

Processus d'interaction à trois et quatre phonons dans un gaz de fermions condensé par paires

H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra

Laboratoire Kastler Brossel, ENS-PSL, CNRS, UPMC-Sorbonne Universités et Collège de France, Paris, France

Nous effectuons une étude détaillée des processus d'interaction et de la durée de vie des phonons dans un gaz de fermions condensé par paires dans la zone de raccordement CBE-BCS. Nous déterminons les amplitudes de couplage phonon-phonon par une théorie microscopique s'appuyant sur un ansatz variationnel BCS généralisé au cas de paires en mouvement, qui se prête à un développement systématique autour de l'approximation de champ moyen BCS de l'état fondamental. Nous trouvons que les amplitudes de couplage déduites de l'hydrodynamique quantique par Landau et Khalatnikov ne sont valables que sur la couche de masse, c'est-à-dire pour des processus résonnants, qui conservent l'énergie. Notre théorie microscopique conduit au même spectre d'excitation que la RPA (*Random Phase Approximation*), avec aux faibles nombres d'onde une relation de dispersion de départ linéaire (phononique) qui passe de convexe à concave lorsqu'on passe de la limite CBE à la limite BCS. Dans le cas convexe, le mécanisme d'amortissement dominant à basse température est celui de Beliaev-Landau 2 phonons \leftrightarrow 1 phonon. Dans le cas concave, c'est le processus de Landau-Khalatnikov 2 phonons \leftrightarrow 2 phonons. Dans les deux cas, en sortant la dépendance en la force des interactions par un adimensionnement astucieux des vecteurs d'onde, nous obtenons une expression universelle du taux d'amortissement. Dans le cas des processus 2 \leftrightarrow 2, notre expression universelle corrige et étend les résultats analytiques de Landau et Khalatnikov [ZhETF **19**, 637 (1949)]. Dans le cas de l'amortissement de Beliaev 1 \rightarrow 2 pour le gaz unitaire à température nulle, nous calculons la première correction en q^7 au taux d'amortissement hydrodynamique en q^5 , ce qui n'avait pas été fait de manière systématique.

I. INTRODUCTION

Dans de nombreux systèmes à N corps, les excitations collectives de basse énergie sont des phonons. À basse température, les interactions entre phonons déterminent leur durée de vie, leur temps de corrélation et leur libre parcours moyen. Elles jouent donc un rôle central dans les phénomènes de transport, tels que la conduction thermique dans les solides diélectriques et les propriétés hydrodynamiques dépendant de la température comme la viscosité et l'atténuation du son dans l'hélium liquide [1, 2], mais aussi dans les propriétés de cohérence macroscopique des gaz dégénérés, puisqu'elles déterminent le temps de cohérence intrinsèque du condensat de bosons ou de paires de fermions [3, 4]. Le processus dominant dans la décroissance des phonons varie suivant le système physique considéré, et dépend en particulier de la concavité de la branche d'excitation phononique [5–7]. Lorsque la relation de dispersion est convexe aux faibles nombres d'onde, le processus dominant est celui de Beliaev-Landau 2 \leftrightarrow 1 [8, 9], qui met en jeu trois quasi-particules. Lorsqu'elle est concave, c'est celui de Landau-Khalatnikov 2 \leftrightarrow 2 à quatre quasi-particules, puisque celui de Beliaev-Landau n'est plus résonnant.

Parmi les systèmes à N corps, les gaz d'atomes froids offrent la possibilité unique de contrôler et d'ajuster la valeur de certains paramètres microscopiques, en particulier la force des interactions. Dans les gaz de fermions froids à deux états de spin \uparrow et \downarrow , les interactions se produisent seulement dans l'onde s entre fermions de spin opposé, et sont caractérisées par un seul paramètre, la longueur de diffusion a dans l'onde s , ajustable *via* un champ magnétique extérieur au voisinage d'une résonance de Fe-

shbach. Ceci a permis l'étude dans ces systèmes du raccordement entre la limite de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) $1/a \rightarrow -\infty$, où les paires condensées de fermions $\mathbf{k} \uparrow -\mathbf{k} \downarrow$ sont localisées dans l'espace des impulsions au voisinage de la surface de Fermi, et la limite de la condensation de Bose-Einstein (CBE) $1/a \rightarrow +\infty$, où les dimères de fermions fortement liés se comportent comme des particules bosoniques [10–18]. Dans le cas non polarisé, c'est-à-dire avec des populations égales dans les deux états de spin, le spectre d'excitation est composé de deux branches : une branche fermionique à seuil non nul donc avec bande interdite, qui décrit l'excitation des degrés de liberté internes des paires $\uparrow\downarrow$, et une branche bosonique de départ phononique aux faibles nombres d'onde, qui décrit l'excitation du mouvement du centre de masse des paires [7, 19–23]. Quand elles ont une densité suffisamment faible, ces excitations élémentaires constituent des quasi-particules en interaction faible et à longue durée de vie.

La relation de dispersion des phonons dans les gaz de fermions froids de spin 1/2 passe, près de la limite unitaire $1/a = 0$, de convexe du côté CBE à concave du côté BCS [7, 22]. Ceci veut dire que ce système physique permet, à lui seul, d'étudier expérimentalement l'interaction entre phonons aussi bien dans le cas concave que dans le cas convexe. En particulier, en passant du premier au second cas par changement de la longueur de diffusion, on devrait observer une augmentation brutale de la durée de vie des phonons. Les excitations collectives peuvent être étudiées expérimentalement aussi bien dans le domaine spectral par diffusion de Bragg [24, 25] que dans le domaine temporel [26]. Si l'on ajoute à cela la possibilité de créer des gaz spatialement homogènes dans des potentiels

de piégeage à fond plat [27], la mesure de la décroissance des phonons due aux processus $2 \leftrightarrow 1$ ou $2 \leftrightarrow 2$ devrait être réalisable à court terme.

En attendant, il manque toujours une étude théorique exhaustive des interactions entre phonons et une expression générale des taux d'amortissement à basse température pour une interaction de force quelconque. L'exemple le plus immédiat d'une relation de dispersion convexe est la branche d'excitation de Bogolioubov du gaz de bosons en interaction faible. Sur cet exemple, Beliaev a obtenu les amplitudes de couplage dans une théorie microscopique et en a déduit les taux d'amortissement dus aux processus $1 \rightarrow 2$ [8]. La contribution des processus de Landau $2 \rightarrow 1$, présents seulement à température non nulle, a été calculée plus tard [28–30]. Dans le cas qui nous intéresse des gaz superfluides de fermions de spin $1/2$, la référence [9] a calculé le taux d'amortissement de Beliaev $1 \rightarrow 2$ à température nulle à l'aide d'une théorie effective de basse énergie phénoménologique allant un cran au-delà de l'hydrodynamique quantique, afin de prendre en compte la courbure de la relation de dispersion des phonons. Cependant, les auteurs ont omis d'inclure les corrections du même ordre à l'amplitude de couplage entre phonons, ce qui rend leur traitement inconsistant. Dans le cas bosonique de la phase II de l' ^4He , dont on croyait à l'origine la relation de dispersion concave, Landau et Khalatnikov ont obtenu l'amplitude de couplage des processus $2 \leftrightarrow 2$ en tenant compte des processus virtuels non résonnants à trois phonons et en introduisant à la main un terme correctif cubique dans le spectre d'excitation hydrodynamique. Cependant, ils ont calculé les taux d'amortissement seulement dans la limite des petits et des grands nombres d'onde, ce qui nous a incités à reprendre et compléter leur travail, d'autant plus que l'étude des processus $2 \leftrightarrow 2$ à basse énergie dans l' ^4He a été suspendue vers 1970, quand il a été découvert que la relation de dispersion y est en fait convexe aux faibles nombres d'onde. Les processus $2 \leftrightarrow 2$ dans l' ^4He font toujours l'objet de recherches dans l'intervalle de nombre d'onde où la relation de dispersion redevient concave, ce que la présence d'une petite région convexe rend assez difficile [6]. À notre connaissance, les études existantes des processus $2 \leftrightarrow 2$ dans les gaz de fermions froids se restreignent à la limite unitaire et au régime hydrodynamique fortement collisionnel, où l'indicateur de la dissipation est la viscosité de cisaillement du gaz [31]. Dans cet article, nous présentons au contraire une étude complète des processus d'interaction entre phonons dans un gaz de fermions froid à suffisamment basse température pour être dans le régime faiblement collisionnel, et ceci pour une interaction de force quelconque, ce qui inclut les cas concave et convexe.

Nous décrivons pour cela le gaz de fermions non polarisé condensé par paires à l'aide d'un modèle microscopique semi-classique, s'appuyant sur un état variationnel comportant des paires en mouvement. Ce modèle permet de développer de façon systématique le hamiltonien en puissances de deux champs canoniquement conjugués β

et β^* , qui sont de faible amplitude à basse densité d'excitations du gaz. Le modèle microscopique et le principe du développement sont exposés dans la section II.

Dans la section III nous développons le hamiltonien jusqu'à l'ordre deux en les champs β et β^* , et nous diagonalisons cette approximation quadratique pour obtenir le spectre d'excitation [7, 19–23]. À part ces résultats spectraux déjà connus, nous obtenons les modes propres de quasi-particule et les amplitudes correspondantes de création et d'annihilation, que nous quantifions ensuite. Le tout procède d'une certaine élégance grâce à la nature hamiltonienne des équations du modèle semi-classique.

Dans la section IV, nous calculons les amplitudes de couplage des processus d'interaction à trois et à quatre phonons. Sur la couche de masse, nous comparons avec succès les prédictions de l'hydrodynamique quantique [1] sur les amplitudes des processus $2 \leftrightarrow 1$ et $2 \leftrightarrow 2$ aux résultats d'une théorie microscopique, théorie qui est pour $2 \leftrightarrow 1$ celle du modèle fermionique de la section III, et pour $2 \leftrightarrow 2$ celle d'un modèle de bosons en interaction de portée ajustée pour que la relation de dispersion soit concave aux faibles nombres d'onde. Le test microscopique des prédictions de l'hydrodynamique que cela constitue est particulièrement intéressant pour $2 \leftrightarrow 2$, puisque (i) ce cas met en jeu des processus non résonnants $2 \leftrightarrow 1$ et $3 \leftrightarrow 0$, dont les amplitudes ne sont pas correctement données par l'hydrodynamique, (ii) l'hydrodynamique de base conduit à une divergence de l'amplitude $2 \leftrightarrow 2$ que Landau et Khalatnikov ont dû régulariser en mettant à la main un terme de courbure dans la relation de dispersion des phonons.

Dans la section V, nous appliquons directement les résultats précédents au calcul du taux d'amortissement des phonons dans un gaz de fermions dans tout le raccordement CBE-BCS. Pour ce faire, nous incorporons dans une équation pilote les amplitudes de couplage des processus $2 \leftrightarrow 1$ et $2 \leftrightarrow 2$ de la section IV. Annonçons déjà les principaux résultats de cette section V : (i) pour une relation de dispersion aussi bien convexe que concave, grâce à l'introduction de quantités soigneusement adimensionnées, nous obtenons une courbe universelle donnant le taux d'amortissement en fonction du nombre d'onde, pour une interaction de force quelconque entre les limites CBE et BCS, (ii) nous donnons analytiquement tous les comportements aux limites des taux d'amortissement, pour $\hbar c q \ll k_B T$ et $\hbar c q \gg k_B T$ où c est la vitesse du son et T la température, ce qui, dans le cas concave, nous conduit à corriger les résultats de Landau et Khalatnikov [1]. Enfin, dans le cas particulier du gaz unitaire à température nulle, nous calculons la première correction à la prédiction hydrodynamique pour l'amortissement des phonons, en utilisant la théorie des champs effective de Son et Wingate [32], ce qui nous permet de compléter le résultat de la référence [9].

Contents

I. Introduction	1	3. Étude à l'ordre 2 en \hat{V}	24
II. Principe de l'approche microscopique	3	4. Étude à l'ordre 4 en \hat{V}	25
A. Hamiltonien d'interaction dans l'onde s	3	Références	29
B. Approximation BCS de l'état fondamental	3		
C. Ansatz de paires en mouvement	4		
III. Hamiltonien classique à l'ordre quadratique : variables normales de la branche bosonique et opérateurs de phonons	4		
A. Équations du mouvement linéarisées	4		
B. Branche d'excitation collective	5		
C. Construction des variables normales de la branche bosonique	6		
1. Cas général	6		
2. Limite des grandes longueurs d'onde	7		
D. Quantification des variables normales	7		
IV. Au-delà de l'ordre quadratique : Interactions entre phonons et comparaison à l'hydrodynamique	8		
A. Processus à trois phonons	8		
1. Approche microscopique	8		
2. Approche hydrodynamique	9		
B. Processus à quatre phonons	11		
1. Amplitude de transition	11		
2. Amplitude de couplage $2 \leftrightarrow 2$ effective	11		
3. Amplitude effective dans l'hydrodynamique	13		
4. Amplitude effective dans un gaz de bosons en interaction faible de portée non nulle	14		
V. Application : amortissement des phonons dans tout le raccordement CBE-BCS	15		
A. Expression générale des taux par équation pilote	15		
B. Cas convexe : amortissement de Beliaev-Landau	16		
C. Cas concave : amortissement de Landau-Khalatnikov	16		
D. Amortissement des phonons au-delà de l'hydrodynamique	18		
1. Amplitude du processus de Beliaev $2 \leftrightarrow 1$ pour le gaz unitaire	19		
2. Taux d'amortissement des phonons dans le gaz unitaire à $T = 0$	20		
VI. Conclusion	21		
A. Fractions rationnelles en x et y apparaissant dans l'amplitude des processus à trois phonons	22		
B. Contribution de Beliaev et des processus d'ordre supérieur dans le taux de décroissance d'un phonon à $T = 0$	23		
1. Présentation du problème et lien avec la résolvante	23		
2. Calcul perturbatif et comptage de puissances	23		
		II. PRINCIPE DE L'APPROCHE MICROSCOPIQUE	
		A. Hamiltonien d'interaction dans l'onde s	
		Nous considérons un gaz de fermions dans deux états internes notés \uparrow et \downarrow évoluant sur un réseau cubique de pas l avec des conditions aux limites périodiques dans un volume $[0, L]^3$ de taille finie. Les fermions de spin opposé ont une interaction sur site caractérisée par une constante de couplage g_0	
		$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g_0 \frac{\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}}{l^3} \quad (1)$	
		Le hamiltonien du système dans l'ensemble grand canonique de potentiel chimique μ s'écrit :	
		$\hat{H} = l^3 \sum_{\mathbf{r}, \sigma=\uparrow/\downarrow} \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}} - \mu \right) \hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}) + g_0 l^3 \sum_{\mathbf{r}} \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\downarrow}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) \quad (2)$	
		où l'opérateur laplacien discret $\Delta_{\mathbf{r}}$ admet les fonctions $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ comme fonctions propres de valeur propre $-k^2$ et l'opérateur champ des fermions possède les relations d'anticommutation discrètes $\{\hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}), \hat{\psi}_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{r}')\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}/l^3$, avec $\sigma, \sigma' = \uparrow$ ou \downarrow . Il est d'usage d'éliminer la constante de couplage g_0 , qui dépend de l et tend vers 0 à la limite d'un espace continu $l \rightarrow 0$, au profit de la longueur de diffusion a , fixée indépendamment du choix de l et mesurable expérimentalement. On utilise pour cela la relation issue de la théorie de la diffusion appliquée [33] au potentiel (1)	
		$\frac{1}{g_0} = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a} - \int_{\text{PZB}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\hbar^2 k^2} \quad (3)$	
		où l'abréviation PZB désigne la première zone de Brillouin $[-\pi/l, \pi/l]^3$ du réseau.	
		B. Approximation BCS de l'état fondamental	
		L'idée de la théorie BCS [34] est de chercher une expression approchée de l'état fondamental du hamiltonien (2) parmi la famille d'états	
		$ \psi^{\text{BCS}}\rangle = \prod_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \left(U_{\mathbf{k}} - V_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \right) 0\rangle \quad (4)$	
		où $\mathcal{D} = \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^3 \cap [-\pi/l, \pi/l]^3$ est l'ensemble des vecteurs de la première zone de Brillouin compatibles avec les	

conditions aux limites périodiques, l'opérateur $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$, coefficient de Fourier de l'opérateur champ $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$, crée un fermion de vecteur d'onde \mathbf{k} et de spin σ , $V_{\mathbf{k}}$ est l'amplitude de probabilité de présence d'un fermion $\mathbf{k}\sigma$ dans $|\psi^{\text{BCS}}\rangle$ et $U_{\mathbf{k}} = \sqrt{1 - |V_{\mathbf{k}}|^2}$. Les minimiseurs de la fonctionnelle énergie classique $\langle \psi^{\text{BCS}} | \hat{H} | \psi^{\text{BCS}} \rangle$ sont répartis sur un cercle

$$U_{\mathbf{k}} = U_{\mathbf{k}}^0 \quad V_{\mathbf{k}} = V_{\mathbf{k}}^0 e^{i\phi} \quad (5)$$

où $\phi \in [0, 2\pi[$ et les valeurs de référence $U_{\mathbf{k}}^0$ et $V_{\mathbf{k}}^0$ sont choisies réelles.

Pour étudier le comportement du système à basse énergie, nous choisissons un état donné du cercle, celui de phase nulle

$$|\psi_0^{\text{BCS}}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(U_{\mathbf{k}}^0 - V_{\mathbf{k}}^0 \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle \quad (6)$$

comme origine du développement. Dans cet état à symétrie brisée, on définit le *gap* de la théorie BCS

$$\Delta \equiv g_0 \langle \psi_0^{\text{BCS}} | \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow | \psi_0^{\text{BCS}} \rangle = -\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}}^0, \quad (7)$$

quantité qui remplace g_0 ou a comme paramètre naturel de la force des interactions dans la théorie BCS. Il permet d'écrire les coefficients $U_{\mathbf{k}}^0, V_{\mathbf{k}}^0$ sous la forme

$$V_{\mathbf{k}}^0 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \right)} \quad \text{et} \quad U_{\mathbf{k}}^0 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \right)} \quad (8)$$

avec les énergies

$$\xi_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu + \frac{g_0 \rho}{2} \quad (9)$$

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\Delta^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2} \quad (10)$$

La densité totale moyenne ρ , nombre total moyen $\langle \hat{N} \rangle$ de particules par unité de volume, vaut dans l'état (6)

$$\rho \equiv \frac{\langle \hat{N} \rangle}{L^3} \equiv \frac{k_F^3}{3\pi^2} = \frac{2}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (V_{\mathbf{k}}^0)^2 \quad (11)$$

où k_F est le nombre d'onde de Fermi du gaz parfait de densité ρ . Associé à la relation (8) ceci conduit à l'équation d'état BCS du gaz reliant ρ à μ et Δ . L'utile relation $U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 = \Delta / 2\epsilon_{\mathbf{k}}$ permet de donner à l'équation du *gap* (7) sa forme habituelle :

$$\frac{1}{g_0} = -\frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \quad (12)$$

On définit enfin des opérateurs de création et d'annihilation d'excitations fermioniques, obtenus à partir des opérateurs de création et d'annihilation de particules par la rotation de Bogolioubov :

$$\hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} = U_{\mathbf{k}}^0 \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} + V_{\mathbf{k}}^0 \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \quad (13)$$

$$\hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} = -V_{\mathbf{k}}^0 \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger + U_{\mathbf{k}}^0 \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \quad (14)$$

Ce sont les opérateurs dont l'état (6) est le vide. Ils créent des quasi-particules $\mathbf{k}\uparrow$ et $-\mathbf{k}\downarrow$ d'énergie $\epsilon_{\mathbf{k}}$.

C. Ansatz de paires en mouvement

Nous paramétrons les fluctuations autour du fondamental BCS à symétrie brisée par l'état cohérent de quasi-particules :

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}(t) \exp \left(\sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q} \in \mathcal{D}} z_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right) |\psi_{\text{BCS}}^0\rangle \quad (15)$$

Contrairement au fondamental BCS (6) dans lequel toutes les paires de particules sont au repos, les paires de quasi-particules ont maintenant un vecteur d'onde du centre de masse \mathbf{q} non nul.

Les références [35] et [36] expliquent comment appliquer le principe variationnel dans l'état (15). On introduit les variables

$$\beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = - \left(z(1 + z^\dagger z)^{-1/2} \right)_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad (16)$$

où z est la matrice $(z_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'})_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathcal{D}}$ afin de mettre les équations du mouvement sous la forme hamiltonienne

$$i\hbar \frac{d\beta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}}}{dt} = \frac{\partial E}{\partial \beta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}}^*} \quad (17)$$

$$-i\hbar \frac{d\beta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}}^*}{dt} = \frac{\partial E}{\partial \beta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}}} \quad (18)$$

Le hamiltonien classique correspondant

$$E \equiv \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \quad (19)$$

s'évalue grâce au théorème de Wick. Les moyennes d'opérateurs bilinéaires en les opérateurs fermioniques $\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}$ s'obtiennent par décomposition de Schmidt de la matrice z et s'expriment naturellement en fonction du champ β

$$\kappa_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \equiv \langle \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle = - \left(\beta(1 - \beta^\dagger \beta)^{1/2} \right)_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} \quad (20)$$

$$\kappa_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^* \equiv \langle \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \rangle = - \left(\beta(1 - \beta^\dagger \beta)^{1/2} \right)_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^* \quad (21)$$

$$\rho_{\mathbf{k}', \mathbf{k}}^\uparrow \equiv \langle \hat{b}_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle = (\beta \beta^\dagger)_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \sum_{\mathbf{k}_1} \beta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1}^* \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \quad (22)$$

$$\rho_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^\downarrow \equiv \langle \hat{b}_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \rangle = (\beta^\dagger \beta)_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}_1} \beta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'}^* \beta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}} \quad (23)$$

III. HAMILTONIEN CLASSIQUE À L'ORDRE QUADRATIQUE : VARIABLES NORMALES DE LA BRANCHE BOSONIQUE ET OPÉRATEURS DE PHONONS

A. Équations du mouvement linéarisées

Pour linéariser les équations du mouvement (17) et (18), nous supposons que l'état (15) diffère peu du fondamental BCS et donc que

$$\forall \mathbf{k}, \mathbf{k}', z_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \ll 1 \quad \text{et} \quad \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \ll 1, \quad (24)$$

Puis nous développons la fonctionnelle énergie en puissances du champ β

$$E = E_0 + E_2 + O(\beta^3) \quad (25)$$

où $E_0 = \langle \psi_0^{\text{BCS}} | \hat{H} | \psi_0^{\text{BCS}} \rangle$ est une constante, E_2 et E_3 sont respectivement bilinéaire et trinéaire en β . Le développement est dépourvu de termes linéaires puisque le fondamental BCS (qui correspond à $\beta = 0$) est un minimiseur de E . Comme dans la RPA d'Anderson [19], les équations du mouvement linéarisées qui découlent de ce développement par remplacement de E par E_2 dans (17) et (18) sont découplées par valeur du vecteur d'onde total \mathbf{q} . Pour cette raison, nous récrivons les coordonnées du champ β sous une forme indice-exposant à la Anderson

$$\beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \equiv \beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \mathbf{k}-\mathbf{q}/2} \quad (26)$$

et nous définissons les vecteurs $\beta^{\mathbf{q}} = (\beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}$ et $\bar{\beta}^{\mathbf{q}} = ((\beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^*)_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}$. Les équations du mouvement se mettent alors sous la forme matricielle

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \beta^{\mathbf{q}} \\ \bar{\beta}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \mathcal{L}^{\mathbf{q}} \begin{pmatrix} \beta^{\mathbf{q}} \\ \bar{\beta}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

avec un opérateur d'évolution $\mathcal{L}^{\mathbf{q}}$ symplectique

$$\sigma_z \mathcal{L}^{\mathbf{q}} \sigma_z = (\mathcal{L}^{\mathbf{q}})^\dagger \quad (28)$$

et présentant une symétrie particule-trou

$$\sigma_x \mathcal{L}^{\mathbf{q}} \sigma_x = -(\mathcal{L}^{\mathbf{q}})^* \quad (29)$$

avec $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en notation par blocs.

Pour écrire explicitement l'opérateur $\mathcal{L}^{\mathbf{q}}$, il est plus aisé de faire un changement de base « somme et différence » en définissant

$$y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - \bar{\beta}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \quad (30)$$

$$s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \bar{\beta}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \quad (31)$$

pour obtenir

$$i\hbar \frac{dy_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}} s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} \left(W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- + w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ \right) s_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} \quad (32)$$

$$i\hbar \frac{ds_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}} y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} \left(W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ - w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- \right) y_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} \quad (33)$$

Les coefficients $W_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^\pm$ et $w_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^\pm$ sont des regroupements astucieux des coefficients $U_{\mathbf{k}}^0$ et $V_{\mathbf{k}}^0$

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\pm = U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^0 U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^0 \pm V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^0 V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^0 \quad (34)$$

$$w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\pm = U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^0 V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^0 \pm U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^0 V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^0 \quad (35)$$

et les énergies $\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ sont celles du continuum à deux excitations fermioniques

$$\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} \quad (36)$$

Les équations du mouvement (32) et (33) contiennent deux contributions : premièrement, une partie individuelle, qui ne couple que les amplitudes de même vecteur d'onde relatif \mathbf{k} et qui contient l'évolution triviale des opérateurs $\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}$ sous le hamiltonien BCS $\hat{H}_{\text{BCS}} = E_0 + \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}$, et deuxièmement, une partie collective qui couple les amplitudes normales $y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ et $s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ à des amplitudes collectives de même impulsion totale \mathbf{q} . Notons aussi que ces équations semi-classiques coïncident avec les équations de la RPA d'Anderson [19] prises en valeur moyenne dans l'état (15). Pour s'en convaincre, il faut exprimer les équations (78a-d) de la référence [19] en termes des opérateurs de quasi-particules grâce aux relations (13) et (14) et remarquer que les moyennes des opérateurs $\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'\sigma}$ sont négligeables à l'ordre linéaire de la théorie variationnelle d'après (22) et (23).

B. Branche d'excitation collective

Nous cherchons maintenant les modes propres du système d'équations (32,33) d'énergie $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ positive mais inférieure au continuum $k \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}$ à deux excitations fermioniques, que l'on obtient en diagonalisant la partie individuelle de (32,33)

$$0 < \hbar\omega_{\mathbf{q}} < \inf_{\mathbf{k}} (\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}) \quad (37)$$

L'équation aux valeurs propres associée au système (32,33) est obtenue dans le cas général dans la référence [36]. Nous donnons ici les grandes étapes. On introduit les amplitudes collectives

$$Y_{\mathbf{q}} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \quad S_{\mathbf{q}} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \quad (38)$$

$$y_{\mathbf{q}} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \quad s_{\mathbf{q}} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \quad (39)$$

On résout le système linéaire 2×2 (32,33) pour exprimer les inconnues $y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ et $s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ en fonction des amplitudes collectives. Puis on injecte les expressions obtenues dans les définitions (38,39) pour aboutir au système linéaire homogène

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{W^+W^+}^\epsilon - 1 & \Sigma_{W^+W^-}^\omega & -\Sigma_{W^+w^-}^\epsilon & \Sigma_{W^+w^+}^\omega \\ \Sigma_{W^-W^+}^\omega & \Sigma_{W^-W^-}^\epsilon - 1 & -\Sigma_{W^-w^-}^\omega & \Sigma_{W^-w^+}^\omega \\ \Sigma_{w^-W^+}^\epsilon & \Sigma_{w^-W^-}^\omega & -\Sigma_{w^-w^-}^\epsilon - 1 & \Sigma_{w^-w^+}^\omega \\ \Sigma_{w^+W^+}^\omega & \Sigma_{w^+W^-}^\epsilon & -\Sigma_{w^+w^-}^\omega & \Sigma_{w^+w^+}^\epsilon - 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_{\mathbf{q}} \\ S_{\mathbf{q}} \\ y_{\mathbf{q}} \\ s_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = 0 \quad (40)$$

Dans les notations

$$\Sigma_{ab}^\epsilon = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}\mathbf{q}}}{(\hbar\omega_{\mathbf{q}})^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})^2} \quad (41)$$

$$\Sigma_{ab}^\omega = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}\mathbf{q}}}{(\hbar\omega_{\mathbf{q}})^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})^2} \quad (42)$$

les caractères a et b représentent l'un quelconque des W^+ , W^- , w^+ , w^- . Le système (40) se simplifie à la limite continue $l \rightarrow 0$. Comme $g_0 \rightarrow 0$ et $w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\pm \underset{k \rightarrow +\infty}{=} O(1/k^2)$, on constate que dans les troisième et quatrième lignes tous les Σ tendent vers 0, ce qui conduit à

$$y_{\mathbf{q}} = s_{\mathbf{q}} = 0 \quad (43)$$

Nous divisons ensuite les deux premières lignes de (40) par g_0 . En vertu de l'équation du *gap* (12), on constate que tous les éléments de matrice divisés ont une limite finie et non nulle. Le système se réduit alors à son bloc supérieur gauche, que nous écrivons à la limite thermodynamique sous la forme :

$$\begin{pmatrix} I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q) & \hbar\omega_{\mathbf{q}}I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q) \\ \hbar\omega_{\mathbf{q}}I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q) & I_{--}(\omega_{\mathbf{q}}, q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{\mathbf{q}} \\ S_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = 0 \quad (44)$$

avec des intégrales I , fonctions de l'énergie propre $\omega_{\mathbf{q}}$ et du nombre d'onde q ,

$$I_{++}(\omega, q) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \left[\frac{\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}(W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+)^2}{(\hbar\omega)^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})^2} + \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right] \quad (45)$$

$$I_{--}(\omega, q) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \left[\frac{\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}(W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^-)^2}{(\hbar\omega)^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})^2} + \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right] \quad (46)$$

$$I_{+-}(\omega, q) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^-}{(\hbar\omega)^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})^2} \quad (47)$$

Nous obtenons ainsi l'équation implicite

$$I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q)I_{--}(\omega_{\mathbf{q}}, q) = \hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 [I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)]^2 \quad (48)$$

La même équation (48) s'obtient par d'autres approches : la RPA [19], une approximation gaussienne de l'action dans un formalisme d'intégrale de chemin [20, 23], une approche par les fonctions de Green combinée à une approximation diagrammatique [21]. Les conditions sur q d'existence de la solution $\omega_{\mathbf{q}}$ sont discutées dans la référence [21], et la concavité du spectre est étudiée dans [7]. Au-delà des travaux cités, nous construisons ici les opérateurs associés aux modes collectifs.

C. Construction des variables normales de la branche bosonique

1. Cas général

Grâce aux symétries (28) et (29) de l'opérateur d'évolution, l'obtention des amplitudes normales s'effectue de manière entièrement analogue au cas bosonique par la théorie de Bogolioubov [37]. La première étape est d'écrire le mode propre \vec{e}_+ d'énergie $\hbar\omega_{\mathbf{q}} > 0$

$$\vec{e}_+(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \quad (49)$$

Pour obtenir l'expression analytique des coefficients M et N dans la limite continue $l \rightarrow 0$, nous résolvons le système (32,33) avec $d/dt \rightarrow -i\omega_{\mathbf{q}}$ et nous utilisons les équations (43) et (44) pour éliminer les amplitudes collectives, ce qui conduit à

$$M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \frac{2\Delta \left(\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}} W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ - W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- \frac{I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q)}{I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)} \right)}{\sqrt{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^2)} \quad (50)$$

$$M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \frac{2\Delta \left(\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}} W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- \frac{I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q)}{I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)} \right)}{\hbar\omega_{\mathbf{q}}\sqrt{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^2)} \quad (51)$$

où $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ est une constante de normalisation sans dimension, déterminée plus bas par l'équation (57). Relevons une propriété importante de M et N : leur invariance aussi bien par parité interne ($\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$) qu'externe ($\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$) vis-à-vis des paires, qui résulte de l'invariance par parité du problème et de l'appariement dans l'onde s ,

$$M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = M_{-\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = M_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{q}} \quad (52)$$

$$N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = N_{-\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = N_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{q}} \quad (53)$$

En vertu de la symétrie (29), le vecteur propre \vec{e}_+ possède un vecteur propre associé \vec{e}_- d'énergie $-\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ qui s'obtient par simple multiplication par σ_x

$$\vec{e}_-(\mathbf{q}) = \sigma_x \begin{pmatrix} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = \begin{pmatrix} N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \quad (54)$$

Nous cherchons ensuite les vecteurs duaux qui servent à calculer la projection du champ β sur les modes propres \vec{e}_+ et \vec{e}_- . En vertu de la symétrie symplectique (28), ils s'obtiennent par multiplication par σ_z

$$\vec{d}_+(\mathbf{q}) = \sigma_z \begin{pmatrix} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = \begin{pmatrix} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ -N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \quad (55)$$

$$\vec{d}_-(\mathbf{q}) = -\sigma_z \begin{pmatrix} N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = \begin{pmatrix} -N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \quad (56)$$

Finalement, les vecteurs et leurs duaux sont normalisés en fixant la valeur de $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ de façon que

$$(\vec{d}_{\pm})^* \cdot \vec{e}_{\pm} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2 - (N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2 = 1 \quad (57)$$

Pour définir les amplitudes $b_{\mathbf{q}}$ des modes collectifs, nous projetons le champ β :

$$b_{\mathbf{q}} = \vec{d}_+(\mathbf{q}) \cdot \begin{pmatrix} \beta_{\mathbf{q}} \\ \bar{\beta}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} (\beta_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{q}})^* \quad (58)$$

$$b_{-\mathbf{q}}^* = \vec{d}_-(\mathbf{q}) \cdot \begin{pmatrix} \beta_{\mathbf{q}} \\ \bar{\beta}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} -N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} (\beta_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{q}})^* \quad (59)$$

ce qui constitue le premier résultat majeur de cet article. L'égalité $b_{\mathbf{q}}^* = (b_{-\mathbf{q}})^*$ suggérée par la notation est une

conséquence de l'invariance par transposition (52). Pour exprimer en sens inverse le champ classique en fonction des amplitudes de phonons, nous le développons sur les vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} \beta_{\mathbf{q}} \\ \bar{\beta}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = b_{\mathbf{q}} \vec{e}_+(\mathbf{q}) + b_{-\mathbf{q}}^* \vec{e}_-(\mathbf{q}) + \dots \quad (60)$$

L'ellipse matérialisée par les points de suspension concerne ici la composante du champ sur les autres modes excités de vecteur d'onde total \mathbf{q} . On montre [36] qu'à la limite d'un espace continu ces modes excités constituent le continuum $\mathbf{k} \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}$ à deux quasi-particules fermioniques ayant un vecteur d'onde du centre de masse \mathbf{q} . En projetant l'équation vectorielle (60), nous obtenons :

$$\beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \mathbf{k}-\mathbf{q}/2} = M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}} + N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} b_{-\mathbf{q}}^* + \dots \quad (61)$$

$$\beta_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2, \mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^* = N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}} + M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} b_{-\mathbf{q}}^* + \dots \quad (62)$$

Ces dernières relations permettent d'interpréter M et N comme les coefficients d'une nouvelle rotation de Bogolioubov, qui, après quantification, réarrange cette fois les opérateurs bilinéaires (20,21) de quasi-particules fermioniques en opérateurs de quasi-particules bosoniques, et qui se superpose à celle induite par les coefficients $U_{\mathbf{k}}^0$ et $V_{\mathbf{k}}^0$, qui réarrange les opérateurs de particules en opérateurs de quasi-particules fermioniques. Cette rotation agit au niveau des paires, d'où le fait que les coefficients M et N aient deux indices.

2. Limite des grandes longueurs d'onde

À la limite des grandeurs longueurs d'onde $q \rightarrow 0$, nous rappelons le développement de l'énergie $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ qu'obtient la référence [7] :

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}} \underset{q \rightarrow 0}{=} \hbar c q \left[1 + \frac{\gamma}{8} \left(\frac{\hbar q}{mc} \right)^2 + O \left(\frac{\hbar q}{mc} \right)^4 \right]. \quad (63)$$

Dans cette expression, c est la vitesse du son, reliée, comme pour tout superfluide, à l'équation d'état par la formule hydrodynamique

$$mc^2 = \rho \frac{d\mu}{d\rho}, \quad (64)$$

où la dérivée est prise à longueur de diffusion a fixée, et le coefficient γ de l'ordre suivant du développement est donné comme une fraction rationnelle en les variables

$$x = \frac{\Delta}{\mu} \quad \text{et} \quad y = \frac{d\Delta}{d\mu} = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}^3}}{\int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{\Delta}{\epsilon_{\mathbf{k}}^3}} \quad (65)$$

reliées entre elles dans la dernière égalité par l'équation d'état BCS (11).

Les combinaisons (50) et (51) de $M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ et $N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ introduites dans le présent article possèdent alors les développements suivants :

$$\sqrt{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) = -\frac{\Delta}{\epsilon_{\mathbf{k}}} + O(q^2) \quad (66)$$

$$\sqrt{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) = \frac{\hbar c q \epsilon_{\mathbf{k}}}{2\Delta} \frac{dW_{\mathbf{k}\mathbf{0}}^-}{d\mu} + O(q^3) \quad (67)$$

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}}/L^3 = \frac{\hbar c q}{2} \frac{d\rho}{d\mu} + O(q^3) \quad (68)$$

Notons que ces expressions se raccordent à l'ordre le plus bas avec les coefficients des modes d'énergie nul \vec{e}_n et anormal \vec{e}_a de l'opérateur d'évolution \mathcal{L}^0 du sous-espace d'impulsion nul qu'obtient la référence [38].

D. Quantification des variables normales

Pour quantifier les amplitudes des modes bosoniques obtenus par notre approche semi-classique, nous nous souvenons que κ représente un opérateur de paire de quasi-particules $\kappa_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \mathbf{k}-\mathbf{q}/2} = \langle \hat{b}_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2\uparrow} \rangle$. Or au premier ordre de l'approximation des petites amplitudes le champ β est confondu avec $-\kappa$. Nous sommes donc tentés de faire la substitution

$$\beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \mathbf{k}-\mathbf{q}/2} \rightarrow -\hat{b}_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2\uparrow}. \quad (69)$$

En soumettant l'amplitude normale $b_{\mathbf{q}}$ à cette substitution, nous obtenons l'opérateur quantique :

$$\hat{b}_{\mathbf{q}} = - \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \left(M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \hat{b}_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2\uparrow} - N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2\uparrow}^{\dagger} \hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}/2\downarrow}^{\dagger} \right) \quad (70)$$

Ce geste intuitif peut en fait être justifié par plusieurs arguments. Le premier est que l'opérateur quantique (70) coïncide avec celui que nous aurions obtenu dans le cadre de la RPA d'Anderson en diagonalisant le système homogène pour les opérateurs de création et d'annihilation de paires de quasi-particules $\hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} \hat{b}_{\mathbf{k}'\downarrow}$ et $\hat{b}_{\mathbf{k}'\downarrow}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger}$, les opérateurs $\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}'\sigma}$, dont la dynamique par la RPA est triviale et dont la valeur moyenne est d'ordre supérieur pour la théorie variationnelle, étant traités comme des termes source. Le second est l'application de la procédure de quantification du chapitre 11 de la référence [35] où le champ β est mis en correspondance avec un champ d'opérateurs bosoniques \mathbb{B} (à ne pas confondre avec les opérateurs de création d'excitations bosoniques $\hat{b}_{\mathbf{q}}$). L'expression de l'*image bosonique* des opérateurs fermioniques à deux corps tel $\hat{b}_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2\uparrow}$, en termes de ce champ bosonique \mathbb{B} , qui permettrait d'envisager une substitution telle que (69), n'est pas simple dans le cas général car elle implique une série infinie en puissances de \mathbb{B} . Mais, dans limite où le gaz est faiblement excité, l'opérateur population des images bosoniques $\mathbb{B} \mathbb{B}^{\dagger}$ peut être négligé, ce qui autorise la substitution (69), où nous confondons les opérateurs fermioniques à deux corps et leur image

bosonique. Enfin, le dernier argument est le caractère quasi-bosonique (70) de l'opérateur $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ lorsque le gaz est faiblement excité. En effet, calculons le commutateur de $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ et $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$:

$$\begin{aligned} & \left[\hat{b}_{\mathbf{q}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \right] - 1 = \\ & \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \left[(N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2 \left(\hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2\uparrow} + \hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}/2\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}/2\downarrow} \right) \right. \\ & \left. - (M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2 \left(\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2\uparrow} + \hat{b}_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2\downarrow} \right) \right] \quad (71) \end{aligned}$$

Les termes par lesquels ce commutateur diffère de l'unité sont des opérateurs de populations de quasi-particules fermioniques. Ils sont donc exactement nuls dans le fondamental BCS et du second ordre en le champ $z = O(\beta)$ dans un état cohérent (15) de quasi-particules.

IV. AU-DELÀ DE L'ORDRE QUADRATIQUE : INTERACTIONS ENTRE PHONONS ET COMPARAISON À L'HYDRODYNAMIQUE

A. Processus à trois phonons

Nous étudions dans cette sous-section les processus à trois quasi-particules bosoniques, ce qui inclut les processus $2 \leftrightarrow 1$ dits de Beliaev-Landau et les processus non résonnants $3 \leftrightarrow 0$. Notre objectif est de faire apparaître ces processus dans le développement d'un hamiltonien en puissances d'un champ d'excitations, et d'extraire les éléments de matrice associés. Pour cela nous utiliserons deux théories que nous comparerons. Premièrement, nous utiliserons la théorie variationnelle microscopique que nous venons d'exposer en prenant la fonctionnelle énergie E (19) comme hamiltonien classique, en la développant maintenant jusqu'à l'ordre trois en β ,

$$E = E_0 + E_2 + E_3 + O(\beta^4) \quad (72)$$

et en injectant le développement (60) du champ sur les modes propres collectifs dans le terme trilineaire E_3 . Ce calcul microscopique sera mis en œuvre seulement dans le cas $2 \leftrightarrow 1$. Deuxièmement, nous utiliserons l'hydrodynamique quantique de Landau et Khalatnikov [1], théorie mésoscopique qui traite les paires de fermions à grande échelle comme des particules bosoniques mais qui a l'avantage de reposer sur l'équation d'état exacte. Elle sera appliquée aux processus $2 \leftrightarrow 1$ et $3 \leftrightarrow 0$. La comparaison des deux théories nous permettra de discuter la validité de l'hydrodynamique quantique.

1. Approche microscopique

L'esprit du calcul microscopique de l'amplitude de couplage est simple : il faut exprimer le hamiltonien classique (19) en termes des amplitudes $b_{\mathbf{q}}$ associées au modes

propres collectifs de la théorie linéarisée (cf. la sous-section III C), isoler les termes contenant les amplitudes de création ou d'annihilation $b_{\mathbf{q}}^*$ et $b_{\mathbf{q}}$ correspondant aux processus étudiés et extraire leur coefficient. Pour les processus à trois phonons, ce sont les termes cubiques du hamiltonien (25), rassemblés dans E_3 , qu'il faut exprimer en fonction des amplitudes $b_{\mathbf{q}}$.

a. *Cas général* La partie cubique de E se met sous la forme

$$E_3 = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q} \in \mathcal{D}} \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} \left[\left(\beta_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}/2, \mathbf{k}'-\mathbf{q}/2} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, \mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^\uparrow + \beta_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}/2, \mathbf{k}'+\mathbf{q}/2} \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2, \mathbf{k}+\mathbf{q}/2}^\downarrow \right) + \text{c.c.} \right] \quad (73)$$

où nous avons introduit le tenseur

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} = \frac{w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- + w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ + W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- - W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+}{2} \quad (74)$$

Nous injectons le développement (60) du champ sur les modes propres collectifs dans l'expression (73) et obtenons le résultat suivant [52] :

$$E_3 = \frac{mc^2}{(\rho L^3)^{1/2}} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3 \in \mathcal{D}} \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3} \times \left(\mathcal{A}_{\text{micro}}^{2 \leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3) b_{\mathbf{q}_1}^* b_{\mathbf{q}_2}^* b_{\mathbf{q}_3} + \text{c.c.} \right) + \dots \quad (75)$$

Les vecteurs \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 et \mathbf{q}_3 sont les trois vecteurs d'onde des phonons impliqués dans le processus de Beliaev-Landau, \mathbf{q}_3 étant le vecteur d'onde du phonon qui se désintègre ou se forme à partir des phonons \mathbf{q}_1 et \mathbf{q}_2 . L'ellipse ... dans (75) concerne les processus à trois excitations impliquant des excitations autres que bosoniques ainsi que les processus non résonnants $3 \leftrightarrow 0$ qui seraient décrits par les termes $b_{\mathbf{q}_1} b_{\mathbf{q}_2} b_{\mathbf{q}_3}$ et $b_{\mathbf{q}_1}^* b_{\mathbf{q}_2}^* b_{\mathbf{q}_3}^*$ mais que nous n'étudions pas par la théorie microscopique. Nous avons mis en facteur $mc^2/(\rho L^3)^{1/2}$, pour faire apparaître l'amplitude de couplage adimensionnée $\mathcal{A}_{\text{micro}}^{2 \leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ du processus $b_{\mathbf{q}_1}^* b_{\mathbf{q}_2} b_{\mathbf{q}_3}$, finie et non nulle à la limite thermodynamique :

$$\begin{aligned} \frac{mc^2}{(\rho L^3)^{1/2}} \mathcal{A}_{\text{micro}}^{2 \leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3) &= \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathcal{D}} \\ & \left[\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_1} M_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_1} \left(M_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_2/2}^{\mathbf{q}_3} M_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_3/2}^{\mathbf{q}_2} + N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_3/2}^{\mathbf{q}_2} N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_2/2}^{\mathbf{q}_3} \right) \right. \\ & + \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_1} N_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_1} \left(M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_3/2}^{\mathbf{q}_2} M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_2/2}^{\mathbf{q}_3} + N_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_2/2}^{\mathbf{q}_3} N_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_3/2}^{\mathbf{q}_2} \right) \\ & + \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_3} \left(N_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_3} N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1/2}^{\mathbf{q}_2} M_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_2/2}^{\mathbf{q}_1} + M_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_3} M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1/2}^{\mathbf{q}_2} N_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_2/2}^{\mathbf{q}_1} \right) \\ & \left. + \mathbf{q}_1 \leftrightarrow \mathbf{q}_2 \right] \quad (76) \end{aligned}$$

où la notation $+\mathbf{q}_1 \leftrightarrow \mathbf{q}_2$ signifie qu'il faut ajouter aux termes déjà présents dans l'équation (76) ceux obtenus en échangeant \mathbf{q}_1 et \mathbf{q}_2 et en laissant \mathbf{q}_3 inchangé.

b. Limite des grandes longueurs d'onde À basse température, ce sont les phonons de faibles vecteurs d'onde qui dominent la cinétique du gaz, ce qui motive l'étude de l'amplitude $\mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}$ dans la limite $q_1, q_2, q_3 \rightarrow 0$. En outre, c'est seulement dans cette limite que nous pouvons espérer comparer au résultat hydrodynamique. Nous effectuons donc le développement limité de l'expression (76), en nous plaçant à la limite d'un espace continu $l \rightarrow 0$, ce qui permet d'effectuer les intégrales sur les degrés de liberté internes \mathbf{k} et \mathbf{k}' des paires et d'obtenir une expression qui dépend uniquement des vecteurs $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ et

\mathbf{q}_3 du processus. Le calcul microscopique, qui ne sera pas détaillé ici, figure dans la référence [36]. C'est le caractère fermionique sous-jacent du problème qui lui donne tout son sel.

Plutôt que d'utiliser les vecteurs d'onde, nous choisissons de paramétrer le résultat par les énergies $\hbar\omega_{\mathbf{q}_i}$, en nous autorisant le raccourci $\omega_i \equiv \omega_{\mathbf{q}_i}$, $i = 1, 2, 3$. Le passage d'un jeu de variables à l'autre se fait grâce aux relations de dispersion (63) et de conservation de l'impulsion. Nous obtenons dans la limite $\omega_i \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{micro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3) &= \left(\frac{\hbar}{mc^2}\right)^{-1/2} \frac{1}{2^{3/2}\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3}} \left[2J(x, y)(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \right. \\ &\left. + \left(\frac{\hbar}{mc^2}\right)^2 \{A(x, y)(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) + B(x, y)(\omega_3^3 - \omega_1^3 - \omega_2^3) + C(x, y)\omega_1\omega_2\omega_3\} + O(\omega^5) \right] \end{aligned} \quad (77)$$

où les fractions rationnelles A, B, C et J en les variables x et y de l'équation (65) sont données dans l'annexe A. Cette amplitude de couplage contient un dénominateur en $(\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/2}$ qui peut la faire diverger à la limite des grandes longueurs d'onde si le processus considéré n'est pas sur la couche de masse, c'est-à-dire ne vérifie pas la relation de conservation de l'énergie

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2. \quad (78)$$

Nous avons vérifié que la limite CBE de notre résultat (77) coïncide avec l'expression prédite par la théorie de Bogolioubov [3, 39] pour un gaz de dimères bosoniques faiblement interagissant [53].

c. Processus résonnants Nous concluons cette étude microscopique en calculant l'amplitude de couplage sur la couche de masse, c'est-à-dire pour les processus qui vérifient la conservation de l'énergie (78), ce qui n'est possible dans la présente limite $\omega_3 \rightarrow 0$ que si le paramètre γ est positif, c'est-à-dire si la relation de dispersion $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ est convexe aux faibles q . Les fractions rationnelles B et C se regroupent alors pour former la quantité thermodynamique

$$2B(x, y) + \frac{2}{3}C(x, y) = 1 + \frac{\rho}{3} \frac{d^2\mu}{d\rho^2} \left(\frac{d\mu}{d\rho}\right)^{-1} \equiv 1 + \Lambda_{\text{F}} \quad (79)$$

dont l'expression en termes de x et y s'obtient en dérivant deux fois l'équation d'état BCS (11) par rapport à μ et est donnée en annexe A. Ceci conduit à la très jolie formule de l'amplitude de couplage sur la couche de masse :

$$\mathcal{A}_{\text{Cdm}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3) = 3(1 + \Lambda_{\text{F}}) \sqrt{\frac{\hbar^3 q_1 q_2 q_3}{32m^3 c^3}} + O(q_3^{7/2}) \quad (80)$$

L'apparition du paramètre thermodynamique $1 + \Lambda_{\text{F}}$ est la seule différence entre cette formule et son équivalent

pour un gaz de bosons obtenu par la théorie de Bogolioubov (à ce sujet voir les équations (D8) et (D9) de la référence [3]). Les variations de ce facteur dans la zone de raccordement CBE-BCS sont représentées sur la figure 1. Notons qu'il vaut 1 dans la limite CBE ($x \rightarrow 0^+$, $y \sim -4/x$) comme dans un gaz de bosons en interaction faible où $\mu \propto \rho$. Il vaut 8/9 tant à la limite unitaire ($x = y$) que dans la limite BCS ($x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$), où $\mu \propto \rho^{2/3}$.

2. Approche hydrodynamique

Nous cherchons maintenant à comparer notre résultat microscopique (77) à la prédiction de l'hydrodynamique quantique irrotationnelle de Landau et Khalatnikov. Cette théorie décrit le gaz aux grandes échelles spatiales par deux champs quantiques hermitiens $\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$ et $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$, en omettant directement la densité de quasiparticules fermioniques, exponentiellement petite en $1/T$. En le supposant irrotationnel, nous écrivons le champ de vitesse $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ comme le gradient (discret) d'un opérateur champ de phase $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$,

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \quad (81)$$

canoniquement conjugué à l'opérateur champ de densité $\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$:

$$[\hat{\rho}(\mathbf{r}, t), \hat{\phi}(\mathbf{r}', t)] = i \frac{\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}}{l^3}. \quad (82)$$

La dynamique de ces deux champs est alors donnée par le hamiltonien hydrodynamique

$$\hat{H}_{\text{hydro}} = l^3 \sum_{\mathbf{r}} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \hat{\phi} \cdot \hat{\rho} \nabla \hat{\phi} + e_{0,0}(\hat{\rho}) \right], \quad (83)$$

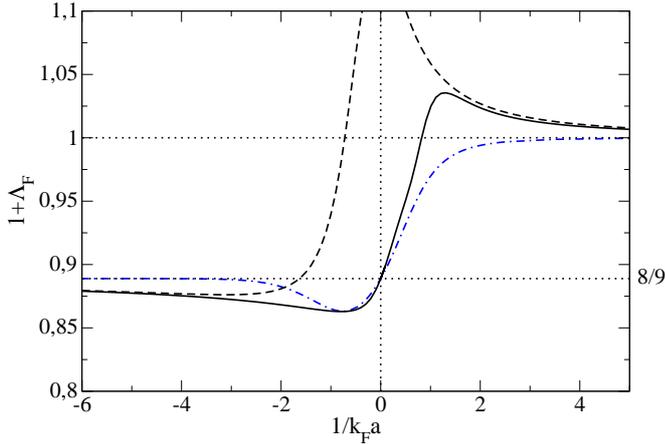


FIGURE 1: Le facteur $1 + \Lambda_F$, contribution de l'équation d'état du gaz de fermions à l'amplitude de couplage à trois phonons $2 \leftrightarrow 1$ (cf. l'équation (79)), est représenté en fonction de la force des interactions $1/k_F a$. La courbe en trait noir plein provient de l'équation d'état mesurée expérimentalement dans la référence [16]. Dans les limites CBE ($k_F a \rightarrow 0^+$) et BCS ($k_F a \rightarrow 0^-$) nous donnons en tireté noir ses comportements asymptotiques obtenus à partir des corrections dites de Lee-Huang-Yang [40–42] (inclusion de la première correction à l'énergie de champ moyen, en $(k_F a)^2$ du côté BCS et en $\rho a \sqrt{\rho a^3}$ du côté CBE). La courbe prédite par l'équation d'état BCS (11) est donnée à fin de comparaison en tireté-pointillé bleu. Relevons que le facteur $1 + \Lambda_F$ tend vers 1 à la limite CBE, comme pour un gaz de bosons en interaction faible. Il vaut $8/9$ à la limite unitaire, et tend vers cette valeur dans le régime BCS, puisque dans les deux cas on a $\mu \propto \rho^{2/3}$.

où $e_{0,0}$ est la densité volumique d'énergie nue, qui sera renormalisée par l'énergie de point zéro des modes selon

la procédure décrite dans la référence [4] pour donner la densité volumique d'énergie vraie e_0 dans l'état fondamental. Cette dernière est reliée au potentiel chimique à température nulle par $\mu = de_0/d\rho$.

La suite est classique et similaire à l'approche microscopique. Nous linéarisons les équations du mouvement pour de faibles fluctuations spatiales du champ de densité et de phase

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \hat{\rho}_0 + \delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) \quad (84)$$

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\phi}_0(t) + \delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \quad (85)$$

où nous nous autoriserons à remplacer $\hat{\rho}_0$ par la densité moyenne ρ . Nous développons ensuite les champs sur les modes propres de la dynamique linéarisée

$$\delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho^{1/2}}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{D}^*} \left(\frac{\hbar\mathbf{q}}{2mc} \right)^{1/2} (\hat{b}_{\mathbf{q}} + \hat{b}_{-\mathbf{q}}^\dagger) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (86)$$

$$\delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{-i}{\rho^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{D}^*} \left(\frac{mc}{2\hbar\mathbf{q}} \right)^{1/2} (\hat{b}_{\mathbf{q}} - \hat{b}_{-\mathbf{q}}^\dagger) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (87)$$

ce qui fait apparaître des opérateurs bosoniques $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ qui sont le pendant hydrodynamique de ceux que nous avons définis à l'équation (70). Le spectre de ces excitations bosoniques est purement linéaire $\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{\text{hydro}} = \hbar c\mathbf{q}$ et la vitesse du son c à la densité ρ s'obtient par la même formule hydrodynamique que plus haut à l'équation (64). Nous isolons ensuite la partie cubique du hamiltonien (83)

$$\hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} = l^3 \sum_{\mathbf{r}} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla\delta\hat{\phi} \cdot \delta\hat{\rho} \nabla\delta\hat{\phi} + \frac{1}{6} \frac{d^2\mu}{d\rho^2} (\delta\hat{\rho})^3 \right], \quad (88)$$

et y injectons les développements (86) et (87). Ceci conduit au résultat

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} = & \frac{mc^2}{(\rho L^3)^{1/2}} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3 \in \mathcal{D}^*} \left[\delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3} \mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3) \left(\hat{b}_{\mathbf{q}_1}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_2}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_3} + \text{h.c.} \right) \right. \\ & \left. + \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3, 0} \mathcal{A}_{\text{hydro}}^{3\leftrightarrow 0}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \left(\hat{b}_{\mathbf{q}_1}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_2}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_3}^\dagger + \text{h.c.} \right) \right] \quad (89) \end{aligned}$$

où les amplitudes de couplage des processus $2 \leftrightarrow 1$ et $3 \leftrightarrow 0$ valent respectivement

$$\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3) = \sqrt{\frac{\hbar^3 q_1 q_2 q_3}{32m^3 c^3}} (3\Lambda_F + u_{12} + u_{13} + u_{23}) \quad (90)$$

$$\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{3\leftrightarrow 0}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\hbar^3 q_1 q_2 q_3}{32m^3 c^3}} (3\Lambda_F + u_{12} + u_{13} + u_{23}) \quad (91)$$

en termes du paramètre Λ_F défini à l'équation (79) et du cosinus de l'angle entre les vecteurs \mathbf{q}_i et \mathbf{q}_j ,

$$u_{ij} = \frac{\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j}{q_i q_j} \quad (92)$$

L'amplitude $2 \leftrightarrow 1$ est manifestement différente de l'amplitude (77) obtenue par l'approche microscopique (en particulier elle ne diverge pas à la limite des grandes longueurs d'onde). On vérifie aisément que les deux résultats sont équivalents lorsque l'énergie est conservée, cf. les équations (80) et (90), car dans la théorie hydrodynamique les trois vecteurs d'onde \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 et \mathbf{q}_3 sont colinéaires et de même sens sur la couche de masse, en vertu du cas d'égalité $|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2| = q_1 + q_2$ dans l'inégalité triangulaire.

B. Processus à quatre phonons

Nous nous intéressons maintenant au processus à quatre phonons $2 \leftrightarrow 2$ lorsque la branche d'excitation $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ est concave aux faibles nombres d'onde. Dans ce cas, c'est en effet le processus à plus petit nombre de phonons qui puisse être résonnant, les processus $1 \leftrightarrow 2$ et $1 \leftrightarrow 3$ étant interdits [7] par la conservation de l'énergie. Ce processus est aussi plus riche du point de vue théorique puisqu'il s'obtient entre autres par des processus intermédiaires $1 \leftrightarrow 2$ ou $3 \leftrightarrow 0$ virtuels et non résonnants. Pour cette raison, l'équivalence de l'hydrodynamique, qui décrit mal les processus $1 \leftrightarrow 2$ hors de la couche de masse, et de l'approche microscopique est tout sauf évidente. Dans cette section, nous donnons la prédiction hydrodynamique pour l'amplitude de couplage $2 \leftrightarrow 2$ effective, incluant les processus virtuels puis nous validons ce résultat par un modèle microscopique. Plutôt que le modèle microscopique fermionique particulièrement lourd, nous optons pour un modèle de bosons avec des interactions de portée non nulle, ajustées pour qu'il présente une branche d'excitation concave aux faibles q .

1. Amplitude de transition

Nous cherchons l'amplitude de transition entre un état initial d'énergie E_i , état de Fock quelconque de quasi-particules bosoniques

$$|i\rangle = |(n_{\mathbf{q}})_{\mathbf{q} \in \mathcal{D}}\rangle \quad (93)$$

et un état final d'énergie E_f où deux phonons de vecteur d'onde \mathbf{q}_1 et \mathbf{q}_2 ont été annihilés et remplacés par des phonons de vecteur d'onde \mathbf{q}_3 et \mathbf{q}_4 :

$$|f\rangle = \frac{\hat{b}_{\mathbf{q}_3}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_4}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_1} \hat{b}_{\mathbf{q}_2}}{\sqrt{n_{\mathbf{q}_1} n_{\mathbf{q}_2} (1 + n_{\mathbf{q}_3}) (1 + n_{\mathbf{q}_4})}} |i\rangle \quad (94)$$

Quel que soit le modèle considéré, le hamiltonien se met sous la forme

$$\hat{H} = E_0 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \hat{H}_4 + \dots \quad (95)$$

où E_0 est une constante, \hat{H}_2 le hamiltonien quadratique de quasi-particules et \hat{H}_3 et \hat{H}_4 les développements aux

ordres suivants. Comme \hat{H}_3 ne couple pas $|i\rangle$ à $|f\rangle$ directement, nous calculons le couplage au second ordre de la théorie des perturbations, ce qui revient à traiter \hat{H}_4 au premier ordre et \hat{H}_3 au second ordre pour construire un hamiltonien effectif [43] :

$$\langle f | \hat{H}^{2 \leftrightarrow 2, \text{eff}} | i \rangle = \langle f | \hat{H}_4 | i \rangle + \sum_{\lambda} \frac{\langle f | \hat{H}_3 | \lambda \rangle \langle \lambda | \hat{H}_3 | i \rangle}{E_i - E_{\lambda}} \equiv \mathcal{A}_{i \rightarrow f} \quad (96)$$

Il y a 6 états intermédiaires $|\lambda\rangle$, numérotés de I à VI, accessibles à température nulle c'est-à-dire lorsque tous les modes $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ sont initialement vides. Ce sont des états où un phonon virtuel est créé et réabsorbé par un processus à trois phonons non résonnant. Nous les représentons par les diagrammes de gauche sur la figure 2, avec une ligne tiretée pour figurer le phonon intermédiaire virtuel. À ces six états intermédiaires $\lambda = \text{I-VI}$ correspondent les diagrammes $\lambda = \text{I'-VI'}$, représentés à droite sur la figure 2, où le phonon intermédiaire a le même vecteur d'onde mais est détruit puis recréé plutôt que créé puis détruit. Ces états intermédiaires ne sont possibles qu'à température non nulle puisque le phonon intermédiaire doit être initialement présent dans $|i\rangle$.

2. Amplitude de couplage $2 \leftrightarrow 2$ effective

Nous définissons l'amplitude effective $\mathcal{A}^{2 \leftrightarrow 2, \text{eff}}$ du couplage du processus $2 \leftrightarrow 2$ à partir de l'écriture suivante du hamiltonien effectif

$$\hat{H}^{2 \leftrightarrow 2, \text{eff}} = \frac{mc^2}{\rho L^3} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4 \in \mathcal{D}} \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4} \times \mathcal{A}^{2 \leftrightarrow 2, \text{eff}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \hat{b}_{\mathbf{q}_3}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_4}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_1} \hat{b}_{\mathbf{q}_2} \quad (97)$$

dont, par construction, l'élément de matrice entre $|i\rangle$ et $|f\rangle$ est l'amplitude de transition $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}$. Ceci conduit à poser

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f} = \sqrt{n_{\mathbf{q}_1} n_{\mathbf{q}_2} (1 + n_{\mathbf{q}_3}) (1 + n_{\mathbf{q}_4})} \frac{4mc^2}{\rho L^3} \mathcal{A}^{2 \leftrightarrow 2, \text{eff}} \quad (98)$$

où le facteur 4 est un simple facteur de comptage.

Nous envisageons à partir de maintenant un processus sur la couche de masse, c'est-à-dire vérifiant la relation

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4, \quad (99)$$

où nous nous permettons à nouveau le raccourci $\omega_i = \omega_{\mathbf{q}_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Dans ce cas, une simplification intervient entre chaque diagramme $\lambda = \text{I, II, III, IV, V, VI}$ et son correspondant $\lambda' = \text{I', II', III', IV', V', VI'}$ sur la colonne de droite de la figure 2, qui permet de se ramener au cas à température nulle. En effet, d'un diagramme à l'autre les dénominateurs d'énergie sont opposés tandis que les numérateurs ne diffèrent que par un facteur de population du phonon intermédiaire \mathbf{q} , facteur qui vaut $(1 + n_{\mathbf{q}})$ pour les diagrammes où le phonon intermédiaire est d'abord virtuellement créé et $n_{\mathbf{q}}$ pour ceux où il est d'abord détruit. Par

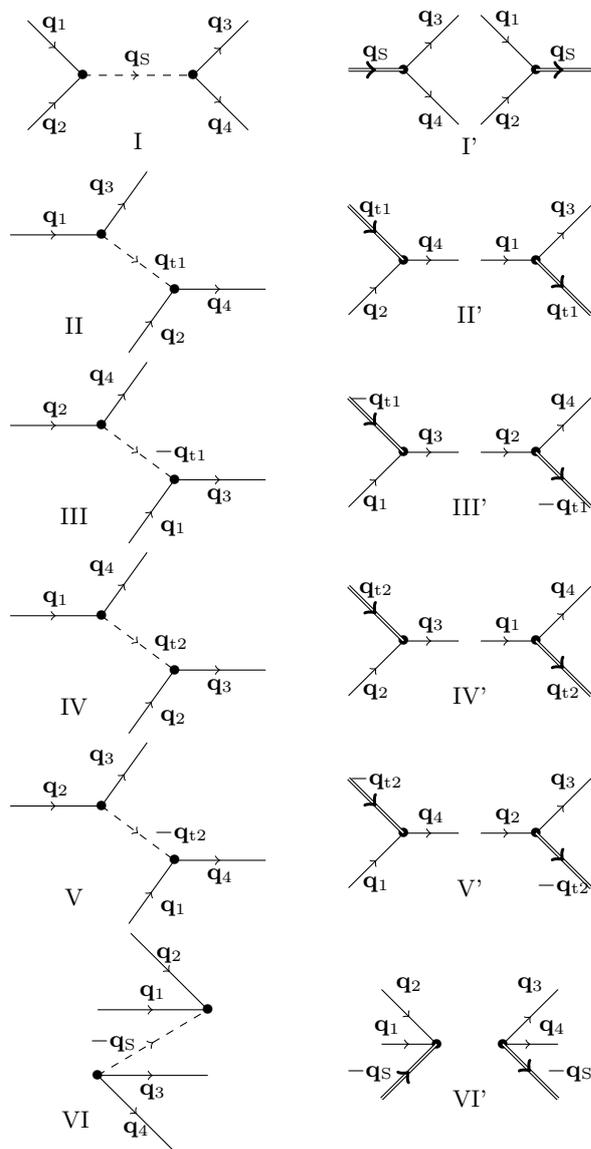


FIGURE 2: Diagrammes du second ordre pour le processus à 4 phonons $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \rightarrow (\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)$ avec $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4$ vu comme deux processus à trois phonons successifs. Les vecteurs incidents \mathbf{q}_1 et \mathbf{q}_2 et émergents \mathbf{q}_3 et \mathbf{q}_4 sont représentés par un trait plein fléché. Sur la colonne de gauche les diagrammes incluent un phonon intermédiaire virtuel, représenté par un tireté fléché. Sur la colonne de droite ils incluent un phonon intermédiaire réel, représenté par un trait double fléché. Les deux diagrammes d'une même ligne possèdent le même phonon intermédiaire : en I et I' $\mathbf{q}_S = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4$, en II et II' $\mathbf{q}_{t1} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_2$, en III et III' $-\mathbf{q}_{t1}$, en IV et IV' $\mathbf{q}_{t2} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4 = \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2$, en V et V' $-\mathbf{q}_{t2}$, en VI et VI' $-\mathbf{q}_S$.

exemple pour I et I' nous avons $E_i - E_{I'} = \omega_1 + \omega_2 - \omega_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}$ tandis que $E_i - E_{I'} = \omega_{\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4} - \omega_3 - \omega_4 = -(E_i - E_{I'})$; dans l'élément de matrice $\langle f | \hat{H}_3 | I \rangle \langle I | \hat{H}_3 | i \rangle$ nous avons le facteur $(1 + n_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2})$ tandis que dans $\langle f | \hat{H}_3 | I' \rangle \langle I' | \hat{H}_3 | i \rangle$ nous avons le facteur $n_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}$. Ainsi, en regroupant les diagrammes deux à deux, nous obtenons une amplitude de couplage effective identique à celle que l'on aurait à température nulle, soit avec $n_{\mathbf{q}} = 0$ pour $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$. En fonction de l'amplitude de couplage $2 \leftrightarrow 2$ directe sur la couche de masse $\mathcal{A}_{\text{Cdm}}^{2 \leftrightarrow 2, \text{dir}}$ (reliée à \hat{H}_4 comme $\mathcal{A}^{2 \leftrightarrow 2, \text{eff}}$ est reliée à $\hat{H}^{2 \leftrightarrow 2, \text{eff}}$) et des amplitudes $\mathcal{A}^{2 \leftrightarrow 1}$ et $\mathcal{A}^{3 \leftrightarrow 0}$ déjà introduites dans la section IV A, cette amplitude effective sur la couche de masse s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{Cdm}}^{2\leftrightarrow 2,\text{eff}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) &= \mathcal{A}_{\text{Cdm}}^{2\leftrightarrow 2,\text{dir}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \\
&+ \frac{\mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4; \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)}{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_{1+2}} + \frac{9\mathcal{A}^{3\leftrightarrow 0}(\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \mathcal{A}^{3\leftrightarrow 0}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)}{-(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_{1+2})} \\
&+ \frac{\mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3; \mathbf{q}_1) \mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_4)}{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_{1-3}} + \frac{\mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_4, \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1; \mathbf{q}_2) \mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1; \mathbf{q}_3)}{\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_{3-1}} \\
&+ \frac{\mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_4, \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4; \mathbf{q}_1) \mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3)}{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_4 - \tilde{\omega}_{1-4}} + \frac{\mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_1; \mathbf{q}_2) \mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1; \mathbf{q}_4)}{\tilde{\omega}_4 - \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_{4-1}} \quad (100)
\end{aligned}$$

où nous avons adimensionné les énergies par mc^2 ,

$$\tilde{\omega} \equiv \frac{\hbar\omega}{mc^2} \quad \text{avec la convention} \quad \omega_{i\pm j} \equiv \omega_{\mathbf{q}_i \pm \mathbf{q}_j}. \quad (101)$$

Notons que le couplage du diagramme VI (qu'en changeant légèrement l'ordre de la figure 2 nous écrivons ici juste après celui du diagramme I) présente un facteur de comptage égal à 9.

3. Amplitude effective dans l'hydrodynamique

À basse température nous cherchons la limite des grandes longueurs d'onde de l'expression (100). Si l'on veut pouvoir utiliser l'hydrodynamique quantique pour ce faire, il est impératif de la corriger d'abord par analogie avec une approche microscopique. En effet, nous justifierons dans la sous-section IV B 4 que l'approche hydrodynamique décrit correctement la limite des grandes longueurs d'onde, à un détail d'importance près : le spectre obtenu par l'hydrodynamique est purement linéaire ce qui conduit les dénominateurs d'énergie à s'annuler lorsque les vecteurs d'onde sont colinéaires, et fait diverger l'amplitude de couplage. Cette divergence est un artefact de la théorie hydrodynamique : en réalité le spectre possède un paramètre de courbure γ non nul, ici négatif, qui empêche les dénominateurs de s'annuler. Lorsque les vecteurs d'onde sont presque colinéaires, nous régularisons donc la divergence de l'amplitude de couplage en remplaçant la relation de dispersion hydrodynamique $\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{\text{hydro}} = \hbar c q$ par le développement (63) comme l'ont fait à l'origine Landau et Khalatnikov [1]. À l'argument d'autorité, nous ajouterons une justification microscopique : pour des vecteurs d'onde colinéaires, notre modèle microscopique bosonique (*cf.* la sous-section IV B 4) donne un équivalent aux grandes longueurs d'onde de la formule (100) qui coïncide avec celui obtenu par l'hydrodynamique modifiée de Landau et Khalatnikov. Ajouter à la main la courbure du spectre est donc une façon de réconcilier l'approche hydrodynamique avec le résultat microscopique.

Établissons d'abord l'amplitude directe du processus $2 \leftrightarrow 2$, celle qui s'obtient à partir des termes quartiques

du hamiltonien

$$\hat{H}_{\text{hydro}}^{(4)} = \frac{1}{24} \frac{d^3\mu}{d\rho^3} l^3 \sum_{\mathbf{r}} \delta\hat{\rho}^4 \quad (102)$$

Comme précédemment, nous injectons les développements (86) et (87) dans $\hat{H}_{\text{hydro}}^{(4)}$. Nous ne gardons que les termes $2 \leftrightarrow 2$ $\hat{b}_{\mathbf{q}_3}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_4}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_1} \hat{b}_{\mathbf{q}_2}$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 2,\text{dir}} &= \frac{mc^2}{\rho L^3} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4 \in \mathcal{D}} \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4} \\
&\times \mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 2,\text{dir}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \hat{b}_{\mathbf{q}_3}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_4}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_1} \hat{b}_{\mathbf{q}_2} \quad (103)
\end{aligned}$$

L'amplitude de couplage $2 \leftrightarrow 2$ directe adimensionnée est donnée par

$$\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 2,\text{dir}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) = \frac{\Sigma_{\text{F}}}{16} \sqrt{\frac{\hbar^4 q_1 q_2 q_3 q_4}{m^4 c^4}} \quad (104)$$

où nous avons défini

$$\Sigma_{\text{F}} \equiv \frac{\rho^3}{mc^2} \frac{d^3\mu}{d\rho^3} \quad (105)$$

Nous combinons alors l'amplitude (104) et nos expressions précédentes des amplitudes $2 \leftrightarrow 1$ (90) et $3 \leftrightarrow 0$ (91) pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{hydro corr, Cdm}}^{2\leftrightarrow 2,\text{eff}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) &= \frac{1}{16} \sqrt{\frac{\hbar^4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}{m^4 c^8}} \left(\Sigma_{\text{F}} \right. \\
&+ \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2 A_{1234} + \omega_{1+2}^2 B_{1234}}{(\omega_1 + \omega_2)^2 - \omega_{1+2}^2} \\
&+ \frac{(\omega_1 - \omega_3)^2 A_{1324} + \omega_{1-3}^2 B_{1324}}{(\omega_1 - \omega_3)^2 - \omega_{1-3}^2} \\
&\left. + \frac{(\omega_1 - \omega_4)^2 A_{1423} + \omega_{1-4}^2 B_{1423}}{(\omega_1 - \omega_4)^2 - \omega_{1-4}^2} \right) \quad (106)
\end{aligned}$$

où l'indice « corr » signifie que l'on va au-delà de l'approximation hydrodynamique dans la relation de dispersion au dénominateur de l'expression (106), c'est-à-dire qu'on utilise l'approximation cubique (63). Nous avons introduit les coefficients

$$A_{ijkl} = (3\Lambda_{\text{F}} + u_{ij})(1 + u_{kl}) + (3\Lambda_{\text{F}} + u_{kl})(1 + u_{ij}) + (1 + u_{ij})(1 + u_{kl}) \quad (107)$$

$$B_{ijkl} = (3\Lambda_{\text{F}} + u_{ij})(3\Lambda_{\text{F}} + u_{kl}) \quad (108)$$

4. Amplitude effective dans un gaz de bosons en interaction faible de portée non nulle

Pour aborder les processus $2 \leftrightarrow 2$ par une approche microscopique, et comprendre comment l'hydrodynamique doit être corrigée pour éliminer sa divergence, nous choisissons, plutôt que la théorie variationnelle fermionique de la partie II, rendue particulièrement lourde par la prise en compte des degrés de liberté internes des paires, un modèle de bosons possédant une branche d'excitation concave aux faibles q . L'idée est d'utiliser un potentiel d'interaction entre bosons dont la portée b suffisamment grande pour rendre concave la branche d'excitation de Bogolioubov. Le hamiltonien du gaz dans le modèle sur réseau s'écrit

$$\hat{H}_B = l^3 \sum_{\mathbf{r}} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m_B} \Delta_{\mathbf{r}} \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \frac{l^6}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}) \quad (109)$$

avec le potentiel d'interaction

$$V(\mathbf{r}) = V_0 e^{-r^2/2b^2} \quad (110)$$

de transformée de Fourier

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \tilde{V}_0 e^{-q^2 b^2/2} \quad \text{avec} \quad \tilde{V}_0 = (2\pi)^{3/2} b^3 V_0 \quad (111)$$

Le gaz de bosons est dans le régime d'interaction faible $(\rho_B a_B^3)^{1/2} \ll 1$, où $\rho_B = N_B/L^3$ est la densité de bosons et a_B , la longueur de diffusion dans l'onde s entre bosons, est donnée dans l'approximation de Born par $4\pi\hbar^2 a_B/m_B = \tilde{V}_0$. Suivant la méthode habituelle de la théorie de Bogolioubov [44] à symétrie $U(1)$ conservée [3, 37, 45, 46], nous écrivons l'opérateur champ bosonique sous la forme

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = e^{i\hat{\theta}_0} \left[\hat{n}_0^{1/2} \phi_0(\mathbf{r}) + \hat{\Lambda}(\mathbf{r}) \right] \quad (112)$$

où $\hat{\theta}_0$ est l'opérateur phase du condensat, \hat{n}_0 le nombre de bosons dans le mode $\phi_0(\mathbf{r}) = 1/L^{3/2}$ du condensat et l'opérateur champ non condensé $\hat{\Lambda}(\mathbf{r})$, orthogonal au mode du condensat $\phi_0(\mathbf{r})$, conserve le nombre de particules. Nous nous plaçons dans le sous-espace à nombre total de bosons N_B fixé et nous éliminons \hat{n}_0 grâce à la relation

$$\hat{n}_0 = N_B - l^3 \sum_{\mathbf{r}} \hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Lambda}(\mathbf{r}) \quad (113)$$

Pour décrire les processus $2 \leftrightarrow 2$, nous devons développer le hamiltonien en puissances de $\hat{\Lambda}$ jusqu'à l'ordre 4

$$\hat{H}_B = \hat{H}_{B0} + \hat{H}_{B2} + \hat{H}_{B3} + \hat{H}_{B4} + \dots \quad (114)$$

Nous avons [54]

$$\hat{H}_{B0} = \tilde{V}_0 \frac{N_B^2}{2L^3} \quad (115)$$

$$\hat{H}_{B2} = l^3 \sum_{\mathbf{r}} \hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m_B} \Delta_{\mathbf{r}} \right) \hat{\Lambda}(\mathbf{r}) + \rho_B l^6 \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left(\hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Lambda}(\mathbf{r}') + \frac{1}{2} \left[\hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}') + \hat{\Lambda}(\mathbf{r}) \hat{\Lambda}(\mathbf{r}') \right] \right) \quad (116)$$

$$\hat{H}_{B3} = \frac{\rho_B^{1/2}}{2} l^6 \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left(\left[\hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}) + \hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}') \right] \hat{\Lambda}(\mathbf{r}') \hat{\Lambda}(\mathbf{r}) + \hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}) \left[\hat{\Lambda}(\mathbf{r}) + \hat{\Lambda}(\mathbf{r}') \right] \right) \quad (117)$$

$$\hat{H}_{B4} = \frac{l^6}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Lambda}(\mathbf{r}') \hat{\Lambda}(\mathbf{r}) - \frac{\tilde{V}_0}{2L^3} \left(l^3 \sum_{\mathbf{r}} \hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Lambda}(\mathbf{r}) \right)^2 \quad (118)$$

$$- \frac{1}{L^3} \left(l^3 \sum_{\mathbf{r}} \hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Lambda}(\mathbf{r}) \right) \left(l^6 \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left[\hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Lambda}(\mathbf{r}') + \frac{1}{2} \left[\hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Lambda}^\dagger(\mathbf{r}') + \hat{\Lambda}(\mathbf{r}) \hat{\Lambda}(\mathbf{r}') \right] \right] \right)$$

a. *Ordre 0* \hat{H}_{B0} donne l'équation d'état à l'ordre le plus bas de la théorie

$$\mu_B = \rho_B \tilde{V}_0 \equiv \frac{\hbar^2}{2m\xi^2} \quad (119)$$

où nous avons introduit la longueur de relaxation ξ et le potentiel chimique μ_B du gaz de bosons. En appliquant la relation (64) à cette équation d'état, nous obtenons

l'expression correspondante de la vitesse du son

$$m_B c_B^2 = \mu_B \quad (120)$$

b. *Ordre 2* La diagonalisation de \hat{H}_{B2} s'obtient par la transformation de Bogolioubov

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \left(U_{\mathbf{q}}^B \hat{b}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} + V_{\mathbf{q}}^B \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \right) \quad (121)$$

où les opérateurs $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ sont les opérateurs d'annihilation de quasi-particules bosoniques, et les amplitudes $U_{\mathbf{q}}^{\text{B}}$ et $V_{\mathbf{q}}^{\text{B}}$ sont données par

$$U_{\mathbf{q}}^{\text{B}} + V_{\mathbf{q}}^{\text{B}} \equiv S_{\mathbf{q}} = \left(\frac{\frac{\hbar^2 q^2}{2m_{\text{B}}}}{\frac{\hbar^2 q^2}{2m_{\text{B}}} + 2\rho_{\text{B}}\tilde{V}(\mathbf{q})} \right)^{1/4} \quad (122)$$

$$U_{\mathbf{q}}^{\text{B}} - V_{\mathbf{q}}^{\text{B}} \equiv D_{\mathbf{q}} = \frac{1}{S_{\mathbf{q}}} \quad (123)$$

Nous avons introduit les pulsations propres des quasi-particules de Bogolioubov

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{\text{B}} = \left[\frac{\hbar^2 q^2}{2m_{\text{B}}} \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m_{\text{B}}} + 2\rho_{\text{B}}\tilde{V}(\mathbf{q}) \right) \right]^{1/2} \quad (124)$$

Nous voulons une relation de dispersion $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ concave au voisinage de $q = 0$, ce qui nous conduit à imposer la condition

$$b > \xi \quad (125)$$

c. Ordre 3 Nous injectons maintenant le développement modal (121) dans le hamiltonien cubique (117) que nous mettons sous la forme (89) avec les constantes m , c et ρ remplacées respectivement par m_{B} , c_{B} et ρ_{B} et des amplitudes de couplage cette fois-ci données par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{B}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3) &= \frac{1}{4\tilde{V}_0} \left[\tilde{V}(\mathbf{q}_3)S_3(S_1S_2 - D_1D_2) \right. \\ &\left. + \tilde{V}(\mathbf{q}_1)S_1(S_2S_3 + D_2D_3) + \tilde{V}(\mathbf{q}_2)S_2(S_1S_3 + D_1D_3) \right] \end{aligned} \quad (126)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{B}}^{3\leftrightarrow 0}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) &= \frac{1}{12\tilde{V}_0} \left[\tilde{V}(\mathbf{q}_1)S_1(S_2S_3 - D_2D_3) \right. \\ &\left. + \tilde{V}(\mathbf{q}_2)S_2(S_1S_3 - D_1D_3) + \tilde{V}(\mathbf{q}_3)S_3(S_1S_2 - D_1D_2) \right] \end{aligned} \quad (127)$$

avec la convention $S_i \equiv S_{\mathbf{q}_i}$ et $D_i \equiv D_{\mathbf{q}_i}$.

d. Ordre 4 Nous injectons le développement modal (121) dans le hamiltonien quartique (118) que nous mettons sous la forme (103) avec $(m, c, \rho) \rightarrow (m_{\text{B}}, c_{\text{B}}, \rho_{\text{B}})$ et une amplitude de couplage $2 \leftrightarrow 2$ directe donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{B}}^{2\leftrightarrow 2, \text{dir}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) &= \frac{1}{32\tilde{V}_0} \times \\ &\left[\left(\tilde{V}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + \tilde{V}(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) \right) (S_1S_2 - D_1D_2)(S_3S_4 - D_3D_4) \right. \\ &+ \left(\tilde{V}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1) + \tilde{V}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) \right) (S_1S_3 + D_1D_3)(S_2S_4 + D_2D_4) \\ &\left. + \left(\tilde{V}(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_1) + \tilde{V}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3) \right) (S_1S_4 + D_1D_4)(S_2S_3 + D_2D_3) \right] \end{aligned} \quad (128)$$

Nous nous sommes placés ici dans le cas général où les \mathbf{q}_i et leurs opposés sont deux à deux distincts, auquel cas seul le premier terme de $\hat{H}_{\text{B}4}$ contribue. En revanche les autres termes de $\hat{H}_{\text{B}4}$, qui proviennent du développement (113) de \hat{n}_0 en puissances du nombre de particules non condensées, contribuent à l'équation d'état au-delà de la théorie de Bogolioubov [47].

e. Amplitude de couplage effective À partir des amplitudes (126, 127, 128) nous formons l'amplitude de couplage effective du modèle bosonique sur la couche de masse, $\mathcal{A}_{\text{B}, \text{Cdm}}^{2\leftrightarrow 2, \text{eff}}$ comme prescrit par l'équation (100). Nous développons ensuite cette amplitude aux faibles vecteurs d'onde et l'exprimons en fonction des pulsations $\omega_{\mathbf{q}_i}^{\text{B}}$, $i = 1, 2, 3, 4$ ainsi que $\omega_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}^{\text{B}}$, $\omega_{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3}^{\text{B}}$ et $\omega_{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4}^{\text{B}}$. Nous retrouvons la prédiction hydrodynamique (106) spécialisée à l'équation d'état bosonique (119), avec $\Lambda_{\text{F}} = \Sigma_{\text{F}} = 0$ et $(m, c, \rho) \rightarrow (m_{\text{B}}, c_{\text{B}}, \rho_{\text{B}})$, à condition d'utiliser, dans le cas où des vecteurs d'onde sont colinéaires, la prescription de Landau et Khalatnikov [1] expliquée au début de la sous-section IV B 3, qui s'en trouve de ce fait microscopiquement justifiée. Relevons que ce résultat n'avait rien d'évident *a priori* car le terme de couplage direct (128) diverge à la limite des grandes longueurs d'onde d'une façon qui compense subtilement la divergence du terme de couplage virtuel issu du second ordre de la théorie des perturbations. La physionomie du calcul microscopique est donc fort différente de celle du calcul hydrodynamique, dans lequel le terme de couplage direct est nul pour l'équation d'état (119) considérée.

V. APPLICATION : AMORTISSEMENT DES PHONONS DANS TOUT LE RACCORDEMENT CBE-BCS

A. Expression générale des taux par équation pilote

Pour calculer le taux d'amortissement des phonons du mode \mathbf{q} , nous voyons ce mode comme un oscillateur harmonique couplé au réservoir que constitue l'ensemble des autres modes de quasi-particules [48], supposé être à l'équilibre thermique à la température T . Nous récrivons donc le hamiltonien effectif de basse énergie sous la forme

$$\hat{H} = \hbar\omega_{\mathbf{q}}\hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger}\hat{b}_{\mathbf{q}} + \left(\sum_{\mathbf{q}' \neq \mathbf{q}} \hbar\omega_{\mathbf{q}'}\hat{b}_{\mathbf{q}'}^{\dagger}\hat{b}_{\mathbf{q}'} \right) + (\hat{R}^{\dagger}\hat{b}_{\mathbf{q}} + \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger}\hat{R}) + \dots \quad (129)$$

Le premier et le second terme, tous deux issus de \hat{H}_2 , décrivent l'évolution libre respectivement du mode \mathbf{q} et du réservoir. Le troisième terme, simple réécriture des termes de \hat{H}_3 ou de $\hat{H}^{2\leftrightarrow 2, \text{eff}}$ contenant $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ ou $\hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger}$, décrit le couplage entre le réservoir et le mode \mathbf{q} . L'ellipse \dots concerne les processus non linéaires d'ordre plus élevé et tous ceux qui n'impliquent pas le mode \mathbf{q} , ainsi que les termes de déplacement d'énergie du mode \mathbf{q} , de la forme $\hat{R}'\hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger}\hat{b}_{\mathbf{q}}$ avec \hat{R}' un opérateur du réservoir. L'équation d'évolution du nombre moyen d'excitations $\langle \hat{n}_{\mathbf{q}} \rangle$ dans le mode \mathbf{q} s'écrit dans l'approximation de Born-Markov [43]

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{n}_{\mathbf{q}} \rangle = -\Gamma_{\mathbf{q}}(\langle \hat{n}_{\mathbf{q}} \rangle - \bar{n}_{\mathbf{q}}) \quad (130)$$

où $\bar{n}_{\mathbf{q}}$ désigne la population du mode \mathbf{q} à l'équilibre thermique

$$\bar{n}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{k_{\text{B}}T}\right) - 1} \quad (131)$$

Le taux d'amortissement $\Gamma_{\mathbf{q}}$ est donné par

$$\Gamma_{\mathbf{q}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\hbar^2} e^{-i\omega_{\mathbf{q}}t} \text{Tr}_{\text{R}} \left([\hat{R}, \hat{R}^\dagger(t)] \sigma_{\text{R}}^{\text{eq}}(t) \right) \quad (132)$$

où Tr_{R} désigne la trace sur tous les états possibles du réservoir, $\sigma_{\text{R}}^{\text{eq}}$ est l'opérateur densité du réservoir à l'équilibre thermique, $[\hat{A}, \hat{B}]$ est le commutateur des opérateurs \hat{A} et \hat{B} et l'évolution de l'opérateur $\hat{R}^\dagger(t)$ du réservoir est celle en représentation d'interaction donnée par le hamiltonien $\sum_{\mathbf{q}' \neq \mathbf{q}} \hbar\omega_{\mathbf{q}'} \hat{b}_{\mathbf{q}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}'}$.

B. Cas convexe : amortissement de Beliaev-Landau

Dans le cas d'une relation de dispersion convexe, les termes bilinéaires présents dans \hat{R} conduisent à des processus résonnants et sont donc ceux qui déterminent l'expression de $\Gamma_{\mathbf{q}}$ à l'ordre le plus bas en la température. Nous séparons la contribution du processus de Beliaev ($\mathbf{q}', (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \leftrightarrow \mathbf{q}$) et de Landau ($\mathbf{q}, \mathbf{q}' \leftrightarrow \mathbf{q} + \mathbf{q}'$)

$$\Gamma_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}} = \frac{(mc^2)^2}{2\pi^2 \hbar^2 \rho} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 q' |\mathcal{A}_{\text{Cdm}}^{2 \leftrightarrow 1}(\mathbf{q}', \mathbf{q} - \mathbf{q}'; \mathbf{q})|^2 \times \delta(\omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{\mathbf{q} - \mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}}) (1 + \bar{n}_{\mathbf{q} - \mathbf{q}'} + \bar{n}_{\mathbf{q}'}) \quad (133)$$

$$\Gamma_{\mathbf{q}}^{\text{Lan}} = \frac{(mc^2)^2}{\pi^2 \hbar^2 \rho} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 q' |\mathcal{A}_{\text{Cdm}}^{2 \leftrightarrow 1}(\mathbf{q}', \mathbf{q}; \mathbf{q}' + \mathbf{q})|^2 \times \delta(\omega_{\mathbf{q} + \mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}}) (\bar{n}_{\mathbf{q}'} + \bar{n}_{\mathbf{q}' + \mathbf{q}}) \quad (134)$$

À basse température, nous pouvons utiliser l'expression (80) de l'amplitude de couplage $2 \leftrightarrow 1$ sur la couche de masse. Après intégration sur le vecteur d'onde \mathbf{q}' en coordonnées sphériques d'axe polaire \mathbf{q} [55], nous obtenons les équivalents :

$$\Gamma_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \frac{9(1 + \Lambda_{\text{F}})^2}{32\pi} \frac{mc^2}{\hbar\rho} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \left(\frac{k_{\text{B}}T}{mc^2}\right)^5 \tilde{\Gamma}^{\text{Bel}}(\tilde{q}) \quad (135)$$

$$\Gamma_{\mathbf{q}}^{\text{Lan}} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \frac{9(1 + \Lambda_{\text{F}})^2}{32\pi} \frac{mc^2}{\hbar\rho} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \left(\frac{k_{\text{B}}T}{mc^2}\right)^5 \tilde{\Gamma}^{\text{Lan}}(\tilde{q}) \quad (136)$$

où nous avons adimensionné les nombres d'onde par le nombre d'onde thermique typique comme suit :

$$\tilde{q} = \frac{\hbar c q}{k_{\text{B}}T} \quad (137)$$

et où la limite $T \rightarrow 0$ est prise à \tilde{q} fixé. Les fonctions $\tilde{\Gamma}^{\text{Bel}}$ et $\tilde{\Gamma}^{\text{Lan}}$ sont des fonctions universelles de \tilde{q} qui s'expriment en termes des fonctions de Bose $g_{\alpha}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n / n^{\alpha}$, aussi appelées fonctions polylogarithmes

$\text{Li}_{\alpha}(z)$, et de la fonction ζ de Riemann, $\zeta(\alpha) = g_{\alpha}(1)$ [56],

$$\tilde{\Gamma}^{\text{Bel}}(\tilde{q}) = \frac{\tilde{q}^5}{30} - \frac{4\pi^4}{15} \tilde{q} + 48 [\zeta(5) - g_5(e^{-\tilde{q}})] - 24\tilde{q}g_4(e^{-\tilde{q}}) + 4\tilde{q}^2[\zeta(3) - g_3(e^{-\tilde{q}})] \quad (138)$$

$$\tilde{\Gamma}^{\text{Lan}}(\tilde{q}) = \tilde{\Gamma}^{\text{Bel}}(\tilde{q}) - \frac{\tilde{q}^5}{30} + \frac{8\pi^4}{15} \tilde{q} \quad (139)$$

On en déduit les comportements aux limites suivants :

$$\tilde{\Gamma}^{\text{Bel}} \underset{\tilde{q} \rightarrow 0}{=} \frac{\tilde{q}^4}{6} + \frac{\tilde{q}^6}{360} + O(\tilde{q}^8) \quad (140)$$

$$\tilde{\Gamma}^{\text{Bel}} \underset{\tilde{q} \rightarrow +\infty}{=} \frac{\tilde{q}^5}{30} + 4\zeta(3)\tilde{q}^2 - \frac{4\pi^4}{15} \tilde{q} + 48\zeta(5) + O(\tilde{q}^2 e^{-\tilde{q}}) \quad (141)$$

ceux de $\tilde{\Gamma}^{\text{Lan}}$ s'en déduisant trivialement par l'équation (139). Enfin, les variations des deux taux et de leur somme entre ces deux extrêmes sont représentées sur la figure 3.

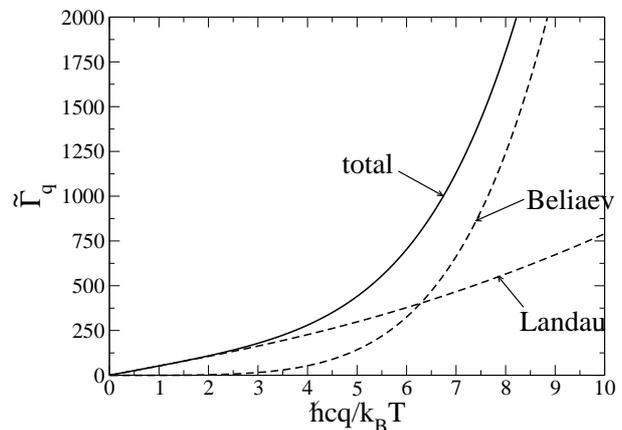


FIGURE 3: Comportement limite à basse température du taux total d'amortissement des phonons en fonction du nombre d'onde adimensionné $\tilde{q} = \hbar c q / k_{\text{B}}T$ dans le cas d'une relation de dispersion convexe, en trait plein, somme des taux de Beliaev (138) et de Landau (139) représentés en tireté. Les taux sont adimensionnés comme dans les équations (135) et (136).

C. Cas concave : amortissement de Landau-Khalatnikov

Dans le cas d'une relation de dispersion concave, le mode \mathbf{q} est amorti à suffisamment basse température par des processus $2 \leftrightarrow 2$; nous retenons donc dans \hat{R} les termes en $\hat{b}_{\mathbf{q}_3}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_4}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_2}$, issus du hamiltonien quartique (97). Ceci conduit dans l'équation (132) à

$$\Gamma_{\mathbf{q}}^{2\leftrightarrow 2} = \frac{(mc^2)^2}{4\pi^5 \hbar^2 \rho^2} \int_{\mathbb{R}^6} d^3 q_2 d^3 q_3 |\mathcal{A}_{\text{Cdm}}^{2\leftrightarrow 2, \text{eff}}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)|^2 \delta(\omega_{\mathbf{q}_3} + \omega_{\mathbf{q}_4} - \omega_{\mathbf{q}_2} - \omega_{\mathbf{q}}) [\bar{n}_{\mathbf{q}_2}(1 + \bar{n}_{\mathbf{q}_3})(1 + \bar{n}_{\mathbf{q}_4}) - (1 + \bar{n}_{\mathbf{q}_2})\bar{n}_{\mathbf{q}_3}\bar{n}_{\mathbf{q}_4}] \quad (142)$$

où le vecteur \mathbf{q}_4 est relié aux autres vecteurs d'onde par la conservation de l'impulsion

$$\mathbf{q}_4 = \mathbf{q} + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3 \quad (143)$$

Il nous faut maintenant obtenir, à $\tilde{q} = \hbar c q / k_B T$ fixé, un équivalent du taux $\Gamma_{\mathbf{q}}^{2\leftrightarrow 2}$ à basse température. Choisissons l'axe Oz du repère sphérique selon le vecteur \mathbf{q} ; les vecteurs \mathbf{q}_i ont alors pour coordonnées (q_i, θ_i, ϕ_i) . Plaçons-nous à température T , contrôlée par le petit paramètre

$$\epsilon \equiv \frac{k_B T}{mc^2} \ll 1, \quad (144)$$

suffisamment basse pour que les nombres d'onde typiques soient petits devant mc/\hbar , de sorte que la branche bosonique n'est peuplée que dans la partie où elle est quasiment linéaire. Dans ce cas, l'amplitude de couplage $\mathcal{A}_{\text{Cdm}}^{2\leftrightarrow 2}$, qui serait divergente aux angles nuls pour une relation de dispersion linéaire comme nous l'avons déjà signalé dans la section **IV B 3**, est extrêmement piquée autour de $\theta_2 = \theta_3 = 0$, avec, comme nous le verrons, un pic de largeur d'ordre ϵ en θ_2 et θ_3 [57] s'élevant d'un facteur $1/\epsilon^2$ au-dessus de la valeur typique de l'amplitude à angles non nuls. Compte tenu de la conservation de l'impulsion (143) et de l'énergie, on trouve aussi que $\theta_4 = O(\epsilon)$ sur la largeur du pic. Nous redéfinissons alors les nombres d'onde comme dans l'équation (137) et les angles polaires par

$$\tilde{\theta}_i = \frac{\theta_i}{\epsilon |\gamma|^{1/2}} \quad (145)$$

avec $\gamma < 0$ le paramètre de courbure (63), puis nous effectuons un développement limité de l'amplitude de couplage (106) lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ à valeurs fixées des quantités redimensionnées :

$$\mathcal{A}_{\text{Cdm}}^{2\leftrightarrow 2}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{=} \left(\frac{3(1 + \Lambda_F)}{4} \right)^2 \frac{(\tilde{q}\tilde{q}_2\tilde{q}_3\tilde{q}_4)^{1/2}}{|\gamma|} \times \mathcal{A}_{\text{red}}^{2\leftrightarrow 2}(\tilde{q}, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3) + O(\epsilon^2) \quad (146)$$

La contribution en Σ_F de l'amplitude directe $\mathcal{A}^{2\leftrightarrow 2, \text{dir}}$ disparaît à cet ordre du développement en ϵ ce qui, combiné à notre redéfinition astucieuse (145) des angles polaires, nous a permis de sortir les facteurs $1 + \Lambda_F$ et γ dépendant de la force des interactions. On obtient ainsi

une amplitude réduite $\mathcal{A}_{\text{red}}^{2\leftrightarrow 2}$ universelle :

$$\mathcal{A}_{\text{red}}^{2\leftrightarrow 2}(\tilde{q}, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3) = \frac{1}{\tilde{q}\tilde{q}_2 \left(\frac{\tilde{\theta}_2^2}{(\tilde{q} + \tilde{q}_2)^2} + \frac{3}{4} \right)} - \frac{1}{\tilde{q}\tilde{q}_3 \left(\frac{\tilde{\theta}_3^2}{(\tilde{q} - \tilde{q}_3)^2} + \frac{3}{4} \right)} - \frac{1}{\tilde{q}(\tilde{q} + \tilde{q}_2 - \tilde{q}_3) \left(\frac{\tilde{\theta}_4^2}{(\tilde{q}_3 - \tilde{q}_2)^2} + \frac{3}{4} \right)} \quad (147)$$

Les premier, deuxième et troisième termes de (147) proviennent respectivement des deuxième, troisième et quatrième termes de (106). Dans ces deux derniers, on a pris soin de distinguer les cas $q > q_3$ et $q < q_3$, $q > q_4$ et $q < q_4$. En combinant la relation implicite issue de la conservation de l'énergie,

$$\tilde{q}_4 = \tilde{q} + \tilde{q}_2 - \tilde{q}_3 - \frac{\epsilon^2 |\gamma|}{8} (\tilde{q}^3 + \tilde{q}_2^3 - \tilde{q}_3^3 - \tilde{q}_4^3) + O(\epsilon^4) \quad (148)$$

itérée une fois, à un calcul de géométrie sphérique consistant à projeter la relation (143) sur \mathbf{q} , on obtient l'expression de $\tilde{\theta}_4$:

$$\tilde{\theta}_4^2 = \frac{\tilde{q}_2 \tilde{\theta}_2^2 - \tilde{q}_3 \tilde{\theta}_3^2 - \frac{1}{4} [\tilde{q}^3 + \tilde{q}_2^3 - \tilde{q}_3^3 - (\tilde{q} + \tilde{q}_2 - \tilde{q}_3)^3]}{\tilde{q} + \tilde{q}_2 - \tilde{q}_3} + O(\epsilon^2) \quad (149)$$

Notons que $\tilde{q}_3 < \tilde{q} + \tilde{q}_2$ d'après (148) et que l'intégrande de (142) dépend azimuthalement seulement de $\phi \equiv \phi_2 - \phi_3$ par invariance par rotation autour de \mathbf{q} .

Il nous reste à intégrer le Dirac de conservation de l'énergie. Pour cela, nous passons en représentation polaire pour les angles redimensionnés

$$\tilde{\theta}_2 = R \cos \alpha \quad \tilde{\theta}_3 = R \sin \alpha \quad (150)$$

et mettons la différence d'énergie entre état initial et final sous la forme

$$\omega_{\mathbf{q}_3} + \omega_{\mathbf{q}_4} - \omega_{\mathbf{q}_2} - \omega_{\mathbf{q}} = \frac{mc^2}{\hbar} \frac{\epsilon^3 |\gamma|}{2} (uR^2 + v) + O(\epsilon^5) \quad (151)$$

avec

$$u = \frac{\tilde{q}(\tilde{q}_3 \sin^2 \alpha - \tilde{q}_2 \cos^2 \alpha) + \tilde{q}_2 \tilde{q}_3 (1 - \sin 2\alpha \cos \phi)}{\tilde{q} + \tilde{q}_2 - \tilde{q}_3} \quad (152)$$

$$v = \frac{1}{4} [\tilde{q}^3 + \tilde{q}_2^3 - \tilde{q}_3^3 - (\tilde{q} + \tilde{q}_2 - \tilde{q}_3)^3] \quad (153)$$

Écrit sous la forme (151), le Dirac de conservation de l'énergie est immédiat à intégrer sur R . Nous exprimons

alors le taux d'amortissement $2 \leftrightarrow 2$ en termes d'une fonction universelle $\tilde{\Gamma}^{2\leftrightarrow 2}$ dépendant uniquement du vecteur d'onde adimensionné \tilde{q} :

$$\frac{\hbar\Gamma_{\mathbf{q}}^{2\leftrightarrow 2}}{mc^2} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{81(1 + \Lambda_F)^4}{256\pi^4|\gamma|} \left(\frac{k_B T}{mc^2}\right)^7 \left(\frac{mc}{\hbar\rho^{1/3}}\right)^6 \tilde{\Gamma}^{2\leftrightarrow 2}(\tilde{q}) \quad (154)$$

ce qui constitue un autre résultat majeur de cet article. La fonction $\tilde{\Gamma}^{2\leftrightarrow 2}(\tilde{q})$ est donnée par une intégrale quadruple [58]

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{2\leftrightarrow 2}(\tilde{q}) = & \int_0^\infty d\tilde{q}_2 \int_0^{\tilde{q}+\tilde{q}_2} d\tilde{q}_3 \frac{\tilde{q}\tilde{q}_2^3\tilde{q}_3^3(\tilde{q} + \tilde{q}_2 - \tilde{q}_3)}{|v|} \frac{[1 + f(\tilde{q}_2)]f(\tilde{q}_3)f(\tilde{q} + \tilde{q}_2 - \tilde{q}_3)}{f(\tilde{q})} \\ & \times \int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^\pi d\phi \sin\alpha \cos\alpha Y\left(-\frac{v}{u}\right) \left| \frac{v}{u} \mathcal{A}_{\text{red}}^{2\leftrightarrow 2}\left(\tilde{q}, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \left|\frac{v}{u}\right|^{1/2} \cos\alpha, \left|\frac{v}{u}\right|^{1/2} \sin\alpha\right) \right|^2 \end{aligned} \quad (155)$$

expression dans laquelle nous avons introduit la fonction de Heaviside $Y(x \geq 0) = 1$, $Y(x < 0) = 0$ et la fonction de Bose réduite $f(x) = 1/(e^x - 1)$. Nous avons réécrit les nombres d'occupation dans (142) grâce à la propriété $(1 + \bar{n}_{\mathbf{q}_i})/\bar{n}_{\mathbf{q}_i} = e^{\hbar\omega_{\mathbf{q}_i}/k_B T}$ et à la conservation de l'énergie. La fonction $\tilde{\Gamma}^{2\leftrightarrow 2}$ est représentée sur la figure 4. Ses comportements aux faibles et aux grands \tilde{q} peuvent être obtenus analytiquement :

$$\tilde{\Gamma}^{2\leftrightarrow 2}(\tilde{q}) \underset{\tilde{q} \rightarrow 0}{=} \frac{16\pi^5}{135} \tilde{q}^3 + O(\tilde{q}^4) \quad (156)$$

$$\tilde{\Gamma}^{2\leftrightarrow 2}(\tilde{q}) \underset{\tilde{q} \rightarrow \infty}{=} \frac{16\pi\zeta(5)}{3} \tilde{q}^2 + O(\tilde{q}) \quad (157)$$

Ces comportements aux limites diffèrent de ceux obtenus par Landau et Khalatnikov dans la référence [1] (voir leurs équations (7.6) et (7.12) dans la version [49]), y compris sur l'ordre en \tilde{q} des termes dominants. La raison de ce désaccord est que ces auteurs négligent dans l'amplitude de couplage, aussi bien à faible \tilde{q} qu'à grand \tilde{q} , la contribution des diagrammes II à V de la figure 2, ce qui n'est pas justifié, comme l'avait déjà remarqué la référence [5]. En réalité, ceux-ci interfèrent destructivement à l'ordre dominant avec le diagramme I, et rendent les résultats exacts (156,157) sous-dominants par rapport aux prédictions de Landau et Khalatnikov de deux ordres en \tilde{q} .

D. Amortissement des phonons au-delà de l'hydrodynamique

Cette sous-section est consacrée au gaz unitaire de fermions à température nulle. Nous y calculons le taux d'amortissement des phonons au-delà du résultat hydrodynamique (141) que l'on peut récrire sous la forme

$$(\Gamma_q^{\text{Bel}})_{\text{hydro}}^{\text{Unitary gas}} = \left(\frac{2}{9\pi}\right) \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right) \left(\frac{mc}{\hbar\rho^{1/3}}\right)^3 \frac{\tilde{q}^5}{30} \quad (158)$$

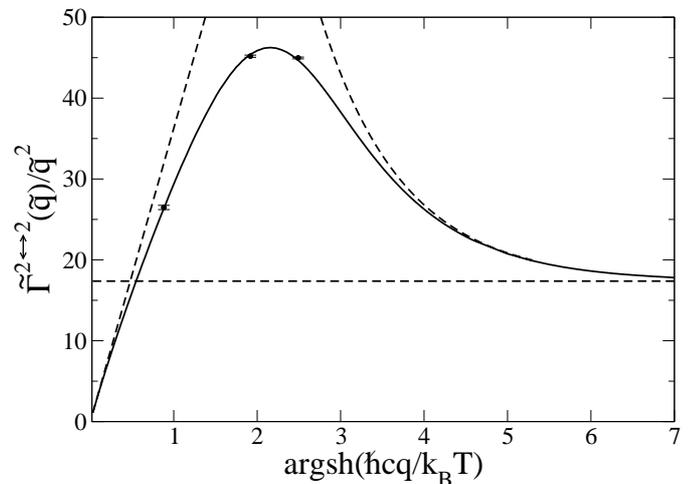


FIGURE 4: Taux d'amortissement $2 \leftrightarrow 2$ en fonction du nombre d'onde adimensionné \tilde{q} . Afin de faire ressortir les comportements aux limites, nous divisons le taux par \tilde{q}^2 et traçons en fonction de $\text{argsh}(\tilde{q}) = \ln(\tilde{q} + \sqrt{1 + \tilde{q}^2})$. La tangente oblique en $\tilde{q} = 0$ figure le comportement limite à petits \tilde{q} (cf. l'équation (156)). La droite horizontale est la limite de $\tilde{\Gamma}^{2\leftrightarrow 2}(\tilde{q})/\tilde{q}^2$ lorsque $\tilde{q} \rightarrow \infty$ (cf. l'équation (157)) et la courbe asymptote aux grands \tilde{q} est un ajustement de $\tilde{\Gamma}^{2\leftrightarrow 2}(\tilde{q})/\tilde{q}^2$ affine en $1/\tilde{q}$. Les disques noirs proviennent d'un calcul numérique de l'intégrale (142) pour la relation de dispersion bogolioubovienne (172) tronquée à un intervalle $[0, q_{\text{max}}]$ sur lequel sa dérivée est strictement positive; les valeurs représentées correspondent à une extrapolation linéaire à $\epsilon = 0$, et la mi-largeur des barres d'erreur à l'écart à une extrapolation quadratique.

avec les notations

$$\tilde{q} \equiv \frac{\hbar q}{mc} \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}_q \equiv \frac{\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{mc^2} \quad (159)$$

À cette fin, nous calculons d'abord l'amplitude de couplage $\mathcal{A}_{\text{Cdm}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3)$ au premier ordre en le paramètre

de courbure γ du spectre d'excitation, puis nous déduisons le taux d'amortissement de Beliaev de l'équation (133), sans oublier d'inclure la correction d'ordre un en γ au spectre d'excitation lui-même.

1. *Amplitude du processus de Beliaev $2 \leftrightarrow 1$ pour le gaz unitaire*

Nous calculons ici l'amplitude de couplage $\mathcal{A}_{\text{Cdm}}^{2 \leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3)$ à l'ordre un en γ , à l'aide de la théorie des champs effective de Son et Wingate déduite de l'invariance conforme du gaz unitaire [32]. Ces auteurs ont construit un lagrangien incluant la première correction à l'hydrodynamique, fonction d'un « champ de phase » ϕ . Il nous est commode de passer au formalisme hamiltonien en introduisant le champ canoniquement conjugué Π , qui représente les fluctuations de densité au signe près. Dans un système d'unités tel que $\hbar = m = 1$, nous obtenons les contributions au hamiltonien :

$$\mathcal{H}_2^{(0)} = \frac{2\mu^{-1/2}}{15c_0}\Pi^2 + \frac{5}{2}c_0\mu^{3/2}\frac{1}{2}(\mathbf{grad}\phi)^2 \quad (160)$$

$$\mathcal{H}_3^{(0)} = \frac{4\mu^{-2}}{3(15c_0)^2}\Pi^3 - \frac{1}{2}\Pi(\mathbf{grad}\phi)^2 \quad (161)$$

$$\mathcal{H}_2^{(2)} = -\frac{16c_1\mu^{-3/2}}{(15c_0)^2}(\mathbf{grad}\Pi)^2 - c_2\mu^{1/2}(\Delta\phi)^2 \quad (162)$$

$$\mathcal{H}_3^{(2)} = -\frac{96c_1\mu^{-3}}{(15c_0)^3}\Pi(\mathbf{grad}\Pi)^2 + \frac{2c_2\mu^{-1}}{15c_0}\Pi(\Delta\phi)^2 \quad (163)$$

où l'indice 2 ou 3 est l'ordre du développement du hamiltonien en puissances de Π et ϕ et l'exposant (0) ou (2) est l'ordre du développement en puissances des gradients spatiaux, l'ordre (0) étant l'hydrodynamique usuelle. On aura compris que les champs Π et $\mathbf{grad}\phi$ sont en fait du même ordre. À l'ordre de l'hydrodynamique, le hamiltonien ne dépend que d'une seule constante c_0 qu'il faille déduire d'une théorie microscopique. Elle s'exprime comme suit en fonction du paramètre de Bertsch ξ_B reliant le potentiel chimique μ au nombre d'onde de Fermi k_F ou à la densité totale ρ :

$$c_0 = \frac{2^{5/2}}{15\pi^2\xi_B^{3/2}} \quad \text{avec} \quad \mu = \xi_B \frac{k_F^2}{2} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \quad (164)$$

La première correction à l'hydrodynamique fait intervenir deux autres constantes c_1 et c_2 qui, au contraire de c_0 , n'ont pas encore été mesurées ni même déduites d'une théorie microscopique. En suivant la procédure déjà utilisée dans cet article, nous obtenons à partir de l'approximation quadratique $\mathcal{H}_2^{(0)} + \mathcal{H}_2^{(2)}$ du hamiltonien le spectre

d'excitation comme dans la référence [32] :

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{q}} &= \left(\frac{2\mu}{3}\right)^{1/2} q \left[1 - \pi^2(2\xi_B)^{1/2} \left(c_1 + \frac{3}{2}c_2\right) \left(\frac{q}{k_F}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + o(q^2) \right] \\ &\equiv cq \left[1 + \frac{\gamma}{8} \left(\frac{\hbar q}{mc}\right)^2 + o(q^2) \right] \end{aligned} \quad (165)$$

et le développement modal des champs dans le volume de quantification L^3 :

$$\Pi(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \Pi_{\mathbf{q}}(b_{\mathbf{q}} + b_{-\mathbf{q}}^*) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (166)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \phi_{\mathbf{q}}(b_{\mathbf{q}} - b_{-\mathbf{q}}^*) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (167)$$

avec les amplitudes

$$\Pi_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{A_{\mathbf{q}}}{B_{\mathbf{q}}}\right)^{1/4} \quad (168)$$

$$\phi_{\mathbf{q}} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{A_{\mathbf{q}}}{B_{\mathbf{q}}}\right)^{-1/4} \quad (169)$$

$$\frac{A_{\mathbf{q}}}{B_{\mathbf{q}}} = \frac{75}{8}(c_0\mu q)^2 \left[1 + \frac{8\mu^{-1}}{15c_0} \left(c_1 - \frac{3}{2}c_2\right) q^2 + o(q^2) \right] \quad (170)$$

En effet, $\begin{pmatrix} \Pi_{\mathbf{q}} \\ \phi_{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -A_{\mathbf{q}} \\ B_{\mathbf{q}} & 0 \end{pmatrix}$ avec la valeur propre $-i\omega_{\mathbf{q}}$. Soulignons que ce ne sont pas les mêmes combinaisons linéaires des constantes c_1 et c_2 qui apparaissent dans le spectre (165) et dans les amplitudes des modes (170). Ensuite, en injectant la décomposition modale dans les termes cubiques $\mathcal{H}_3^{(0)} + \mathcal{H}_3^{(2)}$ du hamiltonien et en isolant les termes de Beliaev $2 \leftrightarrow 1$ comme nous l'avons fait dans l'équation (89), nous obtenons les amplitudes de couplage de Beliaev sur la couche de masse au premier ordre au-delà de l'hydrodynamique :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{Cdm}}^{2 \leftrightarrow 1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \mathbf{q}) &= -\frac{\sqrt{2}}{3} (\dot{\omega}_q \dot{\omega}_k \dot{\omega}_{k'})^{1/2} \\ &\quad \times \left[1 - \frac{7\gamma}{32} (\dot{\omega}_q^2 + \dot{\omega}_k^2 + \dot{\omega}_{k'}^2) + o(\dot{\omega}_q^2) \right] \end{aligned} \quad (171)$$

De façon remarquable, c'est cette fois la même combinaison linéaire de c_1 et c_2 que celle du spectre qui apparaît, avec $\gamma = -\frac{64}{45c_0} \left(c_1 + \frac{3}{2}c_2\right)$.

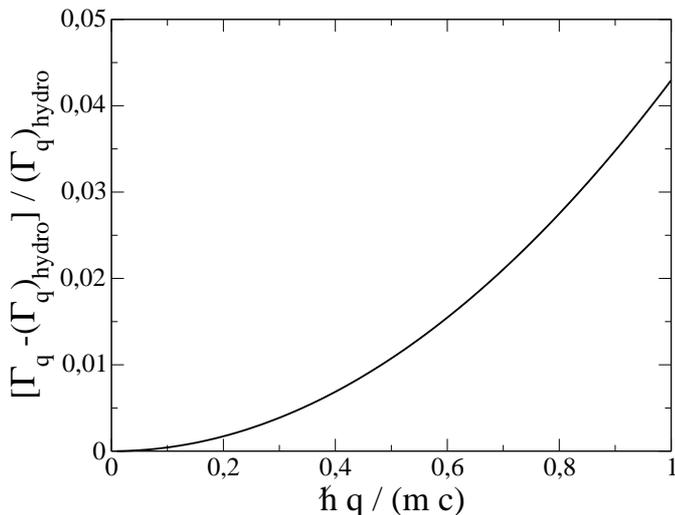


FIGURE 5: En valeur relative, première correction (179) à la prédiction hydrodynamique sur le taux d'amortissement des phonons du gaz unitaire à température nulle. On a pris pour le paramètre de courbure la prédiction de la RPA $\gamma \simeq 0,083769$ et pour le paramètre de Bertsch la valeur expérimentale $\xi_B \simeq 0,376$ de la référence [17].

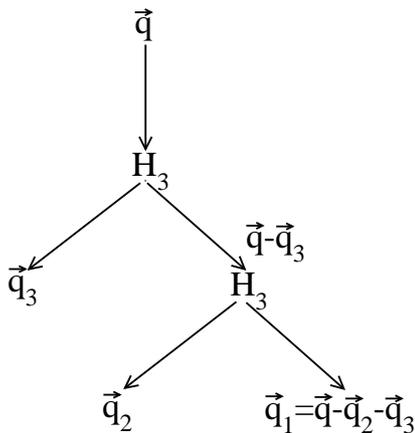


FIGURE 6: Processus de couplage effectif $1 \rightarrow 3$ du second ordre en \hat{H}_3 avec émission d'un phonon virtuel. Dans le cas d'une relation de dispersion de départ convexe, il contribue à l'ordre $(\hbar q/mc)^7$ au taux de décroissance à $T = 0$ d'un phonon de faible vecteur d'onde \mathbf{q} lorsque les phonons \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 et \mathbf{q}_3 sont émis avec un petit angle $O(\hbar q/mc)$ par rapport à \mathbf{q} , comme le montre un simple comptage de puissances (voir le texte), et il doit être ajouté au résultat (176), comme on le vérifie dans l'annexe B par un calcul explicite.

2. Taux d'amortissement des phonons dans le gaz unitaire à $T = 0$

À l'ordre trois en q , nous pouvons mettre le spectre d'excitation sous une forme de Bogolioubov :

$$\check{\omega}_q = \check{q} \left(1 + \frac{\gamma}{4} \check{q}^2 \right)^{1/2} \quad (172)$$

et donc réutiliser le résultat (A14) de l'appendice A de la référence [50] pour effectuer l'intégration angulaire dans l'équation (133),

$$\begin{aligned} (\Gamma_q^{\text{Bel}})^{\text{Unitary gas}} &= \left(\frac{mc^2}{\pi \hbar} \right) \left(\frac{mc}{\hbar \rho^{1/3}} \right)^3 \\ &\int_0^{\check{q}} d\check{k} |\mathcal{A}_{\text{Cdm}}^{2\leftrightarrow 1}(k, k'; q)|^2 \frac{\check{k}}{\check{q}} \frac{\check{\omega}_q - \check{\omega}_k}{[1 + \gamma(\check{\omega}_q - \check{\omega}_k)^2]^{1/2}} \quad (173) \end{aligned}$$

où nous avons tenu compte du fait que l'amplitude de couplage (171), dans laquelle $\check{\omega}_{k'} = \check{\omega}_q - \check{\omega}_k$, dépend seulement du module des vecteurs d'onde. À l'aide du changement de variable $\kappa \equiv \check{k}/\check{q}$, nous mettons $[(\Gamma_q^{\text{Bel}})^{\text{Unitary gas}} \gamma^2/\check{q}]$ sous la forme d'une intégrale sur $\kappa \in [0, 1]$ d'une fonction de κ et du petit paramètre $\gamma \check{q}^2$. En développant cette fonction en puissances de $\gamma \check{q}^2$ jusqu'à l'ordre trois sous-dominant, puis en effectuant l'intégration sur κ , nous obtenons le résultat provisoire

$$\begin{aligned} (\Gamma_q^{\text{Bel}})^{\text{gaz unitaire}}_{\text{prov}} &\underset{q \rightarrow 0}{=} \left(\frac{2}{9\pi} \right) \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right) \left(\frac{mc}{\hbar \rho^{1/3}} \right)^3 \\ &\times \frac{\check{q}^5}{30} \left[1 - \frac{25}{112} \gamma \check{q}^2 + o(\check{q}^2) \right] \quad (174) \end{aligned}$$

Le terme sous-dominant de notre résultat provisoire (174) diffère, même en signe, de celui de la référence [9] : il correspond à une réduction du taux d'amortissement par rapport au résultat hydrodynamique plutôt qu'à une augmentation. Ce désaccord est surprenant car notre calcul et celui de [9] ont été effectués dans le même esprit et avec la même méthodologie. Il pourrait résulter du fait que la dépendance de $\mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}$ en γ a été en définitive négligée dans la référence [9], alors qu'elle donne une contribution du même ordre que la dépendance du spectre en γ .

Avant d'accepter le résultat (174), il est prudent de se demander quelle correction y apporterait le fait que l'état à un phonon considéré est instable, de largeur $\hbar \Gamma_{\mathbf{q}}/2$, si bien que l'énergie, lors du processus de décroissance à deux phonons, n'est certainement pas conservée de manière exacte, contrairement à ce que suppose la distribution de Dirac dans l'équation (133). Afin d'estimer l'ordre de grandeur de cet effet, nous remplaçons le Dirac par une lorentzienne de mi-largeur $\Gamma_{\mathbf{q}}/2$,

$$\pi \delta(\omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}}) \rightarrow \frac{\Gamma_{\mathbf{q}}/2}{(\omega_{\mathbf{q}'} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} - \omega_{\mathbf{q}})^2 + \Gamma_{\mathbf{q}}^2/4} \quad (175)$$

où $\Gamma_{\mathbf{q}}$ peut être assimilé à son terme dominant en q^5 . Nous trouvons alors que ceci conduit, dans la limite $q \rightarrow 0$, à une modification de $\Gamma_{\mathbf{q}}$ à l'ordre q^7 [59].

Nous allons au-delà de ce calcul heuristique dans l'annexe B. À l'aide de la résolvante du hamiltonien, nous écrivons à l'ordre de Beliaev une équation autocohérente sur l'énergie complexe $z_{\mathbf{q}} = \hbar\omega_{\mathbf{q}} - i\hbar\Gamma_{\mathbf{q}}/2$ du phonon \mathbf{q} . Si l'on remplace dans la partie implicite de l'équation $z_{\mathbf{q}}$ par son approximation d'ordre zéro $\hbar\omega_{\mathbf{q}} + i\eta$, on retrouve exactement (174). Si l'on effectue une itération d'autocohérence, c'est-à-dire que l'on prend pour $-2\text{Im} z_{\mathbf{q}}/\hbar$ son approximation hydrodynamique habituelle (158), on obtient le résultat définitif à l'ordre de Beliaev :

$$\begin{aligned} (\Gamma_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}})^{\text{gaz unitaire}} &= \left(\frac{2}{9\pi}\right) \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right) \left(\frac{mc}{\hbar\rho^{1/3}}\right)^3 \\ &\times \frac{\check{q}^5}{30} \left[1 - \frac{25}{112}\gamma\check{q}^2 + \frac{4\sqrt{3}\xi_B^{3/2}}{243\gamma}\check{q}^2 + o(\check{q}^2) \right] \end{aligned} \quad (176)$$

Pour terminer, et rendre le résultat (176) rigoureux, il faut vérifier qu'aucun processus d'ordre plus élevé que le processus de Beliaev $1 \rightarrow 2$ ne fournit de contribution en \check{q}^7 . Un candidat naturel est le processus de décroissance en cascade représenté sur la figure 6, qui enchaîne deux processus $1 \rightarrow 2$ induits par le hamiltonien cubique \hat{H}_3 et conduit à une amplitude de couplage effective $1 \rightarrow 3$ du second ordre avec un phonon virtuel [60]. Cherchons à estimer le changement correspondant de l'énergie complexe du phonon \mathbf{q} en traitant ce couplage effectif $1 \rightarrow 3$ au second ordre de la théorie des perturbations.

À première vue, le résultat est $O(\check{q}^9)$ donc négligeable. Il faut en effet intégrer sur deux vecteurs d'onde de phonons émis indépendants, par exemple \mathbf{q}_2 et \mathbf{q}_3 , le troisième \mathbf{q}_1 étant imposé par la conservation de l'impulsion. Comme les nombres d'onde q_i sont d'ordre q , ceci sort déjà un facteur q^6 . Vient ensuite le produit de quatre éléments de matrice de \hat{H}_3 , puisque le couplage effectif $1 \rightarrow 3$ contient deux éléments de matrice en facteur et qu'il est traité au second ordre; voilà qui ajoute un facteur global $(q^{3/2})^4 = q^6$. Enfin, viennent en facteur trois dénominateurs d'énergie, l'un issu de la formule des perturbations au second ordre et les deux autres provenant de celui du couplage effectif $1 \rightarrow 3$ traité au second ordre; comme les énergies des phonons sont d'ordre $\hbar cq$, il vient un facteur q^3 au dénominateur. Le tout est $O(\check{q}^9)$ comme nous l'annoncions.

Cependant, le raisonnement précédent ignore l'exaltation due aux petits dénominateurs d'ordre q^3 , qui se produit lorsque les vecteurs d'onde \mathbf{q}_i sont émis vers l'avant, avec de petits angles θ_i par rapport à \mathbf{q} , et qui joue un rôle crucial dans la section VC. Dans le cas limite où \mathbf{q} et les \mathbf{q}_i sont tous colinéaires et de même sens, la conservation de l'impulsion impose

$$q = q_1 + q_2 + q_3 \quad (177)$$

si bien que la différence d'énergie $\hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\hbar\omega_{\mathbf{q}_1} + \hbar\omega_{\mathbf{q}_2} + \hbar\omega_{\mathbf{q}_3})$ n'est plus d'ordre q mais d'ordre q^3 , compte tenu

du terme cubique dans la relation de dispersion (63). Cette conclusion s'étend à tous les dénominateurs d'énergie et perdure tant que les angles d'émission sont $O(\check{q})$. En effet, $q_1 = |\mathbf{q} - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3|$ varie en valeur relative au second ordre en les angles d'émission θ_2 et θ_3 avec des coefficients d'ordre \check{q}^0 , de même que la relation de dispersion vraie dévie en valeur relative de celle de l'hydrodynamique au second ordre en \check{q} .

Affinons donc l'estimation naïve $O(\check{q}^9)$ précédente, en tenant compte de l'intégration sur \mathbf{q}_2 et \mathbf{q}_3 dans des cônes d'ouverture angulaire $O(\check{q})$ autour de \mathbf{q} . Chaque cône occupe un angle solide $O(\check{q}^2)$ donc on perd un facteur q^4 dans l'intégration sur les angles polaires. En revanche, on gagne un facteur q^{-2} pour chaque dénominateur d'énergie, donc un facteur global q^{-6} . On prédit désormais un changement d'énergie complexe d'ordre \check{q}^7 , du même ordre que la correction à l'hydrodynamique dans l'équation (176).

Dans l'annexe B, nous calculons donc explicitement la contribution au taux de décroissance $\Gamma_{\mathbf{q}}$ des couplages effectifs $1 \rightarrow 3$ traités au second ordre. Nous trouvons que son expression, une intégrale quintuple assez rébarbative, conduit à

$$\begin{aligned} (\Gamma_{\mathbf{q}}^{1 \rightarrow 3})^{\text{gaz unitaire}} &= \left(\frac{2}{9\pi}\right) \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right) \left(\frac{mc}{\hbar\rho^{1/3}}\right)^3 \\ &\times \frac{\check{q}^5}{30} \left[-\frac{2\sqrt{3}\xi_B^{3/2}}{567\gamma}\check{q}^2 + o(\check{q}^2) \right] \end{aligned} \quad (178)$$

Dans la même annexe, nous vérifions qu'aucun autre processus, d'ordre arbitrairement élevé en \hat{H}_3 , \hat{H}_4 , etc, n'est susceptible de contribuer à l'ordre \check{q}^7 à $\Gamma_{\mathbf{q}}$, même en tirant parti de petits dénominateurs en q^3 . Aussi pouvons-nous additionner les contributions (176) et (178) pour obtenir

$$\begin{aligned} (\Gamma_{\mathbf{q}})^{\text{gaz unitaire}} &\underset{q \rightarrow 0}{=} \left(\frac{2}{9\pi}\right) \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right) \left(\frac{mc}{\hbar\rho^{1/3}}\right)^3 \\ &\times \frac{\check{q}^5}{30} \left[1 - \frac{25}{112}\gamma\check{q}^2 + \frac{22\sqrt{3}\xi_B^{3/2}}{1701\gamma}\check{q}^2 + o(\check{q}^2) \right] \end{aligned} \quad (179)$$

un résultat exact à mettre au nombre des succès de cet article.

VI. CONCLUSION

Nous avons présenté dans cet article une étude complète des processus d'interaction entre phonons dans des gaz de fermions froids à basse température, pour une interaction entre fermions de force quelconque donc aussi bien pour une relation de dispersion des phonons concave que convexe aux faibles nombres d'onde q . Ceci nous a permis de clarifier les conditions de validité des théories effectives de basse énergie, telles que l'hydrodynamique, en les comparant à une approche microscopique tenant

compte des degrés de liberté internes des paires. Ces théories effectives ne prédisent correctement les amplitudes de couplage entre phonons que sur la couche de masse.

Un des principaux apports de cette étude est l'obtention microscopique de l'amplitude de couplage $2 \leftrightarrow 2$. En effet, son expression au second ordre de la théorie des perturbations inclut des processus non résonnants $2 \leftrightarrow 1$ et $3 \leftrightarrow 0$. Comme ces processus peuvent en fait être résonnants dans un traitement hydrodynamique, où le spectre d'excitation est linéaire, Landau et Khalatnikov ont dû introduire à la main un terme de courbure dans la relation de dispersion, afin d'éviter une divergence de l'amplitude de couplage. À première vue, cette procédure est risquée puisque, comme nous l'avons dit, l'hydrodynamique quantique ne prédit pas correctement l'amplitude des processus non résonnants (donc hors de la couche de masse). Afin d'y apporter une justification microscopique, sans avoir à effectuer les calculs très lourds que requerrait notre approche microscopique fermionique, nous nous sommes rabattus sur un modèle de bosons en interaction faible, avec une portée de l'interaction conduisant à une relation de dispersion concave. Bien que les expressions microscopiques des amplitudes de couplage diffèrent de celles de l'hydrodynamique, nous trouvons, après sommation au second ordre de tous les processus non résonnants à trois phonons et sommation au premier ordre du processus $2 \leftrightarrow 2$ direct, et après restriction à la couche de masse du couplage $2 \leftrightarrow 2$ effectif résultant, que la prescription de Landau-Khalatnikov et la théorie microscopique sont en accord.

Enfin, nous avons donné des expressions universelles des taux d'amortissement pour les processus $2 \leftrightarrow 1$ et $2 \leftrightarrow 2$ à basse température. Le plus intéressant est l'obtention analytique, en fonction de q , du taux d'amortissement des phonons dans le cas concave, déterminé à l'ordre dominant en température par les processus $2 \leftrightarrow 2$, voir l'équation (154) et la Fig. 4, et qui devrait faire l'objet d'une lettre [51]. Dans les cas limites $\hbar cq \ll k_B T$ et $\hbar cq \gg k_B T$, notre résultat est en désaccord avec celui de la référence [1] et lui est sous-dominant par deux ordres en $\hbar cq/k_B T$. Ceci résulte de l'hypothèse erronée faite dans [1] que certains diagrammes d'interaction sont négligeables, alors qu'en fait ils interfèrent destructivement avec le diagramme supposé être dominant. Nous avons aussi calculé, pour le gaz unitaire à température nulle, la première correction $\propto q^7$ à la prédiction hydrodynamique $\propto q^5$ sur le taux d'amortissement d'un phonon unique, ce qui permet d'affiner la prédiction de [9] par (i) inclusion véritable d'une amplitude de couplage au-delà de l'hydrodynamique [32], (ii) prise en compte d'une conservation de l'énergie à $\hbar\Gamma_{\mathbf{q}}$ près dans la règle d'or de Fermi, c'est-à-dire d'un terme imaginaire pur d'ordre q^5 dans le dénominateur d'énergie de la théorie des perturbations, et (iii) prise en compte des processus d'ordre plus élevé que Beliaev, en particulier du processus de couplage effectif $1 \rightarrow 3$ traité au second ordre.

Toutes nos prédictions peuvent être vérifiées en laboratoire, dans l'état de l'art des expériences sur les gaz

d'atomes fermioniques froids. En particulier, une discussion précise de l'observabilité de l'amortissement de Landau-Khalatnikov $2 \leftrightarrow 2$ avec des atomes froids piégés dans un potentiel à fond plat est présentée dans la référence [51].

Annexe A: Fractions rationnelles en x et y apparaissant dans l'amplitude des processus à trois phonons

Les fractions rationnelles en x et y intervenant dans l'expression (77) de l'amplitude de diffusion microscopique valent

$$J(x, y) = \frac{3xy}{2xy + 2} \quad (\text{A1})$$

$$A(x, y) = \frac{\sum_{i=0}^3 A_i(y)x^i}{360(x^3 + x)(y^2 + 1)^3} \quad (\text{A2})$$

$$B(x, y) = \frac{\sum_{i=0}^3 B_i(y)x^i}{18(x^3 + x)(y^2 + 1)^2} \quad (\text{A3})$$

$$C(x, y) = \frac{y(xy + 1)}{6(x^3 + x)(y^2 + 1)^2} \times [x^2(5y^2 + 3) - xy(y^2 - 3) + 2(y^2 + 2)] \quad (\text{A4})$$

avec

$$A_0(y) = -20y(5y^4 + 5y^2 + 2) \quad (\text{A5})$$

$$A_1(y) = 2(10y^6 + 109y^4 + 63y^2 + 24) \quad (\text{A6})$$

$$A_2(y) = -y(53y^4 + 186y^2 + 13) \quad (\text{A7})$$

$$A_3(y) = 25y^6 + 116y^4 + 167y^2 + 36 \quad (\text{A8})$$

$$B_0(y) = -2y(3y^2 + 2) \quad (\text{A9})$$

$$B_1(y) = 3y^4 + 17y^2 + 8 \quad (\text{A10})$$

$$B_2(y) = -2y(y^2 + 4) \quad (\text{A11})$$

$$B_3(y) = 4y^4 + 11y^2 + 9 \quad (\text{A12})$$

Leurs valeurs dans la limite CBE $x \rightarrow 0, y \sim -4/x$, utiles pour raccorder le résultat (77) à son équivalent dans la théorie de Bogolioubov sont

$$A(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{y \sim -4/x} \frac{1}{8} \quad B(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{y \sim -4/x} \frac{1}{4} \quad (\text{A13})$$

$$J(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{y \sim -4/x} 2 \quad C(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{y \sim -4/x} \frac{3}{4}$$

Pour des processus résonnants, ces fractions rationnelles se combinent pour donner le coefficient thermodynamique

$$1 + \frac{\rho}{3} \frac{d^2\mu}{d\rho^2} \left(\frac{d\mu}{d\rho} \right)^{-1} = \frac{\sum_{i=0}^3 D_i(y)x^i}{9(x^3 + x)(y^2 + 1)^2} \quad (\text{A14})$$

avec

$$D_0(y) = -4y^3 \quad (\text{A15})$$

$$D_1(y) = 4(y^4 + 6y^2 + 2) \quad (\text{A16})$$

$$D_2(y) = -y(y^4 - 6y^2 + 5) \quad (\text{A17})$$

$$D_3(y) = 9y^4 + 14y^2 + 9 \quad (\text{A18})$$

Annexe B: Contribution de Beliaev et des processus d'ordre supérieur dans le taux de décroissance d'un phonon à $T = 0$

1. Présentation du problème et lien avec la résolvante

On considère ici le taux de décroissance $\Gamma_{\mathbf{q}}$ d'un phonon de vecteur d'onde \mathbf{q} préparé à température nulle dans un gaz spatialement homogène de fermions présentant une branche d'excitation phononique $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ convexe au voisinage de $q = 0$. La problématique générale est de déterminer le comportement de $\Gamma_{\mathbf{q}}$ dans la limite $q \rightarrow 0$, où l'on peut utiliser une théorie effective de basse énergie pour décrire le couplage entre les phonons. Le processus dominant est bien entendu celui $1 \rightarrow 2$ de Beliaev ; en introduisant un paramètre sans dimension $\gamma > 0$ décrivant aussi bien la correction en q^3 au spectre linéaire de l'hydrodynamique que la première correction à l'amplitude de couplage hydrodynamique $1 \rightarrow 2$, nous avons obtenu le résultat provisoire (174) jusqu'à l'ordre sous-dominant q^7 . Dans cette annexe, il s'agit de donner quelques détails sur l'obtention du résultat complet (176) à l'ordre de Beliaev et de voir dans quelle mesure les processus d'ordre supérieur à celui de Beliaev, en réalité le processus en cascade $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ de la figure 6, contribuent à l'ordre q^7 pour conduire à la correction (178) et au résultat final (179).

Dans le sous-espace de quantité de mouvement totale fixée $\hbar\mathbf{q}$, l'état à un phonon $|\mathbf{q}\rangle$ est le seul état discret, puisqu'il est le seul à être totalement caractérisé par la donnée d'un unique vecteur d'onde. C'est un état propre de la partie \hat{H}_2 du hamiltonien quadratique en les opérateurs de création \hat{b}^\dagger et d'annihilation \hat{b} de phonons. Cependant, il est couplé aux continua à deux phonons et plus par le reste du hamiltonien $\hat{V} = \hat{H}_3 + \hat{H}_4 + \dots$, qui contient des termes cubiques, quartiques, etc, écrits dans l'ordre normal vis-à-vis des \hat{b} . L'état discret va donc génériquement se diluer dans les continua et donner naissance à un pôle complexe $z_{\mathbf{q}}$ dans le prolongement analytique de la résolvante $\hat{G}(z) = (z - \hat{H})^{-1}$ du hamiltonien complet [43]. Ce pôle s'écrit

$$z_{\mathbf{q}} = \hbar\omega_{\mathbf{q}} - i\frac{\hbar\Gamma_{\mathbf{q}}}{2} \quad (\text{B1})$$

où $\omega_{\mathbf{q}}$ est la pulsation propre du phonon et $\Gamma_{\mathbf{q}}$ son taux de décroissance [61].

2. Calcul perturbatif et comptage de puissances

La limite $q \rightarrow 0$ correspond au régime de couplage faible. On le voit bien dans la théorie de l'hydrodynamique quantique : le développement des fluctuations de densité $\delta\hat{\rho}$ et de vitesse $\hat{\mathbf{v}}$ sur les modes de phonons fait apparaître des coefficients s'annulant en $q^{1/2}$ si bien que les éléments de matrice de \hat{H}_p entre états de Fock de phonons s'annulent en $q^{p/2}$:

$$\hat{H}_p \underset{q \rightarrow 0}{\approx} q^{p/2} \quad (\text{B2})$$

On peut donc tenter un calcul perturbatif de $\Gamma_{\mathbf{q}}$, en partant de l'écriture exacte obtenue par la méthode des projecteurs [43]

$$\langle \mathbf{q} | \hat{G}(z) | \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{z - \langle \mathbf{q} | \hat{H}_{\text{eff}}(z) | \mathbf{q} \rangle} \quad (\text{B3})$$

puis en développant en puissances de \hat{V} l'élément de matrice du hamiltonien effectif dans l'état $|\mathbf{q}\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} | H_{\text{eff}}(z) | \mathbf{q} \rangle &= \langle \mathbf{q} | \hat{H}_2 | \mathbf{q} \rangle + \langle \mathbf{q} | \hat{V} \hat{Q} \frac{\hat{Q}}{z\hat{Q} - \hat{Q}\hat{H}_2\hat{Q}} \hat{Q} \hat{V} | \mathbf{q} \rangle \\ &+ \langle \mathbf{q} | \hat{V} \hat{Q} \frac{\hat{Q}}{z\hat{Q} - \hat{Q}\hat{H}_2\hat{Q}} \hat{Q} \hat{V} \hat{Q} \frac{\hat{Q}}{z\hat{Q} - \hat{Q}\hat{H}_2\hat{Q}} \hat{Q} \hat{V} | \mathbf{q} \rangle + \dots \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

où $\hat{Q} = 1 - |\mathbf{q}\rangle\langle\mathbf{q}|$ projette orthogonalement à $|\mathbf{q}\rangle$. Le résultat (176) correspond au second terme du second membre, le terme de Beliaev, dans lequel la contribution de \hat{V} se réduit à celle de \hat{H}_3 . Dans tous les termes successifs d'ordre > 2 en \hat{V} , z peut être approximé au dénominateur par

$$z = \hbar\omega_{\mathbf{q}} + i\eta, \eta \rightarrow 0^+, \quad (\text{B5})$$

le déplacement de z par une partie imaginaire en $O(q^5)$ dans ces termes ne contribuant pas à $\Gamma_{\mathbf{q}}$ à l'ordre q^7 . Il n'en va pas de même dans le terme de Beliaev, comme nous le verrons dans la sous-section B3.

Considérons dans (B4) le terme \mathcal{T}_n d'ordre n en \hat{V} et cherchons à majorer son ordre en q , comme dans le raisonnement simple du paragraphe qui suit l'équation (176). Compte tenu de (B2), il faut garder autant que possible dans les facteurs \hat{V} la contribution de \hat{H}_3 , à défaut celle de \hat{H}_4 . Comme \hat{H}_3 change la parité du nombre de phonons, alors que \hat{H}_4 la conserve, on ne gardera que des facteurs \hat{H}_3 si n est pair, mais il faudra caser au moins un facteur \hat{H}_4 si n est impair. Par ailleurs, le nombre minimal de vecteurs d'onde indépendants caractérisant les phonons virtuels est $n/2$ pour n pair, $(n+1)/2$ pour n impair, l'intégration sur chaque vecteur d'onde indépendant sortant un facteur q^3 . Enfin, on compte un facteur $1/q$ pour chacun des $n-1$ dénominateurs d'énergie. Ceci conduit à

$$\mathcal{T}_n = O(q^{2n+1}) \quad \text{si } n \text{ pair} \quad (\text{B6})$$

$$\mathcal{T}_n = O(q^{2n+3}) \quad \text{si } n \text{ impair} \quad (\text{B7})$$

On tend alors à conclure sans surprise que les processus au-delà de Beliaev, c'est-à-dire d'ordre $n \geq 3$ en \hat{V} , ont une contribution $O(q^9)$ négligeable à $\Gamma_{\mathbf{q}}$.

Le raisonnement simple précédent ne prend pas en compte la possibilité que les dénominateurs d'énergie soient d'ordre q^3 . Pour que ceci se produise, il faut que les dénominateurs puissent être résonnants. Il faut donc garder dans \hat{H}_3 seulement les termes en $\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b}$, qui en forment la partie ascendante $\hat{H}_3^{(+)}$, ou les termes en $\hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b}$, qui en forment la partie descendante $\hat{H}_3^{(-)}$. Les autres termes en $\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger$ et $\hat{b} \hat{b} \hat{b}$ induisent des processus non résonnants. Dans \hat{H}_4 , on se limitera aux $\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b}$, qui sont les termes potentiellement résonnants les plus favorables puisqu'ils n'ajoutent qu'un seul vecteur d'onde indépendant. Pour que tous les dénominateurs d'énergie soient en q^3 , il faut aussi que tous les vecteurs d'onde indépendants soient émis presque vers l'avant, dans un petit cône d'ouverture angulaire $O(q)$ autour de la direction de \mathbf{q} . L'intégration sur les angles solides fait sortir un facteur pénalisant q^2 par vecteur d'onde indépendant, soit q^n pour n pair et q^{n+1} pour n impair, mais l'on gagne un facteur $q^{-2(n-1)}$ grâce aux $n-1$ petits dénominateurs. Ceci conduit aux majorations affinées

$$\mathcal{T}_n = O(q^{n+3}) \text{ si } n \text{ pair} \quad (\text{B8})$$

$$\mathcal{T}_n = O(q^{n+6}) \text{ si } n \text{ impair} \quad (\text{B9})$$

On en déduit que l'ordre 4 en \hat{V} , et lui seul, est susceptible de corriger le terme en q^7 de $\Gamma_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}}$ de l'équation (176). Il fait l'objet d'une analyse détaillée dans la sous-section B4. On confirme aussi que l'ordre 2 en \hat{V} a une contribution dominante à $\Gamma_{\mathbf{q}}$ en q^5 . Ceci ne nous dispense pas d'une étude rigoureuse de ses contributions sous-dominantes jusqu'à l'ordre q^7 , effectuée dans la sous-section B3.

3. Étude à l'ordre 2 en \hat{V}

Nous tronquons ici le hamiltonien effectif dans l'équation (B4) à l'ordre 2 en \hat{V} et voyons quelle valeur de $\Gamma_{\mathbf{q}}$ en résulte à l'ordre q^7 .

À cet ordre en \hat{V} correspondent en réalité plusieurs diagrammes puisque $\hat{V} = \hat{H}_3 + \hat{H}_4 + \hat{H}_5 + \dots$, dont on peut estimer l'ordre dominant par comptage de puissances. Si les deux facteurs \hat{V} sont égaux à \hat{H}_3 , il faut intégrer sur au moins un vecteur d'onde indépendant et l'ordre dominant est q^5 comme dans l'équation (B8). S'ils sont égaux à \hat{H}_4 , il faut intégrer sur au moins deux vecteurs d'onde indépendants et l'ordre dominant est q^9 sans l'effet « petit dénominateur », pas mieux avec l'effet « petit dénominateur ». Si l'un des facteurs \hat{V} fait intervenir \hat{H}_p , $p \geq 5$, la contribution est encore plus négligeable. On peut donc se limiter ici à $\hat{V} = \hat{H}_3$, et même à $\hat{V} = \hat{H}_3^{(\pm)}$ puisque les termes non résonnants en $\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger$ et $\hat{b} \hat{b} \hat{b}$ de \hat{H}_3 font intervenir deux vecteurs indépendants et contribuent en $O(q^8)$.

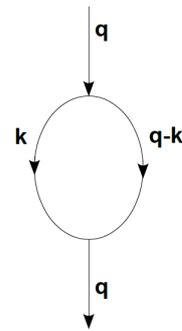


FIGURE 7: Le diagramme d'ordre 2 en \hat{V} contribuant au taux d'amortissement $\Gamma_{\mathbf{q}}$ du phonon \mathbf{q} à l'ordre q^7 . Il constitue le processus de Beliaev d'ordre dominant q^5 . Sur la figure, chaque vertex correspond à une action de $\hat{H}_3^{(\pm)}$.

Il reste ainsi un seul diagramme, celui de Beliaev, représenté sur la figure 7. Introduisons la fonction énergie propre correspondante, dite de Beliaev, pour tout nombre complexe z de $\text{Im } z > 0$:

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}}(z) &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|\langle \mathbf{k}, \mathbf{q} - \mathbf{k} | \hat{H}_3^{(+)} | \mathbf{q} \rangle|^2}{z - (\epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})} \\ &= \frac{2(mc^2)^2}{\rho} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{[\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{k}, \mathbf{q} - \mathbf{k}; \mathbf{q})]^2}{z - (\epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{k}})} \end{aligned} \quad (\text{B10})$$

où nous sommes passés à la limite thermodynamique et avons utilisé la forme (89) du hamiltonien hydrodynamique. À cet ordre d'approximation, le pôle $z_{\mathbf{q}}$ associé au phonon \mathbf{q} est solution de l'équation implicite

$$z_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}} = \epsilon_{\mathbf{q}} + \Delta \epsilon_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}\downarrow}(z_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}}) \quad (\text{B11})$$

où la flèche vers le bas indique le prolongement analytique de la fonction énergie propre du demi-plan supérieur $\text{Im } z > 0$ au demi-plan inférieur $\text{Im } z < 0$ à travers la ligne de coupure située sur l'axe réel positif. Séparons $z_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}}$ en partie réelle et partie imaginaire comme dans (B1) et développons le second membre en puissances de $\Gamma_{\mathbf{q}}$:

$$z_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}} = \epsilon_{\mathbf{q}} + \Delta \epsilon_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}\downarrow}(\epsilon_{\mathbf{q}}) - \frac{i\hbar\Gamma_{\mathbf{q}}}{2} \frac{d}{dz} \Delta \epsilon_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}\downarrow}(\epsilon_{\mathbf{q}}) + O(\tilde{q}^9) \quad (\text{B12})$$

Il suffit ici de tronquer le développement de Taylor à l'ordre un; en revanche, l'ordre zéro ne suffit pas [62]. Les valeurs du prolongement analytique et de sa dérivée en $\epsilon_{\mathbf{q}}$ s'obtiennent comme limites lorsque $\eta \rightarrow 0^+$ des fonctions non prolongées en $z = \epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta$:

$$z_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}} = \epsilon_{\mathbf{q}} + \Delta \epsilon_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}}(\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta) - \frac{i\hbar\Gamma_{\mathbf{q}}}{2} \frac{d}{dz} \Delta \epsilon_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}}(\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta) + O(\tilde{q}^9) \quad (\text{B13})$$

Le deuxième terme est le résultat perturbatif ordinaire. Il conduit au taux d'amortissement $\Gamma_{\mathbf{q},\text{pert}}^{\text{Bel}}$ donné par la limite à température nulle de l'équation (133),

$$\frac{\hbar\Gamma_{\mathbf{q},\text{pert}}^{\text{Bel}}}{2} = -\text{Im} \Delta \epsilon_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}}(\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta) \quad (\text{B14})$$

et sa valeur pour le gaz unitaire a été calculée jusqu'à l'ordre q^7 dans l'équation (174). Après prise de la partie imaginaire dans l'équation (B13), nous trouvons cependant un facteur correctif non négligeable à cet ordre, premier effet d'une autocohérence en $z_{\mathbf{q}}$ dans l'équation implicite (B11) :

$$\Gamma_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}} = \Gamma_{\mathbf{q},\text{pert}}^{\text{Bel}} \left[1 + \text{Re} \frac{d}{dz} \Delta \epsilon_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}}(\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta) + O(\check{q}^4) \right] \quad (\text{B15})$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \Delta \epsilon_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}}(\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta) &= -\frac{2(mc^2)^2}{\rho} \\ &\times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{k}, \mathbf{q} - \mathbf{k}; \mathbf{q})]^2}{(\epsilon_{\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} + i\eta)^2} \quad (\text{B16}) \end{aligned}$$

Pour obtenir un équivalent de cette dérivée lorsque $\check{q} \rightarrow 0$, nous appliquons la même technique que dans la section VC. Nous passons en coordonnées sphériques d'axe polaire la direction de \mathbf{q} et effectuons les changements d'échelle $k = \bar{k}q$ et $\theta = \gamma^{1/2}\check{q}\check{\theta}$ sur le module et l'angle polaire du vecteur \mathbf{k} , avec $\bar{k} < 1$ pour bénéficier de l'effet « petit dénominateur ». Dans l'intégrande et donc dans l'amplitude de couplage (90), nous passons à la limite $\check{q} \rightarrow 0$ à \bar{k} et $\check{\theta}$ fixés, avec les résultats intermédiaires

$$|\mathbf{q} - \mathbf{k}| = q(1 - \bar{k}) \left[1 + \frac{\gamma \bar{k} \check{\theta}^2 \check{q}^2}{2(1 - \bar{k})^2} + O(\check{q}^4) \right] \quad (\text{B17})$$

$$\epsilon_{\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \sim \frac{\gamma \check{q}^3 mc^2}{8} \left[3\bar{k}(1 - \bar{k}) - \frac{4\bar{k}\check{\theta}^2}{1 - \bar{k}} \right] \quad (\text{B18})$$

$$[\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{k}, \mathbf{q} - \mathbf{k}; \mathbf{q})]^2 \sim \frac{2}{9} \check{q}^3 \bar{k}(1 - \bar{k}) \quad (\text{B19})$$

compte tenu du fait que $1 + \Lambda_{\text{F}} = 8/9$ à la limite unitaire. L'intégration par rapport à θ sur $[0, +\infty[$ est immédiate après le changement de variable $X = \theta^2$, et il reste

$$\frac{d}{dz} \Delta \epsilon_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}}(\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta) \sim \frac{8\check{q}^2}{9\pi^2\gamma} \left(\frac{mc}{\hbar\rho^{1/3}} \right)^3 \int_0^1 d\bar{k} \frac{\bar{k}^2(1 - \bar{k})^2}{3\bar{k}(1 - \bar{k}) + i\eta} \quad (\text{B20})$$

Le théorème de convergence dominée nous autorise à faire tendre η vers zéro sous le signe intégral pour obtenir le résultat (176), sachant que $\rho(\hbar/mc)^3 = \sqrt{3}/(\pi^2\xi_B^{3/2})$. Notons en passant que le fait que la dérivée par rapport à z

(B20) soit réelle à la limite $\eta \rightarrow 0^+$ signifie qu'un changement de la relation de dispersion réelle $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ à l'ordre q^5 est sans effet sur le taux de décroissance $\Gamma_{\mathbf{q}}$ à l'ordre q^7 , ce que la méthode de calcul de la sous-section VD2 montrait déjà.

4. Étude à l'ordre 4 en \hat{V}

Nous avons vu dans la sous-section B2 que l'ordre 4 en \hat{V} est susceptible de contribuer à $\Gamma_{\mathbf{q}}$ à l'ordre q^7 . Écrivons la correction correspondante $\delta\Gamma_{\mathbf{q}}$ en la limitant tout de suite à son ordre dominant, c'est-à-dire en gardant $\hat{H}_3^{(-)}$ dans les deux premiers facteurs \hat{V} et $\hat{H}_3^{(+)}$ dans les deux derniers, cet agencement étant imposé par la présence des projecteurs \hat{Q} :

$$-\frac{\hbar\delta\Gamma_{\mathbf{q}}}{2} = \text{Im} \langle \mathbf{q} | \hat{W}^{(-)} \frac{\hat{Q}}{\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - \hat{H}_2} \hat{W}^{(+)} | \mathbf{q} \rangle \quad (\text{B21})$$

où l'on a introduit, pour $\varepsilon = \pm$, l'opérateur de couplage effectif $1 \leftrightarrow 3$ au second ordre

$$\hat{W}^{(\varepsilon)} \equiv \hat{H}_3^{(\varepsilon)} \frac{\hat{Q}}{\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - \hat{H}_2} \hat{H}_3^{(\varepsilon)} \quad (\text{B22})$$

Dans ces expressions, on peut utiliser pour \hat{H}_3 l'approximation (89) qu'en donne l'hydrodynamique quantique, mais il faut inclure dans $\epsilon_{\mathbf{q}} = \hbar\omega_{\mathbf{q}}$ la correction cubique (63) au spectre linéaire de l'hydrodynamique. Comme les éléments de matrice de \hat{H}_3 sont réels dans la base de Fock, les matrices qui y représentent $\hat{W}^{(\pm)}$ sont transposées l'une de l'autre. Après injection d'une relation de fermeture dans le sous-espace à trois phonons, on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar\delta\Gamma_{\mathbf{q}}}{2} &= \text{Im} \frac{1}{3!} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3} \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3, \mathbf{q}} \\ &\times \frac{|\langle \mathbf{q} | \hat{W}^{(-)} | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3 \rangle|^2}{\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - (\epsilon_{\mathbf{q}_1} + \epsilon_{\mathbf{q}_2} + \epsilon_{\mathbf{q}_3})} \quad (\text{B23}) \end{aligned}$$

avec, compte tenu de l'équation (89),

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} | \hat{W}^{(-)} | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3 \rangle &= \frac{4(mc^2)^2}{\rho L^3} \left[\frac{\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3; \mathbf{q})}{\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - (\epsilon_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2} + \epsilon_{\mathbf{q}_3})} \right. \\ &+ \frac{\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3; \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) \mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_1; \mathbf{q})}{\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - (\epsilon_{\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3} + \epsilon_{\mathbf{q}_1})} + \left. \frac{\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3; \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3) \mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_2; \mathbf{q})}{\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - (\epsilon_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3} + \epsilon_{\mathbf{q}_2})} \right] \quad (\text{B24}) \end{aligned}$$

La contribution du premier terme entre crochets à l'élément de matrice, soit $P(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | \mathbf{q}_3)$, correspond au processus de la figure 6. Les deux autres, $P(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3 | \mathbf{q}_1)$ et $P(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3 | \mathbf{q}_2)$, s'en déduisent par permutation circulaire. Comme le reste du sommande dans (B23) est invariant par permutation des trois vecteurs d'onde, on peut remplacer son numérateur

$[P(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|\mathbf{q}_3) + P(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3|\mathbf{q}_1) + P(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3|\mathbf{q}_2)]^2$ par $3[P(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|\mathbf{q}_3)]^2 + 6P(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|\mathbf{q}_3)P(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3|\mathbf{q}_2)$, ce qui conduit à se ramener aux deux diagrammes de la figure 8 et à l'expression intégrale

$$-\frac{\hbar\delta\Gamma_{\mathbf{q}}}{2} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \text{Im} \frac{8(mc^2)^4}{\rho^2} \int \frac{d^3q_2 d^3q_3}{(2\pi)^6} \left\{ \frac{[\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3; \mathbf{q})]^2}{[\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - (\epsilon_{\mathbf{q}_1} + \epsilon_{\mathbf{q}_2} + \epsilon_{\mathbf{q}_3})][\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - (\epsilon_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2} + \epsilon_{\mathbf{q}_3})]^2} \right. \\ \left. + \frac{2\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3; \mathbf{q})\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3; \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3)\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_2; \mathbf{q})}{[\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - (\epsilon_{\mathbf{q}_1} + \epsilon_{\mathbf{q}_2} + \epsilon_{\mathbf{q}_3})][\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - (\epsilon_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2} + \epsilon_{\mathbf{q}_3})][\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - (\epsilon_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3} + \epsilon_{\mathbf{q}_2})]} \right\} \quad (\text{B25})$$

où l'on a éliminé la sommation sur \mathbf{q}_1 grâce à la conservation de l'impulsion, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q} - (\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3)$, avant de passer à la limite thermodynamique.

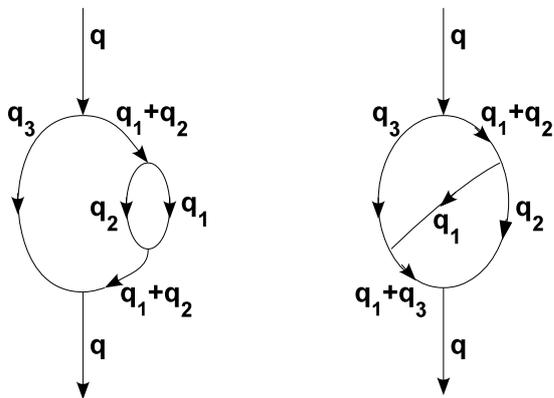


FIGURE 8: Les deux types de diagrammes d'ordre 4 en \hat{V} susceptibles de contribuer au taux d'amortissement $\Gamma_{\mathbf{q}}$ du phonon \mathbf{q} à l'ordre q^7 au travers de l'effet « petit dénominateur » en q^3 . Celui de gauche (I) est un processus de Beliaev avec correction à une boucle (donc elle aussi beliaevienne) de la pulsation propre des phonons virtuels. Celui de droite (II) est un processus de Beliaev enrichi par une interaction entre les phonons virtuels, elle-même médiée par l'échange d'un phonon. Chaque vertex correspond à une action de $\hat{H}_3^{(\pm)}$.

En pratique, l'intégration sur \mathbf{q}_2 et \mathbf{q}_3 s'effectue en coordonnées sphériques d'axe polaire \mathbf{q} . Pour évaluer la contribution à $\delta\Gamma_{\mathbf{q}}$ des cônes d'émission de \mathbf{q}_2 et \mathbf{q}_3 vers l'avant dans un angle $O(q)$, nous redimensionnons les angles polaires θ_i comme suit :

$$\check{\theta}_i = \frac{\theta_i}{\gamma^{1/2}\check{q}} \quad (\text{B26})$$

puis nous faisons tendre $\check{q} = \hbar q/mc$ vers 0 à $\check{\theta}_i$ fixés. Le calcul est proche de celui de la section VC. On utilise la représentation polaire (150). Les nombres d'onde q_i doivent être rééchelonnés par q , c'est-à-dire qu'on garde les $\bar{q}_i \equiv \frac{q_i}{q}$ fixés dans le passage à la limite, avec la contrainte issue de (177) et de la positivité de q_1 ,

$$\bar{q}_2 + \bar{q}_3 \leq 1 \quad (\text{B27})$$

Donnons comme seul intermédiaire de calcul un dénominateur d'énergie dans les éléments de matrice de $\hat{W}^{(-)}$,

$$\frac{\epsilon_{\mathbf{q}} - (\epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_3} + \epsilon_{\mathbf{q}_3})}{mc^2} \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} \frac{\gamma\check{q}^3}{2} \left[\frac{3}{4}\bar{q}_3(1 - \bar{q}_3) - \frac{\bar{q}_3 R^2 \sin^2 \alpha}{1 - \bar{q}_3} \right] + O(\check{q}^5) \quad (\text{B28})$$

et le dénominateur d'énergie du sous-espace à 3 phonons,

$$\frac{\epsilon_{\mathbf{q}} - (\epsilon_{\mathbf{q}_1} + \epsilon_{\mathbf{q}_2} + \epsilon_{\mathbf{q}_3})}{mc^2} \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} \frac{\gamma\check{q}^3}{2} (v - uR^2) + O(\check{q}^5) \quad (\text{B29})$$

dont les coefficients manifestement positifs (pour peu qu'on les écrive convenablement) ressemblent beaucoup à ceux des équations (152) et (153) :

$$u \equiv \frac{\bar{q}_2 \cos^2 \alpha + \bar{q}_3 \sin^2 \alpha - \bar{q}_2 \bar{q}_3 (1 - \cos \phi \sin 2\alpha)}{1 - \bar{q}_2 - \bar{q}_3} \\ = \frac{(\bar{q}_2 \cos \alpha - \bar{q}_3 \sin \alpha)^2 + \bar{q}_2 \bar{q}_3 (1 + \cos \phi) \sin 2\alpha}{1 - \bar{q}_2 - \bar{q}_3} + \bar{q}_2 \cos^2 \alpha + \bar{q}_3 \sin^2 \alpha \quad (\text{B30})$$

et

$$v \equiv \frac{1}{4} [1 - \bar{q}_2^3 - \bar{q}_3^3 - (1 - \bar{q}_2 - \bar{q}_3)^3] = \frac{3}{4} (1 - \bar{q}_2)(1 - \bar{q}_3)(\bar{q}_2 + \bar{q}_3) \quad (\text{B31})$$

On obtient finalement

$$-\frac{\hbar\delta\Gamma_{\mathbf{q}}}{2} \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} mc^2 \frac{[3(1 + \Lambda_F)]^4}{3 \times 2\pi} \frac{\check{q}^7}{2^8 \pi^4 \gamma} \left(\frac{mc}{\hbar \rho^{1/3}} \right)^6 \\ \times (\text{Im } I^{(\text{I})} + \text{Im } I^{(\text{II})}) + o(\check{q}^7) \quad (\text{B32})$$

avec le paramètre Λ_F défini à l'équation (79) et les intégrales quintuples, issues respectivement du diagramme de gauche (type I) et du diagramme de droite (type II) de la figure 8, à prendre dans la limite $\eta \rightarrow 0^+$:

$$I^{(I)} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^1 d\bar{q}_2 \int_0^{1-\bar{q}_2} d\bar{q}_3 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^{A^2/\bar{q}^2} dX \frac{3X \sin \alpha \cos \alpha (1 - \bar{q}_3)^2 (1 - \bar{q}_2 - \bar{q}_3) \bar{q}_2^3 \bar{q}_3^3}{2 (v - uX + i\eta) [\frac{3}{4} \bar{q}_3 (1 - \bar{q}_3) - \frac{\bar{q}_3 X \sin^2 \alpha}{1 - \bar{q}_3} + i\eta]^2} \quad (\text{B33})$$

$$I^{(II)} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^1 d\bar{q}_2 \int_0^{1-\bar{q}_2} d\bar{q}_3 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\alpha \times \int_0^{+\infty} \frac{dX}{2} \frac{6X \sin \alpha \cos \alpha (1 - \bar{q}_2)(1 - \bar{q}_3)(1 - \bar{q}_2 - \bar{q}_3) \bar{q}_2^3 \bar{q}_3^3}{(v - uX + i\eta) [\frac{3}{4} \bar{q}_2 (1 - \bar{q}_2) - \frac{\bar{q}_2 X \cos^2 \alpha}{1 - \bar{q}_2} + i\eta] [\frac{3}{4} \bar{q}_3 (1 - \bar{q}_3) - \frac{\bar{q}_3 X \sin^2 \alpha}{1 - \bar{q}_3} + i\eta]} \quad (\text{B34})$$

Dans l'intégration sur le rayon R nous avons effectué le changement de variable $X = R^2$. Ceci permet de voir facilement que l'intégrale sur R , c'est-à-dire sur X , dans (B34) est de partie imaginaire nulle à la limite $\eta \rightarrow 0^+$, et donc que

$$\text{Im } I^{(II)} = 0 \quad (\text{B35})$$

En effet, tous les facteurs au dénominateur de l'intégrande dans (B34) sont de la forme $\alpha - \beta X + i\eta$, avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. L'intégrale sur $X \in [0, +\infty[$ tombe donc sous le coup du théorème élémentaire suivant :

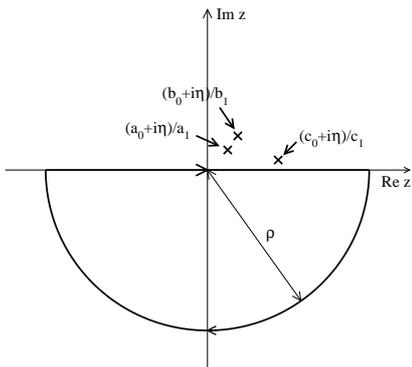


FIGURE 9: Contour d'intégration dans le plan complexe à utiliser dans le théorème des résidus pour établir l'identité (B38), en trait gras. Les nombres réels $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1$ et η sont strictement positifs. Le rayon ρ du demi-cercle tend vers l'infini. Les croix correspondent aux pôles de l'intégrande dans le cas où ils sont tous simples, mais le résultat vaut bien sûr dans le cas général.

Théorème : On définit $a(X) = a_0 - a_1 X$, $b(X) = b_0 - b_1 X$ et $c(X) = c_0 - c_1 X$ pour tout $X \in \mathbb{R}$. Si tous les coefficients $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1$ sont > 0 et $\eta \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^+} dX \text{Im} \frac{X}{[a(X) + i\eta][b(X) + i\eta][c(X) + i\eta]} = 0 \quad (\text{B36})$$

Démonstration : On remarque d'abord que le théorème serait évident si l'intégrale sur X était prise sur \mathbb{R}^- . En

effet, pour tout $\eta > 0$ et pour tout $X < 0$,

$$\left| \frac{X}{[a(X) + i\eta][b(X) + i\eta][c(X) + i\eta]} \right| < \frac{X}{a(X)b(X)c(X)} \quad (\text{B37})$$

et le majorant est d'intégrale finie sur \mathbb{R}^- si bien que l'on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour échanger l'intégration sur X et le passage à la limite $\eta \rightarrow 0^+$. On peut donc, dans l'énoncé (B36), étendre le domaine d'intégration à \mathbb{R} tout entier sans changer le résultat. Or nous disposons de l'identité suivante pour tout $\eta > 0$ non nécessairement infinitésimal, aussi bien en partie réelle qu'en partie imaginaire :

$$\int_{\mathbb{R}} dX \frac{X}{[a(X) + i\eta][b(X) + i\eta][c(X) + i\eta]} = 0 \quad (\text{B38})$$

Il suffit en effet d'utiliser le théorème des résidus en refermant le contour d'intégration par le bas selon un demi-cercle de rayon $\rho \rightarrow +\infty$ dans le demi-plan inférieur ; la décroissance de l'intégrande en $1/X^2$ à grand $|X|$ le permet, qui conduit à une contribution du demi-cercle en $O(1/\rho)$. Comme les pôles de l'intégrande sont tous situés dans le demi-plan supérieur, aucun n'est enserré par le contour d'intégration, voir la figure 9, et il vient (B38) donc (B36) [63]. ■

On pourrait croire que le même raisonnement s'applique à la contribution (B33) et que $\text{Im } I^{(I)} = 0$, auquel cas $\delta\Gamma_{\mathbf{q}} = o(\check{q}^7)$ et il n'y aurait pas de correction à apporter au résultat (176). Ce n'est pas le cas, car nous sommes cette fois obligés de garder dans l'intégrale sur X une valeur finie A^2/\bar{q}^2 de la borne supérieure, pour obtenir une valeur finie de $I^{(I)}$, ce qui bloque l'application du théorème. Ici, $A > 0$ est une constante de coupure dont la valeur précise n'importe pas, et la loi de puissance en \check{q}^{-2} provient du fait que $\theta_i = O(1)$ donc $\check{\theta}_i = O(\check{q}^{-1})$ dans (B26), et donc $X = R^2 = \check{\theta}_2^2 + \check{\theta}_3^2 = O(\check{q}^{-2})$. En effet, si l'on remplace froidement A^2/\bar{q}^2 par $+\infty$ dans l'équation (B33), on trouve que l'intégrale sur X diverge comme α^{-2} lorsque α tend vers zéro, ce qui conduit à une intégrale sur α logarithmiquement divergente en $\alpha = 0$ [64]. Pour avancer, nous coupons l'intervalle d'intégration sur α en deux, un sous-intervalle $[0, \nu]$ pour lequel la coupure de l'intégration sur X à A^2/\bar{q}^2 est requise, et un sous-intervalle $[\nu, \pi/2]$ pour lequel l'intégration sur X peut

être étendue à $+\infty$:

$$\int_0^{\pi/2} d\alpha \int_0^{A^2/\tilde{q}^2} dX f(\alpha, X) \rightarrow \int_0^\nu d\alpha \int_0^{A^2/\tilde{q}^2} dX f(\alpha, X) + \int_\nu^{\pi/2} d\alpha \int_0^{+\infty} dX f(\alpha, X) \quad (\text{B39})$$

La contribution du second bout à $\text{Im} I^{(1)}$ est nulle, en vertu du théorème. La contribution du premier bout ne dépend pas de la valeur de ν . Il suffit donc de la calculer explicitement en prenant ν suffisamment petit pour que l'on puisse approximer chaque contribution dépendant de α dans l'intégrande par son terme d'ordre dominant en α , à savoir $\sin \alpha \simeq \alpha$, $\cos \alpha \simeq 1$, $u \simeq u_0 = \bar{q}_2(1 - \bar{q}_3)/(1 - \bar{q}_2 - \bar{q}_3)$. La dépendance en ϕ disparaît et l'intégration sur ϕ sort simplement un facteur 2π . On calcule aisément l'intégrale sur α :

$$\int_0^\nu \frac{\alpha d\alpha}{\left[\frac{3}{4}\bar{q}_3(1 - \bar{q}_3) - \frac{\bar{q}_3 X \alpha^2}{1 - \bar{q}_3} + i\eta\right]^2} = \left[\frac{1 - \bar{q}_3}{2\bar{q}_3 X \left[\frac{3}{4}\bar{q}_3(1 - \bar{q}_3) - \frac{\bar{q}_3 X \alpha^2}{1 - \bar{q}_3} + i\eta\right]} \right]_{\alpha=0}^{\alpha=\nu} \quad (\text{B40})$$

On passe ensuite à l'intégration sur X . Le terme tout intégré $\alpha = \nu$ de l'équation (B40), après multiplication par le facteur X au numérateur de (B33) et division par le dénominateur $(v - u_0 X + i\eta)$, donne un intégrande en $O(1/X^2)$; on peut dans ce cas remplacer la borne supérieure A^2/\tilde{q}^2 de l'intégration sur X par $+\infty$ et utiliser la variante suivante du théorème pour montrer que sa contribution à $\text{Im} I^{(1)}$ est exactement nulle :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^+} dX \text{Im} \frac{1}{[a(X) + i\eta][b(X) + i\eta]} = 0 \quad (\text{B41})$$

Le terme tout intégré $\alpha = 0$ de l'équation (B40) conduit au contraire à une intégrale sur X de partie imaginaire non nulle à la limite $\eta \rightarrow 0^+$:

$$\text{Im} \int_0^{A^2/\tilde{q}^2} \frac{(1 - \bar{q}_3) dX}{2\bar{q}_3(v - u_0 X + i\eta) \left[\frac{3}{4}\bar{q}_3(1 - \bar{q}_3) + i\eta\right]} = -\frac{1 - \bar{q}_3}{2\bar{q}_3 u_0} \text{Im} \frac{[\ln(v - u_0 A^2 \tilde{q}^{-2} + i\eta) - \ln(v + i\eta)]}{\frac{3}{4}\bar{q}_3(1 - \bar{q}_3) + i\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0^+} -\frac{\pi}{u_0} \frac{Y(u_0 A^2 \tilde{q}^{-2} - v)}{\frac{3}{2}\bar{q}_3^2} \quad (\text{B42})$$

où \ln est la détermination habituelle du logarithme complexe, avec une ligne de coupure sur les réels négatifs. Il reste donc

$$\text{Im} I^{(1)} = 2\pi^2 \int_0^1 d\bar{q}_2 \int_0^{1-\bar{q}_2} d\bar{q}_3 (1 - \bar{q}_3)(1 - \bar{q}_2 - \bar{q}_3)^2 \bar{q}_2^2 \bar{q}_3 \times Y(u_0 A^2 \tilde{q}^{-2} - v) \xrightarrow{\tilde{q} \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{840} \quad (\text{B43})$$

d'où la correction (178) à apporter au résultat (176).

Pour terminer, on peut se demander s'il existe une interprétation physique aux diagrammes d'ordre 4 en \hat{V} . Nous sommes en mesure d'en proposer une pour celui de gauche (I) de la figure 8. Ce diagramme prend en compte l'effet d'une modification de la pulsation propre des phonons virtuels sur le déplacement d'énergie complexe $\Delta\epsilon_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}}$ du phonon \mathbf{q} induit par le processus de Beliaev, cette modification étant elle-même imputable à cet ordre à un processus de Beliaev. Plus quantitativement, introduisons la fonction énergie propre de Beliaev (B10), en notant désormais de façon plus rigoureuse l'énergie propre non perturbée des phonons de vecteur d'onde \mathbf{k} dans \hat{H}_2 sous la forme $\epsilon_{\mathbf{k}}^{(2)}$, pour la distinguer de l'énergie réelle vraie $\epsilon_{\mathbf{q}}$ (voir la note [61]). Nous avons vérifié alors que le changement d'énergie complexe du phonon \mathbf{q} associé au diagramme de gauche vaut exactement

$$\delta z_{\mathbf{q}}^{(I)} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}_3} \frac{(\langle \mathbf{q}_3, \mathbf{q} - \mathbf{q}_3 | \hat{H}_3 | \mathbf{q} \rangle)^2}{[\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - (\epsilon_{\mathbf{q}_3}^{(2)} + \epsilon_{\mathbf{q} - \mathbf{q}_3}^{(2)})]^2} \times \left[\hat{H}_{\mathbf{q}_3}^{\text{Bel}}(\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - \epsilon_{\mathbf{q} - \mathbf{q}_3}^{(2)}) + \Delta\epsilon_{\mathbf{q} - \mathbf{q}_3}^{\text{Bel}}(\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - \epsilon_{\mathbf{q}_3}^{(2)}) \right] \quad (\text{B44})$$

On notera que l'argument z de $\Delta\epsilon_{\mathbf{q} - \mathbf{q}_3}^{\text{Bel}}$ vaut ici l'énergie vraie $\epsilon_{\mathbf{q}}$ diminuée de l'énergie non perturbée du phonon virtuel spectateur dans le diagramme (I), c'est-à-dire non partie prenante dans la boucle. La somme de la correction (I) et du déplacement de Beliaev perturbatif habituel du phonon \mathbf{q} peut donc s'interpréter, à l'ordre 4 en \hat{H}_3 , comme un déplacement de Beliaev pour une relation de dispersion complexe renormalisée :

$$\Delta\epsilon_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}}(\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta) + \delta z_{\mathbf{q}}^{(I)} \simeq \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4} \frac{(\langle \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4 | \hat{H}_3 | \mathbf{q} \rangle)^2 \delta_{\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4, \mathbf{q}}}{\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - [\epsilon_{\mathbf{q}_3}^{(2)} + \Delta\epsilon_{\mathbf{q}_3}^{\text{Bel}}(\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - \epsilon_{\mathbf{q}_4}^{(2)}) + \epsilon_{\mathbf{q}_4}^{(2)} + \Delta\epsilon_{\mathbf{q}_4}^{\text{Bel}}(\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - \epsilon_{\mathbf{q}_3}^{(2)})]} \quad (\text{B45})$$

La formulation (B44) donne d'ailleurs une autre méthode

de calcul que celle de l'équation (B33). Avec les change-

ments d'échelle de la sous-section **VC** adaptés à l'existence des « petits dénominateurs », et en utilisant (B18) avec (\mathbf{q}, \mathbf{k}) valant successivement $(\mathbf{q}_3, \mathbf{k})$ et $(\mathbf{q}, \mathbf{q}_3)$, où \mathbf{k} est la variable d'intégration apparaissant dans l'expres-

sion tirée de (B10) de $\Delta\epsilon_{\mathbf{q}_3}^{\text{Bel}}(\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - \epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_3}^{(2)})$, nous trouvons

$$\frac{\Delta\epsilon_{\mathbf{q}_3}^{\text{Bel}}(\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - \epsilon_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_3}^{(2)})}{mc^2} = -\frac{9(1 + \Lambda_F)^2}{64\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar\rho^{1/3}}\right)^3 \bar{q}_3^5 \check{q}^5 \times \int_0^1 d\bar{k} \bar{k}^2 (1 - \bar{k})^2 \left[i\pi + \ln\left(\frac{4\bar{q}_3 \bar{k} A^2}{(1 - \bar{k}) \check{q}^2}\right) - \ln\left(i\eta + 3\bar{q}_3(1 - \bar{q}_3) + 3\bar{q}_3^3 \bar{k}(1 - \bar{k}) - \frac{4\bar{q}_3 \check{\theta}_3^2}{1 - \bar{q}_3}\right) \right] \quad (\text{B46})$$

Ici $\bar{q}_3 = q_3/q$, $\bar{k} = k/q_3$, $\check{\theta}_3 = \theta_3/(\gamma^{1/2}\check{q})$, θ_3 étant l'angle non orienté entre les vecteurs \mathbf{q} et \mathbf{q}_3 . L'intégrale sur $\check{\theta} = \theta/(\gamma^{1/2}\check{q}_3)$, où θ est l'angle entre \mathbf{k} et \mathbf{q} , a été effectuée explicitement sur l'intervalle $[0, A/\check{q}_3]$ avec le même paramètre de coupure A que dans l'équation (B33). Après report de (B46) dans l'équation (B44), nous obtenons

$$\frac{\text{Im} \delta z_{\mathbf{q}}^{(1)}}{mc^2} = -\frac{9^2(1 + \Lambda_F)^4}{64\pi^4\gamma} \left(\frac{mc}{\hbar\rho^{1/3}}\right)^6 \check{q}^7 \int_0^1 d\bar{q}_3 \bar{q}_3^8 (1 - \bar{q}_3) \int_0^1 d\bar{k} \bar{k}^2 (1 - \bar{k})^2 \times \text{Im} \int_0^{+\infty} dX_3 \frac{i\pi - \ln\left(i\eta + 3\bar{q}_3(1 - \bar{q}_3) + 3\bar{q}_3^3 \bar{k}(1 - \bar{k}) - \frac{4\bar{q}_3 X_3}{1 - \bar{q}_3}\right)}{\left(i\eta + 3\bar{q}_3(1 - \bar{q}_3) - \frac{4\bar{q}_3 X_3}{1 - \bar{q}_3}\right)^2} \quad (\text{B47})$$

Nous avons omis le terme logarithmique réel et indépendant de $\check{\theta}_3$ entre crochets dans l'équation (B46) car sa contribution au résultat final est clairement réelle dans la limite $\eta \rightarrow 0^+$. C'est ainsi que disparaît la dépendance en le paramètre de coupure A . L'intégrale sur $X_3 = \check{\theta}_3^2$ du bout avec logarithme se calcule par parties, bien entendu en dérivant le logarithme ; on trouve que sa contribution est nulle à la limite $\eta \rightarrow 0^+$ en utilisant l'identité (B41). Finalement, seul le terme $i\pi$ importe, et il conduit exactement au résultat (178).

-
- [1] Lev LANDAU et Isaak KHALATNIKOV : Teoriya vyzakosti Geliya-II. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 19:637, 1949.
- [2] I.M. KHALATNIKOV et D.M. CHERNIKOVA : Relaxation Phenomena in Superfluid Helium. *ZhETF*, 49:1957, juin 1966.
- [3] A. SINATRA, Y. CASTIN et E. WITKOWSKA : Coherence time of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 80: 033614, Sep 2009.
- [4] H. KURKJIAN, Y. CASTIN et A. SINATRA : Brouillage thermique d'un gaz cohérent de fermions. *C. R. Phys.*, 17:789, 2016.
- [5] M A H TUCKER et A F G WYATT : Four-phonon scattering in superfluid 4 He. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 4(38):7745, 1992.
- [6] I. N. ADAMENKO, YU. A. KITSSENKO, K. E. NEMCHENKO et A. F. G. WYATT : Theory of scattering between two phonon beams in superfluid helium. *Phys. Rev. B*, 80: 014509, juillet 2009.
- [7] H. KURKJIAN, Y. CASTIN et A. SINATRA : Concavity of the collective excitation branch of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover. *Phys. Rev. A*, 93:013623, janvier 2016.
- [8] S.T. BELIAEV : Application of the Methods of Quantum Field Theory to a System of Bosons. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 34:417, août 1958.
- [9] G. BIGHIN, L. SALASNICH, P. A. MARCHETTI et F. TOIGO : Beliaev damping of the Goldstone mode in atomic Fermi superfluids. *Phys. Rev. A*, 92:023638, août 2015.
- [10] K. M. O'HARA, S. L. HEMMER, M. E. GEHM, S. R. GRANADE et J. E. THOMAS : Observation of a Strongly Interacting Degenerate Fermi Gas of Atoms. *Science*, 298(5601):2179–2182, 2002.
- [11] T. BOURDEL, J. CUBIZOLLES, L. KHAYKOVICH, K. M. F. MAGALHÃES, S. J. J. M. F. KOKKELMANS, G. V. SHLYAPNIKOV et C. SALOMON : Measurement of the Interaction Energy near a Feshbach Resonance in a ^6Li Fermi Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 91:020402, juillet 2003.
- [12] M. BARTENSTEIN, A. ALTMAYER, S. RIEDL, S. JOCHIM, C. CHIN, J. HECKER DENSCHLAG et R. GRIMM : Crossover from a Molecular Bose-Einstein Condensate to a Degenerate Fermi Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 92:120401, mars 2004.
- [13] M. BARTENSTEIN, A. ALTMAYER, S. RIEDL, S. JOCHIM, C. CHIN, J. HECKER DENSCHLAG et R. GRIMM : Collective Excitations of a Degenerate Gas at the BEC-BCS Crossover. *Phys. Rev. Lett.*, 92:203201, mai 2004.

- [14] M. W. ZWIERLEIN, C. A. STAN, C. H. SCHUNCK, S. M. F. RAUPACH, A. J. KERMAN et W. KETTERLE : Condensation of Pairs of Fermionic Atoms near a Feshbach Resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 92:120403, mars 2004.
- [15] M. W. ZWIERLEIN, J. R. ABO-SHAER, A. SCHIROTZEK, C. H. SCHUNCK et W. KETTERLE : Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas. *Nature*, 435(7045):1047–1051, juin 2005.
- [16] S. NASCIMBÈNE, N. NAVON, K. J. JIANG, F. CHEVY et C. SALOMON : Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas. *Nature*, 463(7284):1057–1060, février 2010.
- [17] Mark J. H. KU, Ariel T. SOMMER, Lawrence W. CHEUK et Martin W. ZWIERLEIN : Revealing the Superfluid Lambda Transition in the Universal Thermodynamics of a Unitary Fermi Gas. *Science*, 335(6068):563–567, 2012.
- [18] Leonid A. SIDORENKOV, Meng Khoon TEY, Rudolf GRIMM, Yan-Hua HOU, Lev PITAEVSKII et Sandro STRINGARI : Second sound and the superfluid fraction in a Fermi gas with resonant interactions. *Nature*, 498(7452):78–81, juin 2013.
- [19] P.W. ANDERSON : Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 112:1900–1916, 1958.
- [20] M. MARINI, F. PISTOLESI et G.C. STRINATI : Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation : analytic results for the crossover in three dimensions. *European Physical Journal B*, 1:151–159, 1998.
- [21] R. COMBESCOT, M. Yu. KAGAN et S. STRINGARI : Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover. *Phys. Rev. A*, 74:042717, octobre 2006.
- [22] S. N. KLIMIN, J. TEMPERE et Jeroen P. A. DEVREESE : Pair Excitations and Parameters of State of Imbalanced Fermi Gases at Finite Temperatures. *Journal of Low Temperature Physics*, 165(5):261–274, 2011.
- [23] Mohit RANDEIRA et Edward TAYLOR : Crossover from Bardeen-Cooper-Schrieffer to Bose-Einstein Condensation and the Unitary Fermi Gas. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 5:209–232, 2014.
- [24] J. STEINHAEUER, R. OZERI, N. KATZ et N. DAVIDSON : Excitation Spectrum of a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 88:120407, mars 2002.
- [25] N. KATZ, J. STEINHAEUER, R. OZERI et N. DAVIDSON : Beliaev Damping of Quasiparticles in a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 89:220401, Nov 2002.
- [26] F. CHEVY, V. BRETIN, P. ROSENBUSCH, K. W. MADISON et J. DALIBARD : Transverse Breathing Mode of an Elongated Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 88:250402, juin 2002.
- [27] Alexander L. GAUNT, Tobias F. SCHMIDTUTZ, Igor GOTLIBOVYCH, Robert P. SMITH et Zoran HADZIBABIC : Bose-Einstein Condensation of Atoms in a Uniform Potential. *Phys. Rev. Lett.*, 110:200406, mai 2013.
- [28] P.C HOHENBERG et P.C MARTIN : Microscopic theory of superfluid helium. *Annals of Physics*, 34(2):291 – 359, 1965.
- [29] P SZÉPFALUSY et I KONDOR : On the dynamics of continuous phase transitions. *Annals of Physics*, 82(1):1 – 53, 1974.
- [30] L.P. PITAEVSKII et S. STRINGARI : Landau damping in dilute Bose gases. *Physics Letters A*, 235(4):398 – 402, 1997.
- [31] Gautam RUPAK et Thomas SCHÄFER : Shear viscosity of a superfluid Fermi gas in the unitarity limit. *Phys. Rev. A*, 76:053607, novembre 2007.
- [32] D.T. SON et M. WINGATE : General coordinate invariance and conformal invariance in nonrelativistic physics : Unitary Fermi gas. *Ann. Physics*, 321:197–224, 2006.
- [33] Yvan CASTIN : Basic Theory Tools for Degenerate Fermi Gases. In M. INGUSCIO, W.KETTERLE et C. SALOMON, éditeurs : *Ultra-cold Fermi Gases*. Società Italiana di Fisica, Bologna, 2007.
- [34] J. BARDEEN, L. N. COOPER et J. R. SCHRIEFFER : Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 108:1175–1204, décembre 1957.
- [35] Jean-Paul BLAIZOT et Georges RIPKA : *Quantum Theory of Finite Systems*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1985.
- [36] H. KURKJIAN : *Cohérence, brouillage et dynamique de phase dans un condensat de paires de fermions*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure, Paris, 2016.
- [37] Yvan CASTIN et Ralph DUM : Low-temperature Bose-Einstein Condensates in Time-dependent traps. *Phys. Rev. A*, 57:3008–3021, 1998.
- [38] H. KURKJIAN, Y. CASTIN et A. SINATRA : Phase operators and blurring time of a pair-condensed Fermi gas. *Phys. Rev. A*, 88:063623, décembre 2013.
- [39] S. GIORGINI : Damping in dilute Bose gases : A mean-field approach. *Phys. Rev. A*, 57:2949–2957, avril 1998.
- [40] T. D. LEE et C. N. YANG : Many-Body Problem in Quantum Mechanics and Quantum Statistical Mechanics. *Phys. Rev.*, 105:1119–1120, février 1957.
- [41] A.A. ABRIKOSOV et I.M. KHALATNIKOV : Concerning a Model for a Non-Ideal Fermi Gas. *Sov. Phys. JETP*, 6:888, 1958 [ZhETF, **33**, 1154].
- [42] V.M. GALITSKII : The Energy Spectrum of a Non-ideal Fermi Gas. *Sov. Phys. JETP*, 7:104, 1958 [ZhETF, **34**, 151].
- [43] C. COHEN-TANNOUDJI, J. DUPONT-ROC et G. GRYNBERG : *Processus d'interaction entre photons et atomes*. InterEditions et Éditions du CNRS, Paris, 1988.
- [44] N.N. BOGOLIUBOV : A new method in the theory of superconductivity I. *Soviet Physics JETP*, 34(7)(1), octobre 1958.
- [45] C. W. GARDINER : Particle-number-conserving Bogoliubov method which demonstrates the validity of the time-dependent Gross-Pitaevskii equation for a highly condensed Bose gas. *Phys. Rev. A*, 56:1414–1423, août 1997.
- [46] Y. CASTIN : Bose-Einstein Condensates in Atomic Gases : Simple Theoretical Results. In R. KAISER, C. WESTBROOK et F. DAVID, éditeurs : *Coherent atomic matter waves : 27 July–27 August 1999*, pages 1–136. EDP Sciences, Les Ulis, Springer, Berlin, 2001.
- [47] Christophe MORA et Yvan CASTIN : Extension of Bogoliubov theory to quasicondensates. *Phys. Rev. A*, 67:053615, mai 2003.
- [48] A. SINATRA, Y. CASTIN et E. WITKOWSKA : Nondiffusive phase spreading of a Bose-Einstein condensate at finite temperature. *Phys. Rev. A*, 75:033616, mars 2007.
- [49] L. D. LANDAU : The theory of the viscosity of Helium II : II. Calculation of the viscosity coefficient. In D. Ter HAAR, éditeur : *Collected Papers of LD Landau*, page 511. Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [50] A. SINATRA, Y. CASTIN et E. WITKOWSKA : Coherence time of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 80:033614, septembre 2009.

- [51] H. KURKJIAN, Y. CASTIN et A. SINATRA : Landau-Khalatnikov phonon damping in strongly interacting Fermi gases. *arXiv :1608.00402*, 2016.
- [52] Tout au long de cet article, les amplitudes de couplage $\mathcal{A}^{m \leftrightarrow n}$ seront des fonctions symétriques de leurs m premiers arguments, les vecteurs d'onde $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m$ des phonons entrants, ainsi que de leurs n derniers arguments, les vecteurs d'onde $\mathbf{q}_{m+1}, \mathbf{q}_{m+2}, \dots, \mathbf{q}_{m+n}$ des phonons sortants. Cette propriété de symétrie détermine les amplitudes de manière unique.
- [53] Prendre la limite CBE revient à faire [7] $x \rightarrow 0^+$ avec $y \sim -4/x$; nous donnons dans l'annexe A les expressions (A13) des fractions rationnelles dans cette limite. Grâce à elles, on vérifie sans mal que l'expression de $\mathcal{A}_{\text{micro}}^{2 \leftrightarrow 1}$ dans la limite CBE coïncide avec l'équation (16) de la référence [3] développée jusqu'à l'ordre 3 en q et écrite en termes des énergies des excitations élémentaires de Bogolioubov pour un gaz de $\langle \hat{N}_B \rangle = \langle \hat{N} \rangle / 2$ dimères bosoniques de masse $m_B = 2m$, et de vitesse du son c .
- [54] Nous sommes ici à la limite des grands N_B et nous négligeons 1 devant \hat{n}_0 donc devant N_B . Dans les équations (116) et (118), nous avons simplifié la contribution de Hartree avec la contribution de type potentiel chimique provenant du développement de l'énergie d'interaction du condensat $\hat{V}_0 \hat{n}_0^2 / 2L^3$ en puissances du nombre de particules non condensées.
- [55] Si l'on prend directement une relation de dispersion $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ linéaire dans l'argument de la distribution de Dirac, on tombe sur l'intégrale polaire $\int_{-1}^1 du \delta(u-1)$ dont on pourrait penser à tort qu'elle vaut 1/2. En tenant compte de la stricte convexité de la relation de dispersion, on tombe sur $\int_{-1}^1 du \delta(u-u_0) = 1$ où la racine $u_0 \in]-1, 1[$, ce qui est la valeur correcte. Ici u est le cosinus de l'angle entre \mathbf{q} et \mathbf{q}' .
- [56] Il suffit de développer $1/(e^{\tilde{a}'} - 1)$ et $1/(e^{\tilde{a}'+\tilde{a}} - 1)$ en série entière de la variable $e^{-\tilde{a}'}$ et d'échanger la sommation et l'intégration. On rappelle que $\zeta(4) = \pi^4/90$.
- [57] La largeur du pic est d'ordre ϵ car le changement d'énergie des phonons virtuels intermédiaires lorsque les θ_i varient de 0 à ϵ est du même ordre que la correction cubique à la relation de dispersion hydrodynamique, sachant que les nombres d'onde typiques sont $\approx k_B T / \hbar c$. En prenant comme exemple le phonon intermédiaire $\mathbf{q}_S = \mathbf{q} + \mathbf{q}_2$, on trouve que $\hbar c[|\mathbf{q} + \mathbf{q}_2| - (q + q_2)] \sim -\frac{\hbar c q q_2}{q + q_2} \theta_2^2 \approx k_B T \theta_2^2$; cet écart est du même ordre que le terme cubique $\approx k_B T |\gamma| \epsilon^2$ dans l'équation (63) lorsque $\theta_2^2 \approx |\gamma| \epsilon^2$, d'où le changement de variable (145).
- [58] Précisons les intervalles d'intégration $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ et $[\phi_{\min}, \phi_{\max}]$ imposés par la fonction de Heaviside. On définit $\chi = \frac{q_2 q_3 + q(q_3 \sin^2 \alpha - q_2 \cos^2 \alpha)}{q_2 q_3 \sin 2\alpha}$, $A = \frac{q}{2q_3} + \frac{q}{2q_2}$, $C = 1 - \frac{q}{2q_3} + \frac{q}{2q_2}$, $A' = \frac{A}{(1+A^2)^{1/2}}$ et $C' = \frac{C}{(1+C^2)^{1/2}}$. (i) Si $v > 0$ et $q < q_3$, $2\alpha_{\min} = \arccos A' - \arccos C'$ et $2\alpha_{\max} = \arccos A' + \arccos C'$. (ii) Si $v > 0$ et $q > q_3$, $\alpha_{\min} = 0$ et $2\alpha_{\max} = \arccos A' + \arccos C'$. (iii) Si $v < 0$ et $q < q_3$, $\alpha_{\min} = 0$ et $\alpha_{\max} = \pi/2$. (iv) Si $v < 0$ et $q > q_3$, $2\alpha_{\min} = \arccos C' - \arccos A'$ et $\alpha_{\max} = \pi/2$. Dans les cas (i) et (ii) ($v > 0$), $\phi_{\min} = 0$, $\phi_{\max} = \pi$ si $\chi < -1$ et $\phi_{\max} = \arccos \chi$ sinon. Dans les cas (iii) et (iv) ($v < 0$), $\phi_{\max} = \pi$, $\phi_{\min} = 0$ si $\chi > 1$ et $\phi_{\min} = \arccos \chi$ sinon. L'intégrale sur ϕ est en fait calculable analytiquement. On se ramène à $\int_0^\Phi d\phi \left(\sum_i \frac{b_i}{a_i + \cos \phi} \right)^2$ qui s'ex-
- prime en termes de la primitive $F(\Phi) = \int_0^\Phi d\phi \frac{1}{a + \cos \phi}$ et de sa dérivée par rapport à a . Si $a \in]-1, 1[$, $F(\Phi) = \frac{2}{(1-a^2)^{1/2}} \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{1/2} \tan \frac{\Phi}{2} \right]$. Si $|a| > 1$, $F(\Phi) = \frac{2}{(a^2-1)^{1/2}} \operatorname{atan} \left[\frac{a-1}{(a^2-1)^{1/2}} \tan \frac{\Phi}{2} \right]$. Si $a = 1$, $F(\Phi) = \tan \frac{\Phi}{2}$.
- [59] Instruits par la note [55], nous considérons l'intégrale polaire $J = \int_{-1}^1 du \frac{\eta'/\pi}{\eta'^2 + (u-u_0)^2}$ où $\eta' \approx \Gamma_{\mathbf{q}}/\tilde{q} \approx \tilde{q}^4$ et $1 - u_0 = 1 - \cos \theta_0 \approx \tilde{q}^2$ comme dans (B26). Alors $J - 1 \approx \tilde{q}^2$, d'où une correction $O(\tilde{q}^7)$ non négligeable à $\Gamma_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}}$ due à la largeur en énergie de l'état initial. La correction en \tilde{q}^7 dans l'approche heuristique (175) peut être calculée jusqu'au bout. De manière amusante, elle coïncide avec le résultat exact au signe près.
- [60] Le lecteur attentif aura remarqué que le hamiltonien quartique \hat{H}_4 donne directement un couplage $1 \rightarrow 3$ au premier ordre. L'amplitude correspondante est en q^2 . Ce couplage direct contribue à $\Gamma_{\mathbf{q}}$ à l'ordre q^9 , négligeable, même si l'on prend en compte comme dans ce qui suit l'effet d'un petit dénominateur en q^3 . Aussi l'avons-nous passé sous silence dans le corps du texte.
- [61] On ne peut pas à proprement parler calculer ici des « corrections » à $\omega_{\mathbf{q}}$ dues au couplage aux continua, même à l'ordre 2 en \hat{V} , puisqu'on se base sur un hamiltonien effectif. Si on cherchait à le faire, on tomberait sur des intégrales de parties principales divergentes ultraviolettes, dont l'incorporation dans la valeur non perturbée présente dans \hat{H}_2 donnerait, suivant les idées de la renormalisation, la valeur vraie, qui resterait non calculée et inconnue en l'absence d'un modèle microscopique [4]. Dans ce contexte, nous n'avons pas jugé utile de distinguer l'énergie propre non perturbée des phonons dans \hat{H}_2 , en tout rigueur $\epsilon_{\mathbf{q}}^{(2)}$, de l'énergie vraie $\epsilon_{\mathbf{q}}$. Par ailleurs, pour obtenir les lois d'échelle en q des termes perturbatifs d'ordre n en \hat{V} , nous supposons que les nombres d'onde des phonons virtuels sont $O(q)$ donc que la coupure ultraviolette est mise à un nombre d'onde Aq , $A \gg 1$. Ceci a le grand avantage que la correction réelle à la pulsation propre $\epsilon_{\mathbf{q}}^{(2)}$, due à \hat{H}_3 à l'ordre dominant, est un $O(q^5)$ et n'affecte ni le paramètre γ dans l'équation (63), ni le taux $\Gamma_{\mathbf{q}}$ à l'ordre q^7 .
- [62] La contribution de Taylor d'ordre n est $O(q^{2n+5})$ puisque la dérivée d'ordre n de la fonction énergie propre, qui fait intervenir un dénominateur d'énergie à la puissance $n+1$, est d'ordre $q^8/q^{3(n+1)}$ compte tenu de l'effet « petit dénominateur ».
- [63] On a supposé ici que la contribution dominante à $\delta\Gamma_{\mathbf{q}}$ provient de la configuration « bicône » dans laquelle à la fois \mathbf{q}_2 et \mathbf{q}_3 sont dans le cône d'émission vers l'avant, c'est-à-dire d'ouverture angulaire $O(\tilde{q})$ autour de la direction de \mathbf{q} . On peut imaginer un scénario plus subtil, dit « unicône », dans lequel seul le vecteur \mathbf{q}_3 se trouverait dans ce cône, le vecteur \mathbf{q}_2 faisant lui un angle $\approx \tilde{q}^0$ avec \mathbf{q} . Dans ce cas, seul le dénominateur de $P(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|\mathbf{q}_3)$ est $\approx \tilde{q}^3$, celui de $P(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3|\mathbf{q}_2)$ étant $\approx \tilde{q}$. Le terme croisé $P(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3|\mathbf{q}_2)P(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|\mathbf{q}_3)$ est donc négligeable par rapport à $[P(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|\mathbf{q}_3)]^2$. Par ailleurs, le dénominateur d'énergie global $\epsilon_{\mathbf{q}} + i\eta - (\epsilon_{\mathbf{q}_1} + \epsilon_{\mathbf{q}_2} + \epsilon_{\mathbf{q}_3})$ de (B23) est lui aussi $\approx \tilde{q}$, ce qui fait perdre un facteur \tilde{q}^2 , mais ceci est exactement compensé par la perte au numérateur d'un facteur \tilde{q}^2 dans l'intégrale polaire $\int d\theta_2 \sin \theta_2$. L'ensemble semble donc devoir contribuer au même ordre \tilde{q}^7 que la configuration bicône. L'intégration sur l'angle polaire θ_3

rééchelonné comme dans (B26), et avec inclusion du jacobien tridimensionnel \check{q}_3^2 de l'intégration sur \check{q}_3 , conduit cependant à

$$\int_0^{+\infty} \frac{\check{q}_3^2 \check{\theta}_3 d\check{\theta}_3}{\left[\frac{3}{4} \bar{q}_3 (1 - \bar{q}_3) - \frac{\check{q}_3 \check{\theta}_3^2}{1 - \bar{q}_3} + i\eta \right]^2} = - \frac{\bar{q}_3 (1 - \bar{q}_3) / 2}{\frac{3}{4} \bar{q}_3 (1 - \bar{q}_3) + i\eta}$$

de limite réelle $-\frac{2}{3}$ lorsque $\eta \rightarrow 0^+$ même au sens des distributions. Aussi la partie imaginaire nécessaire à $\delta\Gamma_{\mathbf{q}}$ ne pourrait-elle provenir que du dénominateur d'énergie global, qui sortirait un Dirac $\delta[\epsilon_{\mathbf{q}} - (\epsilon_{\mathbf{q}_1} + \epsilon_{\mathbf{q}_2} + \epsilon_{\mathbf{q}_3})]$; mais, à l'ordre dominant en \check{q} où nous sommes désormais, $\mathbf{q}_3 = \bar{q}_3 \mathbf{q}$, avec $0 < \bar{q}_3 < 1$, et la relation de dispersion est linéaire, si bien que l'argument du Dirac ne peut s'annuler que si \mathbf{q}_2 et \mathbf{q} sont colinéaires et de même sens, en contradiction avec l'hypothèse d'un \mathbf{q}_2 en dehors

du cône d'émission vers l'avant. La même argumentation vaut pour le taux d'amortissement $\Gamma_{\mathbf{q}}^{2 \leftrightarrow 2}$ de la section VC, et justifie le fait que l'on n'y ait considéré que la configuration « bicône ».

[64] Ce phénomène ne se produit pas dans la contribution (B34) car ni le facteur contenant le terme $X \sin^2 \alpha$, dangereux lorsque $\alpha \rightarrow 0$, ni celui contenant le terme $X \cos^2 \alpha$, dangereux lorsque $\alpha \rightarrow \pi/2$, ne sont élevés au carré. Du coup, l'intégrale sur X de 0 à $+\infty$ diverge seulement comme $\ln \alpha$ ou $\ln(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$ ou $\alpha \rightarrow \pi/2$. Mathématiquement, en remplaçant dans l'équation (B34) l'intégrale $\int_0^{+\infty} dX f(X)$ par $-\int_{-\infty}^0 dX f(X)$ en vertu de l'identité (B38), puis en utilisant le théorème de convergence dominée, nous pouvons justifier l'échange de la limite $\eta \rightarrow 0^+$ et de l'intégration sur $\check{q}_2, \bar{q}_3, \phi$ et α , et donc démontrer le résultat (B35).