HAL
open science

Application de la Méthode X-FEM pour l'Analyse Multi-Echelles de Matériaux

Patrice Cartraud, Mathieu Cloirec, Nicolas Moes

To cite this version:

Patrice Cartraud, Mathieu Cloirec, Nicolas Moes. Application de la Méthode X-FEM pour l'Analyse Multi-Echelles de Matériaux. CSMA, 2003, Giens, France. hal-01389741

HAL Id: hal-01389741

https://hal.science/hal-01389741v1

Submitted on 29 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Application de la Méthode X-FEM pour l'Analyse Multi-Echelles de Matériaux

P. Cartraud, M. Cloirec, N. Moës

Laboratoire Mécanique et Matériaux, Ecole Centrale de Nantes, BP 92101, 44321 Nantes cedex 3
{patrice.cartraud,mathieu.cloirec,nicolas.moes}@ec-nantes.fr

Résumé

La méthode X-FEM permet d'enrichir les fonctions de forme éléments finis, et donc de prendre en compte des discontinuités au sein d'un élément. Elle est appliquée ici à la résolution de problèmes cellulaires d'homogénéisation, pour faciliter le maillage de la cellule, qui peut ne pas respecter l'interface matériau. Une nouvelle fonction d'enrichissement est proposée, et une solution numérique de même qualité qu'une approche éléments finis classique est obtenue.

1 Introduction

La méthode X-FEM (eXtended Finite Element Method) a un domaine d'utilisation très large, et nous nous intéressons ici à son application dans le cadre de problèmes multi-échelles.

Plus précisément, nous considérons la résolution numérique des problèmes cellulaires d'homogénéisation. Dans ce cas, la méthode X-FEM présente l'intérêt de rendre très aisé le maillage de la cellule, puisqu'il n'est pas nécessaire de respecter les interfaces entre les différents constituants de la cellule. Les interfaces sont décrites en utilisant une représentation par fonctions de niveau (level-set) [7], selon une procédure décrite en section 3. Les éléments traversés par l'interface entre deux constituants sont alors enrichis, en utilisant les propriétés de la partition de l'unité [3]. Des fonctions de forme simple, permettant de représenter la discontinuité des déformations à l'interface, sont ainsi introduites. Différents choix sont proposés à ce niveau, voir section 4, et leurs performances sont examinées en termes de convergence. La méthode est enfin appliquée à différents exemples.

2 Résolution de Problèmes Cellulaires

Notre objectif est ici de résoudre numériquement le problème aux limites d'homogénéisation posé sur le volume élémentaire représentatif du matériau (ou cellule de base). Pour simplifier, nous considérons le cas de l'homogénéisation périodique en élasticité linéaire, mais l'approche proposée peut s'appliquer aussi à une méthode de type modules effectifs ou à des lois de comportement non-linéaires.

Les équations du problème à résoudre sont classiques, cf. [4] par exemple. Il s'agit de trouver $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{u^m}$ tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{y}) : \big(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u^m}(\boldsymbol{y}))\big) \\ \boldsymbol{u^m} \quad \text{périodique} \\ \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n} \quad \text{anti-périodique} \end{cases} \tag{1}$$

où anti-périodique signifie que la fonction prend des valeurs opposées sur 2 faces opposées de la cellule. La loi de comportement macroscopique relie $\boldsymbol{E}$ à la moyenne des contraintes $\boldsymbol{\Sigma}$, et est obtenue en soumettant la cellule à des déformations macroscopiques $\boldsymbol{E}$ unitaires. Si on introduit le tenseur du second ordre $\boldsymbol{I}^{ij}$ défini par :

$$\boldsymbol{I}^{ij}_{kh} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) \tag{2}$$

et en notant $\boldsymbol{u}^{\mathbf{m}_{ij}}$ la solution du problème (1) avec la donnée $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{I}^{ij}$, la raideur homogénéisée a pour expression ($|\Omega|$ désigne le volume de la cellule de base Ω) :

$$\begin{cases} a^{hom}_{ijkl} = a(\boldsymbol{I^{kl}} + \boldsymbol{u}^{\mathbf{m}_{kl}}, \boldsymbol{I^{ij}} + \boldsymbol{u}^{\mathbf{m}_{ij}}) = a(\boldsymbol{I^{kl}}, \boldsymbol{I^{ij}}) + a(\boldsymbol{I^{ij}}, \boldsymbol{u}^{\mathbf{m}_{kl}}) \\ a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{a} : \boldsymbol{e}(\boldsymbol{v}) d\Omega \end{cases} \tag{3}$$

La cellule de base contient les différentes phases du matériau, et les hétérogénéités peuvent être de forme complexe, ou en grand nombre quand on veut représenter le caractère aléatoire de leur disposition géométrique au sein du matériau.

Dans la littérature, c'est très majoritairement la méthode des éléments finis qui est utilisée pour la résolution des problèmes cellulaires, avec des variantes dans sa mise en oeuvre, et on se reportera à [1] pour avoir un état de l'art dans ce domaine. Dans la plupart des travaux, le maillage se conforme au contour des hétérogénéités, c'est-à-dire qu'un seul matériau est présent au sein d'un élément fini. Il en résulte que le maillage peut s'avérer fastidieux, voire même impossible avec des mailleurs standards.

L'utilisation de X-FEM permet de contourner ce problème, puisqu'il est possible d'utiliser un maillage qui ne respecte pas l'interface entre les constituants.

3 Représentation par fonctions de niveau

En pratique, l'interface matériau dans la cellule de base est décrite de façon implicite, en affectant à chaque noeud I du maillage, sa distance ϕ_I à l'interface (avec un signe positif ou négatif selon qu'on se situe dans l'une ou l'autre phase). On peut alors obtenir une

représentation continue de la fonction de niveau, en utilisant les fonctions de forme éléments finis classiques :

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{I}} \phi_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) \tag{4}$$

L'iso-zéro de la fonction de niveau ϕ représente ainsi la position de l'interface.

Grâce à la méthode X-FEM, le maillage peut ne pas être conforme à l'interface. Cependant, l'interface étant décrite par une approche de type éléments finis, il est nécessaire de prendre un maillage assez fin à son voisinage pour en obtenir une bonne approximation géométrique. Ceci n'est pas en soi réellement pénalisant, car les gradients de la solution recherchée étant élevés près de l'interface, on diminue ce faisant l'erreur numérique. Dans ce travail, c'est sur des considérations exclusivement géométriques qu'un algorithme simple de raffinement de maillage est mis en oeuvre. Le critère de raffinement est fondé sur la comparaison de la courbure de la fonction de niveau à la taille caractéristique de l'élément fini traversé, voir [5] pour plus de détails.

4 Stratégie d'enrichissement

Avec la méthode X-FEM, un enrichissement est ajouté à l'approximation éléments finis classique, en tirant profit des propriétés de la partition de l'unité [3] :

$$\mathbf{u}^{\mathrm{X-FEM}} = \sum_{\mathbf{I}} \mathbf{u}_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{\mathbf{enr}}, \qquad \mathbf{u}^{\mathbf{enr}} = \sum_{\mathbf{J}} \mathbf{a}_{\mathbf{J}} \mathbf{N}_{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{5}$$

Les degrés de liberté additionnels $\mathbf{a}_{\mathbf{J}}$ apparaissent pour les noeuds dont le support est traversé par une interface matériau. La fonction d'enrichissement F doit être choisie avec pour objectif de représenter au mieux la physique du problème, c'est-à-dire ici avoir une dérivée discontinue à l'interface, et plusieurs choix sont possibles. Dans [8], c'est la valeur absolue de la fonction de niveau qui est utilisée :

$$F^1(\mathbf{x}) = |\sum_{\mathbf{I}} \phi_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{x})| \tag{6}$$

et il est montré que le fait de régulariser cette fonction loin de l'interface améliore la convergence. Nous proposons ici un autre choix de fonction d'enrichissement :

$$F^2(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{I}} |\phi_{\mathbf{I}}| \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) - |\sum_{\mathbf{I}} \phi_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{x})| \tag{7}$$

Ces différentes fonctions sont représentées dans le cas 1D Figure 1.

En pratique, lorsqu'un élément est traversé par une interface matériau, on suit la procédure générale exposée dans [6]. Ainsi, on intègre séparément dans les différents matériaux. La première étape consiste donc à décomposer l'élément en sous-domaines, propres à chaque matériau, et délimités par le contour initial de l'élément et l'iso-zéro de la fonction de niveau. Ces sous-domaines sont en 3D le résultat de ca coupe d'un tétrahèdre par un plan. Pour l'intégration numérique, d'après (5), les fonctions d'interpolation pour le champ enrichi sont du type $N_J(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})$, avec F qui peut prendre différentes formes, cf. Figure 1. Le produit $N_J(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})$ est donc polynômial, et le nombre de points de Gauss est déterminé de sorte que l'intégration soit exacte sur des éléments de forme simple.

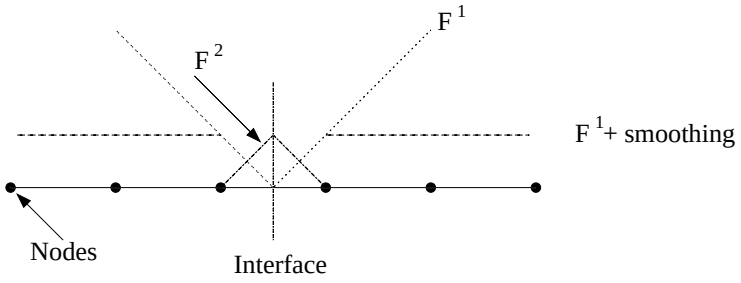

Figure 1 – Les différents choix de fonctions d'enrichissement.

5 Tests de convergence

Pour étudier les performances de la méthode X-FEM, le cas test d'une inclusion 2D circulaire en milieu infini est considéré. Cet exemple est traité avec un maillage éléments finis qui respecte l'interface (noté FEM), puis avec un autre maillage où on ne la respecte pas et où trois méthodes différentes de calcul sont utilisées. Dans la première (notée FEM-non-conforming), pour les éléments traversés par l'interface, la loi de comportement de chaque phase est prise en compte au niveau des points d'intégration. Dans les deux autres, on utilise la méthode X-FEM, avec l'enrichissement F^1 régularisé (méthode notée X-FEM-1 + smoothing) et F^2 respectivement (notée X-FEM-2).

L'erreur globale en énergie, évaluée par rapport à la solution exacte, est donnée Figure 2. On constate que la méthode X-FEM-2 améliore la précision obtenue avec X-FEM-1, et atteint le même taux de convergence que l'approche éléments finis classique.

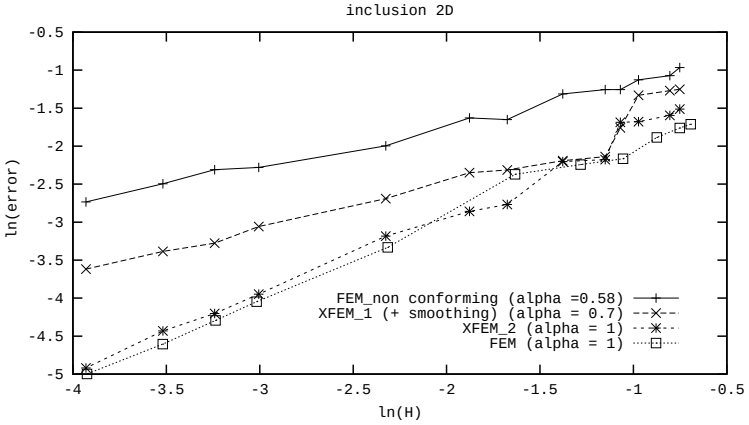

Figure 2 – Taux de convergence pour l'inclusion 2D.

6 Exemples numériques

On s'intéresse désormais à des problèmes cellulaires d'homogénéisation périodique. Pour imposer les conditions de périodicité, les maillages de 2 faces de la cellule en vis-à-vis sont identiques. Lorsqu'un noeud sur le contour de la cellule, appartenant à un élément traversé par une interface, est enrichi, par périodicité, les noeuds correspondants le sont également.

Les premiers tests de validation ont été effectués sur un multicouche périodique, pour lequel la méthode X-FEM permet de retrouver la solution analytique. Nous présentons ici deux exemples : un composite tissé et un matériau à inclusions sphériques.

6.1 Composite tissé

Cet exemple est traité dans [2] avec une approche éléments finis classique. La cellule de base est constituée de fibres dont la ligne moyenne est une sinusoïde. Le maillage utilisé pour la méthode X-FEM est par souci de simplicité un maillage régulier, avec 32 éléments tétrahèdre à 4 noeuds par côté, cf. Figure 3.

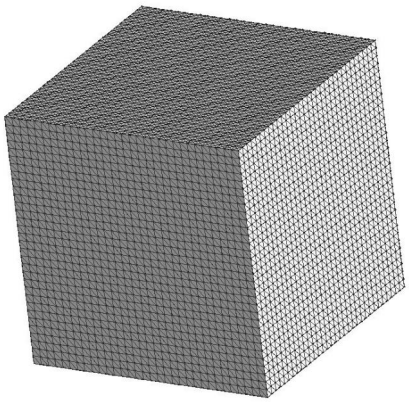

Figure 3 – Maillage utilisé pour la cellule de base.

Avec ce maillage une bonne approximation géométrique de l'interface est obtenue, voir Figure 4 où est représentée l'iso-zéro de la fonction de niveau.

Les fibres et la matrice ont pour caractéristiques mécaniques respectives $E_f = 400$ GPa, $\nu_f = 0.3, E_m =$ 72GPa, $\nu_m = 1/3$. La comparaison des raideurs homogénéisées de X-FEM

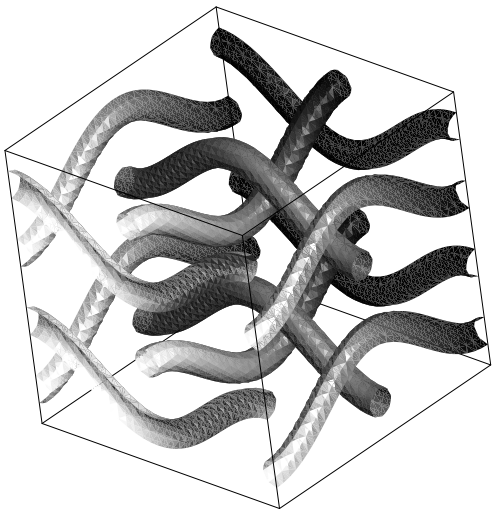

Figure 4 – Cellule de basse du composite tissé.

et de l'approche éléments finis classique donne :

$$[a^{hom}_{tisse}] = \begin{bmatrix} 121.2/119.2 & 58.2/57.8 & 57.4/57.0 & 0/0 & 0/0 & 0/0 \\ 58.2/57.8 & 117.9/116.7 & 58.3/57.8 & 0/0 & 0/0 & 0/0 \\ 57.4/57.0 & 58.3/57.8 & 121.3/119.9 & 0/0 & 0/0 & 0/0 \\ 0/0 & 0/0 & 0/0 & 30.6/30.3 & 0/0 & 0/0 \\ 0/0 & 0/0 & 0/0 & 0/0 & 29.9/29.8 & 0/0 \\ 0/0 & 0/0 & 0/0 & 0/0 & 0/0 & 30.6/30.3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

soit un écart faible sachant que les maillages utilisés ne sont pas les mêmes.

6.2 Matériau à inclusions sphériques

Nous considérons maintenant le cas d'un matériau à inclusions sphériques, réparties de façon aléatoire dans la matrice, cet exemple est tiré de [4]. Pour prendre en compte ce caractère aléatoire, d'une part plusieurs cellules sont étudiées, avec d'autre part dans chaque cellule une répartition aléatoire (mais périodique) des inclusions.

La méthode X-FEM s'avère ici particulièrement intéressante, puisque le même maillage peut être utilisé pour ces différentes cellules. C'est le maillage donné Figure 3 qui est pris pour les calculs. Avec ce maillage, pour 2 cellules contenant 32 inclusions, l'iso-zéro de la fonction de niveau (représentant l'interface matériau) est donnée Figure 5.

Les caractéristiques mécaniques de la particule et de la matrice sont respectivement $E_p =$ 70 GPa, $\nu_p = 0.2$ et $E_m = 3$ GPa, $\nu_m = 0.35$, avec un taux d'inclusion de 26.78%. Pour la raideur homogénéisée a^{hom}_{1111}, en prenant la valeur moyenne sur différentes cellules, on obtient 7.611 GPa pour 8 particules et 7.711 pour 32 particules, soit des résultats très proches de ceux donnés dans [4].

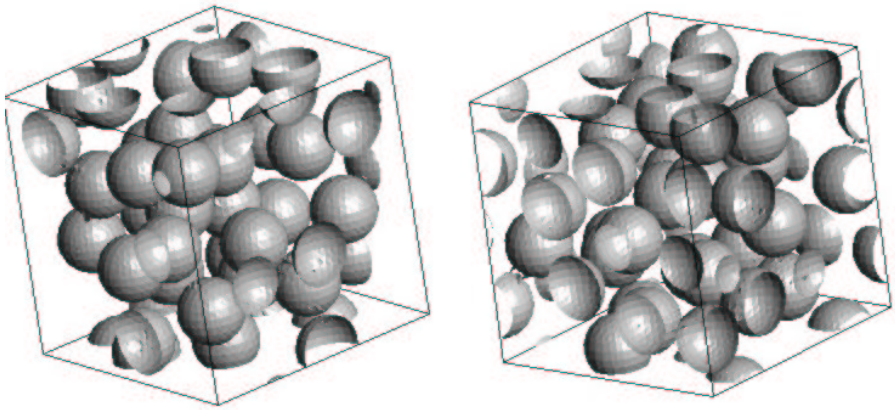

Figure 5 – Exemples de cellules de base à 32 inclusions.

7 Conclusion

Nous proposons dans ce travail une application de la méthode X-FEM pour le traitement des problèmes cellulaires d'homogénéisation pour des microstructures de géométrie complexe. Grâce à une nouvelle fonction d'enrichissement, il est possible d'obtenir une solution d'une qualité comparable à celle d'une approche éléments finis classique, en évitant la difficulté du maillage de la cellule.

Des travaux sont actuellement en cours pour appliquer la méthode X-FEM à l'étude d'une structure contenant un détail de taille très petite devant les dimensions de la structure. L'objectif est ici de pouvoir analyser la structure avec un maillage grossier, en enrichissant les éléments au voisinage du détail.

Références

[1] BŐHM, H.J. A Short Introduction to Basic Aspects of Continuum Micromechanics. Cdl-fmd report 3-1998, http ://ilfb.tuwien.ac.at/links/mom_m.html, TU Wien, Vienna (1998).

[2] GUEDES, J.M., KIKUCHI, N. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **83**, 143–198 (1990).

[3] MELENK, J.M., BABUŠKA, I. The Partition of Unity Finite Element Method : Basic theory and applications. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **39**, 289–314 (1996).

[4] MICHEL, J.C., MOULINEC, H., SUQUET, P. Effective properties of composite materials with periodic microstruture : a computational approach. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **172**(1-4), 109–143 (1999).

[5] MOËS, N., CLOIREC, M., CARTRAUD, P., REMACLE, J.-F. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.* (2003). submitted.

[6] MOËS, N., DOLBOW, J., BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 131–150 (1999).

[7] SETHIAN, J. A. *Level Set Methods & Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1999).

[8] SUKUMAR, N., CHOPP, D. L., MOËS, N., BELYTSCHKO, T. Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite Element Method. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, **190**, 6183–6200 (2001).