



**HAL**  
open science

# CONGRUENCES AUTOMORPHES ET TORSION DANS LA COHOMOLOGIE D'UNE VARIÉTÉ DE SHIMURA UNITAIRE SIMPLE

Pascal Boyer

► **To cite this version:**

Pascal Boyer. CONGRUENCES AUTOMORPHES ET TORSION DANS LA COHOMOLOGIE D'UNE VARIÉTÉ DE SHIMURA UNITAIRE SIMPLE. 2016. hal-01390143v1

**HAL Id: hal-01390143**

**<https://hal.science/hal-01390143v1>**

Preprint submitted on 31 Oct 2016 (v1), last revised 2 Jan 2017 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# CONGRUENCES AUTOMORPHES ET TORSION DANS LA COHOMOLOGIE D'UNE VARIÉTÉ DE SHIMURA UNITAIRE SIMPLE

*par*

Boyer Pascal

---

**Résumé.** — Nous montrons que l'existence d'une classe de cohomologie de torsion dans la cohomologie d'une variété de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor à coefficients dans un système local, s'accompagne de l'existence d'une infinité dénombrable de représentations irréductibles automorphes cohomologiques, en caractéristique nulle, qui sont faiblement congruentes deux à deux au sens de [10].

**Abstract (Automorphic congruences and torsion in the cohomology of a simple unitary Shimura variety)**

We show that torsion cohomology classes for Shimura varieties of Kottwitz-Harris-Taylor type gives raise to a numerable infinity of irreducible automorphic representations in characteristic zero, which are pairwise weakly congruent in the sense of [10].

## Table des matières

1. Introduction.....	1
2. Géométrie des variétés de Shimura unitaires simples.....	2
3. Classes de cohomologie de torsion.....	4
Références.....	7

## 1. Introduction

Soient  $F = EF^+$  un corps CM et  $X_{I,\eta} \rightarrow \text{Spec } F$  une variété de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor associée donc à une groupe de similitudes  $G/\mathbb{Q}$  et un sous-groupe compact ouvert  $I$ . On note  $\text{Spl}(I)$  l'ensemble des nombres premiers  $p \neq l$  tels que  
—  $p = uu^c$  est décomposé dans l'extension quadratique imaginaire  $E/Q$ ,

---

**Classification mathématique par sujets (2010).** — 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.

**Mots clefs.** — Variétés de Shimura, cohomologie de torsion, idéal maximal de l'algèbre de Hecke, localisation de la cohomologie, représentation galoisienne.

L'auteur remercie l'ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

- $G(\mathbb{Q}_p)$  est décomposé, i.e. de la forme  $\mathbb{Q}_p^\times \times \prod_{v|u} GL_d(F_v)$  et
- la composante locale en  $p$  de  $I$  est maximale.

Pour  $l$  un nombre premier, dans [6] on étudie la torsion dans les  $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, \bar{\mathbb{Z}}_l)$  et on montre en particulier que d'un point de vue automorphe, rien de nouveau apparaît au sens où toutes les classes de torsion se relèvent en caractéristique nulle dans la cohomologie en degré médian d'une variété d'Igusa. D'après [7], le phénomène semble partagé par une large classe de variétés de Shimura. Ainsi à première vue, au moins du point de vue de la correspondance de Langlands, l'existence de classes de cohomologie de torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura n'est d'aucun intérêt. Le but de ce travail, qui prolonge [6], est ainsi de trouver des applications automorphes à l'existence de classes de torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor, en construisant des congruences automorphes faibles au sens du §3 de [10].

**1.1. Théorème.** — *Étant donnée une classe de torsion de  $H^i(X_{I,\bar{\eta}}, \bar{\mathbb{Z}}_l)_\mathfrak{m}$ , pour tout nombre premier  $p \in \text{Spl}(I)$ , il existe une représentation irréductible automorphe cohomologique  $\Pi(p)$  telle que pour premier  $q \in \text{Spl}(I)$  distinct de  $p$ , la composante locale en  $q$  (resp. en  $p$ ) de  $\Pi(p)$  est non ramifiée (resp. est ramifiée), ses paramètres de Satake modulo  $l$  étant donnés par  $\mathfrak{m}$ .*

*Remarque :* On renvoie au §3 pour un énoncé plus précis et pour un faisceau de coefficients quelconque.

En particulier on notera qu'une classe de torsion donne naissance à une infinité de représentations en caractéristiques nulles,  $\Pi(p)$  qui sont

- automorphes irréductibles cohomologiques,
- non isomorphes deux à deux et telles que
- pour  $p \neq q$  des premiers de  $\text{Spl}(I)$ ,  $\Pi(p)$  et  $\Pi(q)$  sont non ramifiées en toute place de  $\text{Spl}(I) - \{p, q\}$  et partagent les mêmes paramètres de Satake modulo  $l$ . Au sens du §3 de [10], on dit que ces représentations sont faiblement congruentes.

Nous espérons prochainement donner un procédé relativement souple de construction de classes de cohomologie de torsion pour ces variétés de Shimura permettant ainsi de construire de telles familles de congruences automorphes.

## 2. Géométrie des variétés de Shimura unitaires simples

Soit  $F = F^+E$  un corps CM avec  $E/\mathbb{Q}$  quadratique imaginaire, dont on fixe un plongement réel  $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$ . Pour  $v$  une place de  $F$ , on notera

- $F_v$  le complété du localisé de  $F$  en  $v$ ,
- $\mathcal{O}_v$  l'anneau des entiers de  $F_v$ ,
- $\varpi_v$  une uniformisante et
- $q_v$  le cardinal du corps résiduel  $\kappa(v) = \mathcal{O}_v/(\varpi_v)$ .

Soit  $B$  une algèbre à division centrale sur  $F$  de dimension  $d^2$  telle qu'en toute place  $x$  de  $F$ ,  $B_x$  est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose  $B$  munie d'une involution de seconde espèce  $*$  telle que  $*|_F$  est la conjugaison complexe  $c$ . Pour  $\beta \in B^{*=-1}$ ,

on note  $\sharp_\beta$  l'involution  $x \mapsto x^\sharp_\beta = \beta x^* \beta^{-1}$  et  $G/\mathbb{Q}$  le groupe de similitudes, noté  $G_\tau$  dans [8], défini pour toute  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $R$  par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^\sharp_\beta = \lambda\}$$

avec  $B^{op} = B \otimes_{F,c} F$ . Si  $x$  est une place de  $\mathbb{Q}$  décomposée  $x = yy^c$  dans  $E$  alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times, \quad (1)$$

où, en identifiant les places de  $F^+$  au dessus de  $x$  avec les places de  $F$  au dessus de  $y$ ,  $x = \prod_i z_i$  dans  $F^+$ .

Dans [8], les auteurs justifient l'existence d'un  $G$  comme ci-dessus tel qu'en outre :

- si  $x$  est une place de  $\mathbb{Q}$  qui n'est pas décomposée dans  $E$  alors  $G(\mathbb{Q}_x)$  est quasi-déployé ;
- les invariants de  $G(\mathbb{R})$  sont  $(1, d-1)$  pour le plongement  $\tau$  et  $(0, d)$  pour les autres.

**2.2. Notation.** — On fixe un nombre premier  $l$  non ramifié dans  $E$  et on note  $\text{Spl}$  l'ensemble des places  $v$  de  $F$  telles que  $p_v := v|_{\mathbb{Q}} \neq l$  est décomposé dans  $F$  et  $B_v^\times \simeq GL_d(F_v)$ .

Rappelons, cf. [8] bas de la page 90, qu'un sous-groupe ouvert compact de  $G(\mathbb{A}^\infty)$  est dit « assez petit » s'il existe une place  $x$  pour laquelle la projection de  $U^v$  sur  $G(\mathbb{Q}_x)$  ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité.

**2.3. Notation.** — Soit  $\mathcal{I}$  l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits » de  $G(\mathbb{A}^\infty)$ . Pour  $I \in \mathcal{I}$ , on note  $X_{I,\eta} \rightarrow \text{Spec } F$  la variété de Shimura associée, dit de Kottwitz-Harris-Taylor.

*Remarque :* pour tout  $v \in \text{Spl}$ , la variété  $X_{I,\eta}$  admet un modèle projectif  $X_{I,v}$  sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_v$  de fibre spéciale  $X_{I,s_v}$ . Pour  $I$  décrivant  $\mathcal{I}$ , le système projectif  $(X_{I,v})_{I \in \mathcal{I}}$  est naturellement muni d'une action de  $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$  telle que l'action d'un élément  $w_v$  du groupe de Weil  $W_v$  de  $F_v$  est donnée par celle de  $-\text{deg}(w_v) \in \mathbb{Z}$ , où  $\text{deg} = \text{val} \circ \text{Art}^{-1}$  où  $\text{Art}^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$  est l'isomorphisme d'Artin qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

**2.4. Notations.** — (cf. [2] §1.3) Pour  $I \in \mathcal{I}$ , la fibre spéciale géométrique  $X_{I,\bar{s}_v}$  admet une stratification de Newton

$$X_{I,\bar{s}_v} =: X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 1} \supset X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 2} \supset \cdots \supset X_{I,\bar{s}_v}^{\geq d}$$

où  $X_{I,\bar{s}_v}^{=h} := X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h} - X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h+1}$  est un schéma affine<sup>(1)</sup>, lisse de pure dimension  $d-h$  formé des points géométriques dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate est de rang  $h$ . Pour tout  $1 \leq h < d$ , nous utiliserons les notations suivantes :

$$i_{h+1} : X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h+1} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, \quad j^{\geq h} : X_{I,\bar{s}_v}^{=h} \hookrightarrow X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h},$$

ainsi que  $j^{=h} = i_h \circ j^{\geq h}$ .

1. cf. par exemple [9]

### 3. Classes de cohomologie de torsion

Dans la suite, on fixe une représentation algébrique entière  $\xi$  de  $G$  sur  $\overline{\mathbb{Q}}_l$  et, pour un réseau stable fixé, on note  $V_\xi$  le  $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -système local associé sur la variété de Shimura  $X_I$ .

**3.1. Notation.** — Pour  $I \in \mathcal{I}$  un niveau fini, soit

$$\mathbb{T}_I := \overline{\mathbb{Z}}_l [T_{w,i} : w \in \text{Spl}(I) \text{ et } i = 1, \dots, d],$$

l'algèbre de Hecke associée à  $\text{Spl}(I)$ , où  $T_{w,i}$  est la fonction caractéristique de

$$GL_d(\mathcal{O}_w) \text{diag}(\overbrace{\varpi_w, \dots, \varpi_w}^i, \overbrace{1, \dots, 1}^{d-i}) GL_d(\mathcal{O}_w) \subset GL_d(F_w).$$

Pour tout  $w \in \text{Spl}(I)$ , on note

$$P_{\mathfrak{m},w}(X) := \sum_{i=0}^d (-1)^i q_w^{\frac{i(i-1)}{2}} \overline{T_{w,i}} X^{d-i} \in \overline{\mathbb{F}}_l[X]$$

le polynôme de Hecke associé à  $\mathfrak{m}$  et

$$S_{\mathfrak{m}}(w) := \left\{ \lambda \in \mathbb{T}_I / \mathfrak{m} \simeq \overline{\mathbb{F}}_l \text{ tel que } P_{\mathfrak{m},w}(\lambda) = 0 \right\},$$

le multi-ensemble des paramètres de Satake modulo  $l$  en  $w$  associés à  $\mathfrak{m}$ . Avec les notations précédentes, l'image  $\overline{T_{w,i}}$  de  $T_{w,i}$  dans  $\mathbb{T}_I / \mathfrak{m}$  s'écrit

$$\overline{T_{w,i}} = q_w^{\frac{i(1-i)}{2}} \sigma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$$

où  $S_{\mathfrak{m}}(w) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$  et  $\sigma_i$  désigne la  $i$ -ème fonction symétrique élémentaire.

**3.2. Notation.** — On notera alors  $\mathfrak{m}^\vee$  l'idéal maximal de  $\mathbb{T}_I$  défini par

$$T_{w,i} \in \mathbb{T}_I \mapsto q_w^{\frac{i(1-i)}{2}} \sigma_i(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_d^{-1}) \in \overline{\mathbb{F}}_l.$$

On reprend à présent les arguments de [6].

**3.3. Définition.** — On dira d'un  $\mathbb{T}_I$ -module  $M$  qu'il vérifie la propriété **(P)**, s'il admet une filtration finie

$$(0) = \text{Fil}^0(M) \subset \text{Fil}^1(M) \cdots \subset \text{Fil}^r(M) = M$$

telle que pour tout  $k = 1, \dots, r$ , il existe

- une représentation automorphe  $\Pi_k$  irréductible et entière de  $G(\mathbb{A})$ , apparaissant dans la cohomologie de  $X_{\mathcal{L}, \overline{\eta}_v}$  à coefficients dans  $V_{\xi, \overline{\mathbb{Q}}_l}$ , et telle que la composante locale  $\Pi_{k,v}$  de  $\Pi_k$  est ramifiée, i.e.  $(\Pi_{k,v})^{GL_d(\mathcal{O}_v)} = (0)$ ;
- une représentation irréductible entière et non ramifiée  $\tilde{\Pi}_{k,v}$  de même support cuspidal que  $\Pi_{k,v}$
- et un  $\mathbb{T}_I$ -réseau stable  $\Gamma$  de  $(\Pi_k^{\infty, v})^{I^v} \otimes \tilde{\Pi}_{k,v}^{GL_d(\mathcal{O}_v)}$  tel que
  - soit  $\text{gr}^k(M)$  est libre et isomorphe à  $\Gamma$ ,
  - soit  $\text{gr}^k(M)$  est de torsion et un sous-quotient de  $\Gamma / \Gamma'$  pour  $\Gamma' \subset \Gamma$  un deuxième  $\mathbb{T}_I$ -réseau stable.

Le gradué  $\text{gr}^k(M)$  sera dit de type  $i$  si en outre  $\Pi_{k,v}$  est de la forme

$$\text{St}_i(\chi) \times \chi_1 \times \cdots \times \chi_{d-i}$$

où  $\chi, \chi_1, \dots, \chi_{d-i}$  sont des caractères non ramifiés.

*Remarque :* La propriété **(P)** est clairement stable par extensions, par sous-quotients et, en remplaçant la condition  $\xi$ -cohomologique par  $\xi^V$ -cohomologique, par dualité.

**3.4. Lemme.** — Soient  $h \geq 1$  et  $M$  un sous-quotient irréductible de  $H_c^{d-h}(X_{I,\bar{s}_v}^{=h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l})$  (resp. de  $H^{d-h}(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l})$ ). Alors

- soit  $M$  vérifie la propriété **(P)** et est alors de type  $h$  ou  $h+1$  (resp. de type  $h$ )
- soit  $M$  n'est pas un sous-quotient de  $H^{d-h-1}(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h+1}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l})$ .

*Démonstration.* — Le résultat découle des calculs explicites de ces  $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -groupes de cohomologie en niveau infini donnés dans [3] et on renvoie le lecteur à la présentation qui en est faite au §3.3 (resp. au §3.2) de [5]. Précisément d'après loc. cit., pour  $\Pi^\infty$  une représentation irréductible de  $G(\mathbb{A}^\infty)$ , la composante isotypique  $H_c^{d-h}(X_{I,\bar{s}_v}^{=h}, V_{\xi} \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l) \{ \Pi^{\infty, v} \}$  est nulle si  $\Pi^\infty$  n'est pas la composante hors de  $\infty$  d'une représentation automorphe  $\xi$ -cohomologique  $\Pi$ . Sinon, on distingue trois situations pour la composante locale en  $v$  de  $\Pi$  :

- (i) soit  $\Pi_v \simeq \text{St}_r(\chi_v) \times \pi'_v$  avec  $h \leq r \leq d$ ,
- (ii) soit  $\Pi_v \simeq \text{Speh}_r(\chi_v) \times \pi'_v$  avec  $h \leq r \leq d$ ,
- (iii) soit  $\Pi_v$  n'est pas d'une des deux formes précédentes,

où dans ce qui précède,  $\chi_v$  est un caractère non ramifié de  $F_v^\times$  et  $\pi'_v$  une représentation irréductible admissible de  $GL_{d-h}(F_v)$ . Alors cette composante isotypique, en tant que représentation de  $GL_d(F_v) \times \mathbb{Z}$ , est de la forme

- dans le cas (i), à  $(\text{Speh}_h(\chi^{\{\frac{h-r}{2}\}}) \times \text{St}_{r-h}(\chi^{\{\frac{h}{2}\}})) \times \pi'_v \otimes \Xi^{\frac{r-h}{2}}$  (resp. nulle si  $r \neq h$  et isomorphe à  $\text{St}_h(\chi_v)$  sinon) ;
- nulle dans le cas (ii) si  $r \neq h$  et sinon isomorphe à  $\text{Speh}_h(\chi_v) \times \pi'_v$ .
- Enfin, dans le cas (iii), la représentation de  $GL_d(F_v)$  obtenue n'aura pas d'invariants sous  $GL_d(\mathcal{O}_v)$ .

Ainsi en prenant les invariants sous  $I$ , dans le cas (i) on obtient un  $\mathbb{T}_I$ -module vérifiant la propriété **(P)** et qui est de type  $h$  ou  $h+1$ . Dans le cas (ii), le  $\mathbb{T}_I$ -module obtenu n'est pas un sous-quotient de  $H^{d-h-1}(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h+1}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Q}}_l})$  et le cas (iii) ne fournit rien. □

Supposons à présent qu'il existe  $i$  tel que la torsion de  $H^i(X_{I,\bar{\eta}_v}, V_{\xi})$  est non nulle. Soit alors  $1 \leq h \leq d$  maximal tel qu'il existe  $i$  pour lequel le sous-espace de torsion  $H^i(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi})_{\text{tor}}$  de  $H^i(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi})$  est non nul. Notons que

- comme  $X_{I,\bar{s}_v}^{\geq d}$  est de dimension nulle, alors  $h < d$  ;
- d'après le changement de base lisse,  $H^i(X_{I,\bar{\eta}_v}, V_{\xi}) \simeq H^i(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 1}, V_{\xi})$  de sorte que  $h \geq 1$ .

**3.5. Lemme.** — Avec les notations ci-dessus, le plus petit indice  $i$  tel que la torsion de  $H^i(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi})$  est non nulle est  $i = 0$  et alors tout sous-module irréductible de  $H^0(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi})_{\text{tor}}$  vérifie la propriété **(P)** en étant de type  $h+1$ .

*Démonstration.* — Considérons la suite exacte courte de faisceaux pervers

$$0 \rightarrow i_{h+1,*} V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l, |X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h+1}}[d-h-1] \longrightarrow j_!^{\geq h} j^{\geq h,*} V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l, |X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}}[d-h] \longrightarrow V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l, |X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}}[d-h] \rightarrow 0. \quad (2)$$

Les strates  $X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}$  étant lisses et  $j^{\geq h}$  étant affine, les trois termes de la suite exacte sont pervers et sont libres au sens de la théorie de torsion naturelle issue de la structure  $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -linéaire, cf. [4] §1.1-1.3. Par ailleurs il résulte du théorème d'Artin, cf. par exemple le théorème 4.1.1 de [1] et, donc, de l'affinité des strates  $X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}$ , que les  $H^i(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, j_!^{\geq h} j^{\geq h,*} V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l, |X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}}[d-h])$  sont nuls pour  $i < 0$  et sans torsion pour  $i = 0$ , de sorte que pour  $i > 0$ , on a

$$0 \rightarrow H^{-i-1}(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \longrightarrow H^{-i}(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h+1}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h-1]) \rightarrow 0, \quad (3)$$

et pour  $i = 0$ ,

$$0 \rightarrow H^{-1}(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \longrightarrow H^0(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h+1}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h-1]) \longrightarrow H^0(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, j_!^{\geq h} j^{\geq h,*} V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \longrightarrow H^0(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi, \bar{\mathbb{Z}}_l}[d-h]) \rightarrow \dots \quad (4)$$

Ainsi si la torsion de  $H^i(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi})$  est non nulle alors  $i \geq 0$  et, en utilisant la dualité de Grothendieck-Verdier, le plus petit tel indice est nécessairement  $i = 0$ . Par ailleurs la torsion de  $H^0(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi})$  se relève à la fois dans  $H_c^0(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi})$  et  $H^0(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h+1}, V_{\xi})$ , lesquels sont libres. Ainsi d'après le lemme précédent, la torsion de  $H^0(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}, V_{\xi})$  vérifie la propriété **(P)** en étant de type  $h + 1$ .  $\square$

**3.9. Lemme.** — *Avec les notations précédentes, pour tout  $1 \leq h' \leq h$ , l'indice  $h - h'$  est le plus grand  $i$  tel que la torsion de  $H^{-i}(X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h'}, V_{\xi})_{\text{tor}}$  est non nulle. En outre celle-ci vérifie la propriété **(P)** en étant de type  $h + 1$ .*

*Démonstration.* — On raisonne par récurrence sur  $h'$  de  $h$  à 1. Le cas  $h' = h$  est traité dans le lemme précédent, supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang  $h' + 1$  et traitons le cas de  $h'$ . On reprend alors les suites exactes (2) avec  $h'$ . Le résultat découle alors de (3) et de l'hypothèse de récurrence.  $\square$

Le cas  $h' = 1$  du lemme précédent, en utilisant le théorème de changement de base lisse, fournit alors l'énoncé suivant.

**3.10. Proposition.** — *Soit  $i$  maximal, s'il existe, tel que la torsion de  $H^{-i}(X_{I, \bar{\eta}_v}, V_{\xi})$  est non nul. Il vérifie alors la propriété **(P)** en étant de type  $i + 2$ .*

**3.11. Corollaire.** — *Soit  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal de  $\mathbb{T}_I$  et  $i$  maximal s'il existe, tel que la torsion de  $H^{-i}(X_{I, \bar{\eta}}, V_{\xi})_{\mathfrak{m}}$  est non nulle. Il existe alors une collection  $\Pi(w)$  indexée par les places  $w$  de  $F$  divisant une place fixée  $u$  au dessus d'un premier  $p \in \text{Spl}(I)$ , de représentations irréductibles automorphes  $\xi$ -cohomologiques telles que :*

- pour tout  $q \in \text{Spl}(I)$  distinct de  $p$  (resp.  $q = p$ ), la composante locale en  $q$  de  $\Pi(w)$  est non ramifiée, ses paramètres de Satake aux places  $v$  au dessus de  $q$  (resp. et distinctes de  $w$ ) étant donnés par  $S_{\mathfrak{m}}(v)$  ;
- la représentation  $\Pi(w)_w$  est de la forme  $\text{St}_{i+2}(\chi_{w,0}) \times \chi_{w,1} \times \dots \times \chi_{w,d-i-2}$ , où  $\chi_{w,0}, \dots, \chi_{w,d-i-2}$  sont des caractères non ramifiés de  $F_w$ .

*Démonstration.* — Considérons un sous- $\mathbb{T}_I$ -module irréductible  $M$  de  $H^{-i}(X_{I,\bar{\eta}}, V_\xi)_{\mathfrak{m},\text{tor}}$ . Pour toute place  $w \in \text{Spl}(I)$ , d’après le changement de base lisse, on a  $H^{-i}(X_{I,\bar{\eta}}, V_\xi)_{\mathfrak{m}} \simeq H^{-i}(X_{I,\bar{s}_v}^{\geq 1}, V_\xi)_{\mathfrak{m}}$ . D’après la proposition précédente ce module  $M$  vérifie la propriété **(P)** en étant de type  $i + 2$  de sorte qu’il existe une représentation automorphe irréductible  $\xi$ -cohomologique  $\Pi(w)$  telle que :

- sa composante locale en  $w$  est de la forme  $\text{St}_{i+2}(\chi_{w,0}) \times \chi_{w,1} \times \cdots \times \chi_{w,d-i-2}$ , où  $\chi_{w,0}, \cdots, \chi_{w,d-i-2}$  sont des caractères non ramifiés de  $F_w$  ;
- $M$  est un sous-quotient de la réduction modulo  $l$  de  $\Pi(w)$  et donc en particulier pour toute place  $v$  différente de  $w$ , au dessus d’un  $p \in \text{Spl}(I)$ , sa composante locale en  $v$  est non ramifiée avec pour paramètres de Satake les éléments de  $S_{\mathfrak{m}}(v)$ .

□

## Références

- [1] J. Bernstein, A.A. Beilinson, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analyse et topologie sur les espaces singuliers*, *Asterisque* 100, 1982.
- [2] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [3] P. Boyer. Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications. *Compositio*, 146(2) :367–403, 2010.
- [4] P. Boyer. Filtrations de stratification de quelques variétés de shimura simples. *Bulletin de la SMF*, 142, fascicule 4 :777–814, 2014.
- [5] P. Boyer. Congruences automorphes et torsion dans la cohomologie d’un système local d’Harris-Taylor. *Annales de l’Institut Fourier*, 65 n°4 :1669–1710, 2015.
- [6] P. Boyer. Sur la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor. *preprint*, 2015.
- [7] A. Caraiani and P. Scholze. On the generic part of the cohomology of compact unitary shimura varieties. *Preprint*, 2015.
- [8] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [9] T. Ito. Hasse invariants for somme unitary Shimura varieties. *Math. Forsch. Oberwolfach report 28/2005*, pages 1565–1568, 2005.
- [10] M.-F. Vignéras. Correspondance de Langlands semi-simple pour  $\text{GL}(n, F)$  modulo  $l \neq p$ . *Invent. Math.*, 144(1) :177–223, 2001.