HAL open science

Analyse multi-échelles du flambage des matériaux hétérogènes

Saeid Nezamabadi, Julien Yvonnet, Hamid Zahrouni, Michel Potier-Ferry

To cite this version:

Saeid Nezamabadi, Julien Yvonnet, Hamid Zahrouni, Michel Potier-Ferry. Analyse multi-échelles du flambage des matériaux hétérogènes. 9e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01393695

HAL Id: hal-01393695

https://hal.science/hal-01393695

Submitted on 8 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Analyse multi-échelles du flambage des matériaux hétérogènes

S. Nezamabadi[1], J. Yvonnet[2], H. Zahrouni[1], M. Potier-Ferry[1]

[1] Université Paul Verlaine de Metz, Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, UMR CNRS 7554 ISGMP, Ile de Saulcy 57045, Metz Cedex 01 France
{saeid.nezamabadi, zahrouni, michel.potierferry}@univ-metz.fr

[2] Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, FRE CNRS 3160, 5 Bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 02, France
Julien.Yvonnet@univ-paris-est.fr

Résumé — Dans ce travail, une technique numérique efficace est proposée pour analyser les instabilités dans le cadre des matériaux hétérogènes où les flambages peuvent survenir au niveau macroscopique ainsi qu'au niveau microscopique. La technique proposée combine la méthode des éléments finis multi-niveaux (EF^2) et la méthode asymptotique numérique (MAN). Nous nous limitons aux matériaux élastiques, par contre, la non-linéarité géométrique est prise en compte aux niveaux microscopique et macroscopique.

Mots clés — Méthode asymptotique numérique, homogénéisation non-linéaire, Méthode des éléments finis multi-niveaux, flambage, instabilités.

1 Introduction

La modélisation multi-échelle des matériaux hétérogènes est une tâche difficile. Dans le contexte non-linéaire, les propriétés effectives des matériaux hétérogènes ne peuvent pas être obtenues par les techniques utilisées pour les milieux linéaires car le principe de superposition n'est plus valable. Ainsi, dans le contexte des éléments finis, une alternative au maillage de l'ensemble de la structure avec la prise en compte de toutes les hétérogénéités, est l'utilisation d'éléments finis multi-niveaux (EF^2) ([1], [2]). Cette procédure consiste à extraire un volume élémentaire représentatif (VER) du problème considéré. En chaque point d'intégration, les contraintes macroscopiques sont obtenues par la moyenne des contraintes calculées par éléments finis au niveau du VER. Les problèmes non-linéaires aux échelles micro et macro sont souvent résolus par les procédures classiques de Newton-Raphson, qui sont généralement adaptées à la résolution des problèmes non linéaires mais qui présentent des difficultés en présence d'instabilités.

Dans le présent travail, nous proposons une technique numérique qui permet de traiter les problèmes d'instabilités dans le cadre des matériaux hétérogènes. Ces instabilités peuvent survenir à la fois au niveau micro et au niveau macro. Nous combinons ainsi la méthode des éléments finis multi-niveaux (EF^2) et la méthode asymptotique numérique (MAN) [3]. La MAN est basée sur un développement en séries des différentes variables intervenant dans le problème à résoudre ([4], [5]). En introduisant le développement asymptotique dans les équations non-linéaires aux deux niveaux micro et macro, on obtient une série de problèmes linéaires qui sont résolus de façon récursive. Comparée à la méthode EF^2, la méthode proposée présente les avantages suivants : (i)

dans le cadre d'une analyse par éléments finis multi-niveaux, les solutions des problèmes non-linéaires microscopiques sont obtenues par la résolution des problèmes linéaires de la série. Une conséquence directe est que le tenseur de localisation peut être construit pour chaque pas du développement asymptotique et la relation de comportement peut alors être construite à l'échelle macroscopique. Ainsi, en utilisant notre procédure, la linéarisation est valable tout au long du pas asymptotique alors que, dans la méthode EF^2, la linéarisation est valable uniquement à chaque itération de Newton-Raphson, (ii) avec la MAN, la courbe de réponse est explicitement représentée sous la forme d'une série vectorielle qui est calculée avec une seule décomposition de la matrice de rigidité. Cette représentation en série contient plusieurs informations qui sont inaccessibles par les algorithmes classiques. On en tire facilement un grand avantage : la longueur de chaque pas de calcul est estimée a posteriori, (iii) La MAN est une technique très simple à mettre en oeuvre pour résoudre les problèmes impliquant des bifurcations et des instabilités, par comparaison aux méthodes itératives classiques basées sur la méthode de Newton-Raphson associée à une technique de pilotage basée sur la longueur d'arc pour passer les points limites.

2 Formulation du problème mécanique

On peut écrire la forme faible du problème macroscopique dans un domaine Ω comme suit :

$$\begin{cases} \int_\Omega \bar{\mathbf{P}} : \delta\bar{\mathbf{F}}\, d\Omega = \lambda\, \mathbf{T}_{ext}(\delta\bar{\mathbf{u}}) \quad dans\, \Omega\ , \\ \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}) = \hat{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}) \quad sur\, \partial\Omega_u\ , \end{cases} \tag{1}$$

où $\bar{\mathbf{P}}$, $\bar{\mathbf{F}}$ et $\mathbf{T}_{ext}$ sont la première contrainte macroscopique de Piola-Kirchhoff, le gradient de déformation macroscopique et le travail des efforts extérieurs, respectivement. La relation de comportement macroscopique n'est pas connue explicitement, elle sera estimée à partir d'un modèle microscopique pour lequel on connait les lois de comportement de ses constituants.

Ainsi, la forme faible du problème microscopique est définie pour un volume élémentaire représentative qui occupe un domaine ω, comme suit :

$$\int_\omega \mathbf{P} : \delta\mathbf{F}\, d\omega = 0\ , \tag{2}$$

où $\mathbf{P}$ et $\mathbf{F}$ sont la première contrainte microscopique de Piola-Kirchhoff et le gradient de déformation microscopique. Différents types de conditions aux limites peuvent être considérés au niveau microscopique telles que déformations linéaires, tractions uniformes ou conditions de périodicité [1]. On considère dans ce travail les déformations linéaires sur les bords du VER :

$$\mathbf{u} = (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I})\mathbf{X} \ \ sur\ \ \partial\omega\ , \tag{3}$$

où $\mathbf{u}$ est le déplacement microscopique.

Au niveau microscopique, on suppose que les lois comportements sont connues en chaque phase de VER. Nous considérons un modèle en grands déplacements avec une relation comportement linéaire de chaque phase :

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbb{C}^{(r)} : \mathbf{E}(\mathbf{X})\ , \tag{4}$$

où $\mathbf{S}$ est la seconde contrainte de Piola-Kirchhoff liée à $\mathbf{P}$ via $\mathbf{P} = \mathbf{FS}$. $\mathbb{C}^{(r)}$ est le tenseur d'ordre quatre des constantes élastiques associé à la phase r et $\mathbf{E}$ est le tenseur de déformation de Green-Lagrange.

Les deux problèmes aux niveaux micro et macro sont couplés via les relations suivantes, qui permettent de déterminer la contrainte effective et le gradient de déformation macroscopique, respectivement :

$$\bar{\mathbf{P}} = \langle \mathbf{P}(\mathbf{X}) \rangle = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega \mathbf{P}(\mathbf{X}) d\omega\ , \tag{5}$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \langle \mathbf{F}(\mathbf{X}) \rangle = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \mathbf{F}(\mathbf{X}) d\omega \ . \tag{6}$$

Dans le cadre de la MAN, le développement en série est défini comme suit :

$$\begin{cases} \mathbb{U}(a) = \mathbb{U}_0 + \sum_{p=1}^{N} a^p \mathbb{U}_p \ , \\ \lambda(a) = \lambda_0 + \sum_{p=1}^{N} a^p \lambda_p \ . \end{cases} \tag{7}$$

où $\mathbb{U}$ représente les variables microscopiques ou macroscopiques. On peut donc écrire ces problèmes sous forme de suites de problèmes linéaires comme suit ($1 \leq p \leq N$) :

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{P}}_p : \delta\bar{\mathbf{F}} d\Omega = \lambda_p \mathbf{T}_{ext}(\delta\bar{\mathbf{u}}) \ , \tag{8}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mathbf{u}_p, \delta\mathbf{u}) = \mathcal{F}_p^{nl}(\delta\mathbf{u}) \ , \\ \mathbf{u}_p = \bar{\mathbf{F}}_p \mathbf{X} \quad sur \ \ \partial\omega \ . \end{cases} \tag{9}$$

En résolvant le problème (9), on peut obtenir la contrainte microscopique en fonction du gradient de déformation macroscopique à chaque ordre p :

$$\mathbf{P}_p = \mathbb{L} : \bar{\mathbf{F}}_p + \mathbf{P}_p^{nl} \ . \tag{10}$$

La contrainte effective peut donc être obtenue à chaque ordre p en faisant la moyenne de l'équation (10) :

$$\bar{\mathbf{P}}_p = \langle \mathbb{L} \rangle : \bar{\mathbf{F}}_p + \left\langle \mathbf{P}_p^{nl} \right\rangle \ , \tag{11}$$

où $\langle \mathbb{L} \rangle$ est le tenseur de comportement macroscopique. En introduisant (11) dans l'équation (8), on peut écrire la forme finale du problème linéaire à l'ordre p au niveau macroscopique :

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{F}}_p : \langle \mathbb{L} \rangle : \delta\bar{\mathbf{F}} d\Omega = \lambda_p \mathbf{T}_{ext}(\delta\bar{\mathbf{u}}) - \int_{\Omega} \left\langle \mathbf{P}_p^{nl} \right\rangle : \delta\bar{\mathbf{F}} d\Omega \ . \tag{12}$$

En résolvant l'équation (12), on peut déterminer $\bar{\mathbf{F}}_p$ qui permet de calculer toutes les quantités microscopiques et macroscopiques.

3 Exemples numériques

Pour évaluer la capacité de la présente méthode à résoudre des problèmes présentant du flambage sévère et des instabilités aux deux niveaux micro et macro, nous avons étudié plusieurs problèmes. Nous avons comparé les résultats obtenus à l'aide de ce modèle avec ceux obtenus avec le problème complet, c'est-à-dire une structure dans laquelle tous les détails des hétérogénéités sont maillés. Les détails de cette étude sont donnés dans la référence [3] et montrent que les résultats sont en bons accords. Dans le présent travail, nous présentons une étude sur la compression d'un matériau composite à fibres longues. La structure macroscopique est montrée par la figure 1. Elle présente une surface rectangulaire encastrée sur trois bords et soumise à l'action d'une pression sur le bord supérieur. Grâce à la symétrie, seule la moitié de la structure a été utilisée pour résoudre ce problème.

Différents VER peuvent être construits à partir de la cellule élémentaire de la figure 2. Notons VER_{ij}, le VER contenant i cellules dans la direction verticale et j cellules dans la direction horizontale. On peut alors se poser la question : lequel de ces VER est idéal pour représenter le comportement de la structure considérée ? Généralement, la réponse à cette question n'est pas évidente. Le bon VER est celui pour lequel l'ensemble des réponses macro convergent. Dans cette

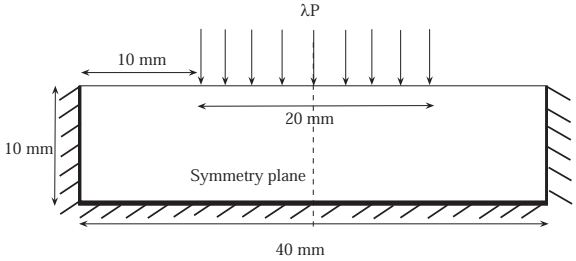

Figure 1 – Structure macroscopique du problème de compression d'un matériau composite à fibres longues, $P = 1N/mm$

analyse, on fait varier le nombre de cellules élémentaires dans les directions horizontale et verticale et on étudie la réponse globale de la structure. La réponse charge-déplacement pour différents VER est reportée sur la figure 3. Cela montre une convergence assez rapide de la charge critique de flambage. Cette convergence est essentiellement due au fait que pour l'exemple choisi, le flambage des fibres est confiné dans la matrice. Ce qui l'isole de toute interaction entre les différentes cellules.

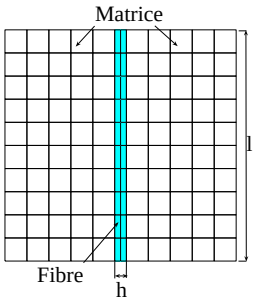

Figure 2 – Une cellule élémentaire

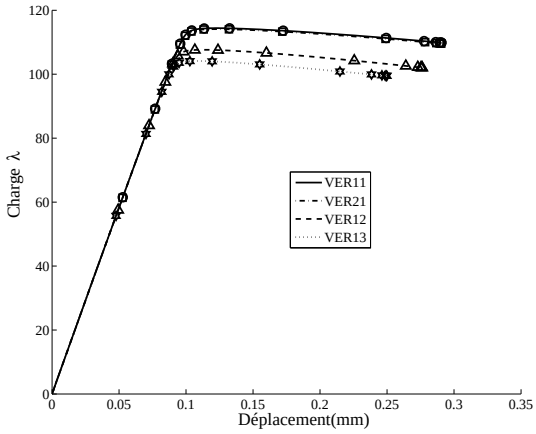

Figure 3 – La réponse Charge-Déplacement pour différents VER.

Pour bien montrer que les instabilités microscopiques jouent un rôle important dans le comportement macroscopique de la structure, on cherche la configuration déformée de VER_{13} avant et après la charge critique de flambage (le point A et le point B dans la figure 5). La figure 6 montre ces configurations déformées de la microstructure de l'élément montré dans la figure 4. Il y a une

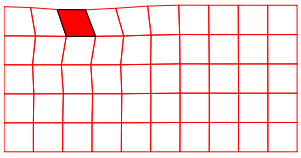

Figure 4 – Structure déformée (seule la moitié de la structure est discrétisée)

grande différence dans la déformation microscopique entre les deux configurations présentées, malgré la légère variation de la charge entre les deux états. Cela montre l'influence de l'instabilité microscopique sur le flambage de la macrostructure.

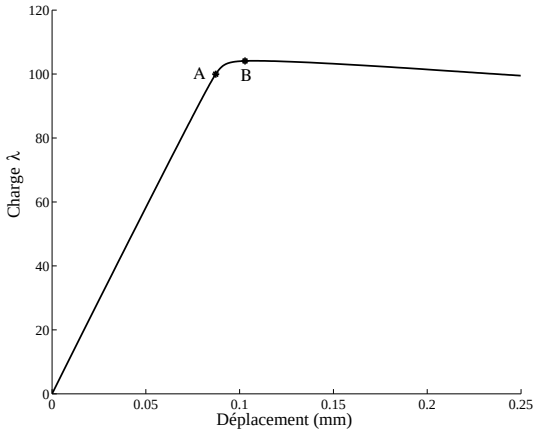

Figure 5 – La réponse Charge-Déplacement pour le VER_{13}.

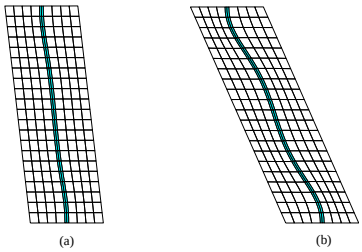

Figure 6 – Etat déformé des microstructures de l'élément montré dans la figure 4 pour (a) le point A et (b) le point B (voir figure 5).

4 Conclusion

Nous avons proposé une technique numérique efficace, dans le cadre des matériaux hétérogènes, combinant la méthode des éléments finis multi-niveaux (EF^2) et la méthode asymptotique numérique (MAN), pour traiter les instabilités pouvant se produire au niveau macroscopique et/ou au niveau microscopique. Cette technique permet également d'obtenir de grands pas avec des temps de calcul réduits. Nous avons pris en compte les grands déplacements mais nous nous sommes limités aux lois de comportement linéaire au niveau microscopique. Ceci n'est pas une limitation de notre méthode. En effet, nous avons étudié avec cette technique le micro-flambage des matériaux hétérogènes à fibres longues en considérant une loi de comportement non-linéaire de la matrice [6].

Références

[1] C. Miehe. Computational micro-to-macro transition for discretized microstructure of heterogeneous mterials at finite strains based on the minimization of averaged incremental energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, 559-591, 2003.

[2] F. Feyel, J.L. Chaboche. FE^2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behavior of long fiber SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183, 309-330, 2000.

[3] S. Nezamabadi, J. Yvonnet, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry. A multilevel computational strategy for microscopic and macroscopic instabilities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, à paraître.

[4] J. Yvonnet, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry. A model reduction method for the post-buckling analysis of cellular microstructures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, 265-280, 2007.

[5] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*, Hermes Science Publications, 2007.

[6] S. Nezamabadi, H. Zahrouni, J. Yvonnet, M. Potier-Ferry. A multiscale finite element approach for buckling analysis of elastoplastic long fiber composites. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, Soumis.