



HAL
open science

Le temps didactique, le temps de l'enseigné, les élèves

Alain Jacques Mercier

► **To cite this version:**

Alain Jacques Mercier. Le temps didactique, le temps de l'enseigné, les élèves : Sur la méthode de l'approche biographique des institutions didactiques. 1993, 62 p. 10.13140/RG.2.2.30757.70881 . hal-01397705

HAL Id: hal-01397705

<https://hal.science/hal-01397705>

Submitted on 16 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Le temps didactique, le temps de l'Enseigné, les élèves	1
1.Le temps institutionnel, le temps personnel, l'intention didactique	1
1.1.Observation de la rencontre de l'intention didactique comme nécessité d'apprendre, pour des élèves	2
1.2.Les élèves n'apprennent pas seulement ce qui leur est enseigné	5
2.La gestion didactique du temps de l'Enseigné par la création de la nécessité d'apprendre	6
2.1.Le travail d'un rapport institutionnel à un objet non sensible, la factorisation des polynômes	7
2.2.Le rapport de Delphine à la factorisation du terme de plus haut degré, dans le calcul de limites	9
2.3.Le rapport de Delphine aux théorèmes pertinents de son cours de mathématiques	13
2.4.Conclusion de nos observations des embarras de Delphine	15
3.La construction de la biographie didactique des élèves	16
3.1.Les temps du système didactique, la biographie didactique des élèves	17
3.1.1.Le temps didactique et les paradoxes des théories de la transmission des connaissances	17
3.1.2.Le temps de l'Enseigné montre que le temps didactique est une fiction légale du système didactique	19
3.1.3.Le problème posé à nouveau	21
3.2.La réalisation de l'intention didactique dans les institutions didactiques	21

3.2.1.L'insuffisance du système didactique comme cadre d'étude de l'intention didactique	22
3.2.2.Les épisodes didactiques, et le temps de l'Enseigné. Ce qui est enseigné, ce qui doit être appris	22
3.2.3.L'effet biographique des épisodes didactiques dépend de la gestion didactique de l'ignorance induite par le maître et du rapport au savoir produit par l'élève	25
4.Les rapports institutionnels des élèves aux objets didactiques et la nécessité d'apprendre	27
4.1.La Boutique de Mathématiques, outil pour l'observation biographique	28
4.2.Un épisode didactique, ordinaire en algèbre, au Lycée, et les déterminants biographiques associés	29
4.2.1.L'interaction initiale avec Béatrice et Michèle, à propos des valeurs absolues	30
4.2.2.L'épisode didactique originaire du fragment biographique	33
4.2.3.Un fragment biographique de deux élèves	35
4.2.4.Le sens didactique du fragment biographique observé	39
5.Conclusion	42
Références	45
Annexe 1	48
Le cahier d'une élève de Terminale D	48
Annexe 2	55
Le rapport à l'algébrique, au Collège, ses effets sur le traitement des valeurs absolues, au Lycée	55

Quelques caractères particuliers de la transposition
didactique de la valeur absolue, au Lycée, aujourd'hui 55

Conclusion. Un choix transpositif didactiquement
impossible à réaliser 61

Le temps didactique, le temps de l'Enseigné, les élèves

Exposé à Grenoble, le 1er juillet 1992

Alain Mercier

Je travaille depuis 15 ans avec l'équipe de l'IREM d'Aix-Marseille,
je suis en thèse, à Bordeaux,
et le sujet que j'expose aujourd'hui provient de ce travail.

Plan de l'exposé

- 1) Les temps institutionnel et personnel, l'intention didactique
- 2) La gestion didactique du temps de l'Enseigné
- 3) La construction de la biographie didactique des élèves

1. Le temps institutionnel, le temps personnel, l'intention didactique

**Le didactique se caractérise traditionnellement de
l'intentionnalité : intention d'enseigner et intention d'apprendre.**

Mais si l'étude des moyens de réaliser l'intention d'enseigner est depuis longtemps au programme des recherches didactiques, sous le nom d'**ingénierie didactique**, celle de l'intention d'apprendre commence à peine. Elle nécessite l'étude de l'articulation du **temps personnel** de l'élève (le temps de l'apprentissage) au **temps institutionnel** de l'Ecole (le temps de l'enseignement). C'est ce que le titre de cet exposé propose.

Le temps didactique, temps spécifique du système didactique, se marque de la progression dans le texte, linéaire, du savoir :

la succession des objets de savoir est le moteur du temps des systèmes didactiques, qui progresse à chaque introduction d'un savoir nouveau.

L'Enseigné, comme sous-système du système didactique, est naturellement soumis au temps du système didactique, mais son temps n'est pas le temps didactique même. Celui-ci n'est en quelque sorte, pour l'Enseigné, que le temps officiel. **Le temps de l'Enseigné est produit par l'évolution des rapports institutionnels** à des objets de savoir anciens, c'est alors une évolution que l'apparition des objets nouveaux rend nécessaire.

1.1. Observer la rencontre de l'intention didactique comme nécessité d'apprendre, pour des élèves

Comment une intention didactique produit-elle, dans le cadre des institutions didactiques, pour des élèves, des injonctions didactiques suivies d'effet ?

Nous formons l'hypothèse qu'une intention didactique produit des injonctions didactiques en produisant de l'ignorance.

Nous nous proposons de **construire des observations de ce phénomène**, puis, de montrer que dans certaines conditions les élèves rencontrent effectivement cette ignorance comme *leur* ignorance, enfin, de montrer comment certaines conditions didactiques permettent à des élèves de dépasser leur ignorance, c'est-à-dire de passer de la **nécessité**

d'apprendre à l'acquisition d'un savoir nouveau¹.

Une manifestation non triviale de la rencontre de l'ignorance par un élève est donc un moment où se manifeste pour lui la **nécessité** d'apprendre et où il trouve la **possibilité** de le faire². C'est-à-dire : un moment où un élève connaît un savoir ancien et où, parce que ce savoir ancien outille des savoirs nouvellement introduits et parce que ce savoir ancien va devoir s'adapter à de nouveaux emplois, la connaissance que cet élève avait de ce savoir doit changer ; un moment où la situation didactique organise des conditions favorables à ce changement.

La possibilité d'apprendre dépend alors du type de *situation didactique* par laquelle l'élève rencontre l'ignorance, et en particulier des *composantes adidactiques de la situation didactique*³.

Tel est le phénomène qu'il s'agit d'observer, et de décrire :

« Quand, où, comment les élèves rencontrent-ils **une ignorance** ? »
« Comment cette ignorance devient-elle **nécessité d'apprendre** ? »
« Comment les élèves, auxquels les institutions didactiques font rencontrer **une ignorance comme injonction didactique**, peuvent-ils dépasser ce qui est devenu **leur** ignorance ? »

¹ Le problème de *la volonté d'enseigner* a été abordé, du point de vue de l'expérience cognitive, par Jean Brun et François Conne. Brun J., Conne F. (1992), *Connaissance et savoir dans la perspective de la transposition didactique*, Première partie. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12.2-3, (sous presse), Grenoble, La Pensée Sauvage. Le travail dans cette direction peut se suivre chez ces auteurs depuis : Brun J., Conne F. (1990), *Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations*. *Education et recherche*, 3/90, 12^e année, Fribourg, Editions Universitaires.

² En termes de rapports au savoir : « un moment où se manifeste pour un élève la nécessité de transformer le rapport personnel à un objet de savoir particulier qu'il entretenait jusqu'à ce jour, parce que cet objet outille des savoirs nouvellement introduits ».

³ Brousseau G. (1988), *Le contrat didactique : le milieu*. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9.3, pp. 309-336, Grenoble, La Pensée Sauvage.

C'est un *problème de didactique* que nous cherchons à définir⁴. Nous le rencontrerons sous la forme d'un ou deux problèmes particuliers, qui nous introduisent à une « classe de problèmes » que ces problèmes particuliers représentent.

L'**observation systématique** est notre première technique de recherche : il s'agit de « collecter » des réalisations du phénomène, tout en affinant notre technique d'observation. Cette collection n'est donc pas une collection de cas, et nous ne présentons pas des exemples : nous explorons les conditions d'existence d'un problème didactique.

Le vocabulaire courant alourdit l'expression, et rend difficile l'écriture comme la lecture d'un texte où ces idées se travaillent. La formalisation est ici utile à une manipulation contrôlée du sens, comme elle peut aider à produire des descripteurs, des notions dégagés du vocabulaire des institutions observées. Nous donnons donc, en notes, quelques outils formels du contrôle des énoncés que nous produisons⁵.

⁴ Guy Brousseau en a mené l'étude comme *le problème de la dévolution du problème*. Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7.2, pp. 33-115, Grenoble, La Pensée Sauvage.

⁵ Formellement, nous énoncerons alors le problème sous la forme ci-dessous, qui suppose connue les notations $R_I(O)$ pour le rapport à un objet défini dans une institution donnée à un moment donné ou rapport institutionnel à un objet, et $R_I^*(O)$ pour le rapport officiel, c'est-à-dire le rapport institutionnel à ses premiers moments, avant justement qu'il ait été institutionnalisé :

Soient O_1 et O_2 deux objets de savoir distincts, et I une institution didactique, tels que :

– le rapport institutionnel à l'objet O_1 existe de manière stable : pour tout temps t , $R_I^t(O_1) = \alpha$ (on peut avoir $\alpha = \emptyset$)

– le rapport institutionnel à l'objet O_2 , nouvellement introduit dans l'institution, n'existe pas encore de manière stable, le rapport officiel à O_2 émerge au temps T : il

1.2. Les élèves n'apprennent pas seulement ce qui leur est enseigné

Nous voulons montrer qu'un élève apprend le plus souvent tout autre chose que ce qui lui est officiellement donné à apprendre. Or, l'Ecole moderne semble aveugle à ce phénomène, qu'elle organise pourtant et qui fait son succès technique depuis plusieurs siècles.

Ce phénomène, qu'il s'agit pour nous de saisir, provient de **la rupture du contrat didactique consécutive à l'introduction d'objets de savoir nouveaux** qui a été constatée depuis longtemps par les recherches sur le contrat didactique. Mais ce phénomène n'a pas été systématiquement observé et étudié. Nous devons imaginer les modalités de l'établissement d'un nouveau régime du contrat didactique (qui portera sur des objets de savoir anciens) après la rupture introduite par l'apparition d'objets de savoir nouveaux. Nous devons imaginer, le cas échéant, l'échec des sujets didactiques à nouer un tel contrat, leur échec à apprendre ce qu'il faut pour que la relation didactique soit relancée.

Les nouveaux objets de savoir ne vivent pas isolément, et

existe T , tel que pour tout τ , $\tau < T$ implique $R_I^{\tau}(O_2) = \emptyset$ et pour tout θ , $T < \theta$ implique $R_I^{\theta}(O_2) \neq \emptyset$. Soit $R_I^(O_2)$ ce rapport officiel qui émerge.*

L'existence d'une relation trophique $O_1 \Leftarrow O_2$ (O_1 est outil pour O_2) impose alors le travail et la transformation de $R_I(O_1)$, que l'émergence de $R_I^(O_2)$ déstabilise : $R_I^{\tau}(O_1) \angle R_I^{\theta}(O_1)$.*

La transformation nécessaire de $R_I^{\tau}(O_1)$ au temps T , marque la progression du temps de l'enseigné. L'élève rencontre ici, avec son ignorance, l'apprentissage nécessaire. Il le fait à propos d'un objet de savoir O_1 qui est institutionnellement présent, mais qui reste didactiquement insensible. Bessot A, Mercier A. (1991), La dynamique institutionnelle : chronogenèse et évolution du rapport institutionnel. Travaux Dirigés pour le Cours de Chevallard Y., Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Actes de la VI^{ème} Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques*, Rennes, IMR, et Nantes, IRESTE.

l'émergence d'un rapport de l'élève à ces objets s'appuie sur les rapports précédemment noués. Dans ce mouvement, **les rapports à certains objets - anciennement présents dans l'institution - « travaillent »**, comme l'on dit d'une charpente que l'on met en charge et qui cherche une forme d'équilibre.

Nous montrerons que les formes de l'organisation des savoirs personnels de l'élève peuvent être travaillées de manière importante par les contraintes nouvelles. Ce phénomène vient de ce que **le travail demandé à l'Enseigné** à propos des objets sensibles (ceux que l'on vient de lui montrer) **nécessite** des savoirs ou des connaissances qui ne sont pas « toujours-déjà-là » pour lui ; **des rapports nouveaux à des objets anciens** dont, en principe, il rencontre *le manque*. Il les ignore mais la situation les lui désigne ; ce sont des savoirs à propos d'objets déjà présents institutionnellement, latents, mais **pertinents pour le problème** que l'élève rencontre⁶.

L'élève doit se proposer d'apprendre, de nouer les rapports nouveaux attendus par la situation, et il doit pouvoir apprendre dans la situation organisée pour lui par l'instituant, le maître : cela est essentiel pour la réussite des institutions didactiques⁷. L'élève doit pouvoir apprendre en utilisant les dispositifs didactiques qu'il s'est rendu disponibles - ce qui fait tout le problème de la réalisation d'une suite de séquences didactiques *pour des élèves donnés*, qu'il faudrait pouvoir caractériser par ces dispositifs didactiques-là, qui leur sont disponibles.

2. La gestion didactique du temps de l'Enseigné

⁶ Brousseau G. (1986b), La relation didactique : le milieu, *Actes de la IVème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 54-68, Paris, IREM de Paris VII.

⁷ L'objet initial de la Théorie des Situations est la description de ces conditions et l'étude des contraintes que rencontre l'action instituante de l'Enseignant. Brousseau G. (1982), D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. Cours, *Actes de la IIème Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques*, Orléans, IREM d'Orléans.

par la création de la nécessité d'apprendre

Soit le contenu d'un cahier d'élève (pour les parties non pertinentes à notre démonstration, seules les têtes de paragraphes sont données : voir en Annexe). C'est le cahier de Delphine, ce pourrait être celui de tout élève de sa classe, car **nous observerons par son truchement l'établissement du rapport institutionnel d'Enseigné**, et non le rapport personnel d'une élève particulière.

Delphine, élève de Terminale D, suit des cours particuliers de mathématiques pour des difficultés persistantes avec les limites. C'est ainsi que nous avons pu observer son rapport à cet objet de savoir et aux techniques algébriques associées. Nous montrons d'abord ici, à partir de l'interaction que nous avons eue avec elle, et à l'aide de son cahier de mathématiques, **comment l'enseignant de la classe de Delphine gère la « reprise du rapport ancien à un objet de savoir institutionnel »** : c'est une première occurrence de notre objet d'étude.

2.1. Le travail d'un rapport institutionnel à un objet non sensible, la factorisation des polynômes

Nous trouvons dans ce cahier l'effet d'une occurrence du problème général qui nous occupe. L'observation porte sur « **la Factorisation des expressions polynômiales** ».

La reprise du rapport institutionnel à la factorisation est, dans ce cas particulier, gérée par le moyen des exercices (donnés à voir, ou à faire, aux élèves). Mais - cela est tout à fait normal - cette gestion est implicite. **La factorisation n'est jamais nommée dans le cahier de Delphine**, la transformation du rapport institutionnel à « la factorisation » n'est pas demandée, la reprise nécessaire de ce rapport n'est jamais indiquée. **L'injonction didactique portant sur cet objet de savoir se fait en effet par l'introduction d'un objet nouveau** qui semble-t-il n'a pas d'autre fonction didactique que de garantir la nécessité de la reprise du rapport

ancien : *la recherche de limites de fonctions qui ne sont pas des fonctions polynômes, mais qui sont formées à partir de fonctions polynômes.*

Nous allons montrer que ces questions sont posées dans un seul but : pour que le travail de la factorisation se fasse, sur ces fonctions ; pour que soit passé **un nouveau contrat didactique** à propos des manipulations standard d'expressions algébriques, un contrat comprenant un geste nouveau, à mettre en œuvre dans les situations de calcul de limites.

Tel est l'usage de la relation de dépendance fonctionnelle de la factorisation au calcul des limites infinies, pour des fonctions qui ne sont pas des fonctions polynômes, que ce nouveau geste de factorisation outille⁸ : **pour ces fonctions particulières, les théorèmes que le professeur vient de dicter ne sont pas valides, parce que le degré de ces fonctions est supposé inconnu.** Chacun agira donc comme s'il était impossible de définir un degré, pour de telles fonctions : la question ne sera pas posée. La reprise du rapport ancien à la factorisation est demandée pour les seules expressions de fonctions *non polynômes* qui peuvent être rendues disponibles *à ce moment de l'année, pour ces élèves* : les fonctions « racines de fonctions polynômes ».

Si leur présence avait pour objet **l'enseignement** du calcul des limites de fonctions composées de fonctions polynômes et irrationnelles, il serait aisé de définir leur degré. L'étude de ces fonctions particulières se compléterait par l'étude de leurs variations et la recherche de leur représentation graphique. Si leur présence n'avait pas, comme c'est le cas, **un but didactique : montrer** le geste de factorisation **qu'il faut apprendre**, mais **un but instrumental : l'étude** d'un type particulier de fonctions **que les élèves doivent savoir réaliser**, la gestion didactique

⁸ C'est ce que Landy Rajoson a appelé une *relation trophique* d'un objet de savoir à un autre. Nous la notons formellement « $O_1 \Leftarrow O_2$ ». Puisque l'objet ancien O_1 outille l'étude de l'objet nouveau O_2 , la présence de O_2 rend O_1 nécessaire. L'indice nomme ici la position de l'objet dans la relation, il mesure en quelque sorte son niveau trophique.

serait tout autre. Par exemple, l'enseignant accepterait de parler de degré rationnel d'une expression algébrique, et montrerait l'extension possible du théorème sur « les termes de plus haut degré », puisque c'est un théorème qu'il vient de dicter. Cela ferait sortir la question (préconstruite) du degré d'une fonction du domaine (défini par le contrat didactique) des fonctions polynômes, c'est-à-dire que cela organiserait la reprise du rapport à l'objet « degré d'une fonction » : le degré ne serait plus la propriété exclusive des fonctions polynômes (mais pourrait rester encore une notion préconstruite, si la reprise était implicite).

Ce n'est manifestement pas souhaité, ici.

Quelle est alors l'utilité de la reprise proposée, au delà du traitement des questions portant sur les fonctions « racines de fonctions polynômes », dans la mesure par exemple où ces questions ne sont jamais présentes dans les énoncés d'examen ?

Nous pourrions proposer une réponse de bon sens : « C'est parce que le minimum exigible d'un élève ne peut être ce qu'on lui demande exactement lors de l'apprentissage, et qu'il faut viser plus haut pour obtenir la moyenne », mais cela ne correspond pas à la réalité didactique de la classe que nous observons par le moyen du cahier de Delphine.

Pour le comprendre, **nous devons faire appel à la manière dont cette observation a pu être produite** : nous ne sommes pas allés directement en ce point du cahier sans y avoir été amenés par un indice essentiel pour notre propos : c'est **Delphine elle-même qui nous y a - indirectement - conduits**, par son attitude embarrassée dans un calcul de limite, lors d'un devoir surveillé. Ces embarras ont attiré notre attention sur son cours de mathématiques et plus particulièrement sur « la factorisation du terme de plus haut degré dans la partie polynômiale d'une fonction non rationnelle formée sur des fonctions polynômes ».

2.2. Le rapport de Delphine à la factorisation du terme de plus haut degré, dans le calcul de limites

L'observation proposée est une observation « naturelle », non provoquée. Delphine, l'élève de Terminale D dont nous avons donné un extrait du cahier, suit des cours particuliers de mathématiques depuis le 30 octobre de son année de terminale, auprès d'un intervenant I.

Voilà aujourd'hui cinq séances que I et Delphine travaillent sur le thème de l'étude des fonctions. Le travail effectué durant ces séances prend normalement pour objet les exercices, devoirs en classe, devoirs à la maison déjà faits. Il consiste en l'étude de ce que Delphine a fait, dont elle conserve la trace en apportant ses brouillons, et de l'étude de ce qu'elle aurait pu faire, si elle avait disposé des réponses aux questions *a posteriori* qu'elle pose. Ce jour-là (lundi 10/12/90), Delphine arrive avec « beaucoup de questions à poser » : elle a préparé trois questions sur le devoir en classe de la veille. En effet, « ça n'a pas bien marché » dit Delphine, alors même qu'elle peut annoncer un « 13,5 » pour le devoir en classe précédent. Sa première question porte sur des calculs de limites. Deux fonctions comportant le logarithme apparaissent successivement dans l'énoncé, on demande leur étude sur \mathbb{R}_+^* .

D'abord la fonction $g(x) = 1 + x \cdot (1 - \ln x)$,

puis la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x}$

Pour chacune d'elles, Delphine a, pense-t-elle, « déterminé l'ensemble de définition » sans difficulté, mais elle dit qu'en revanche elle « n'a pas réussi à lever l'indétermination ». I oriente aussitôt le travail sur la détermination de la limite de f en « plus l'infini ». Cette limite a bien sûr fait problème, pense-t-il, et il s'étonne tout haut de ce que Delphine n'ait pas su faire appel aux théorèmes pertinents pour son propos. Delphine avance pour sa part qu'elle **dispose bien d'un théorème à ce sujet, mais qu'il ne s'applique pas ici** parce que le dénominateur n'est pas x lui-même. I lui fait observer qu'il aurait suffi d'écrire :

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x} = \frac{\ln x}{x \cdot (1 + \frac{1}{x})}$$

$$= \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow 0 \cdot 1 = 0$$

On comprend dès lors l'intérêt du travail qui a pris place deux mois plus tôt dans l'histoire de la classe : pour pouvoir « appliquer le théorème » du cours sur les limites en $+\infty$ de fonctions comprenant des logarithmes (théorème qui porte sur le rapport $\frac{\ln x}{x}$), **il faut savoir, sans même devoir y penser, « mettre x en facteur dans l'expression x + 1 »** parce que ce geste « fait apparaître un x, et une expression de limite finie dont le signe seul risque d'intervenir, une expression qui se trouve donc être *inerte pour la question* ». Il faut encore que ce savoir d'usage résiste au changement de la situation, il faut que l'élève sache qu'ici ce geste peut toujours se faire, alors que la situation est nouvelle en comparaison de celles où ce geste était pertinent, dans le chapitre sur les limites infinies. **La difficulté est donc, ici, due à l'utilisation de la technique de factorisation dans un cas nouveau, conjointement à l'utilisation du théorème nouveau (La limite à l'infini du quotient $\frac{\ln x}{x}$ est zéro) dans un cas où ce théorème nouveau n'est pas d'application directe.**

C'est ce que les psychologues appellent une *tâche complexe*, et l'on sait, comme cela va être observé ici, que dans ces conditions le rapport au savoir le plus récent est déstabilisé. C'est un phénomène connu : « Un apprentissage nouveau déstabilise l'apprentissage immédiatement précédent qui est utilisé conjointement à l'apprentissage nouveau. » Nous montrons que ***cette déstabilisation se fait au profit de l'émergence d'un rapport nouveau au savoir précédent*** : la déstabilisation observée est l'indice du travail du rapport à l'objet ancien⁹.

⁹ Cette remarque est importante pour les observations en psychologie, parce que l'on trouve ici que la déstabilisation observée ne se fait pas sur le savoir en cours

L'examen de la copie de Delphine, lorsque la correction l'aura rendue disponible à I, montrera que cette élève n'a, en fait, pas rencontré de difficulté insurmontable à ce sujet. Même, le geste proposé est celui qu'elle a fait. A cela près qu'**elle a, normalement, produit une erreur sur le savoir le plus récent (le théorème du cours)** et qu'elle a conclu que la limite est $+\infty$!

C'était une difficulté somme toute banale, une difficulté vite réglée, produisant une erreur simple à saisir, vite corrigée. Une difficulté sans grande importance, qui remplit sa fonction de **signal** : la pertinence de la pratique de factorisation d'un monôme du plus haut degré possible est énoncée, la pratique est mise en place dans le cas nouveau des fonctions comprenant un logarithme, où elle sera dorénavant employée.

Delphine se désintéresse aussitôt de la fonction f. Elle demande à I « Comment on peut obtenir la limite de g en $+\infty$? », considérant par là même la question précédente comme une question réglée.

Voilà donc l'exemple d'une gestion didactique qui - pour l'élève Delphine, tout au moins - **a bien réussi à assurer l'apprentissage attendu** (la factorisation du terme de plus haut degré pour le calcul des limites, etc.), **de telle manière que le savoir-faire correspondant se trouve disponible dès que la nécessité s'en fait sentir.**

L'apprentissage nouveau sur les limites de la fonction $\frac{\ln x}{P(x)}$, c'est-à-dire l'évolution de la technique de résolution des problèmes de limites

d'apprentissage, mais sur un savoir fonctionnellement dépendant de celui-ci, plus récent, qui sert à « appeler » un milieu adidactique pour l'apprentissage.

On peut remarquer en outre que la question posée ici est hors-programme, et qu'elle est soigneusement évitée par les énoncés d'examen tandis qu'elle est en revanche systématiquement présente dans les questions posées en classe par de nombreux enseignants : ces questions légitiment en effet le travail sur la factorisation du terme de plus haut degré, dont elles se nourrissent. Ce travail doit sans doute assurer l'apprentissage d'un geste technique indispensable dans l'organisation des savoirs enseignés, en Terminale : la question, qui mériterait une étude précise, reste ici ouverte.

nécessité par l'apparition de la fonction logarithme, peut alors se réaliser normalement. Il se trouve être l'apprentissage à réaliser au moment où le théorème sur les limites du type $\frac{\ln x}{x}$ est donné : cet apprentissage est enjeu didactique lors de la présentation officielle du logarithme, qui nécessite sa réalisation. **Même si ce n'est pas un objet sensible, la correction en classe va pouvoir comporter une remarque rapide à son sujet si de nombreux élèves ont, comme Delphine, « mal utilisé », là, le théorème du cours et si leurs erreurs montrent un « embarras collectif ».** Il est un peu tard pour que la réalisation réussie de cet apprentissage par Delphine soit rendue visible par la note du devoir surveillé (Delphine aura 7,5/20, comme elle s'y attendait), mais l'apprentissage nécessaire sera bien en place au moment de l'épreuve du baccalauréat.

2.3. Le rapport de Delphine aux théorèmes pertinents de son cours de mathématiques

Delphine insiste : elle a, dit-elle, beaucoup « séché » sur cette question durant l'interrogation écrite avant de renoncer ; cela lui a fait perdre beaucoup de temps et l'a inquiétée ; elle en a parlé, en sortant, à ses camarades de classe, mais aucun de ceux qu'elle a interrogés n'a su lui répondre. **Malgré ses réflexes d'enseignant qui le portaient à ne voir que le problème posé par f, I finit par l'entendre**, et s'intéresse dès lors avec elle à la fonction g. Selon les conventions de travail qu'ils ont mises en place, elle lui montre le brouillon de ses recherches au cours de l'interrogation écrite :

$$\lim (1 + x(1 - \ln x)) \text{ en } +\infty ?$$

$$\ln x \longrightarrow +\infty$$

$$\left(1 - \ln x \longrightarrow -\infty \right.$$

$$\left. \text{et } x \longrightarrow +\infty \right)$$

« Il y a donc indétermination, commente-t-elle, et il n'y a pas de théorème du cours dans ce cas. »

Il existe certainement un théorème du cours qui permet de répondre à sa question. Mais cette fois, ce n'est pas *un théorème du chapitre* logarithme et un calcul technique venu de la pratique du calcul des limites qu'il faut faire intervenir, c'est un théorème du cours sur les limites : « Le produit de deux fonctions de limite infinie en x_0 est une fonction de limite infinie en x_0 , dont le signe se détermine par la règle des signes ». Nous le trouvons bien dans le cours de Delphine, où il forme une des colonnes du tableau sur les produits de limites.

Nous pouvons remarquer ici que la « pertinence explicite durable » d'un théorème ne fait pas partie de ce qui peut trouver place dans le cadre normal du contrat didactique, pour Delphine. Un rapport institutionnel à ce théorème est établi, et un rapport institutionnel établi l'est définitivement, c'est là sans doute une clause essentielle du contrat didactique, parce que c'est l'expression d'une contrainte de la gestion du temps didactique ; mais *l'appel d'un théorème* (la rencontre de sa nécessité) *semble*, dans le contrat didactique pour Delphine, *ne pouvoir se produire que pour un théorème du cours c'est-à-dire un théorème du chapitre actuellement étudié* : un théorème sensible. **Le rapport à un théorème, lorsqu'il est devenu rapport institutionnel, ne comporte plus que « l'action naturelle du théorème »**, qui de ce fait n'est plus visible que comme « théorème en acte ».

Par l'observation de Delphine, nous avons eu accès à une clause du contrat didactique, telle qu'elle peut vivre dans une Terminale

scientifique : une contrainte de la situation.

Ce théorème lui fait donc défaut, et ce manque vient donc *a priori* « d'une question de contrat didactique sur ce que sont les *théorèmes du cours* », ceux qui doivent être disponibles. Delphine attendait apparemment un théorème du cours sur les logarithmes, elle ne pensait pas pouvoir buter devant un théorème sur les limites. Les théorèmes du cours sur les limites devraient lui être disponibles sans effort, tout comme la factorisation du terme de plus haut degré dans la partie polynômiale de la fonction f .

Comme I, elle imagine difficilement qu'elle ait pu être surprise sur ces savoirs auquel le rapport institutionnel (celui qui est attendu, qui manifeste le contrat sur les calculs de limites infinies) est, depuis plus d'un mois, stable.

2.4. Conclusion de nos observations des embarras de Delphine

I, comme son enseignant, est soumis au même aveuglement institutionnel. Il sait, d'un savoir professionnel d'enseignant du Lycée, que les élèves apprennent lentement la factorisation du terme de plus fort degré, et il pense immédiatement que les difficultés de l'élève viennent de la fonction f . **Il ne sait pas**, alors qu'il suit depuis plus de deux mois le travail de cette élève sur les limites, **que Delphine a appris la nouvelle technique de factorisation** et son rôle dans le travail d'une fonction non rationnelle, **mais qu'elle ignore toujours un théorème du cours.** Une enquête rapide montrera qu'elle n'a jamais eu l'occasion de l'employer jusqu'à ce jour : cette ignorance est bien normale ; mais l'objet est institutionnellement présent, et les enseignants ne connaissent officiellement (dans les relations qu'ils ont avec les élèves) que cette présence institutionnelle, qui est une présence légale, une présence *pour l'Enseigné*. **Le rapport institutionnel à ce théorème existe depuis qu'il a été donné et écrit par les élèves dans le tableau récapitulatif des théorèmes, mais l'élève n'entretient aucun rapport personnel à cet objet : il est présent mais ignoré.**

Nous avons ainsi montré :

un épisode didactique sans effet biographique.

Les enseignants sont aveugles à certaines formes de l'ignorance réelle des élèves, parce qu'ils sont, eux-aussi, soumis aux contraintes de la situation, au contrat didactique qui les fait toujours comptables du rapport institutionnel.

Nous avons pu observer cette ignorance parce que Delphine nous a montré qu'elle n'avait pas appris ce que nous pensions - les savoirs didactiquement sensibles - mais qu'elle avait appris, à l'occasion de la leçon sur les limites et à l'insu de l'institution, une nouvelle technique de factorisation des polynômes. La leçon sur les limites a donc servi de *milieu* favorable à la rencontre, par l'Enseigné, d'un *problème* « faire apparaître le degré entier d'une expression algébrique non polynômiale formée sur des polynômes » et d'une *technique d'attaque* de ce problème. Le rapport institutionnel aux polynômes a changé à cette occasion. Mieux encore, certain théorème sur le calcul des limites n'est toujours pas connu deux mois après sa présentation. Il est appris bien plus tard, à l'occasion d'une recherche de limite portant sur une fonction logarithme.

Ce théorème a été un objet sensible, mais il est appris alors qu'il est forclos¹⁰ : c'est **une nouvelle occurrence du phénomène** que nous avons construit à propos d'objets de savoir non sensibles, un phénomène général.

3. La construction de la biographie didactique des élèves

¹⁰ On pourrait penser que la factorisation du terme de plus haut degré a été, elle aussi, un objet didactiquement sensible, mais l'observation des interrogations écrites posées aussitôt la fin du chapitre montre que, déjà à ce moment-là, les calculs de limites ne se justifient plus de cet emploi. Ils se démontrent par les théorèmes du cours sur les limites de fonctions polynômes ou fractions rationnelles, pour lesquelles il suffit de se référer au terme de plus haut degré sans factorisation : en réduisant le polynôme par élimination des monômes de degré inférieur.

3.1. Les temps du système didactique, la biographie didactique des élèves

3.1.1. Le temps didactique et les paradoxes des théories de la transmission des connaissances

Le temps didactique est, dans le fonctionnement didactique, un temps *légal*, un temps pour tous. Le maître en est comptable devant la classe : il est responsable de la bonne gestion de la progression temporelle, et nous avons montré comment les élèves sont attentifs à ce que son action soit efficace¹¹.

L'Enseignant crée le temps avec du savoir, non pas parce qu'il sait plus, mais parce qu'il sait *avant*. Le maître sait ce qu'il va dire pour que l'élève apprenne, alors que l'élève ne peut pas prévoir ce que le maître va dire, lui donner à étudier, lui faire apprendre. L'Enseignant présente, chacun à son tour, *les éléments du texte du savoir*, un texte idéal qui fait référence sans être écrit nulle part : par principe, le texte du savoir est organisé en fonction de la rationalité du discours d'exposition. **L'Enseignant nourrit donc le temps avec du savoir, il assure ainsi la chronogenèse.**

Les objets de savoir qui font aller le temps didactique sont *les objets didactiquement sensibles*. Ils sont les objets des évaluations terminales,

¹¹ Pour l'introduction de la notion de temps didactique, Chevallard Y. (1980), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Cours donné à la Ière Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques, (1985) et (1991), Grenoble, La Pensée Sauvage ; pour une présentation de la position des élèves sur la question de la progression temporelle, Mercier A. (1982), *Le temps des systèmes didactiques*. Séminaire, *Actes de la IIème Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques*, Orléans, IREM d'Orléans ; Chevallard Y. (1986), *Sur la notion de temps didactique*. Cours, *Recueil des textes et comptes rendus de la IVème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 69-93, Paris, IREM et Université Paris 7.

sommatives, quelle qu'en soit la fréquence. L'Enseigné peut être déclaré « avoir échoué dans l'apprentissage attendu » à propos de ces objets de savoir et d'eux seuls. Il doit en effet montrer, en temps utile, publiquement, un rapport aux objets didactiquement sensibles qui peut être déclaré *conforme* ou *non conforme* au **rapport officiel**, le rapport institutionnel tel qu'il vient d'être mis en place par la suite des actes d'enseignement et par les actes d'étude que l'enseignement a, en principe, provoqués. Le jugement de conformité porte sur l'*adéquation* du rapport personnel de l'élève au rapport institutionnel.

La logique de l'apprentissage est tout autre, parce que **tout apprentissage se fonde sur des savoirs préconstruits**, c'est pourquoi il nécessite les *reprises*, les après-coup¹². **Cela fait du temps didactique un temps fictif** : il n'est le temps de personne, il n'est le temps d'aucune action autre que l'action instituante de l'Enseignant. Cette fiction est pourtant nécessaire au fonctionnement didactique, parce que la « mise en temps » du texte du savoir résoud les paradoxes que rencontre toute volonté didactique¹³ :

« Comment peut-on chercher à connaître ce que l'on ne connaît pas, ce dont on n'a pas idée ? » ; « Comment peut-on obtenir de l'enseigné les comportements qui manifestent sa maîtrise du savoir, sans lui dire ce que l'on attend qu'il fasse ? ».

La fiction légale du temps officiel permet en outre **la distinction de deux places dans l'espace didactique : c'est la topogénèse**. Face au savoir, les places sont celles d'Enseignant et d'Enseigné. Elles ne se distinguent pas de ce que l'un sait plus que l'autre, ou avant l'autre, mais de ce que chacun des acteurs du système didactique se voit désigner, pour

¹² Chevallard Y. (1980).

¹³ Socrate avait formulé et résolu les deux paradoxes que nous énonçons ici par les notions d'*anamnèse* pour la théorie de la connaissance, par la *maïeutique* et l'*aporie* pour les techniques d'enseignement. Platon (IV^e a.c.), *Ménon*. 82 a-86 a. et *Phédon*. 73 a-75 b. Paris, N.R.F., Pléiade.

un objet de savoir donné, un ensemble déterminé de *comportements caractéristiques de sa position institutionnelle*. Ainsi, *en principe*, l'Enseignant expose le cours que l'Enseigné apprend, il démontre les théorèmes que l'Enseigné applique ; l'Enseignant propose les problèmes que l'Enseigné cherche et résoud, puis il en corrige les solutions. Ainsi, *en principe*, l'Enseignant ne pose que des questions dont il connaît la réponse, et l'Enseigné ne se voit poser que des questions dont l'Enseignant peut montrer que l'Enseigné aurait pu trouver la réponse (à l'aide de ce qui lui a été enseigné). La solution des paradoxes de l'intention didactique est donc institutionnelle, elle réside dans les moyens de négociation qu'offre la temporalité particulière des systèmes didactiques.

3.1.2. Le temps de l'Enseigné montre que le temps didactique est une fiction légale du système didactique

Le temps du sous-système *Enseigné* est naturellement soumis au temps d'ordre supérieur du système didactique. Son rythme est donné par le passage des objets de savoir sensibles, qui font aller le temps didactique. **Le temps de l'Enseigné se rythme donc de la suite des rapports au savoir publiquement manifestés par l'Enseigné et déclarés conformes aux rapports institutionnels.**

Mais déjà, la topogénèse dénonce le temps didactique comme une fiction fonctionnelle¹⁴ : le maître ne se contente pas de savoir *avant*, il sait *autrement*. De l'Enseignant à l'Enseigné, il y a par conséquent **bien plus qu'un écart** qui pourrait être rattrapé. Certains objets manipulés par le maître pourront ainsi rester dans son topos, hors d'atteinte d'un apprentissage, pour un élève ordinaire qui ne réalise pas plus que l'ensemble des gestes que l'enseignement attend de lui.

Mais le savoir n'existe pas sous la forme d'un texte linéaire, dès qu'il doit fonctionner en quelque problème. Les organisations des savoirs

¹⁴ Chevallard Y. (1980).

d'enseignement sont des organisations complexes que l'on peut décrire comme des « tous structurés » dans une approche écologique de la transposition didactique¹⁵. **Les objets sensibles ne viennent donc pas vivre seuls dans la classe de mathématiques : de nombreux objets de savoir non sensibles outillent les manipulations que les objets sensibles requièrent.** Ces objets, *pertinents* à ce moment de la progression, doivent être *présents pour l'Enseigné* et leur absence obère la progression didactique de l'Enseigné, s'ils sont *manquants*. Ces objets doivent donc avoir une existence institutionnelle assurée, et être seulement *latents* dans l'institution. **La succession des objets pertinents ne nourrit pas la progression du temps didactique, mais elle assure la progression temporelle du sous-système Enseigné.**

Un rapport *idoine* de l'Enseigné à un objet pertinent est donc essentiel au fonctionnement heureux du système didactique. Le rapport à un objet doit pouvoir s'adapter aux formes nouvelles de son emploi, chaque fois qu'il est pertinent et qu'à ce titre il est convoqué dans un cadre nouveau. **L'apprentissage réalisé à cette occasion n'est pas institutionnellement visible, parce que les objets sur lesquels il porte sont latents.** Ils ont été sensibles il y a longtemps, et dans ce cas ils sont maintenant *forclos*, mais la réalité de cet apprentissage dénonce le temps didactique légal comme une fiction fonctionnelle du système didactique.

L'ensemble des objets de savoir qui entrent en jeu de manière coordonnée détermine le temps de l'Enseigné : « le temps de la progression du rapport institutionnel aux objets didactiquement présents », un des temps effectifs du système didactique. **Ce temps se découpe en épisodes didactiques, où se reconnaît l'expression d'une intention didactique.** Les épisodes didactiques sont les instants de ce temps discret et les unités de sens de l'organisation du savoir enseigné, ils permettent de *décrire les rencontres de l'Enseigné avec les organisations d'objets de savoir relatives à des objets didactiquement sensibles.*

¹⁵ Rajoson L. (1988), *Analyser la transposition didactique : quelques problèmes, concepts et méthodes de l'abord écologique*. Thèse de troisième cycle, Université d'Aix Marseille II.

3.1.3. *Le problème posé à nouveau*

Le maître peut assurer la relance du temps didactique simplement parce qu'il sait ce qu'il va faire du savoir que les élèves montrent, parce qu'il décide des savoirs nouveaux qu'il introduit. Nous décrivons ce phénomène, pour un élève, comme **la succession des ignorances que produit l'action du maître, et que l'élève rencontre personnellement**. Cette succession des ignorances rencontrées puis, dépassées, marque la progression de chacun des élèves dans le savoir : sa progression *biographique* relative au savoir enseigné, sa ***biographie didactique***.

« Elève » nomme en effet une instance du didactique, c'est-à-dire que, **par le moyen de l'élève, l'intention didactique peut se réaliser et produire des rapports personnels aux objets de savoir enseignés** : on dit alors que l'élève *connaît* ces objets de savoir. Nous cherchons à observer ce qu'il en est, lorsqu'un élève rencontre puis dépasse les ignorances que le système a créées pour lui : ce qui marque sa biographie didactique. Nous cherchons à observer ce qu'il en est lorsqu'un élève « apprend ». Par là, nous cherchons à améliorer notre connaissance du fonctionnement didactique : **nous étudions la relation didactique effective**.

3.2. **La réalisation de l'intention didactique dans les institutions didactiques**

Le « faire » institutionnel est toujours effectué par le moyen d'un sujet de l'institution, qui est aussitôt le porteur - conscient ou non - de l'intention, pour l'institution.

L'élève est comme le maître, un « sujet de la relation didactique ». Pour autant, cette relation n'est pas égalitaire : déjà, nous la trouvons

orientée, le maître portant nécessairement une part de l'intention d'enseigner, puis dissymétrique, l'élève portant seul l'intention d'apprendre. A ce titre, si l'élève nous intéresse, notre approche ne s'intéresse pas *a priori* aux personnes, qui sont particulières, mais à la manière générale dont une personne vient en position d'Enseigné, être un élève. ***Nous observons des personnes pour poser à leur endroit des questions générales, c'est-à-dire des questions relatives à leur position institutionnelle.*** Les élèves sont donc pour nous une instance du didactique, par laquelle le didactique se réalise.

3.2.1. L'insuffisance du système didactique comme cadre d'étude de l'intention didactique

Une étude des sous-systèmes du système didactique, qui se marquerait simplement en termes de déterminants institutionnels et de rapports au savoir, ne suffit pas à l'étude de la relation didactique. Il y manque au moins la dimension du sujet institutionnel, la dimension où se déploient les propriétés des sujets didactiques, c'est-à-dire la temporalité. L'articulation des temps est le cadre dans lequel nous pouvons penser l'inscription personnelle, l'assujettissement de la personne à l'institution didactique¹⁶ ; l'apprentissage est une de ces propriétés personnelles et temporelles.

Dans ces conditions, la notion de « système didactique » ne suffit pas à notre propos. Intervient ici la construction de la biographie didactique des élèves, qui est constituée des moments de « la construction des rapports *personnels* de l'élève aux savoirs ». Ce temps biographique n'est bien sûr pas le « temps didactique », il n'est pas plus le temps propre du « sous-système Enseigné », le temps de la succession des épisodes didactiques.

3.2.2. Les épisodes didactiques, et le temps de l'Enseigné. Ce qui est enseigné, ce qui doit être

¹⁶ Merleau-Ponty M. (1945), *Phénoménologie de la perception*. Paris, NRF, Gallimard.

appris

La périodicité de l'entrée dans des rapports *institutionnels* nouveaux rythme, en principe, le temps de l'Enseigné. La périodicité de l'entrée dans des rapports *personnels* nouveaux rythme, en principe, la biographie didactique d'un élève. Par l'intermédiaire de *dispositifs didactiques*, l'Ecole organise des *rencontres* didactiques, pour l'Enseigné. *Nous accédons à ces rencontres parce que le sens en est donné par les élèves, qui nous les montrent parce qu'ils produisent des fragments de leur biographie didactique.* Nous observons donc les fragments de la biographie didactique des élèves dans le but de montrer les instants où se réalise l'entrée dans un rapport institutionnel nouveau : des épisodes didactiques. **Nous construisons des fragement de la biographie didactique des élèves pour accéder par ce moyen à des caractères du fonctionnement didactique autrement invisibles.**

C'est ce que nous avons fait avec Delphine.

Dans l'observation que nous en avons produite, les rapports aux objets de savoir ne sont pas les seuls rapports pertinents. Certains dispositifs didactiques peuvent être considérés comme des objets auxquels l'Enseigné entretient un rapport qui doit lui aussi évoluer, dans certaines conditions. Ainsi, le rapport de Delphine aux théorèmes qu'elle doit appliquer semble bien être limité aux théorèmes du chapitre qu'elle est en train d'apprendre, c'est là un rapport à ces objets qui n'est plus *idoine*, dans les situations que réalisent les problèmes d'examen, parce que ces problèmes amènent l'élève à traiter des questions successives dont le champ mathématique est ouvert sur l'ensemble des objets de savoir du programme. Elle avait à apprendre quelque chose, à ce propos.

Les épisodes didactiques dont nous avons rendu compte ont ainsi montré la nécessité de changer :

— des rapports officiels à des objets de savoir sensibles (comme les

théorèmes sur « les limites de fonctions logarithmes »)¹⁷,

— des rapports institutionnels à des objets de savoir présents (comme le théorème sur « les limites de produits de fonctions de limite infinie »)¹⁸,

— des rapports à des objets métamathématiques (comme l'objet « théorèmes du cours »),

— et nous pouvons penser que les rapports à d'autres objets institutionnels (comme l'objet « problème ») devraient eux aussi être travaillés à l'occasion de ces épisodes¹⁹.

¹⁷ Le rapport officiel à ces objets s'institutionnalise par là, le contrat didactique à leur endroit se fixe dans ces instants.

¹⁸ Le contrat didactique à leur endroit est alors remanié.

¹⁹ Si nous appelons O^2 , O^3 , etc., les objets de degré institutionnel supérieur dont l'observation de Delphine montre la pertinence (les objets de degré 2 sont des *rappports à des objets de savoir*, puis les objets de degré 3 sont des rapports à ces objets-là, qui servent à la création des rapports à des objets de savoir, ou des *rappports aux rappports à des objets de savoir*, etc.). Si nous notons en exposant le degré institutionnel comme nous notions en indice le niveau trophique, la proposition que nous avons énoncée au départ de notre étude doit être étendue. C'est ce que nous nous proposons de montrer maintenant. Nous énonçons ci-dessous une extension portant sur O_n^q quel que soit q , et sur la relation de dépendance fonctionnelle (une relation trophique générale) de O_n^q à O_{n+p} . Le travail en direction d'une extension de O_{n+p} à des objets institutionnels de degré supérieur ne sera pas réalisé ici.

Soient O_{n+p} un objet de savoir, I une institution didactique, et O_n^q un objet institutionnel de degré q , tels que :

— le rapport institutionnel à l'objet O_n^q existe de manière stable : pour tout temps t , $R_I^t(O_n^q) = \alpha$ (on peut avoir $\alpha = \emptyset$)

— le rapport institutionnel à l'objet O_{n+p} , nouvellement introduit dans l'institution, n'existe pas encore de manière stable, le rapport officiel à O_{n+p} émerge au temps T : il existe T , tel que pour tout τ , $\tau < T$ implique $R_I^{*\tau}(O_{n+p}) = \emptyset$ et pour tout θ , $T < \theta$ implique $R_I^{*\theta}(O_{n+p}) \neq \emptyset$. Soit $R_I^{*T}(O_{n+p})$ ce rapport officiel qui émerge.

Une des conséquences de ce travail sera **l'extension de la définition que nous pourrons donner de « ce qui s'apprend », dans le cadre d'une relation didactique** institutionnellement déterminée.

3.2.3. L'effet biographique des épisodes didactiques dépend de la gestion didactique de l'ignorance induite par le maître et du rapport au savoir produit par l'élève

Rappelons en quelques mots la position que nous avons construite.

La périodicité de l'entrée dans des rapports *personnels* nouveaux marque le temps personnel de l'élève. Ce temps est relancé par l'intervention des *dispositifs* didactiques, par l'intermédiaire desquels l'École organise des *rencontres* didactiques. Nous accédons à ces rencontres lorsque, sur elles, se forment *des fragments de la biographie didactique des élèves*, qui nous les montrent. **Les fragments biographiques nous donnent donc accès aux déterminations du contrat didactique pour l'Enseigné, et aux contraintes qui forment l'efficacité didactique d'épisodes donnés, pour des élèves donnés.**

Ainsi, Delphine nous a montré comment une question rencontrée au cours d'une interrogation écrite l'a arrêtée durant l'épreuve, et comment après l'épreuve ses camarades n'ont pu répondre à son interrogation, alors même qu'elle a donné dans sa copie une réponse satisfaisante. Mais, en l'absence de cours particulier de mathématiques, **le sens didactique de la réponse donnée par l'élève dans ce cadre vient de la correction de la copie, et du corrigé donné en classe.**

Or, durant le devoir de contrôle, Delphine se pose une question sur la

Quel que soit q , l'existence d'une relation de dépendance $O_n^q \Leftarrow O_{n+p}$ (O_n^q est outil pour la rencontre ou la manipulation de O_{n+p}) impose alors le travail et la transformation de $R_I(O_n^q)$, une transformation nécessaire à l'émergence de $R_I^(O_{n+p}) : R_I^\tau(O_n^q) \angle R_I^\theta(O_n^q)$.*

limite du produit :

$$g(x) = 1 + x \cdot (1 - \ln x).$$

Hésitant sur la réponse à donner, elle annonce que la limite est indéterminée, puis elle décide de proposer la réponse « $-\infty$ » (selon ses dires, elle a réfléchi et hésité plus d'un quart d'heure, ce dont témoignent quelques lignes de brouillon, raturées). Elle a donc écrit exactement ceci sur sa copie :

Limite en $+\infty$:

Il y a une forme indéterminée.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Son professeur de mathématiques souligne le mot « indéterminée » et raye en biais toute la question. Manifestement, il ne lit pas une réponse qui ne peut être que fautive puisque la limite n'est pas indéterminée. Lors de la correction en classe, cette question ne sera pas abordée. **Voilà que le travail personnel de Delphine ne sera pas évalué correctement : il reste non venu.** Ce travail, elle l'a effectué douloureusement, durant une interrogation en temps limité : il lui en a coûté. Ce travail a produit un rapport personnel à un problème qui n'avait pas encore été rencontré, mais **le travail institutionnel ignore l'épisode didactique à propos du théorème sur les produits de limites infinies comme il ignore la rencontre de Delphine avec le problème qu'elle a résolu.** Delphine ne réussira donc pas à assurer son rapport nouveau, à prendre **confiance** en

lui, et elle s'en trouvera déstabilisée pour quelque temps encore, dans son rapport général aux limites.

Les conditions favorables à l'établissement d'un rapport personnel à un théorème institutionnellement présent se rencontraient là, en un épisode didactique qui pouvait produire un effet intéressant pour une élève au moins, mais les conditions institutionnelles prévalentes n'ont pas permis que cet épisode soit effectivement producteur d'un progrès dans la biographie didactique de Delphine. La trace biographique en sera donc probablement la trace de l'échec de cette élève à réaliser les gestes attendus par la situation. Sauf à profiter d'un lieu extérieur au système didactique pour traiter ce problème ; par exemple, un cours particulier de mathématiques.

4. Les rapports institutionnels des élèves aux objets didactiques et la nécessité d'apprendre

L'effet des devoirs de contrôle semble particulièrement important, pour créer des épisodes didactiques producteurs de fragments de la biographie didactique d'élèves. Cela tient probablement à **un artefact**, parce que cet effet se produit au cœur même, soit de la négociation des rapports institutionnels à des objets nouveaux, soit de la production de nouvelles formes du rapport institutionnel à des objets anciens. **Il est de ce fait plus visible**, plus manifeste.

Notre première observation, produite dans le cadre simple d'un cours particulier de mathématiques, était l'observation d'un fragment biographique dont l'occasion était un devoir de contrôle. L'observation d'épisodes didactiques qui prendraient place dans d'autres instants de la relation didactique, et l'observation de la manière dont ils seraient biographiquement efficaces, suppose **des dispositifs d'observation plus raffinés**, des montages expérimentaux aptes à produire des observations

qui ne soient pas immédiatement relatives aux rapports institutionnels au savoir.

L'observation des embarras de Delphine montre que **les élèves peuvent avoir des besoins en mathématiques que le travail institutionnel fait dans le cadre de la classe ne peut pas satisfaire**. Une institution apte à répondre à de tels besoins nous permettrait d'observer des épisodes didactiques d'un type différent.

4.1. La Boutique de Mathématiques, outil pour l'observation biographique

La Boutique de Mathématiques du Lycée Michelet, à Marseille, est expérimentale, en un double sens. Parce qu'il n'est pas encore certain qu'elle puisse « vivre naturellement » dans le système d'enseignement, la Boutique que nous avons créée avec l'équipe de l'IREM d'Aix-Marseille est *une expérience de Boutique* ; parce que ses clients y viennent avec l'intention d'entrer en rapport à des mathématiques dans des conditions peu ordinaires (ils ont besoin des mathématiques qu'ils décident de venir y chercher), la Boutique de mathématique permet *l'observation de gestes mathématiques peu visibles*. Dans le cas d'élèves, les épisodes par lesquels ces besoins sont apparus sont souvent des épisodes venus de leur pratique d'élèves : souvent, des épisodes didactiques de la classe de mathématiques. L'existence de la Boutique aide alors à *l'expression d'un besoin en mathématiques*, qu'elle peut satisfaire par le moyen d'une interaction où une intention didactique va pouvoir se réaliser. La Boutique est, pour ces élèves, une occasion de développer des fragments de leur biographie didactique, elle est donc pour nous un lieu intéressant d'observation des objets de la biographie didactique des élèves du Lycée.

Ainsi, nous trouvons, parmi les premiers élèves venus à la Boutique, D, une élève de Première S qui vient le 10 décembre poser la question suivante, issue directement d'un épisode didactique de sa classe de mathématiques :

« Alors qu'on étudiait les fonctions bornées, j'ai dit au professeur que les fonctions trigonométriques étaient certainement bornées. Le professeur m'a répondu que, si c'était bien le cas des fonctions sinus et cosinus, il n'en était rien en ce qui concerne la fonction tangente sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}[$. Je voudrais savoir comment on peut démontrer ce résultat. »

Les permanents de la Boutique produiront une réponse écrite, pour sa question. Mais ce n'est pas le lieu d'étudier ici ce type d'objet.

4.2. Un épisode didactique, ordinaire en algèbre, au Lycée, et les déterminants biographiques associés

Nous prendrons ici un exemple : il n'est pas dans nos intentions de montrer maintenant si les réponses de la Boutique, sont bien des objets didactiques aptes à produire des effets biographiques importants pour les clients de cette institution. De nombreux élèves sont venus avec des questions très proches de leur quotidien, mais le contrat que nous avons tenté de passer avec eux à propos de ces questions supposait que nous leur donnions une responsabilité plus importante que de coutume dans la gestion de leur rapport personnel aux savoirs qui pouvaient faire réponse, c'est-à-dire que nous réfléchissions a priori aux effets de nos réponses dans la biographie didactique des élèves. Ne serait-ce qu'en termes de satisfaction des besoins exprimés. Nous montrons l'exemple ci-dessous, parce qu'on peut y voir un épisode didactique biographiquement pertinent pour deux élèves et que cet épisode n'est lié ni à un temps d'évaluation ni au travail d'un rapport institutionnel au savoir ancien mais au contraire, à l'établissement du rapport à un objet nouveau, au moment de sa première apparition : ce rapport nécessite le travail à des objets institutionnels qui ne sont pas des objets de savoir.

4.2.1. *L'interaction initiale avec Béatrice et Michèle, à propos des valeurs absolues*

Ces deux élèves de Seconde viennent à la Boutique de Mathématiques le 23 octobre 1990, pour « un exercice qu'elles ne comprennent pas ». Elles ont entendu parler de la Boutique quelques jours plus tôt, lors de la réunion parents-professeurs de leur classe. Elles savent que la boutique ne peut fournir une aide pour « faire les exercices » comme le ferait un enseignant en leçon particulière, aussi elles ont pris des précautions : elles ont rédigé totalement sur leur cahier d'exercices la solution qu'elles proposent, et qu'elles disent ne pas comprendre. Elles viennent donc une fois les exercices faits, et avant la correction en classe, qui doit avoir lieu le lendemain matin.

Voici leur question :

Quand on résoud des équations avec une valeur absolue, on ne sait pas faire graphiquement, et s'il faut donner l'intervalle avec ET ou avec OU.

C'est parce que les professeurs de mathématiques qui sont ce jour-là les *permanents* de la Boutique ne comprennent pas la question (leur professeur n'est pas de permanence à ce moment-là), que Béatrice et Michèle ouvrent leur cahier d'exercices. Leur enseignant a, en effet, montré comment résoudre quelques exercices d'inéquations comprenant une valeur absolue. Il a traité deux cas, un exemple « prototypique » : « $|x| \leq 4$ » suivi d'un exemple d'« exercice standard ». Il faudra de nombreuses interventions de la part des permanents de la Boutique pour qu'ils arrivent à reconstituer suffisamment d'éléments du moment didactique initial et à donner du sens à la question des élèves. Pour elles, tout cela va sans dire et fait partie du savoir de tout enseignant, *puisque c'est dans le cadre de leur cours de mathématiques que cela se passe*. Cet effet du rapport des élèves à l'objet institutionnel Savoir enseigné est ici visible, parce que le changement de programme a touché à ce rapport dans le cas des valeurs absolues : cette année, cela ne va pas encore sans dire, pour les enseignants.

Pour Béatrice et Michèle en effet, il n'est pas utile a priori de dire les

conditions dans lesquelles elles ont rencontré les inéquations qui font leur problème. C'est pourquoi elles montrent directement et avant toute autre chose leurs solutions des exercices, qui fait pour elles tout le problème. Ces solutions leur semblent transparentes, normales mêmes si elles sont problématiques.

Le premier exercice traité (n° 8-5)) est à peu près classique :

Exercice 8-5

Aucune entrée d'index n'a été trouvée.

Elles montrent avec lui leur solution de l'exercice suivant (n° 9-5))

Exercice 9-5

Aucune entrée d'index n'a été trouvée.

Les élèves expliquent leurs calculs :

Si on suit les exercices faits avec le professeur, on écrit $-6 > x - 3 > 6$ ce qui ne va pas, puisque ça donnerait $-6 > 6$; alors on a écrit ça, pour ne pas être contradictoire ...

$$-6 < x - 3 < 6$$

$$-6 + 3 < x < 6 + 3$$

$$-3 < x < 9$$

donc $x \in]-\infty, -3] \cup [9, +\infty[$... Cela, le union, on l'a mis parce qu'on a vérifié, en mettant des nombres pour voir parce qu'on n'était pas sûres, et on s'est aperçu qu'on pouvait

mettre des x de plus en plus petits, ça marche ; par exemple ça marche pour $x = -7$, puisque $-7 - 3 = -10$, la valeur absolue ça fait 10 c'est plus grand que 6 alors on a pensé que c'était l'union et pas l'intersection . Mais on aurait en fait dû mettre tout, $]-\infty, +\infty]$, si on avait fait avec la réunion exactement comme avec l'intersection (c'est à dire si elles avaient pris la réunion de $]-\infty, 9]$ avec $[-3, +\infty[$) mais ça nous a paru trop bizarre que ça soit toujours vrai et on a encore vérifié et c'est pas vrai entre -3 et 9 par exemple avec 5 ça fait 2 c'est plus petit que 6 , alors on a mis comme ça mais on ne comprend pas pourquoi c'est ça qu'il faut, surtout que pour les autres exercices c'est bien comme on avait compris, avec l'intersection.

Les permanents ont des difficultés à suivre ce que disent Béatrice et Michèle, mais il leur apparaît à la fois qu'elles ont réellement travaillé l'exercice, et qu'ils ne doivent pas intervenir dans ce qui se passe parce qu'il s'agit d'une question qui porte sur un objet de savoir qui est enjeu didactique actuel dans la classe de ces élèves. Cela interdit donc l'étonnement ou l'indignation qui seraient normalement de mise dans une telle situation, pour un enseignant. Nous leur proposons de travailler sur la décision qu'elles ont prise à l'origine : écrire $-6 < x - 3 > 6$ pour lever la contradiction qu'elles avaient ressenti. *L'étude de leur décision est la seule réponse immédiate que la boutique peut leur proposer*, une réponse écrite pouvant être envisagée, à plus long terme.

Le contrat propre à la Boutique interdit en principe une réponse immédiate, et les permanents ne peuvent donner la réponse d'un enseignant : expliquer la solution correcte de l'exercice. *L'explication* n'est pas du ressort de la Boutique, où l'on tente de faire exister un contrat dans lequel l'intention didactique n'est première, et où l'on tente au contraire en prenant systématiquement un délai de réflexion et en répondant par écrit, de suspendre le mouvement de l'explication ; où l'on tente enfin de ne pas traiter des questions qui porteraient sur un enjeu didactique afin de ne pas interférer avec l'enseignement, pour des raisons déontologiques évidentes et pour des raisons d'écologie institutionnelle du dispositif que nous avons exposées plus haut.

L'interaction qui s'engage alors est une interaction didactique à l'initiative des élèves, où les permanents de la Boutique tentent de trouver un contrat compatible avec les contraintes de l'institution. Mais ce que nous avons présenté nous intéresse particulièrement. Il s'agit en effet d'un

fragment de la biographie didactique des élèves Béatrice et Michèle :
 en venant poser une question elles le montrent, nous allons l'étudier après
 avoir construit l'épisode didactique original.

4.2.2. *L'épisode didactique original du fragment biographique*

Nous y avons accès au travers des cahiers d'exercices de ces deux élèves. Elles refusent en effet d'ouvrir leur *cahier de cours*, « dedans, il n'y a rien sur la question » disent-elles lorsque cela leur est demandé. Nous ne savons pas si elles avaient ce cahier, elles n'ouvriront pas plus leur livre à une page du cours. Le *cahier d'exercices* est un document objectif dont nous parlerons sans plus faire référence aux élèves elles-mêmes.

L'enseignant a donc commencé le cours du chapitre 3, « Valeurs absolues et ordre ». Il a montré comment résoudre quelques exercices d'inéquations en traitant lui-même deux cas, tirés du livre de la classe, le « Decreton-Poret » de Seconde :

Aucune entrée d'index n'a été trouvée.

Aucune entrée d'index n'a été trouvée.

Aucune entrée d'index n'a été trouvée.

Aucune entrée d'index n'a été trouvée.

$|x| \leq 4$ s'interprète comme l'encadrement des valeurs de x par -4 et 4 . Cela s'écrit $-4 \leq x \leq 4$, ce qui signifie que x appartient à l'intersection de l'intervalle $]-\infty, 4]$, qui exprime les solutions de $x \leq 4$, et de l'intervalle $[-4, +\infty[$, qui exprime celles de $-4 \leq x$. L'ensemble des solutions est donc l'intersection de ces deux intervalles (il faut que x appartienne à l'un *et* à l'autre), soit $[-4, 4]$. Ensuite, suivant ce même principe, le professeur a traité le cas de l'inéquation $|x - 4| \leq 3$. Il a alors donné deux exercices à faire à la maison, la fin de l'heure étant venue. Un épisode didactique banal

en quelque sorte.

Mais le second de ces exercices fait problème. C'est en fin de compte sa capacité à produire de la biographie didactique pour Béatrice et Michèle qui nous donnera la clé de l'interprétation de l'épisode. Il nous faudra par conséquent revenir sur l'épisode didactique après que nous aurons construit le fragment biographique correspondant.

4.2.3. Un fragment biographique de deux élèves

Si la réaction des deux élèves qui sont venues consulter leur est propre, ce qui ne nous permet pas de supposer que l'épisode a été producteur de biographie pour d'autres élèves, son existence dans la suite des événements didactiquement pertinents de la classe de Seconde de Béatrice et Michèle est attestée.

Nous y accédons grâce aux caractères particuliers du rapport aux exercices de ces deux élèves. C'est pourquoi nous allons nous intéresser au caractère particulier du phénomène, le temps d'en étudier les conditions. Nous montrerons ensuite que nous avons construit ainsi un phénomène générique : il n'est pas propre à ces élèves et à ce professeur.

Béatrice et Michèle, qui travaillent à deux, testent leurs réponses. On peut même dire qu'elles montrent *un rapport d'expérimentation* aux réponses qu'elles produisent. C'est même à une expérimentation systématique que ces élèves s'adonnent, puisqu'elles testent toutes leurs réponses, et, semble-t-il, toutes les lignes de leurs « calculs » qui font problème.

Le rapport empiriste aux objets mathématiques installé par la pratique du Collège produit bien des gestes didactiques observables, et les élèves s'emparent ici des gestes qui appartenaient précédemment à l'enseignant : Béatrice et Michèle font bouger la ligne du partage topogénétique. C'est un produit heureux de leurs assujettissements passés, de leurs habitus d'élèves du Collège. Cependant, elles ne travaillent pas *en explorant le domaine de réalité mathématique* dans le but d'attaquer par elles-mêmes les exercices : comme elles le disent fort bien, « *elles font comme le professeur* » - i.e.

comme il en a fait la démonstration dans les cas qu'il a traités lui-même²⁰. Si la répétition des gestes observés leur pose problème, elles essaient de les interpréter *dans le registre procédural* de l'action démontrée, et non pas dans le registre du sens mathématique de celle-ci. C'est cette fois un produit encombrant de leur assujettissement réussi à l'institution didactique.

Cela montre que nous n'observons pas l'un des temps d'une situation adidactique. La situation ne leur fait pas rencontrer *le problème dont le savoir est la solution*, mais *le savoir solution dont la mise en œuvre fait problème* : elles n'expérimentent pas dans le cadre d'une situation fondamentale pour la valeur absolue, mais dans le cadre d'une manipulation technique de « la notation valeur absolue » et des systèmes de signes parallèles.

Béatrice et Michèle cherchent donc, au terme d'une vérification qui échoue et d'une exploration du problème qui leur fait entrevoir que la procédure standard est ici disqualifiée, *une procédure* voisine. Elles tentent de produire *une évolution de la procédure standard qui conserverait (à leurs yeux d'élèves) l'essentiel* de cette dernière : *son organisation formelle, et l'algorithme de comportement associé à cette organisation*. C'est pour cela, en particulier, que tous les efforts des permanents de la Boutique pour obtenir qu'elles ouvrent leur cahier de mathématiques (dans le but implicite de les faire revenir à une définition de la « valeur absolue ») seront vains. Elles sont sûres que le professeur n'a pas traité le cas qui fait problème, et elles ont bien repéré ce cas comme « le cas où l'on cherche une valeur absolue plus grande qu'un nombre ». Pour elles, le professeur n'ayant pas explicitement traité ce cas, il ne peut pas y avoir de réponse dans un de leurs cahiers :

« Avec le cahier on trouve pas de règle pour décider »

²⁰ Au sens où l'on fait la démonstration du maniement d'un objet technique donné - une machine nouvelle - pour un usager potentiel. Ainsi, la machine à laver programmable, la nouvelle photocopieuse du département, la dernière version d'un logiciel de traitement de texte ...

Les permanents de la Boutique ne réussissent pas à leur faire penser qu'il ne s'agit pas de chercher une procédure prête à l'emploi dans le cas de figure qu'elles ont rencontré, parce qu'une définition générale de la valeur absolue pourrait *produire une procédure* adaptée à un cas qu'il faut penser comme nouveau. C'est là un effet repéré du contrat didactique, *un effet d'une clause pérenne* de celui-ci : « si l'enseignant pose une question, l'élève doit trouver, dans son savoir ou dans la question, les moyens de répondre ». Leur assujettissement leur fait ici chercher des outils procéduraux quand il leur faudrait construire des procédures originales.

Elles n'imaginent pas travailler à partir d'une définition, d'un élément qui ne serait pas directement lié à leur problème, et il est impossible de les engager à agir ainsi sans saisir l'occasion d'un « petit cours » de mathématiques. Voilà les permanents pris, avec les élèves, dans un réseau de contraintes dont la seule issue visible consiste à *reprendre la leçon pour montrer par ce geste la pertinence de la définition* de la valeur absolue dans l'attaque de cet exercice. C'est un geste didactique interdit dans le cadre de la boutique, ce qui enferme les permanents dans la position que définit le type de questionnement des élèves.

Dans la position de qui peut montrer, mais qui ne peut rien montrer qu'en partant de ce qu'on lui a proposé de regarder, il ici est impossible de créer l'espace d'une question qui ferait évoluer le rapport institutionnel à l'objet institutionnel Exercice.

Les enseignants de permanence en restent donc là après avoir pointé le problème : *la décision d'écrire $-6 < x - 3 > 6$ ne peut être contestée du point de vue de la logique procédurale qui est la leur, mais l'interprétation des calculs qu'elle produit fait problème, parce que cette notation se propose comme une interprétation de l'inéquation initiale, et qu'il faut maintenant interpréter cette interprétation elle-même en termes de réunion ou d'intersection d'intervalles, pour produire une « solution », une écriture de la forme attendue.*

Cela suppose une transformation importante des règles d'interprétation précédemment valides, et n'est pas du ressort des élèves dans le contrat didactique où elles se situent.

Seul quelqu'un assumant la position d'enseignant peut maintenant les aider à trouver réponse à leur problème, en assumant la position de *l'autorité institutionnelle*, le maître est la seule instance autorisée à décider du bon emploi de la chaîne d'analogies qui fait le sens des manipulations procédurales que réalisent les élèves Béatrice et Michèle. La Boutique ne répond pas plus avant, le contrat de réponse écrite qu'elle propose n'offrant pas à ces élèves un type de réponse satisfaisant, elles déclinent cette proposition et elles sont renvoyées à leur cours du lendemain, et à leur maître.

Ces deux élèves ont ainsi rencontré la nécessité de savoir dans une situation où les moyens leur en étaient refusés, apparemment, par certaines composantes de leur habitus didactique d'élèves de Collège : un habitus produit par le style de l'organisation du savoir mathématique enseigné qui caractérise aujourd'hui cette institution didactique²¹.

Un obstacle se dresse là où ce n'était pas prévu. Il résiste à des élèves qui pourtant font preuve d'initiative : des élèves qui contrôlent la validité de leurs réponses et cherchent une cohérence interne à leurs procédés de traitement des exercices. Pourquoi donc ne regardent-elles pas le cours, ne se réfèrent-elles pas à la définition ?

L'espace des tactiques institutionnelles des élèves est structuré par les contraintes de l'écologie du rapport institutionnel à l'objet « valeur absolue et inéquation » en Seconde. Mais les rapports de Béatrice et Michèle aux objets institutionnels de niveau supérieur sont ici premiers : les rapports aux exercices à faire et aux exercices faits, au cours de mathématiques et aux objets qui y figurent, ou au manuel et à ce qu'il est possible d'en attendre, etc. Les études de l'écologie de ces objets-là sont encore à construire, elles relèvent de l'écologie des objets institutionnels produits

²¹ Cet habitus possède des formes spécifiques au domaine algébrique, comme le montrent les travaux menés, avec Yves Chevallard, par l'équipe « didactique au Collège » de l'IREM d'Aix-Marseille. Chevallard Y. (1985-1990), Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège. *Petit x*, 5, 19, 23, Grenoble, IREM de Grenoble.

par le contrat didactique.

4.2.4. *Le sens didactique du fragment biographique observé*

Nous revenons maintenant à l'épisode didactique originaire, afin d'analyser ce qui s'y révèle, de l'organisation du savoir enseigné et du didactique.

Quand il apprend la question, le professeur de Béatrice et Michèle s'étonne d'abord, puis il s'aperçoit que le problème n'est pas de la même nature selon que l'on demande de majorer ou de minorer une valeur absolue. Pour lui, les élèves auraient dû opérer « le retour à la distinction de deux cas », qu'il pense être la technique générale pour les problèmes comportant une valeur absolue : il a donné cette définition, en cours. Il remarque ensuite que les exercices qu'il a demandés relèvent d'un paragraphe intitulé « distance de deux réels » et qu'il n'a « pas encore » parlé de distance, contrairement à ce que l'on trouve dans le livre de la classe qui donne quelques pages auparavant, encadrées, les équivalences nécessaires à la résolution des exercices.

« 5. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE INÉQUATION À L'AIDE DE LA DISTANCE DE 2 RÉELS... »

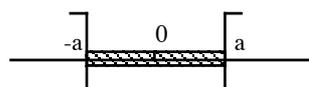
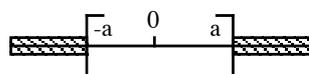
Pour tout réel a strictement positif,

$$|x| \leq a \quad -a \leq x \leq a$$

\Leftrightarrow

$$|x| \geq a \quad [x \geq a \text{ ou } x \leq -a]$$

\Leftrightarrow



Bien sûr, nos deux élèves pensent n'avoir que *des exercices à apprendre*, tels qu'ils

ont été faits par l'enseignant pour leur montrer comment il faut les faire. Pour elles *le savoir technique qu'elles doivent maîtriser ne peut pas être contenu dans le cours* ou dans les définitions, qui font partie du topos Enseignant, car les exercices et le savoir technique qu'est pour ces élèves le « savoir-faire », font partie du topos Enseigné. Ce partage est tout à fait ordinaire : *le professeur montre, l'élève fait* ; par exemple, le professeur expose la théorie, l'élève applique les théorèmes, le professeur démontre les formules, l'élève les utilise, le professeur donne les définitions, l'élève reconnaît les objets qui tombent sous les définitions, le professeur fait le cours, l'élève le copie et l'apprend, enfin le professeur choisit les exercices, l'élève les résoud. Un savoir-faire ne se démontre donc pas par le discours théorique, il se montre pratiquement, par l'exemple.

Les élèves pensent enfin qu'un contrat didactique honnête ne laisse vivre, dans une série donnée d'exercices, qu'une seule technique, qu'un seul savoir-faire à mettre en oeuvre et à apprendre. L'enseignant a donné la définition de l'objet - celle-là même qu'il enseignait l'an dernier et qui, cette année, n'est officiellement plus au programme. Il se comporte comme si tout était dans la définition et comme s'il n'y avait plus qu'à appliquer celle-ci : il interprète la difficulté en termes de « cours non fait ou non su ». Il agit ainsi exactement comme l'enseignant de la Terminale D de Delphine.

C'est en effet le classement de l'exercice dans le livre des élèves (il fait partie du paragraphe 3-2-Distance de deux réels) qui lui montre finalement le quiproquo. Il réinterprète alors l'épisode didactique tout entier : « C'est vrai, je ne leur ai pas parlé de distance. Je n'avais pas pensé que ça fasse problème parce que je leur avais bien montré que, si on peut traiter d'un coup les deux inégalités, on part bien de deux inégalités séparées ...Elles pouvaient toujours faire comme cela. »

L'événement constitutif de l'épisode est la nouveauté de la technique de traitement de la minoration d'une valeur absolue, qui s'avère, pour les élèves, irréductible à l'ancienne technique de traitement de la majoration.

Mais l'épisode observé n'aurait pas été visible si le rapport réel de ces deux élèves à la valeur absolue avait été tel que l'imaginait leur enseignant, fondé sur la définition de la notion de valeur absolue et sur la distinction des cas qui résulte de celle-ci. Au lieu de cela, leur rapport à la valeur absolue est dominé par leur rapport aux exercices, il est fondé sur les exercices démontrés par l'enseignant, en classe.

Pour Béatrice et Michèle, les exercices sont « à faire »²². Et « faire », cela s'apprend « en faisant » : en faisant « comme le professeur » qui montre une première fois « comment on fait », en « suivant le modèle », c'est à dire en suivant la procédure que l'enseignant a montrée d'abord. Ensuite, en refaisant jusqu'à ce que l'on ait acquis l'automatisme du faire. *L'épisode vient donc de la présence conjointe, face à l'événement premier, de caractères propres à l'organisation du rapport de l'élève à l'objet de savoir à apprendre, et de l'ignorance de cette organisation par l'enseignant.* L'épisode est fait de l'irruption du nouveau dans les organisations particulières que sont : le système de contraintes propre au système didactique considéré, et : le système de contraintes propre aux sujets didactiques considérés. L'épisode est fait par l'ignorance réciproque que les sujets entretiennent, dans une position institutionnelle donnée, sur le système de contraintes relatif à l'autre position.

5. Conclusion

Ce qui, au terme de cette étude, nous apparaît comme le point essentiel, est **le mode d'appropriation du nouveau** qu'on peut y voir à

²² Il faut prendre cette expression [les exercices sont « à faire »] comme une définition par la fonction, qui induit la mise en œuvre nécessaire de la fonction à toute rencontre de l'objet ; comme, pour les petits enfants, [la table est « pour manger »] sans qu'il soit possible de défaire la relation qui amalgame l'objet à une action que l'objet induit, et qui est donc attendue aussitôt avec la présence sensible de l'objet.

l'œuvre : le nouveau en effet ne naît que **dans le cadre du système de contraintes - du milieu -** que constituent pour lui, à la fois, **les rapports institutionnels anciens** aux objets qui l'environnent dès l'instant de son émergence, et **les rapports aux objets didactiques** par le moyen desquels sont gérés les rapports aux objets de savoir proprement dits.

C'est pourquoi nous ne pouvons observer des élèves dans le cadre d'une classe de mathématiques sans observer en priorité **les caractères de leurs rapports effectifs aux objets didactiques** : parce que ces caractères **montrent les objets didactiques pertinents**, qu'ils soient proprement *didactiques* - relatifs à la rencontre du savoir et au savoir lui-même - ou *situationnels* - relatifs à la gestion des conditions de la rencontre avec le savoir ou à ces conditions elles-mêmes, comme contraintes.

Cela nous engage à dire à nouveau que les savoirs mathématiques qu'apprennent les élèves ne peuvent être séparés du contrat didactique dans le cadre duquel se fait cet apprentissage.

Cela nous engage à poursuivre en affirmant maintenant que **les dépendances observées entre les apprentissages relatifs aux objets des divers niveaux institutionnels nous interdisent de séparer ce qui relèverait des objets de savoir *stricto sensu* de ce qui relèverait des objets institutionnels relatifs à la manipulation des objets de savoir, ou même des objets institutionnels relatifs à l'organisation des rencontres didactiques.**

En quelque sorte, nous avons commencé à montrer *comment* le verbe *savoir*, même lorsqu'il a pour sujet une personne particulière, *a toujours un sens relatif à l'institution qui a porté l'intention didactique* à l'endroit de cette personne. Non seulement parce que la transposition didactique transforme les objets de savoir et les organisations trophiques qui étaient la marque de leurs conditions de production, mais encore et surtout parce que les dispositifs institutionnels qui gèrent la rencontre des objets de savoir proprement dits et permettent l'établissement des rapports personnels à ces objets, font partie intégrante des rapports personnels aux objets de savoir : de la connaissance que les personnes ont acquise, des savoirs mathématiques repérés. C'est pour cela que nous nommons les rapports personnels au

savoir des *rappports personnels d'élève*, pour marquer le fait que **des rapports au savoir, même personnels, sont toujours marqués de la position institutionnelle dans laquelle ils ont émergé** : le plus souvent, une position d'Enseigné, à l'École. **Cette marque demeure inchangée dans la mesure où d'autres assujettissements institutionnels ne sont pas venus nécessiter la transformation des rapports didactiques initiaux, dans la mesure où les savoirs n'ont pas travaillé dans une nouvelle position institutionnelle, ou dans un nouveau cadre institutionnel.**

Par l'observation de fragments de la biographie didactique d'élèves enfin, nous avons mis en évidence **comment des organisations biographiques différentes pouvaient émerger d'une même suite d'épisodes didactiques** - dont nous avons montré à quel point elle était déterminante des formes possibles du rapport personnel au savoir des élèves. Nous avons en effet étudié la rencontre, par un élève réalisant une organisation donnée, de la nécessité de travailler son rapport à un objet de savoir ou à un objet de niveau institutionnel plus élevé, et nous devons maintenant engager l'étude des conditions de l'efficacité biographique de cette rencontre. **L'étude des conditions institutionnelles de l'efficacité didactique est engagée depuis longtemps par Guy Brousseau et les chercheurs qui travaillent dans le cadre théorique de la théorie des situations ; l'étude des conditions relatives à l'organisation, biographiquement déterminée, des rapports *personnels* d'élève, est encore à naître.**

Références

— BACHELARD G. (1949), *Le rationalisme appliqué*. Coll. Quadrige, Paris, P.U.F., 1986.

— BESSOT A, MERCIER A. (1991), La dynamique institutionnelle : chronogenèse et évolution du rapport institutionnel. Travaux Dirigés pour le Cours d'Yves Chevallard, Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Actes de la VI^{ème} Ecole d'Été de Didactique des mathématiques*, Rennes, IMR, et Nantes, IRESTE.

— BROUSSEAU G. (1979), L'échec et le contrat. *Recherches*, 41, pp. 177-182.

— BROUSSEAU G., PÉRES J. (1981), *Le cas de Gaël*. Note de travail, IREM de Bordeaux.

— BROUSSEAU G. (1982), D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. Cours, *Actes de la II^{ème} Ecole d'Été de Didactique des mathématiques*, Orléans, IREM d'Orléans.

— BROUSSEAU G. (1983), Quelques phénomènes de didactique susceptibles d'expliquer l'échec de la réforme des mathématiques modernes. Conférence, *Actes de la Rencontre Internationale de la CIEAEM*, Lisbonne.

— BROUSSEAU G. (1984), Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Cours, *III^{ème} Ecole d'été de didactique des mathématiques, recueil des textes et comptes rendus*, 99-108, Grenoble, IMAG et CNRS.

— BROUSSEAU G. (1986), *Les effets du contrat didactique*. Cours, Journées du CIRDDS, Marseille-Luminy, (notes personnelles).

— BROUSSEAU G. (1986b), La relation didactique : le milieu, *Actes de la IV^{ème} Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 54-68, Paris, IREM de Paris VII.

— BROUSSEAU G., (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7.2, pp. 33-115, Grenoble, La Pensée Sauvage.

— BROUSSEAU G. (1988), Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9.3, pp. 309-336, Grenoble, La Pensée Sauvage.

— BRUN J., CONNE F. (1990), Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Education et recherche*, 3/90, 12^o année, Fribourg, Editions Universitaires.

— BRUN J., CONNE F. (1992), Connaissance et savoir dans la perspective de la transposition didactique, Première partie. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12.2-3, (sous presse), Grenoble, La Pensée Sauvage.

— CASTELLA C., MERCIER A., (1990), *Peut-on être élève et expert en classe de mathématiques ?* Rapport sur un Stage de formation des enseignants des lycées agricoles de la région Languedoc-Roussillon, année scolaire 1989-1990.

— CASTELLA C., MERCIER A., (1991), *Sur le contrat didactique et la modélisation : l'expertise sous contrat des élèves de BEPA.* Rapport sur un Stage de formation des enseignants des lycées agricoles de la région Languedoc-Roussillon, année scolaire 1990-1991.

— CHEVALLARD Y. (1980), Mathématiques, langage, enseignement : le réforme des années soixante. In *La politique de l'ignorance. Recherches*, 41, pp. 71-99.

— CHEVALLARD Y. (1980), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné.* Cours donné à la Ière Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, (1985) et (1991), Grenoble, La Pensée Sauvage.

— CHEVALLARD Y., JOHNSON M.A. (1982), Un exemple d'analyse de la transposition didactique, la notion de distance. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3.2, pp. 157-239, Grenoble, La Pensée Sauvage.

— CHEVALLARD Y. (1983), Remarques sur la notion de contrat didactique : l'âge du capitaine. Conférence, in (1986), *Deux études sur les notions de contrat et de situation*, Marseille, IREM d'Aix-Marseille.

— CHEVALLARD Y. (1985-1990), Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au Collège. *Petit x*, 5, 19, et 23, Grenoble, IREM de Grenoble.

— CHEVALLARD Y. (1986), Sur la notion de temps didactique. Cours, *Recueil des textes et comptes rendus de la IVème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 69-93, Paris, IREM et Université Paris 7.

— CHEVALLARD Y. (1988), Médiation et individuation didactiques, in *Le contrat didactique : différentes approches. Interactions didactiques*, 8, Genève, Universités de Genève et de Neuchâtel.

— MICHIELS-PHILIPPE M.P. (sous la direction de) (1984), *L'observation.* Collection Textes de base en psychologie, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

— MERCIER A. (1982), Le temps des systèmes didactiques. Séminaire, *Actes de la IIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Orléans, IREM d'Orléans.

— MERCIER A. (1986), Un point de vue introductif à la didactique des

mathématiques : du côté du savoir. Cours, *IVème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, recueil des textes et comptes rendus*, Paris, IREM Paris 7 et Université Paris 7, (1992), *Interactions didactiques*, 13, Universités de Genève et Neuchâtel (à paraître)

— MERCIER A. (1988), *The "Contrat didactique" Permanent clauses, local and global breaches*. Poster, ICME-VI, Budapest.

— MERLEAU-PONTY M. (1945), *Phénoménologie de la perception*. Paris, NRF, Gallimard.

— RAJOSON L. (1988), *Analyser la transposition didactique : quelques problèmes, concepts et méthodes de l'abord écologique*. Thèse de troisième cycle, Université d'Aix Marseille II.

— ROUSSEAU J.J. (1762), *Du contrat social ou Principes du droit politique*. Paris, Garnier-Flammarion, 1973.

— SCHUBAUER-LEONI M-L. (1987), *Le contrat didactique : un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestés par les élèves en mathématiques*. *Psychologie et didactique des mathématiques*, Genève, Journal Européen de Psychologie de l'Education.

Annexe 1

Le cahier d'une élève de Terminale D

Limites-Continuité-Asymptotes

I - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$x \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow -\infty$

1°) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$x \rightarrow +\infty$ _____

Exemple : les fonctions $x \rightarrow x^n$ et $x \rightarrow \sqrt{x}$

Définition intuitive .../...

Propriétés .../...

2°) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ où L est un réel donné

$x \rightarrow +\infty$ _____

Exemple : les fonctions $x \rightarrow \frac{1}{x^n}$ et $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ ont pour limite 0

quand x tend vers $+\infty$

Définition intuitive .../...

$$3^\circ) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \dots / \dots$$

$$\underline{x \rightarrow -\infty}$$

$$4^\circ) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

$$\underline{x \rightarrow -\infty}$$

Exemples :

1) Etude de la limite de $f(x) = 2x - x \cdot \sin x$ en $+\infty$

2) Limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

3) Limite de $f(x) = -x^2 - 1$ en $+\infty$

(Ces limites sont déterminées par comparaison avec une fonction x^n , $n \in \mathbb{Z}$.)

Propriétés :

Quand x tend vers x_0 ,

<i>si</i> $\lim f(x) = L$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
<i>si</i> $\lim g(x) = L'$	L'	L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
<i>alors</i> $\lim(f(x)+g(x)) = L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<i>on ne peut pas conclure, forme indéterminée</i>

<i>si</i> $\lim f(x) = L$	∞	$L \neq 0$	0
-----------------------------	----------	------------	-----

si $\lim g(x) = L'$	∞	∞	∞
alors $\lim f(x).g(x) = L.L'$	∞	∞	on ne peut pas conclure, forme indéterminée

si $\lim f(x) = L$	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
si $\lim g(x) = L' \neq 0$	0	∞	$L' \neq 0$	∞	0
alors $\lim \left \frac{f(x)}{g(x)} \right = \frac{L}{L'}$	∞	0	∞	on ne peut pas conclure	

Exemple :

1) Etudier la limite en $+\infty$ et $-\infty$

de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

$$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^3} \right) = 0$$

Donc,
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = 1$$

Comme
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

II) Limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

(même méthode)

L'exemple II est traité comme le précédent : factorisations de x et x^2 , sans commentaires notés par l'élève ; il s'agit apparemment des premiers « exercices » après le tableau des limites, mais ils sont donnés en exemple, l'enseignant seul les traite, ils restent « dans son lieu » : ils ne sont pas « donnés à faire » à l'enseigné. Les théorèmes correspondant aux cases du tableau ne sont pas systématiquement utilisés par l'enseignant. Cet exemple fait donc partie intégrante du cours sur les calculs de limites.

5) Limite d'un polynôme à l'infini :

Propriété :

La limite à l'infini d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.

Exemple :

$$f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 1$$

$$f(x) = 5x^3 \left(1 - \frac{2}{5x} + \frac{1}{5x^3} \right)$$

comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{5x} + \frac{1}{5x^3} \right) = 1$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3) = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3) = -\infty$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

6) Limite à l'infini d'une fonction rationnelle :

Propriété :

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est celle du quotient des termes de plus haut degré.

Exemple :

$$I) f(x) = \frac{5x^2 - 2x}{3x^2 - 1} \quad (\dots)$$

$$II) \lim \frac{5x^2 - 1}{2x^2 - 3} \quad (\dots)$$

Propriété :

a, b, c , étant infinis ou réels,

si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$

$x \rightarrow a$

$x \rightarrow b$

$x \rightarrow a$

Exemple :

limite de $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ en $+\infty$ (...)

Aucune entrée d'index n'a été trouvée. Exercices :

Il s'agit, à proprement parler, des premiers exercices que feront les élèves de la classe. Nous n'avions précédemment que des exemples, i.e. : des exercices que le professeur traite lui-même. Le savoir leur avait donc, jusque-là, été seulement *montré*.

Limite à l'infini de :

$$a) f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + x - 1}}{x - 2}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)}}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}}}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)}$$

$$f(x) = x \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}}}{1 - \frac{2}{x}}$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$+\infty$ $+\infty$

Enoncés des exercices suivants

(Ils sont systématiquement traités par le procédé ci-dessus) :

$$b) f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$c) f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 3x^2 + 1$$

d) Limite à l'infini de $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1} + x$
(Changement de forme indéterminée.)

$$e) f(x) = 3x + x \cdot \sin x$$

etc.

Fin du cours de Delphine sur les limites infinies

Annexe 2

Le rapport à l'algèbre, au Collège, ses effets sur le traitement des valeurs absolues, au Lycée

Les analyses des caractères du contrat didactique relatifs à la notion de valeur absolue, en seconde, ne peuvent être développées sans le support de l'analyse de la transposition didactique de cette notion, et en particulier sans que l'étude des relations de cet objet de savoir avec la notion de distance. On se souvient en effet que le seul travail d'analyse du processus de transposition didactique qui ait été mené à son terme porte sur la notion de distance, et que l'on y montre que l'écosystème proposé par l'organisation du savoir enseigné à la notion de distance est la justement la question des valeurs absolues, on ne peut omettre de relever là un renversement de l'analogie qui mérite que l'on s'y arrête²³.

Quelques caractères particuliers de la transposition didactique de la valeur absolue, au Lycée, aujourd'hui

Nous proposerons simplement ici quelques remarques. Un changement de programme a proposé une nouvelle organisation des savoirs

²³ Chevallard Y., Johsua M.A. (1982), Un exemple d'analyse de la transposition didactique, la notion de distance. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3.2, 157-239.

enseignés, il a voulu rendre officielle une pratique produite à peu près spontanément par le processus d'obsolescence du savoir, que l'on peut repérer comme un glissement métacognitif qui relève des substitutions didactiques d'objet²⁴. L'évolution prévue par le programme peut se voir dans la pratique de l'enseignant, qui s'engage rapidement, après avoir donné une définition de la valeur absolue de x , dans la résolution d'un type particulier d'inéquations par une technique de traductions analogiques. Il est guidé en cela par le livre, mais lui ne suit pas le nouveau programme, il n'a pas pris en compte totalement la pratique nouvelle et l'on pourrait presque dire que l'évolution attendue continue à se produire d'elle-même : principalement, par le moyen de l'organisation des exercices que le livre des élèves propose.

La réticence de l'enseignant à proposer exactement le type de rapport au savoir que le texte des programmes demande peut nous montrer une difficulté. La proposition transpositive est en effet didactiquement inadéquate - le travail d'Yves Chevallard et de Marie-Alberte Johsua sur ce point le laissait prévoir dix ans auparavant -, c'est le stade ultime d'une dérive incontrôlée de l'enseignement de la notion de distance. Il se réduit en effet à la conjonction d'un appel à l'intuition (La notion intuitive est supposée appartenir aux élèves sans autre difficulté.), d'une proposition d'écriture (Les deux barres de la valeur absolue.) et d'un triple outil de traitement algébrique et graphique connu des élèves (Les doubles inégalités, les intervalles dans \mathbb{R} , la représentation des intervalles sur la droite numérique.). La valeur absolue est censée, par la déclaration de son appartenance à l'ensemble de ces champs de signes, prendre un sens cognitif « matériel et concret » de sa liaison avec la notion « géométrique » de distance, un sens mathématique « opératoire et éventuellement théorique » de ses liaisons avec les notions de double inégalité et d'intervalle - qui donnent les cadres des manipulations demandées aux élèves, et le cadre dans lesquels sont définies les réponses acceptables : l'écriture ensembliste des intervalles de \mathbb{R} . Dans cette optique, la manipulation de la valeur absolue n'est plus - en principe - le domaine de

²⁴ Elles sont jusqu'ici le lot de l'enseignement des mathématiques au Collège, et ont été analysées dans Chevallard (1985-1990).

la distinction de cas, auquel elle introduisait précédemment, suivie dans ce domaine par les équations paramétriques du second degré.

La transposition proposée apporte une difficulté opératoire imprévue, qui vient alors d'un phénomène inattendu :

— en dimension 2, dans le plan, les trois valeurs possibles de la comparaison, à un nombre positif, de la distance d'un point variable à un point fixe, créent le disque, le cercle, et leur complément, un plans auquel manque un disque fermé ;

— en dimension 1, sur une droite, les trois valeurs possibles de la comparaison, à un nombre positif, de la distance d'un point variable à un point fixe, créent dans deux cas sur les trois des domaines géométriques non connexes : un segment ouvert, une paire de points, une union de demi-droites disjointes. Ces domaines non connexes, géométriquement atypiques, ne sont pas désignés par un « nom » particulier. Aussi, l'intuition venue de la pratique culturelle de la notion de distance n'est plus valide quand l'enseignement lui trouve « un champ naturel d'application », sur lequel il compte fonder les pratiques qui seront enseignées. L'intérieur - le segment, qui semble difficilement un ensemble fermé - est la seule partie une, et nommée ; sa frontière, constituée de la réunion de deux points, défie l'intuition à laquelle il est en principe fait appel (c'est l'équivalent du cercle) ; l'extérieur est fait de la réunion de deux demi-droites disjointes (il ne peut pas plus se dire d'un coup en termes d'intervalles : il y faut une opération sur les ensembles, la réunion, il ne peut pas plus se dire en termes d'inégalités : il y faut une conjonction, le ou). Si le cercle partage le plan en deux parties, s'il est visiblement une frontière, réduit à deux points de la droite il la partage (intuitivement) en trois parties : certainement pas en deux parties, selon les formes de la conjonction des inéquations de sens contraire définissant des demi-droites de sens opposé, selon qu'elles sont disjointes (par la conjonction ou) ou seulement distinctes (par la conjonction et).

Dans ces conditions, *l'outil de contrôle sémantique* que pourrait être l'appel au « bon sens de la notion géométrique » par le moyen des analogies spatiales, ne peut jamais jouer ou presque. En particulier, *le « bon sens géométrique sur la distance comme mesure de l'écart de deux*

points de l'espace » ne permet pas d'interpréter les manipulations effectuées sur les divers systèmes sémiotiques qui peuvent rendre compte des problèmes de distance sur la droite comme des problèmes de valeur absolue.

Nonobstant, en principe comme en fait, les enseignants jouent à tout moment sur les cadres interprétatifs en prenant des décisions de changement du cadre sémiotique du travail (des transformations analogiques), mais ils contrôlent leurs transformations analogiques par des moyens syntaxiques dont les élèves n'ont pas la maîtrise. Nous rencontrons là des effets de transposition didactique (les glissements métadidactiques) qui ont été montrés par Guy Brousseau et Yves Chevallard à propos de la réforme des mathématiques des années 70 : ces effets ont pour cela été nommée « Papy » ou « Diènes », ils sont dans la classe générale des substitutions didactiques d'objet²⁵.

Soit par exemple l'exercice qui faisait problème. Imaginons que nous tentions d'enseigner sa résolution à l'aide de la liste de transformations analogiques que le programme et le livre des élèves proposent.

Aucune entrée d'index n'a été trouvée. La distance de x à 3 est supérieure à 6. Nous ne savons pas traiter directement cette question.

Aucune entrée d'index n'a été trouvée. x est avant 3, à plus de 6, ou x est après 3, à plus de 6. Mais nous devons traiter deux cas.

Où l'on voit revenir une distinction de cas, ce qu'il s'agissait d'évacuer.

C'est donc l'interprétation graphique de l'inéquation qui peut seule

²⁵ Sur ces analyses, on se reportera aux travaux sur le contrat didactique, et sur la classification des effets de contrat, à Brousseau G. (1986), *Les effets du contrat didactique*. Cours, Journées du CIRDDS, Marseille-Luminy, (notes personnelles), ou à Chevallard Y. (1980), *Mathématiques, langage, enseignement : le réforme des années soixante*. In *La politique de l'ignorance, Recherches*, 41, pp. 71-99.

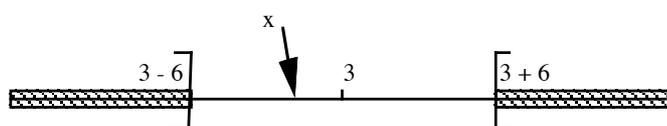
prendre le relais. Cette interprétation part d'une notation intermédiaire en intervalles, et elle produit des intervalles. Il faut alors :

— passer à l'inéquation complémentaire, $|x - 3| < 6$,

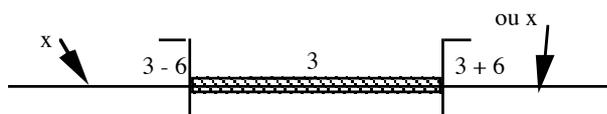
— traiter cette inéquation, sous la forme $-6 < x - 3 < 6$,

puis $-6 + 3 < x < 6 + 3$,

— aller, par le moyen de la réduction *x est entre -3 et 9*, jusqu'au schéma :



— produire, par complémentation réciproque dans le cadre géométrique, l'interprétation de l'inéquation première :



— interpréter enfin cette interprétation, en termes d'inéquations ce qui donne la première écriture analogue acceptable (mathématiquement correcte, sans appel à la distinction de cas, et qui est apparemment restée sous le contrôle du sens commun attribué à la description graphique des inéquations, si un tel sens existe) :

Aucune entrée d'index n'a été trouvée.

L'écriture normalement produite dans le cadre algébrique :

« $x - 3 < -6$ ou $x - 3 < 6$ »,

aucun traitement analogue ne peut semble-t-il la produire telle quelle, parce que les objets sémiotiques distincts produisent des gestes distincts, des idées distinctes. On voit alors que la « théorisation » des glissements analogiques en termes d'interprétations est épistémologiquement erronée, parce que le travail dans les différents systèmes de signes ne peut s'interpréter qu'à l'intérieur même de la

grammaire de chacun des systèmes²⁶.

Nous arrivons enfin à la conjonction des deux inéquations qui était attendue :

*Aucune entrée d'index n'a été trouvée. x est avant -3 ,
ou x est après 9*

Il ne reste plus qu'à « traduire » cela en termes d'intervalles, parce que c'est ainsi que l'on donne la solution standard d'une inéquation.

Il faut donc, encore, écrire :

$x \in]-\infty, -3] \cup [9, +\infty[$, et, éventuellement, commenter ce résultat, l'interpréter en vérifiant que la distance de x au milieu de $[-3, +9]$ est bien supérieure à 6 , etc.

Conclusion. Un choix transpositif didactiquement impossible à réaliser

Il y a donc nécessité absolue, pour l'enseignant qui veut montrer un outil analogique de contrôle de ce qu'il avance, de donner au moins une

²⁶ En se disqualifiant ici, ces modes d'interprétation du traitement analogique disqualifient les options empiriques qui les induisent (le réel se lit et s'écrit dans la langue mathématique, les divers cadres correspondant aux divers systèmes sémiotiques des écritures mathématiques étant comme diverses langues possibles, plus abstraites ou plus proches du donné sensible, mais pouvant également prétendre à la mise en signes de ce qui se voit, et se dit naturellement). C'est sur ces options qu'est fondé l'enseignement actuel des mathématiques, au Collège comme au Lycée, dans la mesure où nous y voyons les objets analogiques (contrôlés par des interprétations explicitement empiristes) y être les objets d'enseignement officiellement nommés.

autre définition de valeur absolue que celle que le programme propose : soit la « conjonction des cas », soit la « racine carrée du carré », pour *démontrer* ce qu'il va faire. Parce que les gestes techniques qu'il va introduire, à l'occasion des exercices que l'analogie de la valeur absolue à une distance de nombres va l'amener à poser, ne peuvent trouver une justification que dans le cadre algébrique stricto sensu.

Ainsi, l'enseignant de Béatrice et Michèle a, dit-il, « Bien insisté sur le fait que l'écriture $-3 < x - 4 < 3$ devait se penser comme la conjonction de $-3 < x - 4$ et de $x - 4 < 3$ à l'aide de la conjonction ET, et que seules des raisons d'économie d'écrit justifiaient la réduction qui se produit traditionnellement et qui peut s'observer partout. De telles considérations restent naturellement dans le topos enseignant, elles lui permettent de retrouver, lors de la correction des exercices, le fil de son discours enseignant et de dire aux élèves : « Mais je vous l'avais pourtant bien dit ! Il faut toujours se ramener à la définition. »

Cela, qui nous permet de comprendre comment s'est créé un épisode didactique générateur d'effets biographiques malheureux, ne relève plus de l'étude particulière de la biographie didactique de Béatrice et Michèle. Cela relève de l'étude plus générale de l'organisation des systèmes de contraintes qui font les types de fragments biographiques que l'on pourrait observer.