou indéterminé, correspondant à une absence de croyance.  $(CD)$  est, en général, considéré comme trop restrictif et exclu de la définition axiomatique de la logique doxastique.

**Variante pondérée de l'axiome  $(D)$**  En utilisant une logique modale pondérée basée sur l'introduction d'une fonction de comptage normalisée dans la définition sémantique de l'opérateur modal, on peut établir [16] une variante pondérée de  $(D)$  selon laquelle :

$$(D_\alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in [0, 1] \text{ tels que } \beta > 1 - \alpha \\ \models \Box_\alpha \varphi \rightarrow \neg \Box_\beta \neg \varphi$$

Ce résultat est valable avec les mêmes hypothèses sur le cadre de Kripke que l'axiome  $(D)$  et peut donc être considéré pour une logique modale de croyances graduelles.

### 3.4 Transposition aux croyances graduelles

L'extension pondérée de l'axiome  $(D)$  constitue un candidat pertinent pour la relation désirée entre la négation de croyance globale  $\mathcal{N}(B(\varphi, \alpha))$  et la croyance en la formule niée  $B(\neg\varphi, \beta)$  : en appliquant  $(D_\alpha)$  à  $\neg\varphi$  et en considérant  $\mathcal{N}$  (resp.  $\neg$ ) comme la négation externe (resp. interne) par rapport à l'opérateur

modal, on obtient  $B(\neg\varphi, \alpha) \rightarrow \mathcal{N}(B(\varphi, \beta))$  pour tous  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  tels que  $\beta > 1 - \alpha$ .

Cette formule peut être lue comme 'si  $\neg\varphi$  est crue à un degré  $\alpha$ , alors il n'est pas vrai que  $\varphi$  est crue à un degré  $\beta$ '. Ainsi,  $\varphi$  et  $\neg\varphi$  peuvent être partiellement crues simultanément, à condition que leurs degrés respectifs vérifient la contrainte d'inégalité  $\beta > 1 - \alpha$ .

## 4 De $\mathcal{N}(B(\varphi, \alpha))$ à $B(\varphi, \mathcal{N}_2(\alpha))$ : négation du degré

### 4.1 Principe

Lorsque la négation de croyances graduelles est transférée sur le degré, 'il n'est pas vrai que  $\varphi$  est crue à un degré  $\alpha$ ' signifie que 'l'agent croit  $\varphi$ ' peut être vérifié, mais à un degré différent de  $\alpha$ . La négation,  $\mathcal{N}_2$ , s'applique aux degrés de croyance et désigne un opérateur de négation numérique à définir.

Une interprétation littérale suggère que toute valeur autre que  $\alpha$  convient. Elle pourrait conduire à définir  $\mathcal{N}_2(\alpha)$  comme un ensemble et non une valeur, par exemple  $\mathcal{N}_2(\alpha) = [0, 1] \setminus \{\alpha\}$ . Cette interprétation conduit à une compréhension très imprécise et non informative de l'assertion. Nous ne la considérons pas plus avant et proposons de définir  $\mathcal{N}_2$  comme une fonction de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ , de telle manière que nier une croyance graduelle fournisse une information sur cette croyance – et non sur la croyance dans la négation de formule, discutée dans la section précédente.

### 4.2 Cadre formel considéré : sous-ensembles flous

Nous proposons d'interpréter l'ensemble des croyances graduelles d'un agent  $\mathcal{B}$  comme un sous-ensemble flou de l'univers des formules syntaxiquement correctes  $\mathcal{F}$  : chaque formule appartient plus ou moins à l'ensemble de croyances  $\mathcal{B}$  et le degré de croyance est interprété comme un degré d'appartenance. Ainsi, en notant  $\mu_{\mathcal{B}} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  la fonction d'appar-

tenance à  $\mathcal{B}$ , on considère

$$B(\varphi, \alpha) \quad \text{ssi} \quad \mu_{\mathcal{B}}(\varphi) = \alpha$$

Ainsi, l'état épistémique de l'agent est considéré dans une variante pondérée, mais les poids ne sont pas considérés comme des degrés d'incertitude comme c'est le cas en logique possibiliste généralisée [8, 10]. Il faut également souligner que le degré d'appartenance n'est pas interprété comme le degré de vérité de la formule  $\varphi$ , mais comme la force de la croyance.

### 4.3 Négation en logique floue

Les opérateurs de négation numériques ont été en particulier étudiés dans le cadre de la logique floue et de la théorie des sous-ensembles flous, pour représenter la négation logique et l'opération ensembliste de complémentation. De façon générale, un tel opérateur est défini par trois propriétés [21] : c'est une fonction (i)  $n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , (ii) décroissante et (iii) qui vérifie les conditions aux limites  $n(0) = 1$  et  $n(1) = 0$ .

On peut noter que cette définition générale n'impose pas la contrainte d'involutivité, ce qui constitue une différence importante avec le cas classique pour le traitement des doubles négations logiques : le degré de vérité de  $\neg\neg\varphi$  peut être différent de celui de  $\varphi$ .

La définition la plus classique [22],  $n(x) = 1 - x$  est, toutefois, à la fois involutive et stricte (strictement décroissante et continue). On peut également citer (pour une liste complète, voir [21])  $n(x) = 1 - x^2$  qui est stricte mais non involutive ou l'opérateur de Gödel, défini par  $n(x) = 0$  si  $x > 0$  et  $n(0) = 1$ , et son dual, défini par  $n(x) = 1$  si  $x < 1$  et  $n(1) = 0$ . Ces derniers ne sont ni continus ni involutifs, on peut noter qu'ils constituent des choix drastiques : leur utilisation restreint les valeurs de vérité aux booléens  $\{0, 1\}$ . Ainsi, la variété des fonctions vérifiant la définition générale des négations floues permet de définir

des postures de négation complexes, plus riches que les comportements du cas classique.

On peut noter aussi que la logique floue offre deux types de négation pour les prédicats flous définis à partir d'une partition floue, distinguant compléments et antonymes (voir par exemple [7, 17]). Formellement, étant donné un prédicat flou défini sur un univers numérique de la forme  $[a^-, a^+]$ ,  $A : [a^-, a^+] \rightarrow [0, 1]$ , et un opérateur  $n$  de négation floue, le complément et l'antonyme de  $A$  sont respectivement définis par  $\bar{A}(x) = n(A(x))$  et  $\hat{A}(x) = A(a^+ - a^- - x)$ . Si le prédicat est une modalité d'une partition de Ruspini, son antonyme correspond à la modalité symétrique par rapport à la modalité centrale, ce qui établit un lien avec la définition linguistique de l'antonymie [18].

### 4.4 Transposition aux croyances graduelles

Le choix d'un cadre flou pour l'interprétation des degrés de croyance conduit à poser  $\mathcal{N}_2 \equiv n$  et à examiner la pertinence des propriétés des opérateurs de négation flous.

**Conditions aux limites** L'interprétation doxastique des conditions aux limites des opérateurs de négation floue peut être illustrée par la mise en correspondance des assertions 'l'agent croit à un degré  $n(1)$  que les licornes existent' et 'l'agent croit à un degré 0 que les licornes existent' (et vice-versa) et dépend donc de l'interprétation des degrés. Si l'on considère  $B(\varphi, 1)$  comme équivalent à  $\Box\varphi$ , les conditions aux limites peuvent être interprétées comme préservant la compatibilité avec le cas classique de l'expression modale du tiers-exclu, selon laquelle  $\Box\varphi \vee \neg\Box\varphi$  est une tautologie.

**Monotonie** D'un point de vue doxastique, la monotonie des opérateurs de négation floue correspond à la comparaison des degrés de croyance et leur négation : considérons les deux croyances graduelles  $B_1$  : 'l'agent croit à un degré 0.8 que les licornes existent' et  $B_2$  : 'l'agent croit à un degré 0.6 que les farfadets existent'. La négation de ces deux croyances

avec un opérateur flou, et donc décroissant, implique que  $\mathcal{N}(B_1)$  est cru, au plus, autant que  $\mathcal{N}(B_2)$ . Aussi, la propriété de monotonie semble compatible avec les comportements souhaités.

**Involutivité** Enfin, une propriété non imposée mais offerte par certains opérateurs de négation floue est l'involutivité : choisir de croire  $\mathcal{N}(\mathcal{N}(B_1))$  autant que  $B_1$  peut être compris comme le refus de gagner ou de perdre en croyance lorsqu'il est faux qu'on n'accepte pas le degré de croyance en  $B_1$ . Même si cette expression n'est pas naturelle, la notion sous-jacente semble correspondre à un comportement souhaitable.

## 5 De $\mathcal{N}(B(\varphi, \alpha))$ à $\mathcal{N}_3(B)(\varphi, \beta)$ : négation de la modalité

### 5.1 Principe

La troisième interprétation de la négation des croyances graduelles transfère la négation à la modalité : l'assertion négative 'il n'est pas vrai que  $\varphi$  est crue à un degré  $\alpha$ ' est vue comme fournissant une information sur une non-croyance, requérant une modalité additionnelle, en plus de la modalité de croyance. Notons que la langue anglaise dispose, pour un tel cas, d'un verbe spécifique, *disbelieve*, sans autre équivalent français que le désuet *décroire*.

Afin d'augmenter l'expressivité, dans le cas où les degrés de croyance sont exprimés linguistiquement par des adverbes, nous proposons de considérer plusieurs modalités, combinant intrinsèquement les modalités avec le niveau, en distinguant par exemple des modalités 'croire fermement' et 'croire modérément'. Ainsi la croyance graduelle est représentée par des modalités distinctes, bien que comparables, plutôt qu'une unique modalité nuancée par des degrés continus : cette interprétation consiste à considérer un ensemble fini de modalités, ayant plus des 2 modalités, croyance et non-croyance, évoquées ci-dessus.

### 5.2 Cadre formel considéré : logique multi-valente

La logique multi-valente [19] considère comme valeurs de vérité admissibles l'ensemble totalement ordonné  $\mathcal{L}_M = \{\tau_0, \dots, \tau_{M-1}\}$ , où  $M$  est un entier positif prédéfini et  $\forall \alpha, \beta \in \{0, \dots, M-1\}, (\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \tau_\alpha \leq \tau_\beta)$ .  $\mathcal{L}_M$  représente des valeurs de vérité intermédiaires entre 'faux',  $\tau_0$ , et 'vrai',  $\tau_{M-1}$ , à différents niveaux de granularité, dépendant du nombre total de niveaux,  $M$ .

L'une des motivations de la logique multi-valente est sa capacité à fournir une représentation linguistique des degrés de vérité, reposant sur une mise en correspondance entre l'échelle discrète ordonnée  $\mathcal{L}_M$  et un ensemble d'étiquettes linguistiques, par exemple basé sur des adverbes qualifiant le degré de vérité. Ainsi,  $\mathcal{L}_5$  est en bijection avec l'ensemble {'faux', 'plutôt faux', 'ni faux ni vrai', 'plutôt vrai', 'vrai'}.

### 5.3 Négation en logique multi-valente

Comme dans le cas de la logique classique, le principe de négation peut être écrit  $d(\neg\varphi) = n(d(\varphi))$ , où l'opérateur de négation multi-valent est classiquement défini comme :

$$\begin{aligned} n : \mathcal{L}_M &\rightarrow \mathcal{L}_M \\ \tau_i &\mapsto \tau_{M-1-i} \end{aligned}$$

Cette extension préserve la compatibilité avec la logique classique : la négation de 'faux',  $n(\tau_0) = \tau_{M-1}$ , est 'vrai', et vice-versa. Pour les degrés intermédiaires, l'opérateur de négation peut être vu comme calculant la valeur symétrique par rapport au milieu de l'échelle  $\tau_{\frac{M-1}{2}}$  : il peut être interprété selon la notion linguistique d'antonymie, évoquée précédemment [18].

Dans le cas où le nombre de niveaux,  $M$ , est impair, c'est-à-dire quand cette valeur médiane fait partie de l'échelle, elle est égale à sa propre négation  $n(\tau_{\frac{M-1}{2}}) = \tau_{\frac{M-1}{2}}$ . Aussi, une formule

ni fausse ni vraie a le même degré de vérité que sa négation.

Ce comportement spécifique de la négation, qui autorise une formule et sa négation à être simultanément vraies dans une certaine mesure, peut être interprété comme une généralisation de la loi de non-contradiction.

## 5.4 Transposition aux croyances graduelles

**Approche bivalente : croyance et non-croyance**  
L'introduction d'une modalité de non-croyance correspond à l'interprétation de 'il n'est pas vrai que  $\varphi$  est crue à un degré  $\alpha$ ' comme ' $\varphi$  est non-crue à un degré  $\beta$ ', transférant la négation globale à l'opérateur modal et, simultanément, permettant un effet sur les degrés associés, afin de ne pas limiter a priori l'expressivité de l'interprétation de la négation. Formellement, on peut introduire une modalité  $Db$  (pour *disbelieve*), poser  $\mathcal{N}_3(B) \equiv Db$ , c'est-à-dire écrire la négation  $\mathcal{N}(B(\varphi, \alpha)) = Db(\varphi, \beta)$ .

Il faut noter que le coefficient  $\beta$  décrit alors un degré de non-croyance, et non un degré de croyance, ce qui induit une différence importante par rapport aux cas précédents, où tous les degrés ont la même signification et sont mesurés sur une même échelle. Comme, néanmoins, croyance et non-croyance sont liées, les degrés associés conduisent à considérer une échelle signée plutôt que deux échelles indépendantes. Cette interprétation a été mentionnée dans la section 4.4, où l'interprétation d'une 0-croyance comme non-croyance est suggérée. Elle conduit à la question de savoir à quel degré, autour de quel  $\alpha$ , une croyance se transforme en une non-croyance.

L'interprétation floue discutée dans la section précédente peut être vue comme un cas extrême, où l'intervalle ouvert  $]0, 1]$  représente différents degrés de croyance et une unique valeur, 0, est considérée pour la non-croyance.

On peut néanmoins attribuer une plage plus importante pour les degrés de non-croyance.

Il peut sembler naturel de considérer comme valeur-pivot 0.5, située au milieu de l'échelle :  $]0.5, 1]$  représente alors des degrés de croyance intermédiaires,  $[0, 0.5[$  des degrés de non-croyance et 0.5 une valeur neutre. On peut toutefois aussi choisir une autre valeur, pour modéliser différentes attitudes vis-à-vis des croyances, en donnant plus d'importance à l'une ou l'autre des modalités.

L'expression de  $\beta$  en fonction de celle de la valeur du degré  $\alpha$  peut alors se faire par le biais d'une fonction vérifiant la contrainte d'être croissante.

**Approche multi-valente : multiples modalités de croyance**  
La représentation de la croyance graduelle combinant intrinsèquement les modalités avec le niveau conduit naturellement à exploiter une formalisation dans un cadre de logique multi-valente, en définissant formellement des modalités  $B_t$ ,  $t \in \mathcal{L}_M = \{\tau_0, \dots, \tau_{M-1}\}$ . On peut par exemple considérer 5 niveaux de croyance, représentées par des étiquettes linguistiques, par exemple {'faible', 'modérée', 'moyenne', 'ferme', 'forte'}.

La négation consiste alors à définir, pour tout  $t \in \mathcal{L}_M$ ,  $\mathcal{N}_3(B_t) = B_{n(t)}$  avec l'opérateur de négation multi-valente : la négation est appliquée à l'adverbe qui représente une combinaison de la modalité avec le degré et peut donc être interprétée en terme d'antonymes linguistiques.

Il faut noter que ce cas est équivalent au cadre flou discuté dans la section 4, après une discrétisation des degrés permettant leur manipulation linguistique. La différence essentielle avec l'approche bivalente précédente est liée l'interprétation du degré 0 et de la non-croyance, comme discuté ci-dessus.

## 6 Conclusion et perspectives

Cet article a proposé une discussion sur la négation de croyances graduelles. Dans les formalismes des logiques modales, floue et multi-



Tableau 1 – Interprétations de la négation de croyances graduelles

Cadre formel	Expression de la négation	Contrainte sur les degrés
logique modale pondérée	$B(\neg\varphi, \alpha) \rightarrow \mathcal{N}(B(\varphi, \beta))$	$\alpha, \beta \in [0, 1]$ et $\beta > 1 - \alpha$
logique floue	$\mathcal{N}(B(\varphi, \alpha)) = B(\varphi, n(\alpha))$	p. ex. $n(\alpha) = 1 - \alpha$
logique bimodale	$\mathcal{N}(B(\varphi, \alpha)) = Db(\varphi, f(\alpha))$	$f$ fonction croissante
logique multimodale	$\mathcal{N}(B_t(\varphi)) = B_{n(t)}(\varphi)$	$t \in \mathcal{L}_M, n(\tau_i) = \tau_{M-1-i}$

valente, il a examiné trois interprétations de cette négation, selon son objet : la formule à propos de laquelle une assertion modale est exprimée, la modalité qui exprime la croyance ou le degré représentant le degré de croyance. Le tableau 1 récapitule les interprétations proposées et les formalismes associés.

Les perspectives incluent une étude des trois interprétations de la négation pour caractériser leurs cas d'utilisation respectifs, en particulier pour examiner si elles sont concurrentes ou complémentaires. Dans ce dernier cas, des méthodes de sélection ou de combinaison seront à étudier. De plus, les principes d'étude proposés pourront être généralisés à d'autres opérateurs logiques de manipulation de la croyance, conjonction, disjonction et implication, conduisant à la définition d'un cadre formel général pour le raisonnement sur les croyances graduelles.

## Références

- [1] F. Bacchus, A. J. Grove, J. Y. Halpern, and D. Koller. From statistical knowledge bases to degrees of belief. *Artificial intelligence*, 87(1) :75–143, 1996.
- [2] M. Banerjee and D. Dubois. A simple modal logic for reasoning about revealed beliefs. In *Proc. of the Eur. Conf. on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty*, pages 805–816. Springer, 2009.
- [3] P. Blackburn, M. De Rijke, and Y. Venema. *Modal Logic*. Camb. Univ. Press, 2001.
- [4] F. Bou, F. Esteva, L. Godo, and R. Rodriguez. Characterizing fuzzy modal semantics by fuzzy multimodal systems with crisp accessibility relations. In *Proc. of the Joint 2009 IFSA World Congress and EUSFLAT Conference*, pages 1541–1546, 2009.
- [5] C. Boutilier. Modal logics for qualitative possibility theory. *International Journal of Approximate Reasoning*, 10(2) :173–201, 1994.
- [6] B. F. Chellas. *Modal logic : an introduction*, volume 316. Cambridge Univ Press, 1980.
- [7] A. R. de Soto and E. Trillas. On antonym and negate in fuzzy logic. *Int. Journal on Intelligent Systems*, 14(3) :295–303, 1999.
- [8] D. Dubois and H. Prade. Generalized possibilistic logic. In *Proc. of the 5th Int. Conf. on Scalable Uncertainty Management*, pages 428–432. Springer, 2011.
- [9] D. Dubois, H. Prade, and S. Schockaert. Rules and meta-rules in the framework of possibility theory and possibilistic logic. *Scientia Iranica*, 18 :566–573, 2011.
- [10] D. Dubois, H. Prade, and S. Schockaert. Reasoning about uncertainty and explicit ignorance in generalized possibilistic logic. In *Proc. of ECAI 2014*, pages 261–266. IOS Press, 2014.
- [11] L. Fariñas del Cerro and A. Herzog. A modal analysis of possibility theory. In *Fundamentals of Artificial Intelligence Research*, pages 11–18. Springer, 1991.
- [12] M. Fattorosi-Barnaba and C. Cerrato. Graded modalities I. *Studia Logica*, 47 :99–110, 1988.
- [13] K. Fine. In so many possible worlds. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 13(4) :516–520, 1972.
- [14] J. Hintikka. *Knowledge and belief : An introduction to the logic of the two notions*, volume 181. Cornell University Press Ithaca, 1962.
- [15] N. Laverny and J. Lang. From knowledge-based programs to graded belief-based programs. Part I : On-line reasoning. In *Proc. of ECAI*. IOS Press, 2004.
- [16] B. Legastelois, M.-J. Lesot, and A. Revault d'Alonnes. Typology of axioms for a weighted modal logic. *Proc. of the IJCAI Workshop on Weighted Logics for Artificial Intelligence WL4AI*, pages 40–48, 2015.
- [17] G. Moysse, M.-J. Lesot, and B. Bouchon-Meunier. Oppositions in fuzzy linguistic summaries. In *Proc of the fuzzIEEE*. IEEE, 2015.
- [18] V. L. Muehleisen. *Antonymy and semantic range in english*. PhD thesis, Northwestern University, 1997.
- [19] N. Rescher. *Many-valued logic*. Springer, 1968.
- [20] W. van der Hoek and J.-J. Meyer. Graded modalities in epistemic logic. In *Proc. of the 2nd Int. Symposium on Logical Foundations of Computer Science, Tver'92*, volume 620 of LNCS, pages 503–514. Springer, 1992.
- [21] S. Weber. A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 11(1) :103–113, 1983.
- [22] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8 :338–353, 1965.