



HAL
open science

Dynamique non-linéaire des systèmes à symétrie cyclique en présence de frottement et de désaccordage structurel

Colas Joannin, Benjamin Chouvion, Fabrice Thouverez

► **To cite this version:**

Colas Joannin, Benjamin Chouvion, Fabrice Thouverez. Dynamique non-linéaire des systèmes à symétrie cyclique en présence de frottement et de désaccordage structurel. 12e Colloque National en Calcul des Structures, CSMA, May 2015, Presqu'île de Giens, France. hal-01389700

HAL Id: hal-01389700

<https://hal.science/hal-01389700>

Submitted on 29 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Dynamique non-linéaire des systèmes à symétrie cyclique en présence de frottement et de désaccordage structurel

C. Joannin^{1*}, B. Chouvion¹, F. Thouverez¹

¹École Centrale de Lyon, Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, UMR-CNRS 5513

* colas.joannin@doctorant.ec-lyon.fr

Résumé — Ce travail s'intéresse à la phénoménologie des systèmes à symétrie cyclique soumis à des non-linéarités de frottement, à travers l'étude d'un modèle simplifié de roue aubagée. L'impact du désaccordage sur les propriétés modales de la structure est présenté grâce à une méthode d'analyse numérique adaptée aux systèmes dissipatifs, rendant possible le calcul des modes non-linéaires complexes. Ces modes s'avèrent entre autres très utiles pour la prédiction de la réponse forcée du système et l'interprétation de sa déformée opérationnelle.

Mots clés — mode non-linéaire, symétrie cyclique, frottement, désaccordage.

1 Introduction

L'étude des systèmes cycliques soumis à des non-linéarités de frottement revêt un intérêt particulier pour l'industrie aéronautique et la production d'énergie, dans la mesure où les roues aubagées de turbomachines font bien souvent partie de cette classe de systèmes. Le développement d'outils adéquats et une meilleure compréhension des phénomènes mis en jeu dans le comportement dynamique de telles structures, en présence ou non de désaccordage structurel, constitueraient un atout majeur en phase de conception, en permettant d'optimiser le dimensionnement et ainsi assurer l'intégrité des composants à moindre coût.

L'approche par analyse modale non-linéaire est une stratégie bien adaptée pour ce type d'études, car elle permet de suivre l'évolution des propriétés modales d'un système en fonction de l'intensité des effets non-linéaires. Initiés dès les années 1960 par Rosenberg [1], de nombreux travaux de recherche ont été réalisés et montrent l'intérêt d'une telle démarche [2, 3]. Différentes techniques de calcul ont vu le jour depuis lors [4], certaines basées sur une approche analytique du problème, et d'autres davantage orientées vers des stratégies numériques. Plus récemment, Laxalde et Thouverez [5] ont proposé une technique d'analyse modale fréquentielle permettant de calculer les modes complexes non-linéaires de systèmes dissipatifs, et l'ont appliquée à l'étude de systèmes présentant des non-linéarités de frottement et de contact. Cette méthode de calcul est reprise ici et appliquée à la prédiction du comportement dynamique des structures à symétrie cyclique, en s'intéressant notamment à l'influence du désaccordage sur la réponse vibratoire de ce type de systèmes.

2 Modes complexes non-linéaires

Un mode complexe non-linéaire est défini comme une oscillation périodique ou pseudo-périodique d'un système non-linéaire autonome tel que (1), avec \mathbf{M} , \mathbf{C} , et \mathbf{K} les matrices de masse, d'amortissement visqueux, et de raideur linéaire du système, respectivement, et où \mathbf{f}_{nl} est un terme non-linéaire pouvant par exemple représenter les forces de frottement [5].

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

Afin de tenir compte des effets non-linéaires et dissipatifs, les solutions du système (1) sont recherchées sous la forme d'oscillations multi-harmoniques amorties, donnée par l'équation (2), où ω désigne la

pulsation propre du mode et β le coefficient d'amortissement modal.

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\beta t} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (2)$$

Contrairement aux modes linéaires, les paramètres modaux $(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k, \omega, \beta)$ ne sont pas constants *a priori*, mais fonctions de l'intensité du terme non-linéaire. La résolution du système différentiel (1) se fait par projection de Galerkin sur la base formée par les fonctions trigonométriques $\cos(k\omega t)$ et $\sin(k\omega t)$ intervenant dans la décomposition en série de la solution. On utilise pour cela le produit scalaire (3), faisant intervenir la période fondamentale des oscillations $T = 2\pi/\omega$.

$$\langle f|g \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt \quad (3)$$

La projection mène à un système d'équations algébriques (4), dont les solutions sont obtenues numériquement à l'aide d'un solveur itératif à région de confiance.

$$\mathbf{Z}(\omega, \beta)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{f}}_{nl}(\omega, \beta, \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (4)$$

La matrice \mathbf{Z} est une matrice tridiagonale par blocs fonction de ω et β , et composée des matrices structurales \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} . Le vecteur $\hat{\mathbf{x}}$ regroupe les coefficients $(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k)$ de la décomposition en série de la solution, et le terme non-linéaire $\hat{\mathbf{f}}_{nl}$ contient quant à lui les coefficients de Fourier du vecteur \mathbf{f}_{nl} , déterminés à chaque itération du solveur par une procédure d'alternance temps-fréquence (AFT) [6], réalisée à l'aide de transformées de Fourier discrètes directe (DFT) et inverse (IDFT). Cette procédure AFT est illustrée Figure 1.

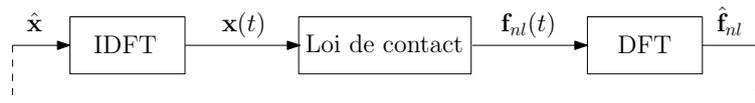


FIGURE 1 – Procédure AFT

3 Étude phénoménologique

Dans le but d'étudier la phénoménologie des structures à symétrie cyclique soumises à des non-linéarités de frottement, un modèle discret a été développé, dont les modes non-linéaires ont été calculés à l'aide de la méthodologie présentée ci-dessus.

3.1 Modèle

Afin d'être représentatif du comportement en flexion d'une roue aubagée à pales rapportées, un modèle discret unidimensionnel a été mis au point. Les caractéristiques du modèle ont été définies de façon à reproduire au mieux la dynamique d'une roue réelle, notamment en ce concerne le positionnement fréquentiel des modes propres de la structure. Le secteur fondamental du modèle est illustré Figure 2a. Un nombre total de six secteurs a été retenu, comme compromis entre la taille du modèle et sa représentativité en termes de diamètres nodaux.

La modélisation du frottement en pied d'aube est obtenue par une loi en tangente hyperbolique visant à régulariser la loi de Coulomb. Cette loi est donnée par l'équation (5) et illustrée Figure 2b, avec μ le coefficient de frottement, N l'effort normal au point de contact, ε le paramètre régissant le niveau de régularisation, et $\dot{\mathbf{x}}_{rel}$ le déplacement relatif entre les degrés de liberté en contact. L'un des intérêts de l'emploi d'une loi de frottement régularisée est de pouvoir déterminer aisément l'expression analytique de la matrice jacobienne du terme non-linéaire, ce qui permet de significativement réduire les temps de calcul. L'algorithme de résolution utilisé requiert en effet la valeur de la matrice jacobienne du système à chaque itération. Cette matrice peut être obtenue numériquement par différences finies, mais doit alors être évaluée à chaque pas du solveur. La connaissance de l'expression analytique de la matrice jacobienne

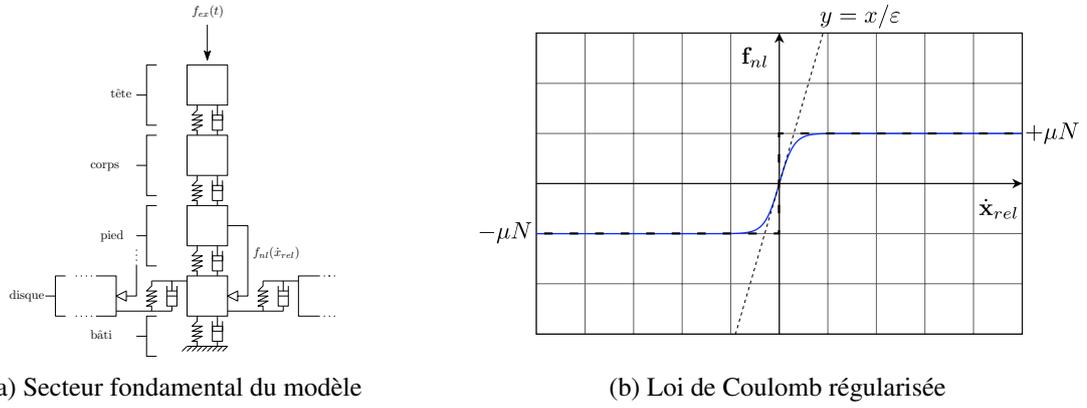


FIGURE 2 – Modèle phénoménologique.

permet d'éviter cette étape de dérivation numérique, et ainsi réduire le nombre d'opérations à chaque itération.

$$\mathbf{f}_{nl}(\dot{\mathbf{x}}) = \mu N \tanh\left(\frac{\dot{\mathbf{x}}_{rel}}{\varepsilon}\right) \quad (5)$$

Pour le calcul de la réponse forcée du système, l'excitation retenue est une onde tournante à un diamètre appliquée en tête de pales, représentative d'un certain type de sollicitations rencontrées dans une turbomachine en fonctionnement. L'expression de la force d'excitation appliquée au k -ième secteur est donnée par l'équation (6), avec F l'intensité de la force, Ω la fréquence d'excitation, et n_b le nombre de secteurs. La Figure 3a illustre cette excitation sous forme de série temporelle, permettant de mettre en évidence sa propagation le long des secteurs de la structure sur une période de vibration. La Figure 3b représente quant à elle l'amplitude de la force en tête de pale à un instant donné, ce qui permet d'illustrer géométriquement la présence du diamètre nodal de l'excitation.

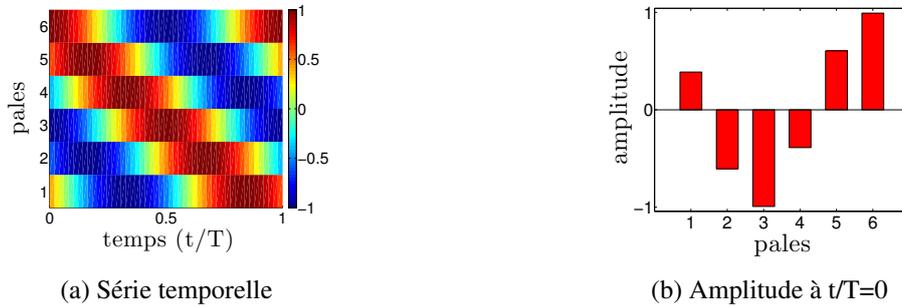


FIGURE 3 – Excitation tournante.

$$f_{ex}^k(t) = F \cos\left(\Omega t + \frac{2\pi k}{n_b}\right) \quad (6)$$

3.2 Résultats

Une première étude de convergence validée par intégration temporelle a permis d'évaluer le nombre d'harmoniques à conserver dans le développement en série de la solution, afin d'obtenir une bonne approximation de la réponse en amplitude. Les modes non-linéaires du modèle ont ensuite été calculés pour un système parfaitement cyclique, et pour un système désaccordé aléatoirement en raideur au niveau des pales. L'intensité du désaccordage a été calibrée de façon à générer une séparation des fréquences du premier mode double équivalente à 2% de la fréquence initiale. Pour chaque cas, les réponses à différents niveaux d'excitation ont également été calculées. En raison de la forme de l'excitation, seuls le mode double à un diamètre nodal et la pair de modes désaccordés qui en résultent sont présentés ci-après.

La Figure 4 présente les résultats obtenus pour le système accordé. Le calcul des deux modes non-linéaires correspondant au mode double à un diamètre du système linéaire sous-jacent montre une di-

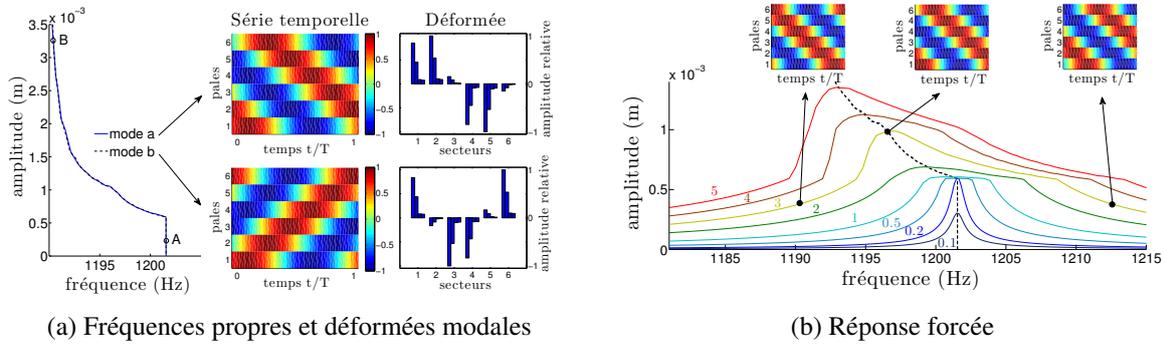


FIGURE 4 – Analyse modale et réponse forcée du système accordé

minution des fréquences propres de ces modes à mesure que l’amplitude des oscillations augmente. Ces courbes d’évolution de la fréquence sont par la suite dénommées *backbones*. Au niveau du point A sur la Figure 4a, la non-linéarité n’est pas activée et la fréquence propre est égale à celle du système linéaire avec interfaces collées. Lorsque l’amplitude franchit un certain seuil, les degrés de liberté en contact se mettent à glisser progressivement, ce qui induit une diminution de la fréquence propre, qui converge graduellement vers la fréquence propre du système linéaire avec interface glissantes au voisinage du point B. Les séries temporelles au niveau des six pales sont également données, et montrent que les déformées modales des deux modes peuvent être combinées pour former des ondes tournantes se propageant dans des directions opposées. Ce résultat, bien connu en dynamique linéaire des structures à symétrie cyclique, reste vrai pour tout point des *backbones* de la Figure 4a, et donc *a fortiori* pour le domaine non-linéaire.

Les réponses forcées illustrées Figure 4b montrent que le locus des maxima en amplitude suit les *backbones* superposées des deux modes, d’où l’intérêt du calcul de modes non-linéaires complexes dans la prédiction du comportement de telles structures. De plus, on constate que quel que soit le niveau d’excitation, la déformée opérationnelle de la structure sous chargement dynamique est bien une onde tournante semblable à l’excitation et plus ou moins déphasée de celle-ci. Cette observation peut être prédite grâce aux résultats présentés au paragraphe précédent concernant les modes du système, qui peuvent être combinés pour former deux ondes tournantes se propageant dans des directions opposées, et ce quelle que soit l’intensité de la non-linéarité.

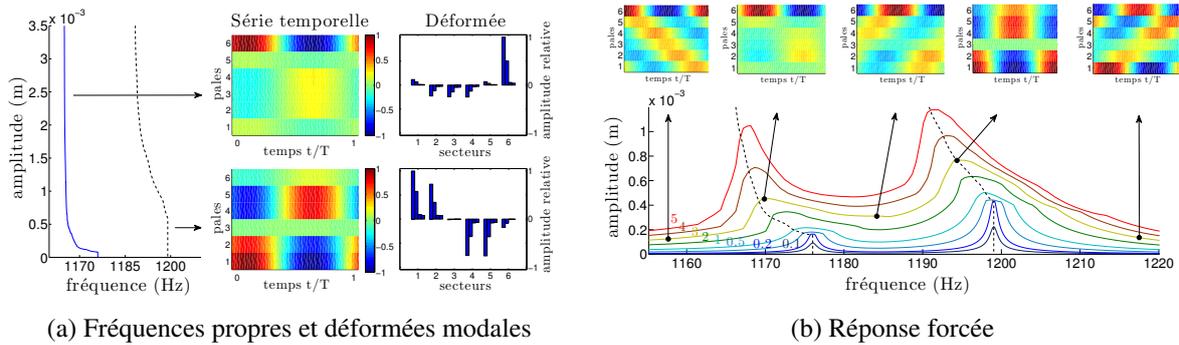


FIGURE 5 – Analyse modale et réponse forcée du système désaccordé

Dans le cas du système désaccordé, le calcul des deux modes non-linéaires résultant de la séparation du mode double à un diamètre du système accordé révèle cette fois-ci deux *backbones* bien distinctes, et des déformées modales purement stationnaires avec une localisation de l’énergie sur certaines pales, illustrées Figure 5a. Contrairement au cas du système accordé, ces modes ne peuvent plus être linéairement combinés pour former des ondes tournantes. On retrouve ici, pour le système non-linéaire étudié, un phénomène bien connu en dynamique linéaire des systèmes à symétrie cyclique en présence de désaccordage [4, 7].

La réponse forcée du système présente ici deux pics, chacun au voisinage des *backbones* de chaque mode, comme illustré Figure 5b pour l’une des pales. Si l’on s’intéresse à la déformée opérationnelle du système, il est possible d’analyser son évolution en fonction du niveau vibratoire et de la fréquence

d'excitation grâce aux modes non-linéaires. Une analyse plus détaillée révèle en effet que celle-ci change de façon significative d'un point à l'autre des courbes de réponse. Loin des résonances, elle prend la forme d'une onde tournante à forte localisation, ce qui peut s'interpréter comme la superposition d'une onde tournante non-localisée induite par l'excitation, et d'une onde stationnaire résultant des modes voisins, dont la déformée modale est en effet purement stationnaire. On constate en outre qu'à mesure que l'on s'approche de la résonance, la contribution tournante diminue face à la contribution stationnaire, pour ne céder au maximum d'amplitude qu'une onde purement stationnaire épousant la déformée modale du mode à l'origine de la résonance. Sur la Figure 5b, le *locus* des maxima en amplitude suit toujours les *backbones* des modes, à un léger biais près qui peut être expliqué par la contribution résiduelle du mode voisin dans la réponse.

Outre l'évolution des fréquences propres et des déformées modales, le calcul des modes complexes non-linéaires permet d'obtenir l'évolution de l'amortissement modal β en fonction du paramètre contrôlant l'activation de la non-linéarité. La Figure 6 illustre les variations de cet amortissement en fonction de l'amplitude des oscillations pour les modes étudiés, dans le cas du système accordé et désaccordé. Dans les deux cas, l'amortissement associé à chaque mode possède un maximum, qui est obtenu à une amplitude de vibration pour laquelle les proportions de phases collées et phases glissantes sur une période sont relativement égales [5]. Dans le cas désaccordé, les déformées modales étant significativement différentes, ce maximum est obtenu pour deux valeurs distinctes d'amplitude. La connaissance précise de l'évolution de ce paramètre, que nous livre la procédure d'analyse modale non-linéaire utilisée dans cette étude, peut être d'un grand intérêt en vue d'optimiser le comportement vibratoire de la structure, en paramétrant par exemple la non-linéarité de façon à maximiser l'amortissement sur la plage de fonctionnement du système.

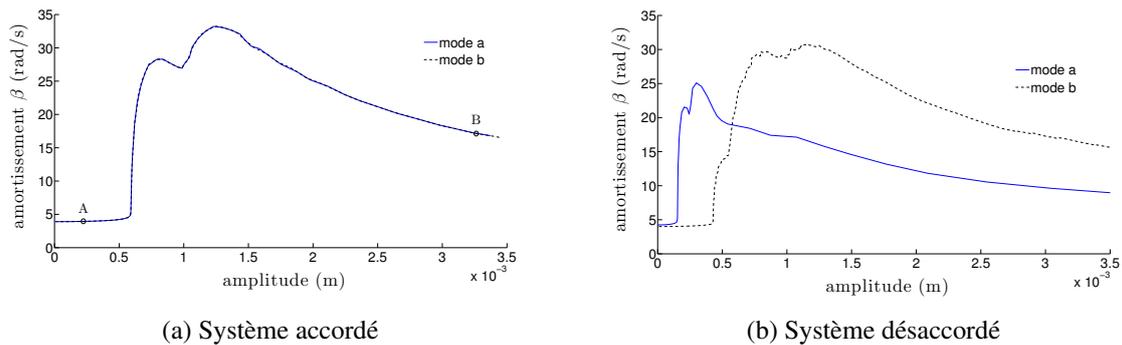


FIGURE 6 – Évolution de l'amortissement modal β en fonction de l'amplitude des oscillations

3.3 Conclusion

Malgré une relative complexité de mise en œuvre, nous avons pu voir que l'analyse modale non-linéaire est un outil très intéressant dans l'étude des systèmes à symétrie cyclique présentant des non-linéarités dissipatives telles que le frottement. En donnant accès aux propriétés intrinsèques du système, les modes non-linéaires complexes permettent de prédire le comportement de la structure pour tout type d'excitation, et ce pour un nombre réduit de calculs. Ces modes s'avèrent utiles pour l'interprétation de la déformée opérationnelle observée en réponse forcée, pouvant présenter, pour cette classe de systèmes, des variations significatives en fonction du niveau vibratoire et de la fréquence d'excitation telle qu'observée Figure 5b. Nous avons pu voir que la méthode de calcul proposée permet d'étudier conjointement les effets résultant de la non-linéarité et du désaccordage, ce qui a rarement été envisagé dans la littérature.

La connaissance précise de l'évolution des propriétés modales en fonction des paramètres régissant la non-linéarité est entre autres très intéressante pour répondre à des problématiques d'optimisation du comportement vibratoire. L'influence relative entre le désaccordage et la non-linéarité sur la dynamique globale peut également être abordée, tout comme l'utilisation de ces modes dans une problématique de réduction de modèle, d'un intérêt tout particulier pour l'industrie. La mise au point d'une stratégie de réduction permettant de prédire efficacement la réponse forcée d'un modèle industriel de roue aubagée, en présence ou non de désaccordage, serait en effet un atout majeur en phase de conception.

Références

- [1] R.M. Rosenberg. The normal modes of nonlinear n-degrees-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, 30 :595 – 611, 1962.
- [2] A. Grolet and F. Thouverez. Free and forced vibration analysis of a nonlinear system with cyclic symmetry : Application to a simplified model. *Journal of Sound and Vibration*, 331(12) :2911 – 2928, 2012.
- [3] M. Krack, L. P. von Scheidt, and J. Wallaschek. A method for nonlinear modal analysis and synthesis : Application to harmonically forced and self-excited mechanical systems. *Journal of Sound and Vibration*, 332(25) :6798 – 6814, 2013.
- [4] G. Kerschen, M. Peeters, J.C. Golinval, and A.F. Vakakis. Nonlinear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1) :170 – 194, 2009. Special Issue : Non-linear Structural Dynamics.
- [5] D. Laxalde and F. Thouverez. Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 322(4–5) :1009 – 1025, 2009.
- [6] M. Urabe. Galerkin’s procedure for nonlinear periodic systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 20(2) :120–152, 1965.
- [7] Y.J. Yan, P.L. Cui, and H.N. Hao. Vibration mechanism of a mistuned bladed-disk. *Journal of Sound and Vibration*, 317(1–2) :294 – 307, 2008.