



HAL
open science

COHOMOLOGIE DES ESPACES DE LUBIN-TATE : UNE NOUVELLE PREUVE GÉOMÉTRIQUE NATURELLE

Pascal Boyer

► **To cite this version:**

Pascal Boyer. COHOMOLOGIE DES ESPACES DE LUBIN-TATE : UNE NOUVELLE PREUVE GÉOMÉTRIQUE NATURELLE. 2016. hal-01393513v1

HAL Id: hal-01393513

<https://hal.science/hal-01393513v1>

Preprint submitted on 7 Nov 2016 (v1), last revised 5 Apr 2019 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

COHOMOLOGIE DES ESPACES DE LUBIN-TATE : UNE NOUVELLE PREUVE GÉOMÉTRIQUE NATURELLE

par

Boyer Pascal

Résumé. — Dans [1], on détermine les groupes de cohomologie des espaces de Lubin-Tate par voie globale en calculant les fibres des faisceaux de cohomologie du faisceau pervers des cycles évanescents Ψ d'une variété de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor. L'ingrédient le plus complexe consiste à contrôler les flèches de deux suites spectrales calculant l'une les faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor, et l'autre ceux de Ψ . Dans cet article, nous contournons ces difficultés en utilisant la théorie classique des représentations du groupe mirabolique ainsi qu'un argument géométrique simple.

Abstract (Cohomology of Lubin-Tate spaces : a new natural geometric proof)

In [1], we determine the cohomology of Lubin-Tate spaces globally using the comparison theorem of Berkovich by computing the fibers at supersingular points of the perverse sheaf of vanishing cycle Ψ of some Shimura variety of Kottwitz-Harris-Taylor type. The most difficult argument deals with the control of maps of the spectral sequences computing the sheaf cohomology of both Harris-Taylor perverse sheaves and those of Ψ . In this paper, we bypass these difficulties using the classical theory of representations of the mirabolic group and a simple geometric argument.

Table des matières

1. Introduction.....	2
2. Géométrie des variétés de Shimura unitaires simples.....	3
3. Faisceaux pervers d'Harris-Taylor et des cycles évanescents.....	4
4. Deux représentations induites du groupe mirabolique.....	6
5. Stratification de Newton raffinée.....	8
6. Faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor.....	10
7. Faisceaux de cohomologie du complexe des cycles évanescents.....	14

Classification mathématique par sujets (2010). — 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, cohomologie de torsion, idéal maximal de l'algèbre de Hecke, localisation de la cohomologie, représentation galoisienne.

L'auteur remercie l'ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

Références.....	16
-----------------	----

1. Introduction

Le résultat principal de [1] est la détermination de chacun des groupes de cohomologie à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, de la tour de Lubin-Tate. En utilisant le théorème de comparaison de Berkovich, la démonstration est de nature globale et consiste à calculer les germes en un point supersingulier des faisceaux de cohomologie du complexes des cycles évanescents $\Psi_{\mathcal{I}}$ en une place v d'un corps CM F , d'une tour de variétés de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor $X_{\mathcal{I}}$ indexée par l'ensemble \mathcal{I} de ses niveaux. La preuve se déroule alors en deux temps relativement distincts :

- Dans le premier, les auteurs de [4] associent à une représentation irréductible ρ_v du groupe des inversibles $D_{v,h}^{\times}$ de l'algèbre à division centrale sur F_v , d'invariant $1/h$, un système local $\mathcal{L}(\rho_v)$, dit d'Harris-Taylor, sur la strate de Newton $X_{\mathcal{I},\overline{s}_v}^{\geq h}$ de la fibre spéciale en v de $X_{\mathcal{I}}$ et calculent la somme alternée de leurs groupes de cohomologies à support compact. Dans [1] on exploite ce calcul en exprimant les images des faisceaux pervers ${}^p j_{!*}^{\geq h} \mathcal{L}(\rho_v)[d-h]$ et $\Psi_{\mathcal{I}}$ dans un groupe de Grothendieck de faisceaux pervers équivariants, en termes d'extensions intermédiaires de systèmes locaux d'Harris-Taylor sur les différentes strates de Newton. Il s'agit de la partie la plus simple de loc. cit., celle qui est contrôlée par la formule des traces.
- Dans un deuxième temps, on étudie les suites spectrales associées à la filtration par les poids de ces deux faisceaux pervers pour calculer les faisceaux de cohomologie de ${}^p j_{!*}^{\geq h} \mathcal{L}(\rho_v)[d-h]$ et ceux de $\Psi_{\mathcal{I}}$. La partie la plus complexe de [1] consiste à contrôler les flèches de ces suites spectrales et au final de montrer « qu'elles sont le moins triviales possibles », au sens où dès que la source et le but d'une telle flèche partagent un sous-faisceau équivariant (resp. une sous-représentation irréductible), cette flèche induit un isomorphisme sur ceux-ci.

Pour montrer ce fait, dans [1], on utilise une propriété de compatibilité à l'involution de Zelevinsky de la cohomologie des espaces de Lubin-Tate. Dans [2], on propose une autre démonstration plus simple conceptuellement mais aussi très lourde, reposant sur des calculs de groupes de cohomologie globaux et en utilisant le théorème de Lefschetz vache.

Ces deux preuves sont à la fois complexes et difficiles et surtout on ne comprend pas la raison profonde pour laquelle ces flèches sont « le moins triviales possible ». Le but premier de cet article est ainsi de proposer une nouvelle preuve simple et naturelle. Plus précisément à partir de la première étape mentionnée ci-avant, nous utilisons une propriété géométrique simple sur les strates de Newton, i.e. avec les notations du paragraphe suivant, le fait que l'inclusion

$$X_{\mathcal{I},\overline{s}_v,\overline{1}_h}^{\geq h} \setminus X_{\mathcal{I},\overline{s}_v,\overline{1}_{h+1}}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\overline{s}_v,\overline{1}_h}^{\geq h}$$

est affine, cf. le lemme 5.2. En utilisant la théorie classique des représentations induites du groupe mirabolique, rappelée au §4, on obtient alors, cf. les suites exactes courtes (6.1) et (6.3), une filtration des faisceaux pervers d'Harris-Taylor à deux crans qui fournit une suite

spectrale qui dégénère en E_1 et qui correspond au terme $E_2 = E_\infty$ de la suite spectrale de [1]. Autrement dit la détermination des flèches dans [1] est entièrement contrôlée par l'affinité de l'inclusion ci-dessus. Le même procédé appliqué au faisceau pervers des cycles évanescents fournit de la même façon, cf. la proposition 7.3, une filtration de celui-ci, dont la suite spectrale calculant ses faisceaux de cohomologie dégénère en E_1 , cf. le corollaire 7.4, et coïncide avec le terme $E_2 = E_\infty$ de la suite spectrale de [1].

2. Géométrie des variétés de Shimura unitaires simples

Soit $F = F^+E$ un corps CM avec E/\mathbb{Q} quadratique imaginaire, dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$. Pour v une place de F , on notera

- F_v le complété du localisé de F en v ,
- \mathcal{O}_v l'anneau des entiers de F_v ,
- ϖ_v une uniformisante et
- q_v le cardinal du corps résiduel $\kappa(v) = \mathcal{O}_v/(\varpi_v)$.

Soit B une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 telle qu'en toute place x de F , B_x est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose B munie d'une involution de seconde espèce $*$ telle que $*|_F$ est la conjugaison complexe c . Pour $\beta \in B^{*-1}$, on note \sharp_β l'involution $x \mapsto x^\sharp_\beta = \beta x^* \beta^{-1}$ et G/\mathbb{Q} le groupe de similitudes, noté G_τ dans [4], défini pour toute \mathbb{Q} -algèbre R par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^\sharp_\beta = \lambda\}$$

avec $B^{op} = B \otimes_{F,c} F$. Si x est une place de \mathbb{Q} décomposée $x = yy^c$ dans E alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times, \quad (2.1)$$

où, en identifiant les places de F^+ au dessus de x avec les places de F au dessus de y , $x = \prod_i z_i$ dans F^+ .

Dans [4], les auteurs justifient l'existence d'un G comme ci-dessus tel qu'en outre :

- si x est une place de \mathbb{Q} qui n'est pas décomposée dans E alors $G(\mathbb{Q}_x)$ est quasi-déployé ;
- les invariants de $G(\mathbb{R})$ sont $(1, d-1)$ pour le plongement τ et $(0, d)$ pour les autres.

2.2. Notation. — On fixe un nombre premier l non ramifié dans E et on note Spl l'ensemble des places v de F telles que $p_v := v|_{\mathbb{Q}} \neq l$ est décomposé dans F et $B_v^\times \simeq GL_d(F_v)$.

Rappelons, cf. [4] bas de la page 90, qu'un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}^\infty)$ est dit « assez petit » s'il existe une place x pour laquelle la projection de U^v sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité.

2.3. Notation. — Soit \mathcal{I} l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits » de $G(\mathbb{A}^\infty)$. Pour $I \in \mathcal{I}$, on note $X_{I,\eta} \longrightarrow \text{Spec } F$ la variété de Shimura associée, dit de Kottwitz-Harris-Taylor.

Remarque : pour tout $v \in \text{Spl}$, la variété $X_{I,\eta}$ admet un modèle projectif $X_{I,v}$ sur $\text{Spec } \mathcal{O}_v$ de fibre spéciale X_{I,s_v} . Pour I décrivant \mathcal{I} , le système projectif $(X_{I,v})_{I \in \mathcal{I}}$ est naturellement muni d'une action de $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$ telle que l'action d'un élément w_v du groupe de Weil W_v de F_v est donnée par celle de $-\text{deg}(w_v) \in \mathbb{Z}$, où $\text{deg} = \text{val} \circ \text{Art}^{-1}$ où $\text{Art}^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$ est l'isomorphisme d'Artin qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

2.4. Notations. — (cf. [1] §1.3) Pour $I \in \mathcal{I}$, la fibre spéciale géométrique X_{I,\bar{s}_v} admet une stratification de Newton

$$X_{I,\bar{s}_v} =: X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 1} \supset X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 2} \supset \cdots \supset X_{I,\bar{s}_v}^{\geq d}$$

où $X_{I,\bar{s}_v}^{=h} := X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h} - X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h+1}$ est un schéma affine, lisse de pure dimension $d - h$ formé des points géométriques dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate est de rang h . Pour tout $1 \leq h < d$, nous utiliserons les notations suivantes :

$$i_{h+1} : X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, \quad j^{\geq h} : X_{I,\bar{s}_v}^{=h} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h},$$

ainsi que $j^{=h} = i_h \circ j^{\geq h}$.

Pour tout $1 \leq h < d$, les strates $X_{I^{v,n},\bar{s}_v}^{=h}$ sont géométriquement induites sous l'action du parabolique standard $P_{h,d}(F_v)$ de Levi $GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v)$, au sens où il existe un sous-schéma $X_{I,\bar{s}_v,\bar{1}_h}^{=h}$ muni d'une action par correspondances de $G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times GL_{d-h}(F_v) \times \mathbb{Z}$ telle que, si n désigne la multiplicité de v dans I , alors

$$X_{I,\bar{s}_v}^{=h} \simeq X_{I,\bar{s}_v,\bar{1}_h}^{=h} \times_{P_{h,d}(\mathcal{O}_v/(\varpi^n))} GL_d(\mathcal{O}_v/(\varpi^n)).$$

Remarque : plus généralement pour $0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_r$, on notera

$$P_{k_1 < k_2 < \cdots < k_r}$$

le sous-groupe parabolique de GL_{k_r} de Levi $GL_{k_1} \times GL_{k_2 - k_1} \times \cdots \times GL_{k_r - k_{r-1}}$.

2.5. Notation. — On note $X_{I,\bar{s}_v,\bar{1}_h}^{\geq h}$ l'adhérence de $X_{I,\bar{s}_v,\bar{1}_h}^{=h}$ dans $X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}$ et

$$j_{\bar{1}_h}^{\geq h} : X_{I,\bar{s}_v,\bar{1}_h}^{=h} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v,\bar{1}_h}^{\geq h}.$$

3. Faisceaux pervers d'Harris-Taylor et des cycles évanescents

Fixons une place $v \in \text{Spl}$. En utilisant un analogue des classiques variétés d'Igusa, les auteurs de [4] associent à toute représentation ρ_v de l'ordre maximal $\mathcal{D}_{v,h}^\times$ de $D_{v,h}^\times$, un système local $\mathcal{L}(\rho_v)_1$ sur $X_{\mathcal{I},\bar{s}_v,\bar{1}_h}^{=h}$ muni d'une action équivariante de $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times P_{h,d}(F_v) \times \mathbb{Z}$ telle que

- le sous-groupe unipotent de $P_{h,d}(F_v)$ agit trivialement et
- l'action du facteur $GL_h(F_v)$ de son Levi agit via $\text{val} \circ \det : GL_h(F_v) \rightarrow \mathbb{Z}$.

On introduit alors la version induite de ces systèmes locaux

$$\mathcal{L}(\rho_v) := \mathcal{L}(\rho_v)_1 \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v),$$

muni donc d'une action équivariante de $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times GL_d(F_v) \times \mathbb{Z}$.

3.1. Notation. — La correspondance de Jacquet-Langlands permet de paramétrer les $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentations irréductibles de $D_{v,h}^\times$ à l'aide des représentations irréductibles cuspidales π_v de $GL_g(F_v)$ pour g un diviseur de $h = tg$, on écrit une telle représentation sous la forme $\pi_v[t]_D$.

3.2. Notation. — Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et Π_t une représentation de $GL_{tg}(F_v)$, on note⁽¹⁾, cf. la première remarque de 2.1.3 de [1],

$$\widetilde{HT}_1(\pi_v, \Pi_t)(n) := \mathcal{L}(\pi_v[t]_D)_1 \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}-n}$$

le système local d'Harris-Taylor associé où

$$\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_l^\times$$

est définie par $\Xi(\frac{1}{2}) = q^{1/2}$ et

- $GL_{tg}(F_v)$ agit diagonalement sur Π_t et sur $\mathcal{L}(\pi_v[t]_D) \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}-n}$ via son quotient $GL_{tg}(F_v) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$,
- le groupe de Weil W_v en v agit diagonalement sur $\mathbb{L}(\pi_v)$ et sur le facteur $\Xi^{\frac{tg-d}{2}-n}$ via, pour ce dernier, l'application $\deg : W_v \rightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie les frobenius géométriques sur 1.

On note aussi

$$HT_1(\pi_v, \Pi_t) := \widetilde{HT}_1(\pi_v, \Pi_t)[d - tg]$$

et

$$P(t, \pi_v)_1 := j_{1,!}^{-tg} HT_1(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v)$$

le faisceau pervers d'Harris-Taylor associé où \mathbb{L}^\vee est la correspondance Langlands sur F_v . En ce qui concerne les versions induites on les notera sans l'indice 1, i.e. $HT(\pi_v, \Pi_t)$ et $P(t, \pi_v)$.

Remarque : On rappelle que π'_v est inertiuellement équivalente à π_v si et seulement s'il existe un caractère $\zeta : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ tel que

$$\pi'_v \simeq \pi_v \otimes (\zeta \circ \text{val} \circ \det).$$

Les faisceau pervers $P(t, \pi_v)$ ne dépend que de la classe d'équivalence inertielle de π_v i.e. pour tout $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$, les faisceaux pervers $P(t, \pi_v)$ et $P(t, \pi_v \otimes \chi)$, munis de leurs actions par correspondances, sont isomorphes. En particulier, en notant e_{π_v} le cardinal de la classe d'équivalence inertielle de π_v , on a

$$P(t, \pi_v) = e_{\pi_v} \mathcal{P}(t, \pi_v)$$

où $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ est un faisceau pervers équivariant simple. De la même façon, il existe un système local $\mathcal{HT}(\pi_v, \Pi_t)$ tel que $HT(\pi_v, \Pi_t) = e_{\pi_v} \mathcal{HT}(\pi_v, \Pi_t)$.

1. Lorsque $n = 0$, on le fera disparaître des notations.

3.3. Définition. — Pour tout $I \in \mathcal{I}$, le faisceau pervers des cycles évanescents $R\Psi_{\eta_v, I}(\overline{\mathbb{Q}}_l[d-1])\left(\frac{d-1}{2}\right)$ sur X_{I, \bar{s}_v} sera noté Ψ_I . Le faisceau pervers de Hecke associé sur $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}$ est noté $\Psi_{\mathcal{I}}$.

Remarque : soit, cf. [4] III.2, \mathcal{L}_ξ le système local attaché à une représentation irréductible algébrique ξ de G sur Λ . Alors $R\Psi_{\eta_v, I}(\mathcal{L}_\xi) \simeq R\Psi_{\eta_v, I}(\overline{\mathbb{Q}}_l) \otimes \mathcal{L}_\xi$.

Dans [1], on décompose dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers équivariants sur $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}$ relativement à l'action de Hecke et du groupe de Weil en v , le faisceau pervers $\Psi_{\mathcal{I}}$ en termes des faisceaux pervers d'Harris-Taylor $\mathcal{P}(t, \pi_v)(n)$.

3.4. Notation. — Pour K^\bullet un complexe de faisceaux, on notera $\mathcal{H}^i K^\bullet$ sont i -ème faisceau de cohomologie.

4. Deux représentations induites du groupe mirabolique

Le nouvel argument pour calculer les faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor et du complexe des cycles évanescents, repose sur deux lemmes, le premier 4.3 de théorie des représentations du groupe mirabolique et le deuxième 5.2 de nature géométrique.

4.1. Définition. — Soit $P = MN$ un parabolique standard de GL_n de Lévi M et de radical unipotent N . On note $\delta_P : P(F_v) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ l'application définie par $\delta_P(h) = |\det(\text{ad}(h)|_{\text{Lie}N})|^{-1}$. Pour (π_1, V_1) et (π_2, V_2) des représentations de respectivement $GL_{n_1}(F_v)$ et $GL_{n_2}(F_v)$, et P_{n_1, n_1+n_2} le parabolique standard de $GL_{n_1+n_2}$ de Lévi $M = GL_{n_1} \times GL_{n_2}$ et de radical unipotent N ,

$$\pi_1 \times \pi_2$$

désigne l'induite parabolique normalisée de $P_{n_1, n_1+n_2}(F_v)$ à $GL_{n_1+n_2}(F_v)$ de $\pi_1 \otimes \pi_2$ c'est à dire l'espace des fonctions $f : GL_{n_1+n_2}(F_v) \rightarrow V_1 \otimes V_2$ telles que

$$f(nmg) = \delta_{P_{n_1, n_1+n_2}}^{-1/2}(m)(\pi_1 \otimes \pi_2)(m)\left(f(g)\right), \quad \forall n \in N, \forall m \in M(F_v), \forall g \in GL_{n_1+n_2}(F_v).$$

Remarque : Rappelons qu'une représentation π de $GL_n(F_v)$ est dite *cuspidale* si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre.

4.2. Notations. — Soient g un diviseur de $d = sg$ et π_v une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(F_v)$.

— L'unique quotient (resp. sous-représentation) irréductible de

$$\pi_v\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \times \pi_v\left\{\frac{3-s}{2}\right\} \times \cdots \times \pi_v\left\{\frac{s-1}{2}\right\}$$

est noté $\text{St}_s(\pi_v)$ (resp. $\text{Speh}_s(\pi_v)$).

— *L'unique sous-espace irréductible de*

$$\mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\})$$

est noté $LT_{\pi_v}(t-1, s)$.

4.3. Lemme. — *Soit π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, alors en tant que représentation du parabolique $P_{1,(t+s)g}(F_v)$, on a des isomorphismes*

$$\mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\})|_{P_{1,tg}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\}) \simeq LT_{\pi_v}(t-1, s)|_{P_{1,(t+s)g}(F_v)},$$

et

$$\mathrm{St}_t(\pi_v\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi_v\{\frac{t}{2}\})|_{P_{1,sg}(F_v)} \simeq LT_{\pi_v}(t, s-1)|_{P_{1,(t+s)g}(F_v)},$$

où dans le premier isomorphisme, l'induite parabolique est relativement à

$$\begin{pmatrix} M_{tg} & U \\ 0 & GL_{sg} \end{pmatrix}$$

alors que dans le deuxième, il s'agit de l'induite à support compact relativement à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & V_{sg-1} \\ 0 & GL_{tg} & U \\ 0 & 0 & GL_{sg-1} \end{pmatrix}.$$

Remarque : si dans le lemme précédent, on remplace la représentation de Steinberg $\mathrm{St}_t(\pi_v)$ par $LT_{\pi_v}(\delta, t-\delta-1)$, le membre de droite dans le premier isomorphisme devient $LT_{\pi_v}(\delta, t-\delta-1+s)$.

Démonstration. — Pour $n \geq 2$, on note $M_n(F_v)$ le sous-groupe de $P_{1,n}(F_v)$ dont le premier coefficient en haut à gauche est égal à 1. Quitte à tordre les actions par $g \mapsto \sigma({}^t g^{-1})\sigma^{-1}$, où σ est la matrice de permutation associé au cycle $(12 \cdots n)$, on reconnaît le traditionnel groupe mirabolique dont le radical unipotent $V_{n-1}(F_v)$ est abélien isomorphe à $(F_v^\times)^{n-1}$. On rappelle cf. par exemple [5] §III.1.10, que

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}) \\ &\longrightarrow \left(\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}) \right)|_{M_{(t+s)g}(F_v)} \\ &\longrightarrow \mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})|_{M_{sg}(F_v)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où le premier terme est l'induite parabolique relativement à $\begin{pmatrix} M_{(t+r)g} & U \\ 0 & GL_{sg} \end{pmatrix}$ et la deuxième l'induite à support compact relativement à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & V_{sg-1} \\ 0 & GL_{(t+r)g} & U \\ 0 & 0 & GL_{sg-1} \end{pmatrix}$. En outre

pour tout $k \geq 0$, la dérivée d'ordre k de $\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})$ est, cf. [5] p153, donnée par celle de $\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(F_v)}$ induite avec $\mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})$, i.e.

$$\left(\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})\right)^{(k)} \simeq \left(\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(F_v)}\right)^{(k)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\}).$$

Rappelons que la dérivée d'ordre k de $\mathrm{St}_t(\pi)$ est nulle sauf si k est de la forme δg avec $0 \leq \delta \leq t$ auquel cas elle est isomorphe à $\mathrm{St}_{t-\delta}(\pi\{\frac{\delta}{2}\})$. Ainsi en raisonnant par récurrence sur t , on en déduit que $\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{M_{tg}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})$ et $\mathrm{St}_t(\pi)$ ont les mêmes dérivées et sont donc isomorphes en tant que représentations de $M_{(t+s)g}(F_v)$. Par ailleurs comme

$$M_{(t+s)g}(F_v)/\left(M_{tg}(F_v) \times GL_{sg}(F_v)\right) \simeq P_{1,(t+s)g}(F_v)/\left(P_{1,tg}(F_v) \times GL_{sg}(F_v)\right),$$

on en déduit que $\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\})|_{P_{1,tg}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})$ est en tant que sous-espace de $\mathrm{St}_t(\pi\{-\frac{s}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_s(\pi\{\frac{t}{2}\})$, isomorphe à $\mathrm{St}_t(\pi)$. \square

5. Stratification de Newton raffinée

5.1. Notations. — Pour tout $h_0 \leq h$, on notera

$$X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \overline{1_{h_0}}}^{\geq h} := X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^{\geq h} \cap X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \overline{1_{h_0}}}^{\geq h_0}, \quad X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \neq \overline{1_{h_0}}}^{\leq h} := X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^{\leq h} \cap \left(X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^{\geq h_0} \setminus X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \overline{1_{h_0}}}^{\geq h_0}\right)$$

ainsi que

$$X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \overline{1_{h_0}} \setminus \overline{1_{h_0+1}}}^{\geq h} := X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \overline{1_{h_0}}}^{\geq h} \setminus X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \overline{1_{h_0+1}}}^{\geq h'} \quad \text{où} \quad \begin{cases} h' = h & \text{si } h_0 < h \\ h' = h + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On notera alors

$$j_{\overline{1_{h_0}} \setminus \overline{1_{h_0+1}}}^{\geq h} : X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \overline{1_{h_0}} \setminus \overline{1_{h_0+1}}}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \overline{1_{h_0}}}^{\geq h}, \quad i_{\overline{1_{h_0}} \setminus \overline{1_{h_0+1}}}^{h \leq +1} : X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \overline{1_{h_0+1}}}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \overline{1_{h_0}}}^{\geq h},$$

et $j_{\overline{1_{h_0}} \setminus \overline{1_{h_0+1}}}^{\leq h} := i_{\overline{1_{h_0}}}^h \circ j_{\overline{1_{h_0}} \setminus \overline{1_{h_0+1}}}^{\geq h}$. Dans le cas $h_0 = h$, on notera simplement

$$X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \neq \overline{1}}^{\geq h}$$

pour $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \overline{1_h} \setminus \overline{1_{h+1}}}^{\geq h}$ ainsi que $j_{\neq \overline{1}}^{\leq h}$ pour $j_{\overline{1_h} \setminus \overline{1_{h+1}}}^{\leq h}$. On utilisera aussi la notation

$$i_{\overline{1_{h_0}} \setminus \overline{1_{h_0+1}}}^{h+1 \leq +0} : X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \overline{1_{h_0+1}}}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \overline{1_{h_0}}}^{\geq h+1}.$$

5.2. Lemme. — L'inclusion ouverte $j_{\neq \overline{1}}^{\geq h}$ est affine.

Démonstration. — Soit $\mathcal{G}(h)$ le groupe de Barsotti-Tate universel sur $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \overline{1_h}}^{\leq h}$:

$$0 \rightarrow \mathcal{G}(h)^c \rightarrow \mathcal{G}(h) \rightarrow \mathcal{G}(h)^{et} \rightarrow 0$$

où $\mathcal{G}(h)^c$ (resp. $\mathcal{G}(h)^{et}$) est connexe (resp. étale) de dimension h (resp. $d - h$). Notons

$$\iota_{m_1} : (\mathcal{P}_v^{-m_1} / \mathcal{O}_v)^d \rightarrow \mathcal{G}(h)[p^{m_1}]$$

la structure de niveau universelle. Notant $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ la base canonique de $(\mathcal{P}_v^{-m_1}/\mathcal{O}_v)^d$, on rappelle alors que $X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v, \mathbb{1}_h}^{\leq h}$ est défini par la propriété que $\{\iota_{m_1}(e_i) : 1 \leq i \leq h\}$ forme une base de Drinfeld de $\mathcal{G}(h)^c[p^{m_1}]$.

Ainsi pour tout $\text{Spec } A \rightarrow X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v, \mathbb{1}_h}^{\geq h}$, le fermé $X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v, \mathbb{1}_{h+1}}^{\geq h+1} \times_{X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v, \mathbb{1}_h}^{\geq h}} \text{Spec } A$ est donné par l'annulation de $\iota(e_{h+1})$, d'où le résultat. \square

5.3. Notation. — Pour $h_0 < h$ et un système local d'Harris-Taylor $HT(\pi_v, \Pi_t)$ sur $X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v}^{\leq h}$, avec donc $h = tg$, on notera

$$HT_{\neq \mathbb{1}_{h_0}}(\pi_v, \Pi_t)$$

la restriction de $HT(\pi_v, \Pi_t)$ à $X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v, \neq \mathbb{1}_{h_0}}^{\leq h}$. Lorsque $h = h_0$, on notera plus simplement $HT_{\neq 1}(\pi_v, \Pi_t)$.

Fixons à présent une représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$ et notons $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$. Rappelons l'énoncé suivant de [1] 4.5.1 dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers de Hecke

$$j_{\mathbb{1}_{tg}, !}^{\leq tg} HT_{\mathbb{1}_{tg}}(\pi_v, \Pi_t) = \sum_{i=t}^s {}^p j_{\mathbb{1}_{tg}, !}^{\leq ig} HT_{\mathbb{1}_{tg}}(\pi_v, \Pi_t \left\{ (i-t) \frac{g-1}{2} \right\} \otimes \text{St}_{i-t}(\pi_v \left\{ -t \frac{g-1}{2} \right\})) \left(\frac{i-t}{2} \right), \quad (5.4)$$

où on utilise la notation

$${}^p j_{\mathbb{1}_{tg}, !}^{\leq ig} HT_{\mathbb{1}_{tg}}(\pi_v, \dots) := \text{ind}_{P_{tg, ig, d}(F_v)}^{P_{tg, d}(F_v)} {}^p j_{\mathbb{1}_{ig}, !}^{\leq ig} HT_{\mathbb{1}_{ig}}(\pi_v, \dots).$$

Dans [1], pour calculer les germes des faisceaux de cohomologie de ${}^p j_{\mathbb{1}_{tg}, !}^{\leq tg} HT_{\mathbb{1}_{tg}}(\pi_v, \Pi_t)$, on procède comme suit.

(a) On considère tout d'abord la filtration par les poids de ${}^p j_{\mathbb{1}_{tg}, !}^{\leq tg} HT_{\mathbb{1}_{tg}}(\pi_v, \Pi_t)$, soit

$$\text{Fil}^{t-s}(\pi_v, \Pi_t) \subset \dots \subset \text{Fil}^{-1}(\pi_v, \Pi_t) \subset \text{Fil}^0(\pi_v, \Pi_t) = {}^p j_{\mathbb{1}_{tg}, !}^{\leq tg} HT_{\mathbb{1}_{tg}}(\pi_v, \Pi_t)$$

dont les gradués sont

$$\text{gr}^{-k}(\pi_v, \Pi_t) \simeq {}^p j_{\mathbb{1}_{tg}, !}^{\leq (t+k)g} HT_{\mathbb{1}_{tg}}(\pi_v, \Pi_t \left\{ k \frac{g-1}{2} \right\} \otimes \text{St}_k(\pi_v \left\{ -t \frac{g-1}{2} \right\})) \left(-\frac{k}{2} \right).$$

(b) On dispose alors d'une suite spectrale faisceautique

$$E_1^{p,q} = \mathcal{H}^{p+q} \text{gr}^{-p}(\pi_v, \Pi_t) \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q} j_{\mathbb{1}_1, !}^{\leq tg} HT_1(\pi_v, \Pi_t). \quad (5.5)$$

Pour tout point géométrique z de $X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v}^{\leq h}$, la fibre en z de l'aboutissement de cette suite spectrale est connue, nulle dès que $h > tg$. En raisonnant par récurrence les fibres en z des $E_1^{p,q}$ sont aussi connues pour tout (p, q) si $p > 0$:

- si h n'est pas de la forme $(t + \delta)g$ alors les fibres en z de $E_1^{p,q}$ pour $p > 0$ sont toutes nulles ;
- pour $h = (t + \delta)g$, elles sont nulles sauf pour $q = (t + \delta)g - d - \delta$.

(c) Ainsi pour calculer les fibres des faisceaux de cohomologie de $j_{1,!}^{-tg} HT_1(\pi_v, \Pi_t)$, on est ramené à étudier les flèches $d_1^{p,q}$ pour $q = (t + \delta)g - d - \delta$ et $p > 0$, et à montrer qu'elles sont non nulles ce qui suffit à les caractériser.

Le but des paragraphes suivant est de proposer une nouvelle preuve élémentaire utilisant simplement les applications $j_{\neq 1}^{\leq h}$ et la théorie des représentations du groupe mirabolique.

6. Faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor

Commençons par poser $h := tg$ et

$$P(\pi_v, \Pi_t) := i_*^{h+1} p\mathcal{H}^{-1} i_{1_h}^{h+1,*} \left({}^p j_{1_h,!}^{\leq h} HT_{1_h}(\pi_v, \Pi_t) \right),$$

de sorte que

$$0 \rightarrow P(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow j_{1_h,!}^{\leq h} HT_{1_h}(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow {}^p j_{1_h,!}^{\leq h} HT_{1_h}(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0. \quad (6.1)$$

6.2. Lemme. — *Le complexe $i_{1_{h+1}}^{h+1,*} P(\pi_v, \Pi_t)$ est pervers.*

Démonstration. — Notons $F := {}^p j_{1_*}^{\geq h} HT_{1_h}(\pi_v, \Pi_t)$ de sorte qu'il s'agit de montrer que

$$i_{1_h, 1_{h+1}}^{h+1 \leq +0,*} \left(p\mathcal{H}^{-1} i_{1_h}^{h \leq +1,*} F \right)$$

est pervers. Pour ce faire, on utilise la suite spectrale

$$E_2^{r,s} = p\mathcal{H}^r i_{1_h, 1_{h+1}}^{h+1 \leq +0,*} \left(p\mathcal{H}^s i_{1_h}^{h \leq +1,*} F \right) \Rightarrow p\mathcal{H}^{r+s} i_{1_h, 1_{h+1}}^{h \leq +1,*} F.$$

Considérons le triangle distingué

$$j_{1_h,!}^{\geq h} j_{1_h}^{\geq h,*} F \rightarrow F \rightarrow i_{1_h,*}^{h \leq +1} i_{1_h}^{h \leq +1,*} F \rightsquigarrow .$$

Comme $j_{1_h}^{\geq h}$ est affine, alors $j_{1_h,!}^{\geq h} j_{1_h}^{\geq h,*} F$ est pervers et la suite exacte longue de cohomologie perverse du triangle distingué précédent s'écrit

$$0 \rightarrow i_{1_h,*}^{h \leq +1} p\mathcal{H}^{-1} i_{1_h}^{h \leq +1,*} F \rightarrow {}^p j_{1_h,!}^{\geq h} j_{1_h}^{\geq h,*} F \rightarrow F \rightarrow i_{1_h,*}^{h \leq +1} p\mathcal{H}^0 i_{1_h}^{h \leq +1,*} F \rightarrow 0,$$

et donc en particulier, ${}^p \mathcal{H}^s i_{1_h}^{h \leq +1,*} F$ est nul pour tout $s < -1$. La surjectivité $j_{1_h,!}^{\geq h} j_{1_h}^{\geq h,*} F \twoheadrightarrow F$, implique aussi la nullité pour $s = 0$. Ainsi la suite spectrale précédente dégénère en E_2 avec

$$p\mathcal{H}^r i_{1_h, 1_{h+1}}^{h \leq +1,*} F \simeq p\mathcal{H}^{r+1} i_{1_h, 1_{h+1}}^{h+1 \leq +0,*} \left(p\mathcal{H}^{-1} i_{1_h}^{h \leq +1,*} F \right).$$

De la même façon, comme $j_{\neq 1}^{\geq h}$ est affine, ${}^p \mathcal{H}^r i_{1_h, 1_{h+1}}^{h \leq +1,*} F$ est nul pour $r < -1$, d'où le résultat. \square

En particulier, on a donc une suite exacte courte de faisceaux pervers

$$0 \rightarrow j_{1_h \setminus 1_{h+1},!}^{\leq h+1} j_{1_h \setminus 1_{h+1}}^{\leq h+1,*} P(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow P(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow i_{1_{h+1},*}^{h+1} {}^p i_{1_{h+1}}^{h+1,*} P(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0. \quad (6.3)$$

6.4. Proposition. — (cf. aussi le lemme B.3.3 de [3])

Avec les notations précédentes on a

$$i_{1_{tg+1},*}^{tg+1} p_{1_{tg+1}}^{tg+1,*} P(\pi_v, \Pi_t) \simeq p_{1_{tg+1},!*}^{j_{1_{tg+1}}^{-(t+1)g}} HT_{1_{tg+1}}(\pi_v, \Pi_t \left\{ \frac{g-1}{2} \right\} \otimes (\pi_v)_{|P_{1,g}(F_v)} \left\{ -t \frac{g-1}{2} \right\}) \left(\frac{1}{2} \right).$$

Remarque : rappelons que le terme de droite de l'isomorphisme de la proposition précédente est une notation pour

$$\text{ind}_{P_{1_{tg},tg+1,(t+1)g,d}(F_v)}^{P_{1_{tg},tg+1,d}(F_v)} p_{1_{(t+1)g},!*}^{j_{1_{(t+1)g}}^{-(t+1)g}} HT_{1_{(t+1)g}}(\pi_v, \Pi_t \left\{ \frac{g-1}{2} \right\} \otimes (\pi_v)_{|P_{1,g}(F_v)} \left\{ -t \frac{g-1}{2} \right\}) \left(\frac{1}{2} \right).$$

Avant de donner la preuve de cette proposition, commençons par deux corollaires.

6.5. Corollaire. — Soient $h_0 \geq h = tg$ et z un point géométrique de $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \bar{1}_h}^{-h_0}$. Le germe en z du i -ème faisceau de cohomologie de $p_{1_h,!*}^{j_{1_h}^{-tg}} HT_{1_h}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ est

— nul si (h, i) n'est pas de la forme $((t + \delta)g, (t + \delta)g - d - \delta)$ avec $(t + \delta)g \leq d$,

— et sinon il est isomorphe au germe en z de $HT_{1_h}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v \left\{ -\frac{\delta}{2} \right\})) \otimes \text{Speh}_\delta(\pi_v \left\{ \frac{t}{2} \right\})$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur t de s à 1. Pour $t = s$, on a $p_{1_h,!*}^{j_{1_h}^{-tg}} HT_{1_h}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \simeq p_{1_h,!*}^{j_{1_h}^{-tg}} HT_{1_h}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ d'où le résultat. Supposons alors le résultat acquis au rang $t + 1$. D'après (6.1), le germe en z du i -ème faisceau de cohomologie de $p_{1_h,!*}^{j_{1_h}^{-tg}} HT_{1_h}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v))$ est isomorphe à celui du $(i + 1)$ -ème de $P(\pi_v, \Pi_t)$, lequel d'après (6.1) et la proposition précédente est isomorphe à celui du $(i + 1)$ -ème faisceau de cohomologie de $p_{1_{tg+1},!*}^{j_{1_{tg+1}}^{-(t+1)g}} HT_{1_{tg+1}}(\pi_v, \Pi_t \left\{ \frac{g-1}{2} \right\} \otimes (\pi_v)_{P_{1,g}(F_v)} \left\{ -t \frac{g-1}{2} \right\}) \left(\frac{1}{2} \right)$, lequel d'après l'hypothèse de récurrence et le premier isomorphisme du lemme 4.3 pour $t = 1$ et $s = \delta - 1$, vérifie bien les deux tirets de l'énoncé. \square

Remarque : une autre façon d'énoncer le résultat précédent consiste à dire que les flèches de la suite spectrale (5.5) sont « le moins triviales possible ».

6.6. Corollaire. — Soit $h_0 = t_0g \leq h = tg$ avec $1 \leq t < s$. On a alors la suite exacte courte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow p_{1_{h_0+1},!*}^{j_{1_{h_0+1}}^{-(t+1)g}} HT_{1_{h_0+1}}(\pi_v, \Pi_{t_0} \left\{ \frac{g-1}{2} \right\} \otimes \text{St}_{t+1-t_0}(\pi_v \left\{ \frac{g-1}{2} \right\})_{P_{1,(t+1-t_0)g}(F_v)}) \left(\frac{1}{2} \right) \\ \rightarrow j_{1_{h_0} \setminus 1_{h_0+1},!*}^{j_{1_{h_0}}^{-tg}} \left(p_{1_{h_0},!*}^{j_{1_{h_0}}^{-tg}} HT_{1_{h_0}}(\pi_v, \Pi_{t_0} \otimes \text{St}_{t-t_0}(\pi_v)) \right) \\ \rightarrow p_{1_{h_0} \setminus 1_{h_0+1},!*}^{j_{1_{h_0}}^{-tg}} HT_{1_{h_0} \setminus 1_{h_0+1}}(\pi_v, \Pi_{t_0} \otimes \text{St}_{t-t_0}(\pi_v)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Démonstration. — Comme

$$\begin{aligned} p_{1_{h_0} \setminus 1_{h_0+1},!*}^{j_{1_{h_0}}^{-tg}} \left(p_{1_{h_0},!*}^{j_{1_{h_0}}^{-tg}} HT_{1_{h_0}}(\pi_v, \Pi_{t_0} \otimes \text{St}_{t-t_0}(\pi_v)) \right) \simeq \\ p_{1_{h_0} \setminus 1_{h_0+1},!*}^{j_{1_{h_0}}^{-tg}} HT_{1_{h_0} \setminus 1_{h_0+1}}(\pi_v, \Pi_{t_0} \otimes \text{St}_{t-t_0}(\pi_v)), \end{aligned}$$

il s'agit simplement d'identifier

$$i_{1_{h_0+1},*}^{tg+1} p_{1_{h_0+1}}^{tg+1,*} \mathcal{H}^{-1} i_{1_{h_0+1}}^{tg+1,*} \left(p_{1_{h_0},!*}^{j_{1_{h_0}}^{-tg}} HT_{1_{h_0}}(\pi_v, \Pi_{t_0} \otimes \text{St}_{t-t_0}(\pi_v)) \right) \quad (6.7)$$

avec le premier terme de la suite exacte courte de l'énoncé. La preuve se déroule en deux temps :

- (i) on construit tout d'abord une surjection de (6.7) vers le faisceau pervers de l'énoncé
 - (ii) et on vérifie dans un deuxième temps que les faisceaux de cohomologie de ces deux faisceaux pervers possèdent les mêmes germes en tout point géométrique.
- (i) Pour le premier point notons tout d'abord que d'après (5.4), on a

$$j_{1_{h_0},!}^{\overline{=tg}} HT_{1_{h_0}}(\pi_v, \Pi_{t_0} \otimes \text{St}_{t-t_0}(\pi_v)) = \sum_{i=t}^s p j_{1_{h_0},!*}^{\overline{=ig}} HT_{1_{h_0}}\left(\pi_v, \Pi_{t_0} \left\{ (i-t) \frac{g-1}{2} \right\} \otimes \left(\text{St}_{t-t_0}(\pi_v \left\{ -\frac{i-t}{2} \right\}) \times \text{St}_{i-t}(\pi_v \left\{ \frac{t-t_0}{2} \right\}) \right) \left\{ (i-t) \frac{g-1}{2} \right\} \right) \left(\frac{i}{2} \right).$$

En utilisant la filtration par les poids et la surjection

$$\text{St}_{t-t_0}(\pi_v \left\{ -\frac{i-t}{2} \right\}) \times \text{St}_{i-t}(\pi_v \left\{ \frac{t-t_0}{2} \right\}) \twoheadrightarrow \text{St}_{i-t_0}(\pi_v),$$

on obtient une surjection

$${}^p \mathcal{H}^{-1} i_{1_{h_0}}^{\overline{tg+1,*}} \left(p j_{1_{h_0},!*}^{\overline{=tg}} HT_{1_{h_0}}(\pi_v, \Pi_{t_0} \otimes \text{St}_{t-t_0}(\pi_v)) \right) \twoheadrightarrow p j_{1_{h_0},!*}^{\overline{=(t+1)g}} HT_{1_{h_0}}(\pi_v, \Pi_{t_0} \left\{ \frac{g-1}{2} \right\} \otimes \text{St}_{t+1-t_0}(\pi_v \left\{ \frac{g-1}{2} \right\})) \left(\frac{1}{2} \right)$$

ce qui, après par application du foncteur $p i_{1_{h_0},!}^{\overline{h+1 \leq +0,*}}$, fournit la surjection cherchée. Notons alors P son noyau.

- (ii) Les germes des faisceaux de cohomologie de

$$A := p j_{1_{h_0+1},!*}^{\overline{=(t+1)g}} HT_{1_{h_0+1}}\left(\pi_v, \Pi_{t_0} \left\{ \frac{g-1}{2} \right\} \otimes \text{St}_{t+1-t_0}(\pi_v \left\{ \frac{g-1}{2} \right\})_{P_{1,(t+1-t_0)g}(F_v)}\right) \left(\frac{1}{2} \right)$$

sont données par le corollaire précédent de même que ceux de

$$B := p j_{1_{h_0} \setminus 1_{h_0+1},!*}^{\overline{=tg}} HT_{1_{h_0} \setminus 1_{h_0+1}}(\pi_v, \Pi_{t_0} \otimes \text{St}_{t-t_0}(\pi_v)).$$

Il s'agit alors de vérifier, qu'à décalage d'un indice près, que pour tout point géométrique z de $X_{\mathcal{L}, \overline{s}_v, 1_{h_0+1}}^{\geq h+1}$, on obtient la même chose. Pour ce qui concerne les conditions d'annulation, on vérifie aisément qu'elles sont les mêmes. Soit alors z un point géométrique de $X_{\mathcal{L}, \overline{s}_v, 1_{(t+\delta)g}}^{\overline{=(t+\delta)g}}$, d'après le corollaire précédent, la fibre en z du faisceau de cohomologie d'indice

- $(t+\delta)g - d - \delta$ de B se calcule par induction à partir de celle de $p j_{a,!}^{\overline{=tg}} HT_a(\pi_v, \Pi_{t_0} \otimes \text{St}_{t-t_0}(\pi_v))$ où a est le sous-espace vectoriel de F_v^d engendré par les vecteurs $e_1, \dots, e_{h_0}, e_{h_0+1}, \dots, e_{h+1}$ de la base canonique. D'après le corollaire précédent, la fibre en z de $\mathcal{H}^{(t+\delta)g-d-\delta} p j_{a,!}^{\overline{=tg}} HT_a(\pi_v, \Pi_{t_0} \otimes \text{St}_{t-t_0}(\pi_v))$ est isomorphe à

$$\Pi_{t_0} \left\{ \delta \frac{g-1}{2} \right\} \otimes \text{St}_{t-t_0}(\pi_v \left\{ \delta \frac{g-1}{2} \right\}) \otimes \text{Speh}_{\delta}(\pi_v \left\{ -t \frac{g-1}{2} \right\})_{|P_{1,\delta g}(F_v)}$$

relativement au Levi

$$\begin{pmatrix} GL_{t_0g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GL_{(t-t_0)g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GL_{\delta g-1} \end{pmatrix}$$

de $GL_{(t+\delta)g}$. En induisant à $P_{t_0, t_0g+1, (t+\delta)g}(F_v)$, on obtient que la fibre en z de $\mathcal{H}^{(t+\delta)g-d-\delta}B$ est isomorphe à

$$\Pi_{t_0}\left\{\delta\frac{g-1}{2}\right\} \otimes \left(\mathrm{St}_{t-t_0}(\pi_v\{-\frac{\delta}{2}\}) \times \mathrm{Speh}_{\delta}(\pi_v\{\frac{t-t_0}{2}\})|_{P_{1,\delta g}(F_v)}\right)\left\{\delta\frac{g-1}{2}\right\}$$

et donc d'après le deuxième isomorphisme du lemme 4.3, à

$$\Pi_{t_0}\left\{\delta\frac{g-1}{2}\right\} \otimes LT_{\pi_v}(t-t_0, \delta-1)|_{P_{1,(t-t_0+\delta)g}(F_v)}\left\{\delta\frac{g-1}{2}\right\}.$$

— La fibre en z de $\mathcal{H}^{(t+1+\delta-1)g-d-\delta+1}A$ est d'après le corollaire précédent isomorphe à

$$\Pi_{t_0}\left\{\delta\frac{g-1}{2}\right\} \otimes \left(\mathrm{St}_{t-t_0+1}(\pi_v\{-\frac{\delta-1}{2}\})|_{P_{1,(t+1-t_0)g}(F_v)} \times \mathrm{Speh}_{\delta_1}(\pi_v\{\frac{t-t_0+1}{2}\})\right)\left\{\delta\frac{g-1}{2}\right\}$$

lequel d'après le premier isomorphisme du lemme 4.3 est isomorphe à

$$\Pi_{t_0}\left\{\delta\frac{g-1}{2}\right\} \otimes LT_{\pi_v}(t-t_0, \delta-1)|_{P_{1,(t-t_0+\delta)g}(F_v)}\left\{\delta\frac{g-1}{2}\right\}.$$

Ainsi donc P est un faisceau pervers dont les fibres en z de ses faisceaux de cohomologie sont nulles. Par symétrie, le résultat est valable pour tout point géométrique de $X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v, \bar{1}_{h_0+1}}^{\geq h+1}$ de sorte que P est nul. \square

Démonstration. — *de la proposition 6.4.* On raisonne par récurrence sur t de s à 1. Le cas $t = s$ étant trivial puisque $P(\pi_v, \Pi_s)$ est nul, on suppose le résultat acquis jusqu'au rang $t + 1$. Partons de l'égalité de [1] 4.5.1 rappelée plus haut en (5.4) :

$$P(\pi_v, \Pi_t) = \sum_{i=t+1}^s j_{\bar{1}_h, !}^{=ig} HT_{\bar{1}_h}(\pi_v, \Pi_t\{(i-t)\frac{g-1}{2}\} \otimes \mathrm{St}_{i-t}(\pi_v\{-t\frac{g-1}{2}\}))\left(\frac{i-t}{2}\right). \quad (6.8)$$

On peut alors appliquer le corollaire précédent et calculer, en utilisant l'exactitude du foncteur $j_{\bar{1}_h, !}^{=tg}, j_{\bar{1}_h, !}^{=tg,*}$, l'image, dans le groupe de Grothendieck correspondant, de $P(\pi_v, \Pi_t)$ par ce foncteur, soit

$$\begin{aligned} j_{\bar{1}_h, !}^{=tg}, j_{\bar{1}_h, !}^{=tg,*} P(\pi_v, \Pi_t) &= \sum_{i=t+1}^{s-1} \\ & p j_{\bar{1}_h, !}^{=ig} HT_{\bar{1}_h, !}(\pi_v, \Pi_t\{(i-t)\frac{g-1}{2}\} \otimes \mathrm{St}_{i-t}(\pi_v\{-t\frac{g-1}{2}\}))\left(\frac{i-t}{2}\right) + \\ & p j_{\bar{1}_h, !}^{=(i+1)g} HT_{\bar{1}_h, !}(\pi_v, \Pi_t\{(i+1-t)\frac{g-1}{2}\} \otimes \mathrm{St}_{i+1-t}(\pi_v\{-t\frac{g-1}{2}\}))\left(\frac{i+1-t}{2}\right). \end{aligned}$$

Le résultat s'obtient alors, d'après (6.3), en soustrayant à l'égalité (6.8) l'égalité précédente. \square

7. Faisceaux de cohomologie du complexe des cycles évanescents

En ce qui concerne les fibres des faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I}}$, on peut mener le même raisonnement. Rappelons qu'en notant

$$\bar{j} : X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}_v} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}} \hookleftarrow X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v} : i,$$

où $\bar{j}_! = {}^p\bar{j}_!$ et $\bar{j}_* = {}^p\bar{j}_*$, le complexe des cycles évanescents est ${}^p\mathcal{H}^{-1}i^*\bar{j}_*\bar{\mathbb{Q}}_{\mathcal{I}}$. Ainsi en utilisant que l'inclusion

$$\bar{j}_{\neq \bar{1}_1}^{\geq 1} : X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}} - X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \bar{1}_1}^{\geq 1} \hookrightarrow X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}}$$

est affine, exactement les mêmes arguments que ceux du lemme 6.2 montrent que $i_{\bar{1}_1}^{1,*}\Psi_{\mathcal{I}}$ est pervers, ce qui donne la suite exacte courte

$$0 \rightarrow j_{\neq \bar{1}_1}^{\geq 1} j_{\neq \bar{1}_1}^{\geq 1,*} \Psi_{\mathcal{I}} \longrightarrow \Psi_{\mathcal{I}} \longrightarrow i_{\bar{1}_1}^{1,*} {}^p\mathcal{H}^0 i_{\bar{1}_1}^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}} \rightarrow 0. \quad (7.1)$$

D'après [1], l'image de $\Psi_{\mathcal{I}}$ dans le groupe de Grothendieck est déterminée via la formule des traces. Afin d'exprimer le résultat, il est tout d'abord plus simple de décomposer $\Psi_{\mathcal{I}}$ comme dans [1] sous la forme

$$\Psi_{\mathcal{I}} \simeq \bigoplus_{\pi_v} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$$

où π_v décrit les classes d'équivalence inertielle des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$ pour $1 \leq g \leq d$. En posant $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$, dans le groupe de Grothendieck adéquat, on a alors, cf. [1] proposition 4.1.4 ou corollaire 5.4.2

$$\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} = \sum_{k=1-s}^{s-1} \sum_{\substack{|k| < t \leq s \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} \mathcal{P}(t, \pi_v) \left(-\frac{k}{2}\right). \quad (7.2)$$

7.3. Proposition. — (cf. aussi la proposition B.3.4 de [3])

Avec les notations précédentes, on a

$$i_{\bar{1}_1}^{1,*} {}^p\mathcal{H}^0 i_{\bar{1}_1}^{1,*} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} = \sum_{k=1}^s {}^p j_{\bar{1}_1, !}^{=kg} HT_{\bar{1}_1}(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v)|_{P_{1,kg}(F_v)}) \left(\frac{1-k}{2}\right).$$

Démonstration. — Les arguments sont similaires à ceux de la proposition 6.4 en utilisant le corollaire 6.6 avec $h_0 + 1 = 1$ en convenant que

$$X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v, \bar{1}_0}^{=0} := X_{\mathcal{I}, \bar{\eta}_v}.$$

On applique ainsi le foncteur $j_{\neq 1_1, !}^{\geq 1}, j_{\neq 1_1}^{\geq 1, *}$ à l'égalité (7.2), ce qui donne d'après le corollaire 6.6

$$\begin{aligned} j_{\neq 1_1, !}^{\geq 1}, j_{\neq 1_1}^{\geq 1, *} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v} &= \sum_{k=1-s}^{s-1} \sum_{\substack{|k| < t < s \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} \left({}^p j_{\neq 1_1, !}^{\equiv tg} HT_{\neq 1_1}(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)|_{P_{1, tg}(F_v)}) \otimes \mathbb{L}(\pi_v)\left(-\frac{k}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + {}^p j_{1_1, !}^{\equiv (t+1)g} HT_{1_1}(\pi_v, \text{St}_{t+1}(\pi_v)|_{P_{1, (t+1)g}(F_v)}) \otimes \mathbb{L}(\pi_v)\left(-\frac{k-1}{2}\right) \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{k \equiv s-1 \pmod{2} \\ |k| \leq s-1}} \mathcal{P}(s, \pi_v)\left(-\frac{k}{2}\right) \end{aligned}$$

On soustrait alors cette égalité à (7.2), ce qui d'après la suite exacte courte (7.1) fournit le résultat. \square

7.4. Corollaire. — Soient π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et z un point géométrique de $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^d$. La fibre en z de $\mathcal{H}^i \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ vérifie alors les points suivant :

- elle est nulle si g ne divise pas d ;
- si $d = sg$, elle est nulle si $i > 0$ ou si $i \leq -s$;
- pour $d = sg$ et $1 - s \leq i \leq 0$, elle est isomorphe à la fibre en z de $HT(\pi_v, LT_{\pi_v}(s - 1 + i, -i)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v)\left(\frac{i}{2}\right)$.

Remarque : le corollaire ci-dessus correspond au résultat principal de [1], cf. le corollaire 2.2.10 de loc. cit. En utilisant le le théorème de comparaison de Berkovich, on en déduit le calcul des groupes de cohomologie des espaces de Lubin-Tate, cf. le théorème 2.3.5 de [1].

Démonstration. — En utilisant la suite exacte courte (7.1), le germe cherché est celui de $i_{1_1, *}^1 {}^p \mathcal{H}^0 i_{1_1}^{\geq 1, *} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$. Considérons alors la filtration par les poids de ce dernier faisceau pervers

$$0 = \text{Fil}^0(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \text{Fil}^1(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \subset \cdots \subset \text{Fil}^s(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}),$$

dont les gradués sont

$$\text{gr}^k(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) := \text{Fil}^k(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) / \text{Fil}^{k-1}(\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}) \simeq {}^p j_{1_1, !}^{\equiv kg} HT_{1_1}(\pi_v, \text{St}_k(\pi_v)|_{P_{1, kg}(F_v)})\left(\frac{1-k}{2}\right),$$

pour $k = 1, \dots, s$. On considère alors la suite spectrale calculant les faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}$ à partir de ceux de ses gradués, i.e.

$$E_1^{i, j} = \mathcal{H}^{i+j} \left({}^p j_{1_1, !}^{\equiv -ig} HT_{1_1}(\pi_v, \text{St}_{-i}(\pi_v)|_{P_{1, -ig}(F_v)})\left(\frac{1+i}{2}\right) \right) \Rightarrow \mathcal{H}^{i+j} \Psi_{\mathcal{I}, \pi_v}.$$

D'après le corollaire 6.5, la fibre en z des $E_1^{i, j}$ vérifie alors les propriétés suivantes :

- tous les $(E_1^{i, j})_z$ sont nuls si $i \geq 0$ ou si $i < -s$;
- tous les $(E_1^{i, j})_z$ sont nuls si g ne divise pas d ;
- pour $d = sg$, les $(E_1^{i, j})_z$ sont nuls si $i + j > 0$ ou si $i + j \leq -s$.

- Pour $d = sg$ et $1 - s \leq i + j \leq 0$, les $(E_1^{i,j})_z$ sont nuls sauf pour $-i = s + i + j$, i.e. $j = -s - 2i$ auquel cas cette fibre est isomorphe à la fibre en z de $HT(\pi_v, LT_{\pi_v}(s - 1 + i + j, -i_j)) \otimes \mathbb{L}(\pi_v)(\frac{i+j}{2})$.

Ainsi les couples (i, j) tels que $(E_1^{i,j})_z$ est non nul sont les $(-s + \delta, s - 2\delta)$ pour $\delta = 0, 1, \dots, s - 1$. On remarque alors que toutes les flèches $d_r^{i,j}$ de cette suite spectrale sont nécessairement nuls puisque, par une récurrence immédiate sur r , soit son espace de départ $E_r^{i,j}$ soit son espace d'arrivée $E_r^{i+r, j+r-1}$ est nul. Ainsi donc on a $(E_\infty^{i,j})_z \simeq (E_1^{i,j})_z$ et le résultat découle des tirets précédents. \square

Références

- [1] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [2] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.
- [3] P. Boyer. La cohomologie des espaces de lubin-tate est libre. *soumis*, 2013.
- [4] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [5] M.-F. Vignéras. *Représentations l -modulaires d'un groupe réductif p -adique avec $l \neq p$* , volume 137 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.