



HAL
open science

Modélisation algorithmique par réduction de modèle et maîtrise des événements récurrents inhérents aux problèmes d'optimisation

Sophie Cartel, Djamel Missoum Benziane, David Ryckelynck

► **To cite this version:**

Sophie Cartel, Djamel Missoum Benziane, David Ryckelynck. Modélisation algorithmique par réduction de modèle et maîtrise des événements récurrents inhérents aux problèmes d'optimisation. 9e Colloque national en calcul des structures, May 2009, Giens, France. pp.117-122. hal-01391194

HAL Id: hal-01391194

<https://hal.science/hal-01391194>

Submitted on 3 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Modélisation algorithmique par réduction de modèle et maîtrise des événements récurrents inhérents aux problèmes d'optimisation

S. Cartel¹, D. Missoum-Benziane¹, D. Ryckelynck¹

¹ MINES ParisTech, Centre des Matériaux
CNRS UMR 7633, BP 87 91003 Evry Cedex, France
{sophie.cartel,djamel.missoum-benziane,david.ryckelynck}@ensmp.fr

Résumé — Nous proposons de traiter efficacement, par une méthode de réduction de modèle, une suite de simulations dans le cadre de l'optimisation de structures. Lorsqu'une base est construite pour représenter les événements significatifs contenus dans l'ensemble des simulations, les événements récurrents masquent les événements spécifiques à chaque simulation. Le processus d'adaptation du modèle d'ordre réduit et l'efficacité du processus d'optimisation peuvent s'en trouver affectés. Nous proposerons un nouvel algorithme d'adaptation permettant d'atténuer l'effet de ces événements récurrents.

Mots clés — modèle d'ordre réduit, méthode APHR, événements récurrents, problème inverse.

1 Introduction

Nous nous intéressons au traitement efficace d'une suite de simulations dans le cadre de l'optimisation de structures. L'approche développée consiste à tenir compte de la suite des prévisions déjà réalisées pour simplifier le modèle du système à optimiser à l'aide d'une méthode de réduction adaptative de modèles. L'histoire des calculs déjà effectués permet de définir des modes empiriques et des variables d'état réduites pour diminuer le coût des simulations. Éléments Finis qui restent à effectuer pour atteindre l'optimum recherché. Contrairement aux approches classiques, nous proposons de ne pas figer le modèle d'ordre réduit (ROM) avant de traiter le problème d'optimisation. Une première version du ROM est choisie en début de procédure d'optimisation, puis il est actualisé au cours du processus d'optimisation. Cette approche permet d'obtenir des modèles simplifiés capables de capter les différentes sensibilités de la réponse du système aux variations des paramètres à optimiser. Le ROM est construit par la méthode APHR [8][9]. Les modes empiriques sont ceux obtenus par une décomposition orthogonale aux valeurs propres [6][5] [7] d'une prévision construite par la combinaison de solutions incrémentales partielles. Ces solutions partielles sont obtenues par la résolution sur quelques incréments des équations du modèle complet pour des conditions initiales données par un ROM. Un estimateur d'erreur permet de sélectionner, au cours des calculs incrémentaux, les incréments choisis pour calculer les solutions partielles qui compléteront le ROM. La décomposition orthogonale aux valeurs propres permet de restreindre le nombre de fonctions de forme du ROM afin de ne représenter que les événements les plus significatifs. Dans la suite de cet article, nous désignons par événement le couple formé par une fonction de forme et la variable d'état associée qui évolue au cours du temps et au cours de la suite de simulations. Les fonctions de forme étant supposées normées, l'intensité d'un événement est donnée par l'intensité de la variable d'état associée. Pour qu'un événement soit significatif, il peut

soit avoir une intensité importante sur un intervalle de temps et une simulation donnée, ou bien avoir une contribution fréquente de moindre amplitude pour un grand nombre de simulations.

L'objet de ce travail est de montrer que la présence d'évènements récurrents peut nuire au processus d'adaptation du ROM et affecter l'efficacité du processus d'optimisation. Nous proposons une définition rigoureuse de ce qu'est un évènement récurrent. Nous montrons l'existence et l'incidence de ce type d'évènement sur le processus d'adaptation du ROM pour une suite de simulations. Nous proposons enfin un nouvel algorithme d'adaptation du ROM permettant d'atténuer l'effet des évènements récurrents en améliorant l'efficacité du processus d'optimisation. La nouvelle méthodologie est appliquée à la résolution de problèmes inverses élastoplastiques. Les coefficients de la relation de comportement sont optimisés afin de réduire l'écart entre un déplacement calculé et un déplacement donné. Généralement, ce dernier déplacement est obtenu par des essais. Nous considérons ici un déplacement donné par une simulation de référence.

2 Formulation du problème de mécanique

Nous recherchons une suite de champs de déplacement $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \{p\}_\alpha))_{\alpha=1\dots n_p}$ définis sur un domaine Ω pour chaque instant de l'intervalle $]0, T]$, pour une suite de valeurs de paramètres $(\{p\}_\alpha)_{\alpha=1\dots n_p}$ issue d'un processus d'optimisation. Nous considérons que les paramètres $\{p\}_\alpha$ sont ceux du modèle de la relation de comportement qui relie le tenseur de contrainte σ à l'histoire du tenseur des déformations tel que :

$$\sigma = \Sigma(\varepsilon_\tau, \tau \leq t; \{p\}_\alpha)$$

où Σ est un opérateur formel qui définit la relation de comportement. Le matériau est supposé avoir un comportement élastoplastique. Nous exploitons une formulation locale standard des équations de la relation de comportement [2][4]. Il n'est pas nécessaire de donner le détail de ces équations pour décrire la méthode proposée [3].

Pour simplifier la formulation des équations, nous considérons une formulation pour des déplacements et des déformations infinitésimales. Le tenseur de déformation ε correspond à la partie symétrique du gradient du déplacement. Le bord du domaine $\partial\Omega$ est constitué de deux parties complémentaires $\partial_U\Omega$ et $\partial_F\Omega$. Sur $\partial_U\Omega$ les déplacements sont imposés nuls. Sur le bord $\partial_F\Omega$ les efforts extérieurs agissants sur le domaine Ω sont donnés. La densité surfacique de ces efforts est notée $\mathbf{F}(\cdot, t)$. C'est une fonction du temps. Le déplacement recherché appartient l'espace des déplacements admissibles \mathcal{V} défini par :

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{u}(\cdot, t, \{p\}_\alpha) \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u}|_{\partial_U\Omega} = 0\}$$

Pour une valeur donnée du vecteur de paramètres, le champ de déplacement recherché doit être cinématiquement admissible et les champs de déformation et de contrainte qui lui sont associés doivent vérifier les conditions d'équilibre et les équations de la relation de comportement :

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}^*) : \Sigma(\varepsilon(\mathbf{u}_\tau), \tau \leq t; \{p\}_\alpha) d\Omega - \int_{\partial_F\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F} d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}$$

où \mathbf{u}^* est un champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible.

Nous proposons de résoudre de façon approchée ces équations en exploitant une description multi-niveau du champ de déplacement. Le lecteur trouvera dans [1] une démonstration de l'efficacité de l'approche multiniveau pour la résolution d'une suite de calculs. Nous introduisons deux sous-espaces de l'espace des champs cinématiquement admissibles. Le premier est l'espace des champs éléments finis. Il est noté \mathcal{V}_h . Ce sous espace est défini par les fonctions de forme du maillage éléments finis tel que :

$$\mathcal{V}_h = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \exists \{q\} \in \mathfrak{R}^n, \mathbf{u}(x) = \sum_{j=1}^{j=n} \mathbf{N}_j(x) q_j \quad \forall x \in \Omega\}$$

Le deuxième sous-espace est un sous-espace du premier. C'est celui engendré par les fonctions de forme du ROM. Comme le ROM est adapté au cours de la suite de simulation, nous introduisons l'indice (n) qui correspond à la version du ROM considéré. Le sous-espace cinématiquement admissible associé est noté $\mathcal{V}_{ROM}^{(n)}$ tel que :

$$\mathcal{V}_{ROM}^{(n)} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V}_h \mid \exists \{a\}^{(n)} \in \mathfrak{R}^s, \mathbf{u}(x) = \sum_{k=1}^{k=s} \boldsymbol{\Psi}_k^{(n)}(x) a_k^{(n)} \quad \forall x \in \Omega\}, \quad \boldsymbol{\Psi}_k^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{j=n} \mathbf{N}_j(x) A_{jk}^{(n)}$$

$[A]^{(n)}$ est la matrice de réduction de base qui permet de passer de la base éléments finis à la base du ROM. Les variables d'état réduites $a_k^{(n)}$ ne sont pas des variables nodales, mais des variables globales. La description multi-niveau choisie pour représenter les déplacements est la suivante :

$$\mathbf{u}(x, t, \{p\}_\alpha) = \mathbf{u}_{ROM}^{(n)}(x, t, \{p\}_\alpha) + \delta \mathbf{u}_h(x, t, \{p\}_\alpha), \quad \mathbf{u}_{ROM}^{(n)} \in \mathcal{V}_{ROM}^{(n)}, \quad \delta \mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h$$

La formulation proposée n'est pas hiérarchique, $\mathcal{V}_{ROM}^{(n)}$ et \mathcal{V}_h ne sont pas orthogonaux. L'algorithme de résolution est incrémental. L'intervalle de temps est découpé en une succession de pas de temps $]t_i, t_{i+1}]$. Nous recherchons $\mathbf{u}(x, t_{i+1}, \{p\}_\alpha)$ en connaissant l'état du système en t_i ainsi qu'un ROM défini par la matrice de réduction de base $[A]^{(n)}$. Les équations non-linéaires sont résolues en deux étapes en exploitant à chaque étape l'algorithme itératif de Newton Raphson. La première étape consiste à rechercher les variables d'état globales $\{a\}^{(n)}(t_{i+1}, \{p\}_\alpha)$ associées à un champ $\delta \mathbf{u}_h$ nul. La deuxième étape consiste à corriger la prévision fournie par la première étape en figeant $\mathbf{u}_{ROM}^{(n)}(x, t_{i+1}, \{p\}_\alpha)$ et en calculant $\delta \mathbf{u}_h(x, t_{i+1}, \{p\}_\alpha)$. La deuxième étape n'est effectuée que si le critère de convergence de l'algorithme de résolution itérative n'est pas vérifié. Si le ROM est de qualité suffisante, la première étape peut suffire. Dans le cas contraire, une étape d'adaptation du ROM est ajoutée à la suite de la deuxième étape, afin que le ROM puisse représenter la dernière correction calculée. Les équations des deux premières étapes sont les suivantes :

- étape de prévision en base réduite, trouver $\{a\}^{(n)}$ tel que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) : \Sigma(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{ROM}^{(n)}), \boldsymbol{\tau} \leq t_{i+1}; \{p\}_\alpha) d\Omega - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F} d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_{ROM}^{(n)}$$

- étape de correction, trouver $\delta \mathbf{u}_h$ tel que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) : \Sigma(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{ROM}^{(n)} + \delta \mathbf{u}_h), \boldsymbol{\tau} \leq t_{i+1}; \{p\}_\alpha) d\Omega - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F} d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_h$$

L'étape d'adaptation consiste à étendre la base en y ajoutant la partie de $\delta \mathbf{u}_h$ orthogonale à la base réduite existante. Cette partie orthogonale, notée $\delta_{\perp} \mathbf{u}_h$, est définie par :

$$\delta_{\perp} \mathbf{u}_h = \delta \mathbf{u}_h(x, t_{i+1}, \{p\}_\alpha) - \widehat{\delta \mathbf{u}_h}(x, t_{i+1}, \{p\}_\alpha)$$

où $\widehat{\delta \mathbf{u}_h}(x, t_{i+1}, \{p\}_\alpha)$ est la projection de $\delta \mathbf{u}_h(x, t_{i+1}, \{p\}_\alpha)$ dans $\mathcal{V}_{ROM}^{(n)}$.

Dans un premier temps une base étendue $\left(\boldsymbol{\Psi}_k^{(n+1/2)}\right)_{k=1 \dots s+1}$ est construite telle que :

$$\boldsymbol{\Psi}_k^{(n+1/2)} = \boldsymbol{\Psi}_k^{(n)}, \quad \forall k \leq s \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Psi}_{s+1}^{(n+1/2)} = \frac{1}{\|\delta_{\perp} \mathbf{u}_h\|} \delta_{\perp} \mathbf{u}_h$$

La variable d'état associée au dernier vecteur ajouté est nulle en tout instant antérieur à t_i et elle a pour valeur en t_{i+1} $\|\delta_{\perp} \mathbf{u}_h\|$ afin de reproduire la dernière prévision obtenue sans modifier les prévisions antérieures. Puis une sélection des événements les plus significatifs est réalisée à l'aide d'une décomposition orthogonale aux valeurs propres des variables d'état réduite $\{a\}^{(n+1/2)}(t, \{p\}_{\alpha})$ en considérant toutes les simulations déjà réalisées et la simulation en cours jusqu'à l'instant t_{i+1} . Cette décomposition consiste à rechercher les vecteurs propres $\{V\}_l$ maximisant le quotient suivant :

$$\lambda_l^{(\alpha, n)} = \frac{\sum_{\beta=1}^{\beta=\alpha-1} \int_0^T \left(\{a\}^{(n)T}(t, \{p\}_{\beta}) \cdot \{V\}_l \right)^2 dt + \int_0^{t_{i+1}} \left(\{a\}^{(n)T}(t, \{p\}_{\alpha}) \cdot \{V\}_l \right)^2 dt}{\|\{V\}_l\|^2}$$

Seuls les vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres sont conservés dans une matrice de réduction de base $[V]$ tel que :

$$[V] = [\{V\}_1, \dots, \{V\}_s] \quad \text{avec } \lambda_l(\alpha, n) > \varepsilon_{POD} \lambda_1^{(\alpha, n)} \text{ et } \|\{V\}_l\| = 1$$

Pour finir, le modèle réduit adapté est obtenu à l'aide d'une réduction de la base réduite :

$$\Psi_l^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{k=s+1} \Psi_k^{(n+1/2)} V_{kl}$$

Les prévisions antérieures sont actualisées par l'équation suivante :

$$a_l^{(n+1)}(t, \{p\}_{\beta}) = \sum_{k=1}^{k=s+1} a_k^{(n+1/2)}(t, \{p\}_{\beta}) V_{kl}, \quad \forall t \leq t_{i+1}, \quad \forall \beta \leq \alpha$$

3 Etude des évènements récurrents

Nous nous plaçons dans le cadre d'une suite de n_p simulations. A chaque $\alpha^{ième}$ simulation ($\alpha = 1, \dots, n_p$), nous avons besoin d'étudier l'histoire des simulations précédentes. Pour cela, nous avons introduit l'indice du numéro de simulations $\beta = 1, \dots, \alpha$.

L'évènement $(\Psi_k^{(n)}, a_k^{(n)}(t, \{p\}_{\alpha}))$ est dit récurrent si et seulement si :

$$\frac{\alpha \sqrt{\prod_{\beta=1}^{\alpha} \mu_{k\beta}^{(n)}}}{\lambda_1^{(\alpha, n)}} > \varepsilon_{POD} \quad \text{avec} \quad \mu_{k\beta}^{(n)} = \int_0^T (a_k^{(n)}(t, \{p\}_{\beta}))^2 dt$$

Notons que pour $\alpha = 1$, les évènements récurrents coïncident avec les évènements significatifs ($\mu_{k1}^{(n)} = \lambda_k^{(1, n)}$). Nous pouvons démontrer une propriété de dégradation du ROM en présence d'évènements récurrents : lorsqu'une suite de α simulations est effectuée, il existe $\beta_0 < \alpha$ tel qu'un évènement qui était spécifique lors de la $1^{ère}$ simulation devient négligeable à la simulation β_0 .

Nous proposons de développer une méthode de réduction adaptative avec gestion des évènements récurrents, afin d'obtenir un traitement efficace d'une suite de simulations. Pour cela, il faut modifier la construction de la base pour effectuer une suite de calculs donnant un résultat satisfaisant pour la dernière simulation en cours. Le principe de cette solution est de savoir oublier pour mieux adapter : une stratégie d'oubli des évènements récurrents est proposée.

Nous introduisons un coefficient multiplicateur $\gamma < 1$ tel que :

$$\lambda_l^{(\alpha, n)} = \frac{\sum_{\beta=1}^{\beta=\alpha-1} \gamma^{\alpha-\beta} \int_0^T \left(\{a\}^{(n)T}(t, \{p\}_{\beta}) \cdot \{V\}_l^{(n)} \right)^2 dt + \int_0^{t_{i+1}} \left(\{a\}^{(n)T}(t, \{p\}_{\alpha}) \cdot \{V\}_l^{(n)} \right)^2 dt}{\|\{V\}_l^{(n)}\|^2}$$

Si l'utilisateur dispose de peu de capacité de mémorisation (ϵ_{POD} ne peut pas être choisi suffisamment petit), il est préférable d'oublier les résultats les plus anciens pour ne retenir que ceux qui ont été produits en dernier (qui sont le plus près de l'optimum). Cette méthode d'"oubli total" s'obtient en choisissant $\gamma = 0$. Si, au contraire, la capacité de mémorisation est forte, il est préférable d'oublier les résultats les plus anciens, en choisissant $0 < \gamma < 1$ (méthode d'"oubli progressif").

La propriété de dégradation du ROM a été illustrée sur une suite de simulations de problèmes de mécanique classiques (problème purement académique d'une éprouvette en traction simple), dont le modèle de comportement introduit des variables internes. Le problème choisi est un modèle élastoplastique avec écrouissage isotrope linéaire dont la fonction seuil s'écrit à l'aide de la contrainte de Von Mises σ_{Mises} :

$$f(R, \sigma_{Mises}) = \sigma_{Mises} - R, \text{ avec } R = Hp + R_0 \text{ où } R_0 \text{ est la limite d'élasticité.}$$

Le vecteur des paramètres $\{p\}$ contient les paramètres du matériau : $\{p\} = \{E, H, R_0\}$. La suite de simulations est constituée de $n_p - 2$ simulations réalisées avec une valeur de $\{p\}$ figée à $\{p_1\}$ suivies de 2 simulations réalisées avec une valeur de $\{p\}$ figée à $\{p_2\}$ (voir Figure 1). L'avant-dernière simulation est exploitée pour adapter le ROM à la nouvelle valeur des paramètres. La dernière simulation est, quant à elle, réalisée avec une base figée afin d'évaluer l'effet des événements récurrents sur la dernière adaptation du ROM.

Nous constatons (Figure 1) que la dernière adaptation a bien été réalisée, car l'erreur de prévision de la dernière simulation est faible $\forall n_p (\approx 0.4\%)$ pour $\gamma = 0.5$. Sur cette même figure, on montre que le facteur d'oubli a pu permettre d'améliorer considérablement la qualité du calcul, puisque l'erreur sur la plasticité cumulée obtenue sans facteur d'oubli ($\gamma = 1$) était beaucoup plus forte ($\approx 70\%$), $\forall n_p \geq 1000$.

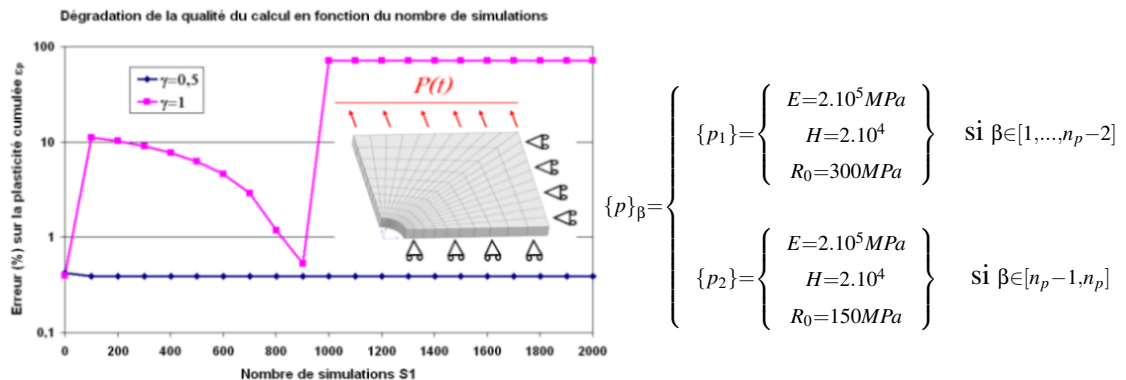


Figure 1 – Dégradation du ROM

Cette nouvelle approche est mise en oeuvre sur un problème inverse dans la section suivante.

4 Exemple de résolution d'un problème inverse à événements récurrent

Le problème choisi est le recalage des paramètres $\{p\} = \{E, H, R_0\}$ du modèle présenté précédemment. Premièrement, un processus d'optimisation en base figée (sans adaptation possible pour le ROM) a permis de constater que le recalage des paramètres matériaux n'arrivait pas à se faire. Ainsi, si le modèle est mauvais (puisque la base n'est pas adaptée), l'optimisation des paramètres échoue. Par contre, lorsqu'on ne fige pas la base, la méthode APHR adapte le ROM afin de garantir un niveau d'erreur inférieur à une limite donnée. Or, si la qualité est suffisante, l'optimisation convergera vers l'optimum quelle que soit la valeur du critère de sélection ϵ_{POD} .

Mais le nombre d'adaptation du ROM dépend de ε_{POD} et de γ . Ainsi, pour analyser l'importance des évènements récurrents et le rôle de γ , il va falloir comparer le nombre de systèmes globaux linéaires Éléments Finis résolus lors du calcul de $\delta \mathbf{u}_h$ pour différents γ . Celui-ci sera d'autant plus élevé que la présence d'évènements récurrents sera importante.

Nous comparons donc (Tableau 1) un calcul d'optimisation Éléments Finis avec un calcul d'optimisation en base réduite avec différents γ . Alors on peut remarquer que nous obtenons un minimum de problèmes globaux traités (Nb Pb. lin. EF dans le tableau) en choisissant un facteur d'oubli $0 < \gamma < 1$, et la qualité du processus d'optimisation n'est pas altérée, puisque non seulement le recalage des paramètres se fait parfaitement, mais le nombre d'itérations pour atteindre les paramètres de référence (Nb it. opt.) peut être plus faible par rapport à l'optimisation effectuée sans facteur d'oubli ($\gamma = 1$). Nous avons donc atténué l'effet des évènements récurrents en introduisant ce facteur d'oubli, sans pour autant dégrader la qualité du processus d'optimisation.

γ	0	0.1	0.5	0.9	1	Éléments Finis
Nb Pb. lin. EF	3547	2928	2114	3091	5040	23432
Nb it. opt.	147	156	147	169	149	130

Tableau 1 – Comparatif d'une optimisation Éléments Finis / ROM avec différents γ

5 Conclusion

Nous avons développé un algorithme de réduction adaptative dédié aux problèmes d'optimisation. Nous avons constaté que la présence d'évènements récurrents peut nuire au processus d'adaptation. Sur l'exemple traité, le nombre de résolutions globales Éléments Finis a été divisée par 10 grâce à un facteur d'oubli progressif des calculs précédant la simulation en cours, lors d'une suite de calculs (un processus d'optimisation dans cet exemple).

Références

- [1] P-A. Boucard, S. Buytet, P-A. Guidault. A multiscale strategy for structural optimization. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, DOI 10.1002/nme.2484, 2008.
- [2] P. Germain. *Cours de mécanique des milieux continus* Masson et Cie, Paris, 1973.
- [3] P. Germain, Q-S. Nguyen, P. Suquet. Continuum Thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics* vol. 50, 1010–1020, 1983.
- [4] B. Halpen, Q-S. Nguyen. Sur les matériaux standards généralisés. *J. de Mec.* vol. 40, 39–63, 1975.
- [5] K. Karhunen. Über lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. I. Math.-Phys.*, vol. 37, 1946.
- [6] M. Loeve. Probability theory. *The University Series in Higher Mathematics*, 3rd Ed, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1963.
- [7] E-N. Lorenz. Empirical Orthogonal Functions and Statistical Weather Prediction. *Scientific Report N1, Statistical Forecasting Project*, MIT, Department of Meteorology, 1956.
- [8] D. Ryckelynck. A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *International Journal of Computational Physics*, vol. 202, 346–366, 2005.
- [9] D. Ryckelynck. Hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, Issue 1, 75–89, 2009.