

# 尼日尔的薪柴采伐和福斯特曼公式的推广

C. R. Biol. 328 (2005) 379 – 385  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01386828>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement  
Henri Varagnat大街32号, 法国  
93143 Bondy nicolas.bacaer@ird.fr

Alassane Bah

达喀尔大学Cheikh Anta Diop大学, École Supérieure理工学院  
DGI-SMA, BP 15915塞内加尔达喀尔芬

Ali Mahamane

尼亚美

大学生物系Abdou Moumouni BP 10662尼日尔尼亚美

## 摘要

在尼日尔已建立“受控农村市场”的某些森林中，薪柴的采伐是根据以下类型的政策进行的：每 $T$ 年，砍伐枯树和直径大于 $D$ 的活树。枯树通常占农作物的大部分。在本文中，我们提出了一个简单的连续时间模型来管理这些高年龄死亡率的不平衡年龄林地，并获得了一个循环和采伐直径的公式，可以优化更新的收入，无限视野浮士德曼针对年老地块的经典公式已达到极限 $\alpha \rightarrow 0$ 和 $D = 0$ （清晰）。

关键字：林业，不成熟林，建模，优化，薪柴，尼日尔

## 1. 简介

在尼日尔，木材仍然是烹饪食物的最重要能源。由于干旱，城市人口的增长以及部分不受控制的资源获取，尼亚美等城市周围森林的压力很大。自1989年以来，一项新的政府策略已导致对某些森林地区的保护，以可持续的方式管理采伐。经行政许可，该收获物仅在附近市场出售。差别税制鼓励贸易商从这些结构中购买薪材，而不是组织不加控制的森林采伐[1]。

选择了两个管理系统。在“定向的农村市场”中，仅收获枯树。在“受控的农村市场”中，还砍伐了一些活树，并按周期组织了砍伐，以允许空间旋转。有时会为要砍伐的树木的直径设置下限。一棵树达到这个直径可能需要花费几个周期，因此死树通常构成每种作物的大部分。周期的长度通常固定为5至10年。

因此，在这些受控的农村市场中，收割政策与在世界其他地区不平地上实行的选择性砍伐十分相似。但是，死树的重要性因其目的地（用于烹饪食物的死木比绿色木更好），缺乏转化和可用性（萨赫勒地区的气候导致树木的高死亡率）而变得不那么普遍了）。

尽管有大量文献讨论了Faustmann [2,3]的经典公式关于最佳旋转问题的各种扩展（[4]和[5]中列出的300篇文章），但还没有简单的公式建议采用最佳的伐木周期和不平龄田地的最佳直径，以提高死亡率，因为枯树占薪材收成的最大部分。在[6]中，获得了一个明确的公式，但是对于遭受低灾难性死亡率（例如火灾）的均匀老化森林而言。该模型使用连续时间变量，并使用奖励更新过程的理论获得公式。应该强调的是，自然死亡率很高，个别树木不时死亡，在下次计划的采伐期间可能会有所延迟。相反，由于大火造成的灾难性死亡，整个森林几乎立即受到影响，树木很快就被清除。指出[6]，在第一种情况下，可以保持简单的空间旋转，而在第二种情况下则不可能。

有人在[7]中找到了一个公式，该公式可以概括不规则地块的福斯特曼公式，但是该模型集中在经济部分，而没有考虑特定的生物增长模型。该公式在[8]中与与[9,10]类似的离散时间矩阵模型结合使用，用于增长。但是没有找到最佳切割周期的简单公式，因此结果仅基于模拟。几篇文章，例如[11,12]，坚持认为Faustmann模型及其许多概括是马尔可夫决策过程的特定示例，可以使用动态规划技术。然后，我们将更多的精力放在数值算法上，而不是在明确的公式上。在所有这些参考文献中，很少关注自然死亡率，因为在欧洲或北美背景下，与其他因素相比，其相对可忽略不计。

因此，本文的目的是在具有高死亡率的简单的不均匀年龄样区模型的框架内找到最佳循环时间和最佳切割直径的明确公式。最优化准则与Faustmann模型中的准则相同，即无限期的折现收入。兴趣主要是理论上的，因为显然，尽管有文献[13]，但在获得足够的数​​据以校正尼日尔森林中的模型之前，仍需要进行大量的现场工作。但是，随着在尼日尔和整个萨赫勒地区组织越来越多的受控农村市场，将会有更多数据可用，人们的兴趣可能会从如何管理森林转向如何优化管理。

文章的结构安排如下。在第2节中，我们介绍模型的符号。在第3节中，我们获得了最佳伐木周期和最佳直径的公式，然后使用树生长曲线的简单数学表达式对其进行讨论。在第4节中，我们证明了经典的福斯特曼公式对应的死亡率可以忽略不计（ $\alpha \rightarrow 0$ ）和切割直径 $D = 0$ （清晰）。我们还表明，[6]中给出的遭受低等灾难性死亡率（例如火灾）的均匀老化地块平均产量的公式对应于切割周期的极限 $T \rightarrow 0$

有折扣率  $\beta \rightarrow 0$ 。我们还介绍了该公式的其他扩展：取决于年龄的死亡率以及死木和最近砍伐的原木之间的可能价格差异。它们可以在其他情况下使用。

## 2. 一个简单的模型

我们猜测：

- 一个地块有  $N$  个固定的树木生长位。  $N$  是一个大数。
- $V(x)$  是  $x$  年龄树的体积，  $V(0) = 0$
- 每单位木材价格  $P$  不变
- $c$  是准备新树生长的成本
- $c'$  是每次收获的固定成本
- $\alpha$  是树木的死亡率：在较短的时间间隔  $dt$  内，  $\alpha dt$  是死树的百分比（如果您认为模型是确定性的）或树死的概率（如果您将模型认为是随机的）。目前，假定  $\alpha$  与年龄无关，但是该假设将在第4节中放弃。
- 切割周期的持续时间为  $T$
- 每  $T$  年，收成包括所有枯树和直径大于  $D$  的所有活树。
- $X$  是树木达到直径  $D$  的年龄。

假定再生完全是人工的：被砍伐的树木立即被0岁的新树木替换，因此树木总数保持不变。假设在旋转过程中自然再生可忽略不计。最后，令  $\beta$  为折现因子，以使时间  $t = nT$  时的收入加权一个因子  $e^{-\beta nT}$  在优化标准中。问题在于如何选择  $T$  和  $X$  来优化所有未来农作物的贴现收入预期。

正式地，

- $p(x, t)$  是在时间  $t$  处  $x$  年龄的活树人口密度的期望，
- $q(x, t)$  是在时间  $t$  处  $x$  年龄的枯树的人口密度的期望值（死时，树木停止老化），
- $K_n$  是从收获到时间的收入预期  $t = nT$ 。

可以将该问题表述为具有脉冲控制的偏微分方程组。让我们回想一下，这些偏微分方程只是按年龄构造的离散时间中的矩阵模型在连续时间内的等效项。例如，这种方法是[15,16]的方法，其中收获是连续的而不是周期性的。收获之间  $(nT < t < (n+1)T)$ ，功能检查

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha p(x, t) = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \alpha p(x, t),$$

和  $p(0, t) = 0$ 。  $nT^-$  和  $nT^+$  分别表示“在  $t = nT$  之前”和“在  $t = nT$  之后”。然后我们有

$$p(x, nT^+) = \left[ \int_0^\infty q(\xi, nT^-) d\xi + \int_X^\infty p(\xi, nT^-) d\xi \right] \delta_{x=0} + p(x, nT^-) \mathbf{1}_{x \in ]0, X[}$$

和  $q(x, nT^+) = 0$ 。这里，  $\delta_{x=0}$  表示狄拉克质量  $x = 0$ ，而  $\mathbf{1}_{x \in ]0, X[}$  表示区间的特征函数  $]0, X[$ 。  $t = nT$  时的期望收入为

$$K_n = \int_0^\infty q(x, nT^-) [PV(x) - c] dx + \int_X^\infty p(x, nT^-) [PV(x) - c] dx - c'.$$

目标是就  $T$  和  $X$  最大化所有未来作物的贴现收入预期

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta nT} K_n.$$

功能  $p(x, t)$  和  $q(x, t)$  还要检查初始条件

$$\int_0^\infty [p(x, 0) + q(x, 0)] dx = N.$$

该模型等效于经典Faustmann模型，以解决以下情况下的最佳旋转问题： $\alpha = 0$  和  $X = 0$ 。

## 3. 最佳切割周期和直径

不论初始条件的年龄结构如何，密度  $p(x, t)$  和  $q(x, t)$  如果收敛  $t \rightarrow +\infty$  寻求定期解决方案  $\hat{p}(x, t)$  和  $\hat{q}(x, t)$ ，带有

$$\begin{aligned} \hat{p}(x, nT^-) &= N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \sum_{k=1}^i e^{-k\alpha T} \delta_{x=kT} \\ \hat{q}(x, nT^-) &= N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \alpha e^{-\alpha x} \mathbf{1}_{x \in (0, iT)} \\ \hat{p}(x, nT^+) &= N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \sum_{k=0}^{i-1} e^{-k\alpha T} \delta_{x=kT} \end{aligned}$$

和  $\dot{q}(x, nT^+) = 0$ 。  $i = [X/T] + 1$  (和  $[X/T]$  是整个的一部分  $X/T$ )。 请注意, 如果  $X < T$  (以便  $i = 1$ ), 所有达到的活树  $t = nT^-$  是相同的年龄 (甚至情节), 并在  $t = nT$  时与枯树同时采伐 (砍伐)。 相反, 如果  $X > T$  (以便  $i \geq 2$ ), 到达的活树  $t = nT^-$  拥有  $T, 2T, \dots, iT$  的年龄 (不均匀图), 并且只有在  $i = t$  的年龄处死掉的  $iT$  年龄的那些才有枯树 (选择)。 所以整个数字  $i$  表示一棵树在收割之前可以继续生长的周期数, 除非它死了, 在这种情况下, 该树是在死亡后的第一次收割期间收获的。 在  $t = nT$  时收获的枯树可提供收入

$$N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \int_0^{iT} \alpha e^{-\alpha x} [PV(x) - c] dx.$$

在  $t = nT$  收获的活树是  $iT$  年龄的树。 他们给收入

$$N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} e^{-i\alpha T} [PV(iT) - c].$$

因此,  $t = nT$  时的总收入为 (按部分积分后)

$$K_n = N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \left[ P \int_0^{iT} e^{-\alpha x} V'(x) dx - c \right] - c'.$$

最后, 对所有未来农作物总收入的期望是

$$\frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \left[ P \int_0^{iT} e^{-\alpha x} V'(x) dx - c \right] - c' \right\},$$

为此, 我们必须找到相对于  $T$  和  $x$  的最大值。 等效地, 必须找到关于  $T$  和整数的最大值  $i = [X/T] + 1$ 。 这是对所考虑管理的经典 Faustmann 公式的概括 (我们将在下一部分中看到)。 为了减少讨论参数的数量, 让我们写公式

$$NPV_\infty \frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \left[ \int_0^{iT} e^{-\alpha x} \frac{V'(x)}{V_\infty} dx - \frac{c}{PV_\infty} \right] - \frac{c'}{NPV_\infty} \right\}.$$

$V_\infty$  是一棵树在一生中可以达到的最大体积。 注意

- $c/(PV_\infty)$  一方面是砍伐和重新植树的成本之间的比率, 另一方面是一棵树的 最大值
- $c'/(NPV_\infty)$  是每次收获的固定成本与地块最大值之间的比率。

要讨论此公式, 请考虑一个简单的数学表达式  $V(x)$  树木生长曲线, 或等价于其导数  $V'(x)$ , 例如

$$V'(x) = V_\infty \frac{(\gamma/\tau)^{\gamma+1}}{\Gamma(\gamma+1)} x^\gamma e^{-\gamma x/\tau},$$

其中,  $\Gamma$  是通常的伽玛函数。 假设该函数代表增长速度, 该函数从 0 增大到  $x = \tau$  达到的最大值, 然后在收敛到 0 时减小。  $x \rightarrow \infty$ 。 所以  $V(x) = \int_0^x V'(\xi) d\xi$  是一个递增函数, 对于  $x < \tau$  凸, 对于  $x > \tau$  凹。 参数化突出显示一棵树的最大体积  $V_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} V(x)$ 。

图 1 说明了对于不同的切割直径值, 对应于  $i = 1, \dots, 4$  的折现收入的预期如何根据切割周期的长度  $T$  而变化。 最右边的曲线是  $i = 1$  (清晰且均匀的情节)。 最佳策略是  $T^* \approx 9.5$  和  $i = 2$ , 也就是说,  $T^*$  岁的枯树和活树  $2T^*$  或者更多。 注意, 由于每次收获的固定成本非零, 所以当  $T$  接近 0 时, 所有曲线都变为负。 该图使用的参数值是  $\alpha = 0,05$  每年 (树木的预期寿命为  $1/\alpha = 20$  年份),  $\tau = 10$  年 (这是增长最快的年龄) 和  $\gamma = 2$  对于增长曲线, 折现因子  $\beta = 0,03$  每年的费用  $c/(PV_\infty) = 0$  和  $c'/(NPV_\infty) = 0,1$ , 以及归一化图的最大值  $NPV_\infty = 1$ 。

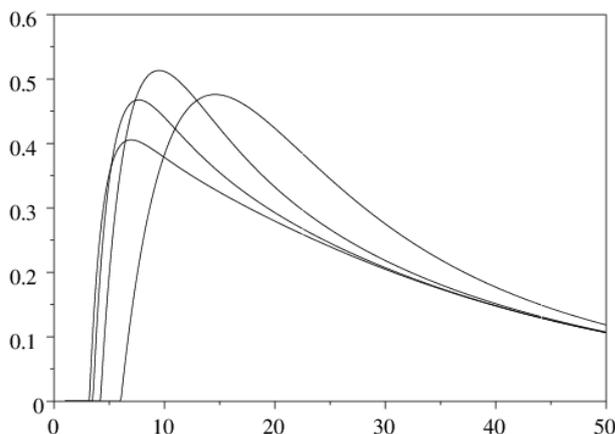


图 1. 对于不同的切割直径值, 折现收入的期望值是切割周期  $T$  的函数 (对应于  $i = 1 \dots 4$ )。

图 2 说明了最佳切割周期和直径如何随死亡率  $\alpha$ , 贴现率  $\beta$  和单次收获的固定成本而变化。 对于固定参数的值是相同的, 如图 1 如预期的, 异龄管理层具有短切割循环 (由区域表示  $T = 2$  和  $T = 3$ ) 甚至比管理层更有利可图 ( $i = 1$ )

- 当死亡率很高时（左上方和右上方的数字），
- 当折扣系数很高（左上方和下方的数字）时，
- 或单次收获的固定成本较低时（右上方和下方）。

请注意，在左上角（分别在右上角）中，即使在  $\alpha \rightarrow 0$ （在福斯特曼模型的情况下），如果贴现率（分别为每收获的固定成本）高于（低于）某个特定阈值，则不均匀年龄的管理比均匀年龄的管理更有利可图。

图2还显示了用于最佳切割周期长度的轮廓线。请注意，切割周期的最佳长度与死亡率之间没有简单的关系：第一个可以是第二个的增加或减少函数，具体取决于参数的值，如上图所示对。

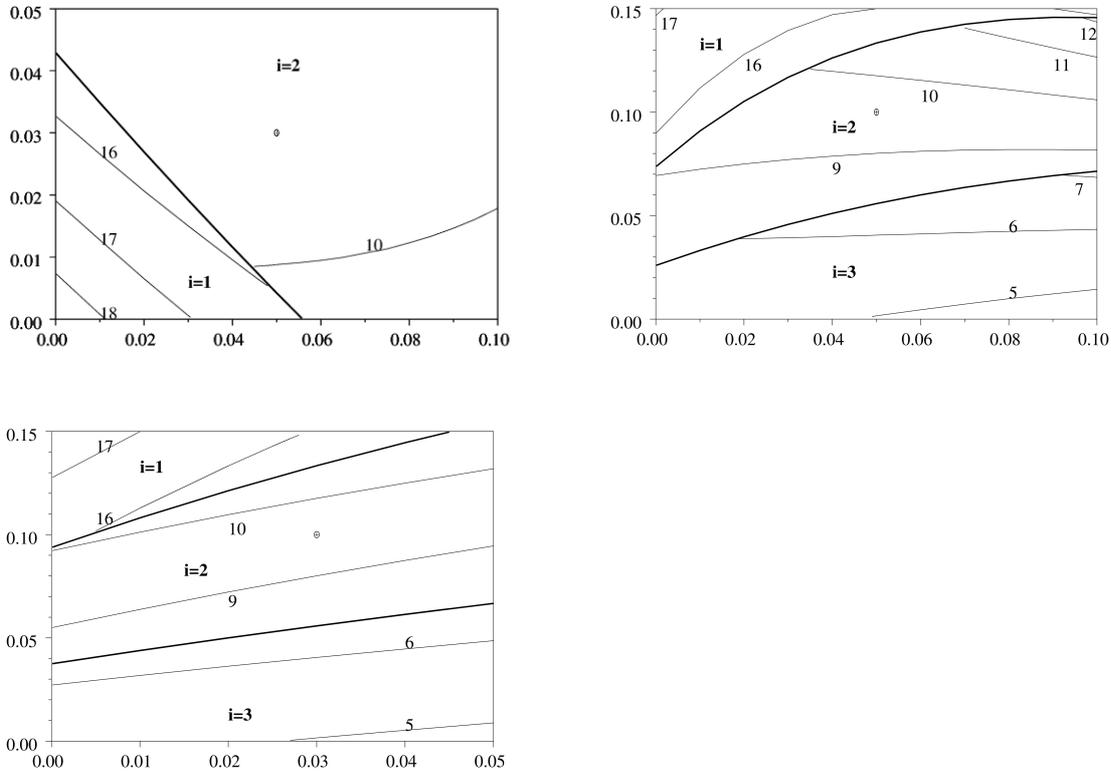


图2.当死亡率 $\alpha$ 变化，贴现率 $\beta$ 和每次收获的固定成本时的最佳周期长度和直径 $c'$ 。左上方：图表 $(\alpha, \beta)$ 。右上：图 $(\alpha, c'/NPV_\infty)$ 。底部：图 $(\beta, c'/NPV_\infty)$ 。粗线将 $i=1$ （甚至最佳管理）的区域与 $i=2$ 和 $i=3$ （不均匀管理的区域）分开。其他线是用于最佳切割周期长度的水平线。在每种情况下，一个点都会调用图1中的参数值。

## 4.边界案例和扩展

如果我们将砍伐活树的临界直径 $D$ 设置为0（无伐木），则相应的年龄为 $X=0$ 。所以 $i=1$ 和公式（1）简化为

$$\frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ N \left[ P \int_0^T e^{-\alpha x} V'(x) dx - c \right] - c' \right\}.$$

如果另外还有每次收获的固定成本 $c'$ 并且死亡率 $\alpha$ 可以忽略不计，因此公式可简化为Faustmann的公式[2,3]

$$N \frac{PV(T) - c}{e^{\beta T} - 1}.$$

如果折现系数 $\beta$ 和采伐周期 $T$ 的长度趋近于0，则获得另一种临界情况，这相当于以连续收获的枯死树木和年龄为大于 $X$ 。回忆一下所有未来农作物的年均收入与折现收入之间的联系：

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu T} \sum_{n=1}^{\nu} K_n = \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta n T} K_n.$$

让我们继续 $c'=0$ 。然后公式（1）给出平均收入

$$N \alpha \frac{P \int_0^X e^{-\alpha x} V'(x) dx - c}{1 - e^{-\alpha X}},$$

和密度 $p(x, t)$ 和 $q(x, t)$ 收敛于固定解

$$\hat{p}(x) = N \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha X}} \mathbf{1}_{x \in (0, X)}$$

和  $\hat{q}(x) = 0$ 。对于遭受特大火灾危险的森林，平均收入的公式 (2) 与 [6] 相同。确实，如果  $T \rightarrow 0$ ，如 [6] 所示，在树的死亡与其收获之间没有延迟。因此，平均收入相同是正常的。但是，火灾中死亡的同步导致贴现收入的表述有所不同。

扩展程序。假设死亡率不是恒定的，而是取决于年龄。让我们定义

$$\Delta(x) = \exp\left(-\int_0^x \alpha(\xi) d\xi\right).$$

如果  $Q$  是死木的价格，如果  $P$  是最近砍伐的原木的价格，则对所有未来收获的折现收益的期望为

$$\frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ N \frac{\Delta(iT) [PV(iT) - c] - \int_0^{iT} \Delta'(x) [QV(x) - c] dx}{\sum_{n=0}^{i-1} \Delta(nT)} - c' \right\},$$

与  $i = [X/T] + 1$ 。公式 (1) 对应于  $Q = P$  和常数  $\alpha$ ，因此  $\Delta(x) = \exp(-\alpha x)$ 。在极限范围内  $\beta \rightarrow 0$  和  $T \rightarrow 0$ ，此公式 ( $c' = 0$ ) 导致平均收入

$$N \frac{\Delta(X) [PV(X) - c] - \int_0^X \Delta'(x) [QV(x) - c] dx}{\int_0^X \Delta(x) dx},$$

一种公式，可以在 [6] 中找到有火灾危险的森林，但是可以将部分烧掉的木材回收的公式。

## 5. 结论

在一个简单模型的框架中，找到了一个公式，用于确定管理周期为每  $T$  年砍伐直径大于  $D$  的枯树和活树时的最佳砍伐周期和直径。该模型是为自然死亡率较高的森林而设计的，死树是伐木的主要部分，并被用作薪柴。我们已经看到，在这种情况下，不平衡的管理更为有利。当自然死亡率低，折现率低或单次收获的固定成本高时，甚至管理也可以更有利可图。

尼日尔和萨赫勒其他国家的森林管理仍处于起步阶段。轮换是十年前才引入的。现场数据仍然稀缺。尽管在发达国家进行了超过 150 年的关于最佳轮换问题的大量研究，但必须适应当地条件。在这项研究中，我们只关注一方面，即高自然死亡率。让我们希望，这种微观经济模型将与宏观经济模型结合起来 [17, 18, 19]，以便为公共决策者提供更完整的建模工具。

谢谢

第二作者感谢爱迪思·佩里尔 (IRD)，阿兰·伯特兰德，马丁·安东尼奥，克里斯托夫·勒·佩奇 (CIRAD) 和阿博巴卡尔·伊哈乌 (尼日尔环境部)。本文致力于纪念奥维德·阿里诺 (Ovide Arino)。

## 书目参考

1. J. M. d'Herbès, J. M. K. Ambouta, R. Peltier, Fonctionnement et gestion des écosystèmes forestiers contractés sahéliens, John Libbey Eurotext, Paris, 1997.
2. M. Faustmann, Berechnung des Wertes welchen Waldboden sowie noch nicht haubare Holzbestände für die Waldwirtschaft besitzen. Allgemeine Forst- und Jagd-Zeitung 15 (1849).
3. C. W. Clark, Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources, John Wiley & Sons, New York, 1990.
4. D. H. Newman, The optimal forest rotation: a discussion and annotated bibliography, USDA Forest Service, Technical Report SE-48, Asheville, 1988.
5. J. Forest Econ. 8 (2002) 5-27.
6. Can. J. For. Res. 15 (1985) 180-190.
7. For. Sci. 27 (1981) 739-744.
8. Forest policy and economics 6 (2004) 145-152.
9. J. Appl. Ecol. 8 (1966) 355-367.
10. For. Sci. 26 (1980) 609-625.
11. For. Sci. 47 (2001) 466-474.
12. J. Buongiorno, J. K. Gilles, Decision methods for forest resource management, Academic Press, Boston, 2003.
13. A. Ichaou, Dynamique et productivité des structures forestières contractées des plateaux de l'ouest nigérien, Thèse, Université de Toulouse III, 2000.
14. www.handels.gu.se/econ/EEU/cifor.html
15. C. Rorres, W. Fair, Optimal age specific harvesting policy for a continuous-time population model, in: T. A. Burton (Ed.), Modeling and differential equations in biology, Marcel Dekker, New York, 1980, pp. 239-254.
16. www2.fundacion-centra.org/pdfs/E200337.pdf
17. CSFD, Pour une gestion viable des ressources ligneuses péri-urbaines: analyse et modélisation des impacts des règles et des pratiques coutumières sur divers milieux naturels sahéliens et sahélo-soudaniens au Niger et au Mali, www.csf-desertification.org/projets/projet3.php
18. www.dec.org/pdf\_docs/PNACQ877.pdf
19. MARGE, Le modèle GLOBUS, www.marge.fr