



**HAL**  
open science

# Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certains problèmes d'évolution

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certains problèmes d'évolution. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Série A, Sciences mathématiques, 1976, 282, pp.837-840. hal-01389846

**HAL Id: hal-01389846**

**<https://hal.science/hal-01389846>**

Submitted on 30 Oct 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

*Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certains problèmes d'évolution.* Note (\*) de M. **Jean Jacques Moreau**, présentée par M. Jean Leray.

Soient  $X, Y, Z$  trois espaces de Banach,  $\Phi : X \times Y \rightarrow Z$  bilinéaire continue,  $I$ , intervalle réel,  $x : I \rightarrow X$  et  $y : I \rightarrow Y$  à variation localement bornée; on calcule la mesure différentielle de  $t \mapsto \Phi(x(t), y(t))$ . Inégalités concernant le cas où  $\Phi : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$  est symétrique et engendre une forme quadratique  $\geq 0$ . Application aux solutions continues à droite d'un processus de rafle.

1. Soit  $I$  un intervalle réel,  $X$  un espace de Banach réel,  $f : I \rightarrow X$  une application à *variation localement bornée*, c'est-à-dire à variation bornée sur tout sous-intervalle compact de  $I$ ; notation :  $f \in \text{vlb}(I, X)$ . De ce que  $X$  est complet, il résulte immédiatement qu'en tout point  $t$  intérieur à  $I$ , la fonction  $f$  possède une limite à gauche et une limite à droite notées respectivement  $f^-(t)$  et  $f^+(t)$ ; conventionnellement, si  $t$  appartient à  $I$  et se trouve être le début (resp. la fin) de cet intervalle on écrira

$$f^-(t) = f(t) \text{ [resp. } f^+(t) = f(t)\text{]}.$$

Il est classique d'associer à  $f$  une mesure sur  $I$ , à valeurs dans  $X$ , notée  $df$ ; une propriété caractéristique de cette mesure est que, pour tout  $[s, t] \subset I$ , on a  $\int_{[s, t]} df = f^+(t) - f^-(s)$ .

Nous dirons que  $df$  est la *mesure différentielle* de  $f$ ; c'est aussi la mesure différentielle des fonctions  $f^+$  et  $f^-$ . Si l'intervalle  $I$  est ouvert,  $df$  est la dérivée au sens des distributions de la mesure vectorielle admettant  $f$  pour densité relativement à la mesure de Lebesgue.

2. Nous nous appuyons dans ce qui suit sur la théorie des mesures vectorielles, selon la formalisation de Bourbaki. Soient  $X, Y, Z$  trois espaces de Banach; on utilisera la même notation  $\|\cdot\|$  pour représenter la norme d'un élément d'un quelconque de ces espaces et aussi la mesure réelle positive, *valeur absolue* d'une mesure vectorielle majorable à valeurs dans l'un d'eux. Soit  $\Phi : X \times Y \rightarrow Z$  une forme bilinéaire continue; on note  $\|\Phi\|$  le réel norme de  $\Phi$ . Soit  $T$  un espace localement compact, supposé pour simplifier dénombrable à l'infini; soit  $dm$  une mesure vectorielle sur  $T$ , à valeurs dans  $Y$ , majorable. On déduit élémentairement de <sup>(1)</sup> (chap. 6, § 2, prop. 11), que si  $g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(|dm|, X)$ , il existe une (unique) mesure sur  $T$  à valeurs dans  $Z$  que nous noterons  $\Phi(g, dm)$ , possédant les propriétés suivantes :

(i) pour tout  $h \in \mathcal{L}^1(|dm|, \mathbf{R})$  et tout  $a \in X$  on a

$$\int_T \Phi(ha, dm) = \Phi\left(a, \int_T h dm\right);$$

(ii) la mesure vectorielle  $\Phi(g, dm)$  est majorable et sa valeur absolue est majorée par la mesure  $\|\Phi\| \cdot |g| \cdot |dm|$ ;

(iii) si  $g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(|dm|, X)$  et  $h \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(|g| \cdot |dm|, \mathbf{R})$  les mesures vectorielles  $h \Phi(g, dm)$  et  $\Phi(hg, dm)$  sont égales;

(iv) si  $h \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(|dm|, \mathbf{R})$  et  $g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(|h| \cdot |dm|, X)$  les mesures vectorielles  $\Phi(hg, dm)$  et  $\Phi(g, h dm)$  sont égales;

(v) s'il existe une mesure réelle positive  $d\mu$  sur  $T$  et une fonction  $y \in \mathcal{L}_{loc}^1(d\mu, Y)$  telles que  $dm = y d\mu$ , alors  $|dm| = |y| d\mu$  et, pour tout  $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(|dm|, X)$  les mesures vectorielles  $\Phi(g, dm)$  et  $\Phi(g, y) d\mu$  sont égales.

3. Soit comme précédemment  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soit  $x \in \text{vlb}(I, X)$  et soit  $y \in \text{vlb}(I, Y)$ ; alors la fonction  $t \mapsto \Phi(x(t), y(t))$ , notée simplement  $\Phi(x, y)$ , appartient à  $\text{vlb}(I, Z)$ . Avec la notation posée plus haut pour les limites à droite ou à gauche d'un point (éventuellement extrémité de  $I$ ), nous établissons <sup>(2)</sup> :

PROPOSITION 1. — *La mesure différentielle de  $t \mapsto \Phi(x(t), y(t))$  vaut*

$$(1) \quad d\Phi(x, y) = \Phi(dx, y^-) + \Phi(x^+, dy) = \Phi(dx, y^+) + \Phi(x^-, dy).$$

Ces égalités se vérifient immédiatement dans le cas particulier où les fonctions  $x$  et  $y$  sont en escalier sur tout sous-intervalle compact de  $I$ ; on en déduit le cas général en établissant, pour toute application réglée  $u$ , de  $I$  dans  $X$  par exemple, une propriété d'approximation de la mesure vectorielle  $\Phi(u, dy)$  par des  $\Phi(u, dy_e)$  où les  $y_e : I \rightarrow Y$  sont en escalier sur tout sous-intervalle compact de  $I$ .

4. Faisons dans ce qui précède  $X = Y$ ; on suppose que la forme bilinéaire  $\Phi$  est symétrique, que  $Z = \mathbb{R}$  et que la forme quadratique  $\xi \mapsto \Phi(\xi, \xi)$  est  $\geq 0$  sur  $X$ ; par des techniques semblables on obtient :

PROPOSITION 2. — *Avec les hypothèses ci-dessus, pour toute  $x \in \text{vlb}(I, X)$ , on a, au sens de l'ordre des mesures réelles, les inégalités*

$$(2) \quad 2\Phi(x^-, dx) \leq d\Phi(x, x) \leq 2\Phi(x^+, dx).$$

5. On conçoit  $I$  comme un intervalle de temps; soit  $H$  un espace hilbertien réel; pour chaque  $t \in I$ , soit  $A(t, \cdot)$  une multiapplication de  $H$  dans  $H$ , monotone au sens de Minty. De nombreux travaux ont été consacrés aux « équations » d'évolution de la forme

$$(3) \quad -\dot{u} \in A(t, u).$$

Une *solution forte* est une application  $u : I \rightarrow H$ , localement absolument continue, dont la dérivée forte  $\dot{u}$  vérifie (3) Lebesgue-presque partout.

On étudie ici le cas spécial où, pour tout  $t \in I$  et tout  $x \in H$ , l'ensemble  $A(t, x)$  est une partie *conique* (éventuellement vide) de  $H$ . On en déduit aisément <sup>(2)</sup> l'existence de  $C(t)$ , partie convexe fermée de  $H$  telle que, si on note  $\psi(t, \cdot)$  la fonction indicatrice de cet ensemble [i. e.  $\psi(t, x) = 0$  si  $x \in C(t)$  et  $+\infty$  sinon], on a  $A \subset \partial\psi$ , sous-différentiel de  $\psi$ . En particulier  $A = \partial\psi$  si  $A$  est monotone maximale, ce que nous supposons dans la suite; l'équation (3) est, dans ce cas, celle du *processus de rafle* <sup>(3)</sup>. Une conséquence immédiate de la conicité des ensembles  $A(t, x)$  est que, si  $J$  est un autre intervalle réel,  $\theta : J \rightarrow I$  une application localement absolument continue croissante et  $u$  une solution forte de (3), la fonction  $v = u \circ \theta$ , localement absolument continue de  $J$  dans  $H$ , vérifie  $-\dot{v} \in A(\theta(s), v(s))$  Lebesgue-presque partout dans  $J$ . En d'autres termes, la condition (3) associe la chaîne des positions successives du point mobile  $u$  dans  $H$  à la chaîne des configurations successives de l'ensemble mobile  $C$  d'une manière indépendante de l'horaire de cette succession.

Cette propriété d'invariance par changement de variable croissant incite à une reformulation du problème en déprivilégiant la mesure de Lebesgue. Nous disons que  $u \in \text{vlb}(I, H)$  est solution de (3) au sens des mesures différentielles s'il existe (de façon évidemment non unique)  $d\mu$ , mesure réelle  $\geq 0$  sur  $I$  et  $u' \in \mathcal{L}_{t_0, c}^1(d\mu, H)$  telles que  $du = u' d\mu$  et que  $-u'(t) \in A(t, u(t))$  pour tout  $t$  dans  $I$  [il revient au même d'exiger que cette condition soit vérifiée seulement  $d\mu$ -presque partout et que  $u(t) \in C(t)$  pour tout  $t$ ]. L'éventualité d'une mesure  $d\mu$  présentant des atomes fait que cette formulation englobe le cas de certains processus de rafle *discontinus*, abordés ailleurs par d'autres méthodes <sup>(4)</sup>. Par la seconde des inégalités (2), on établit :

**PROPOSITION 3.** — Si  $u_1$  et  $u_2$ , appartenant à  $\text{vlb}(I, H)$  et continues à droite, sont solutions de (3) au sens des mesures différentielles, la fonction numérique  $t \mapsto |u_1(t) - u_2(t)|$  est décroissante. En particulier, si ces deux solutions satisfont une même condition initiale  $u_1(t_0) = u_2(t_0) = u_0$ , elles sont égales pour tout  $t \geq t_0$ .

*Remarque.* — La continuité à droite de  $u \in \text{vlb}(I, H)$  équivaut à ce que, pour tout  $t \geq t_0$ , on a

$$u(t) = u(t_0) + \int_{]t_0, t]} du = u(t_0) + \int_{]t_0, t]} u'(\tau) d\mu(\tau).$$

On retrouve ainsi le point de vue adopté par C. Castaing <sup>(5)</sup> dans l'étude d'une version *aléatoire* du processus de rafle.

L'existence d'une solution continue à droite s'accordant à une donnée initiale  $u_0 \in C(t_0)$  peut être établie <sup>(6)</sup> sous l'hypothèse que la multifonction  $t \mapsto C(t)$  est à *rétraction finie continue à droite* <sup>(7)</sup>. La propriété que voici peut être mise à profit dans la démonstration.

6. On tire immédiatement de (1) et (2) :

**PROPOSITION 4.** — Avec les mêmes hypothèses qu'au paragraphe 4, on suppose que  $I$  est un intervalle compact  $[t_0, t_1]$ ; on note  $V$  l'espace vectoriel constitué par les applications  $x : I \rightarrow X$ , à variation bornée, continues à droite et nulles au point  $t_0$ . Soit  $p : I \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction  $\geq 0$  décroissante continue à gauche. Alors l'application  $x \mapsto \int_1 p \Phi(x, dx)$  est une forme quadratique  $\geq 0$  sur  $V$ ; elle est définie positive, donc strictement convexe, si la forme quadratique  $\xi \mapsto \Phi(\xi, \xi)$  est définie positive sur  $X$  et  $p$  strictement positive, strictement décroissante.

Le cas où  $\Phi$  est le produit scalaire d'un espace hilbertien, où  $x$  est absolument continue, avec  $p = 1$ , donne banalement  $(1/2) |x(t_1)|^2$  comme valeur de la forme quadratique. La positivité a été dans ce cas invoquée par H. Brézis et I. Ekeland <sup>(8)</sup> ou, dans des problèmes plus généraux de mécanique des systèmes dissipatifs par B. Nayroles <sup>(9)</sup>, pour caractériser les solutions fortes de certains problèmes d'évolution paraboliques, comme minimisant une certaine fonctionnelle convexe. La proposition ci-dessus permet d'adapter ce procédé à la situation du paragraphe 5. Par ailleurs la stricte convexité apportée par l'introduction d'une « fonction de poids »  $p$  (par exemple une fonction exponentielle décroissante) est techniquement utile.

- (<sup>1</sup>) N. BOURBAKI, *Intégration*, 6, Hermann, Paris, 1959.
- (<sup>2</sup>) J. J. MOREAU, *Sur les mesures différentielles des fonctions vectorielles à variation localement bornée* (*Séminaire d'Analyse convexe*, Montpellier, 5, 1975, exposé n° 17).
- (<sup>3</sup>) J. J. MOREAU, *Comptes rendus*, 276, série A, 1973, p. 791.
- (<sup>4</sup>) J. J. MOREAU, *Factorisation d'un processus de rafle discontinu* (*Séminaire d'Analyse convexe*, Montpellier, 4, 1975, exposé n° 15).
- (<sup>5</sup>) C. CASTAING, *Comptes rendus*, 282, série A, 1976, p. 515.
- (<sup>6</sup>) J. J. MOREAU, *Solutions du processus de rafle au sens des mesures différentielles* (*Séminaire d'Analyse convexe*, Montpellier, 6, 1976, exposé n° 1).
- (<sup>7</sup>) J. J. MOREAU, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, serie IV, 1, 1974, p. 169-203.
- (<sup>8</sup>) H. BREZIS et I. EKELAND, *Comptes rendus*, 282, série A, 1976 (à paraître).
- (<sup>9</sup>) B. NAYROLES, *Comptes rendus*, 282, série A, 1976 (à paraître).

*Institut de Mathématiques,  
Université des Sciences et Techniques du Languedoc,  
34060 Montpellier Cedex.*