

ニジェールでの薪の収穫とファウストマンの公式の一般化

C. R. Biol. 328 (2005) 379 – 385
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01386828>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
32大通りHenri Varagnat, 93143ボンディ、フランス
nicolas.bacaer@ird.fr

Alassane Bah

ダカールのシェイクアンタディオブ大学、エコール
シュペリエルポリテクニクDGI-SMA、BP 15915ダカールファン、セネガル

Ali Mahamane

アブドゥ・モウモウニアメ大学
理学部生物学部、BP 10662ニアメ、ニジェール

概要

「制御された農村市場」が確立されているニジェールの一部の森林では、次のタイプの方針に従って薪が収穫されます。 T 年ごとに、枯れ木と D よりも大きい直径の生きている木を伐採します。枯れ木が収穫の大部分を占めています。この記事では、高い死亡率 α の影響を受けるこれらの不均一な年齢の森林区画を管理するための連続時間での単純なモデルを提示し、割引後の収入を最適化する周期と伐採直径の式を取得します。無限の地平線で、ファウストマンの定型プロットの古典的な公式は限界を満たしています $\alpha \rightarrow 0$ そして $D = 0$ (クリアカット)。

キーワード：林業、不均等林、モデリング、最適化、薪、ニジェール

1.はじめに

ニジェールでは、木材は依然として食品を調理するための最も重要なエネルギー源です。干ばつ、都市人口の増加、資源へのアクセスが一部制御されていないことなどにより、ニアメなどの都市周辺の森林への圧力が高まっています。1989年以来、新しい政府戦略により、特定の森林地域が保護され、そこでは収穫が持続可能な方法で管理されています。収穫物は行政の許可を得て近くの市場で独占的に販売されています。税制の違いにより、トレーダーは、制御されていない森林伐採を組織するのではなく、これらの構造物から薪を購入することが推奨されます[1]。

2つの管理システムが選択されました。「農村市場」では、枯れた木だけが収穫されます。「管理された農村市場」では、いくつかの生きている樹木も伐採され、伐採は周期的に組織され、空間的な回転を可能にします。時々、伐採する生きている木の直径に下限が設定されます。樹木がこの直径に達するまでに数サイクルかかることがあるため、一般的に枯れた木が各作物の大部分を占めます。サイクルの長さは通常5~10年に固定されています。

したがって、これらの管理された農村市場での収穫政策は、世界の他の地域で不均一な区画で実施されている選択的伐採に非常に似ています。しかし、枯れた木の重要性は、その目的地（枯れた木材は料理用の緑の木材よりも優れています）、変形のないこと、およびその利用可能性（サヘル気候により、木の死亡率が高くなる）のため、あまり一般的ではありません。

最適回転の問題についてのファウストマンの古典的な公式[2,3]のさまざまな拡張を扱った豊富な文献（[4]および[5]にリストされている300の記事）にもかかわらず、単純な公式はありませんでした死んだ木が薪として使用される収穫の大部分を形成する、高い死亡率になりがち不均等に老化した区画の最適な伐採サイクルと最適な直径のために提案されました。[6]では、明確な公式が得られていますが、火などの壊滅的な死亡率が低い偶数齢の森林が対象です。モデルは連続時間変数を使用し、式は報酬更新プロセスの理論を使用して取得されました。自然死亡率が高いと、一本の木は時々枯れてしまい、次の計画された収穫で伐採されるまでに遅れが生じる可能性があります。逆に、火災による壊滅的な死亡率では、森林全体がほぼ瞬時に影響を受け、その直後に樹木が除去されます。前者の場合、単純な空間回転を維持できますが、後者の場合は不可能です[6]。

[7]で、不均一な区画のファウストマンの式を一般化する式を見つけましたが、モデルは、生物学的成長の特定のモデルを考慮せずに、経済的な部分に集中していました。この式は、[8]で[9,10]と同様の離散時間行列モデルと組み合わせて使用され、成長しました。しかし、最適な切削サイクルの単純な式は見つからなかったため、結果はシミュレーションのみに基づいていました。[11,12]などのいくつかの記事では、ファウストマンモデルとその一般化の多くは、動的計画法を使用できるマルコフ決定プロセスの特定の例であると主張しています。次に、明示的な式よりも数値アルゴリズムに焦点を当てます。これらすべての参考文献において、自然死亡率にはほとんど注意が払われていません。ヨーロッパや北米の状況では、他のいくつかの要因と比較してそれが比較的無視できるからです。

したがって、この記事の目的は、高い死亡率の影響を受ける単純な不均一な年齢のプロットモデルの枠組み内で、最適なサイクルの継続時間と最適な切削直径の明確な式を見つけることです。最適化基準は、Fautmannモデルの場合と同じです。つまり、無限の地平線上の割引所得です。明らかに[13]にもかかわらず、ニジェールの森林でモデルを較正するのに十分なデータを取得する前に、多くのフィールドワークが依然として必要であるため、関心は主に理論的です。しかし、ニジェールおよびサヘル地域全体でますます制御された農村市場が組織化されるにつれて、より多くのデータが利用可能になり、関心が森林の管理方法から管理の最適化方法に移行する可能性があります。

記事は次のように構成されています。セクション2では、モデルの表記法を紹介します。セクション3では、最適な切断サイクルと最適な直径の式を取得し、次に、木の成長曲線の簡単な数式を使用してそれについて説明します。セクション4では、古典的なファウストマンの式が無視できる死亡率の限界に対応することを示します ($\alpha \rightarrow 0$) および切断直径 $D = 0$ (クリアカット)。また、[6]で与えられている、火災などの致命的な低死亡率の影響を受ける偶数年齢のプロットの平均収量の式は、切削サイクルの限界に対応していることも示しています。 $T \rightarrow 0$ 割引率あり $\beta \rightarrow 0$ 。また、式の他の拡張を示します。年齢に依存した死亡率と、死んだ木材と最近伐採された緑の木材との価格差の可能性です。他のコンテキストで使用できます。

2.単純なモデル

私たちは仮定します：

- プロットには、樹木が成長するための固定数 N の場所があります。 N は大きな数です。
- $V(x)$ 樹齢 x の木の体積です。 $V(0) = 0$
- 木材の単位体積あたりの価格 P は一定
- c 新しい木の成長に備えるための費用です
- c' 収穫あたりの固定費です
- α は木の死亡率です。短い時間間隔 dt の間、 αdt 死ぬツリーのパーセンテージ (モデルを決定論的と考える場合)、またはツリーが死ぬ確率 (モデルを確率論的と考える場合)。現時点では、 α は年齢とは無関係であると想定されていますが、この仮説はセクション4で放棄されます。
- 切削サイクルの期間は T
- T 年ごとに、収穫はすべての枯れ木と直径が D よりも大きいすべての生きている木で構成されます。
- X は、樹木が直径 D に達する年齢です。

再生は純粋に人工的であると想定されます。切り取られた木は、遅延なく0歳の新しい木に置き換えられるため、木の総数は一定のままです。回転中に自然再生は無視できると想定されています。最後に、時間 $t = nT$ の収入が係数で重み付けされるように、 β を割引係数とする $e^{-\beta nT}$ 最適化基準で。問題は、 T と X を選択して、将来のすべての作物の割引収入の期待を最適化することです。

正式には

- $p(x, t)$ は、時間 t における x 歳の生きている木の密度の予想です。
- $q(x, t)$ は、時間 t における x 歳の枯れ木の人口密度の予想です (死亡すると、木は老化を停止します)。
- K_n 収穫から時間までの収入の期待です $t = nT$ 。

問題は、インパルス制御を伴う偏微分方程式のシステムとして定式化できます。これらの偏微分方程式は、年齢によって構造化された離散時間のマトリックスモデルの連続時間における単純な等価であることを思い出してください。このアプローチは、例えば、[15,16] のアプローチで、収穫は継続的で定期的ではありません。収穫の間 ($nT < t < (n+1)T$)、機能チェック

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha p(x, t) = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \alpha p(x, t),$$

そして $p(0, t) = 0$ 。 nT^- そして nT^+ それぞれ示す"直前 $T = nT$ " および "直後 $T = nT$ "。その後、

$$p(x, nT^+) = \left[\int_0^\infty q(\xi, nT^-) d\xi + \int_X^\infty p(\xi, nT^-) d\xi \right] \delta_{x=0} + p(x, nT^-) 1_{x \in]0, X[}$$

そして $q(x, nT^+) = 0$ 。ここに、 $\delta_{x=0}$ デイラックの質量を表します $x = 0$ 、 $1_{x \in]0, X[}$ 区間の特性関数を示します $]0, X[$ 。 $t = nT$ での収入期待は、

$$K_n = \int_0^\infty q(x, nT^-) [PV(x) - c] dx + \int_X^\infty p(x, nT^-) [PV(x) - c] dx - c'.$$

T と X に関して、将来のすべての作物の割引収入の期待を最大化することが目的です。

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta nT} K_n.$$

機能 $p(x, t)$ そして $q(x, t)$ また、初期条件を確認してください

$$\int_0^{\infty} [p(x, 0) + q(x, 0)] dx = N.$$

このモデルは、次の場合に最適回転の問題の古典的なファウストマンモデルと同等です。 $\alpha = 0$ として $X = 0$ 。

3.最適な切削サイクルと直径

初期条件の年齢構成に関係なく、密度 $p(x, t)$ として $q(x, t)$ 収束する $t \rightarrow +\infty$ 定期的な解決に向けて $\hat{p}(x, t)$ として $\hat{q}(x, t)$ 、

$$\begin{aligned}\hat{p}(x, nT^-) &= N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \sum_{k=1}^i e^{-k\alpha T} \delta_{x=kT} \\ \hat{q}(x, nT^-) &= N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \alpha e^{-\alpha x} \mathbf{1}_{x \in (0, iT)} \\ \hat{p}(x, nT^+) &= N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \sum_{k=0}^{i-1} e^{-k\alpha T} \delta_{x=kT}\end{aligned}$$

そして $\hat{q}(x, nT^+) = 0$ 。 $i = [X/T] + 1$ (そして $[X/T]$ 全体です X/T)。注意してください $X < T$ (そのため $i = 1$)、到達するすべての生きている木 $t = nT^-$ は同じ年齢 (偶数プロット) であり、枯れ木 (t カット) と同時に $t = nT$ で収穫されます。逆に、もし $X > T$ (そのため $i \geq 2$)、到達する生きている木 $t = nT^-$ 年齢 $T, 2T, \dots, iT$ (不均一プロット) を持ち、 iT からの年齢のみが $t = nT$ で収穫され、枯れ木 (選択) が発生します。だから整数 i 木が死ぬ場合を除いて、収穫前に成長し続けることができるサイクル数を表します。この場合、死んだ後の最初の収穫時に木が収穫されます。 $t = nT$ で収穫された枯れ木は収入をもたらします

$$N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \int_0^{iT} \alpha e^{-\alpha x} [PV(x) - c] dx.$$

$t = nT$ で収穫された生きている木は iT 年齢のもので、彼らは収入を与える

$$N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} e^{-i\alpha T} [PV(iT) - c].$$

したがって、 $t = nT$ での総収入は (部品による統合後)

$$K_n = N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \left[P \int_0^{iT} e^{-\alpha x} V'(x) dx - c \right] - c'.$$

最後に、将来のすべての作物の総収入の予想は

$$\frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \left[P \int_0^{iT} e^{-\alpha x} V'(x) dx - c \right] - c' \right\},$$

T と X に対する最大値を見つける必要があります。同様に、 T と整数 に関して最大値を見つける必要があります。 $i = [X/T] + 1$ 。これは、考慮される管理のための古典的なファウストマンの公式の一般化です (次のセクションで説明します)。ディスカッションパラメータの数を減らすために、式を書きましょう

$$NPV_{\infty} \frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \left[\int_0^{iT} e^{-\alpha x} \frac{V'(x)}{V_{\infty}} dx - \frac{c}{PV_{\infty}} \right] - \frac{c'}{NPV_{\infty}} \right\}.$$

V_{∞} ツリーが存続期間中に到達できる最大ボリュームです。ご了承ください

- $c/(PV_{\infty})$ 一方で木の伐採と再植栽のコストの比率、他方で木の最大値
- $c'/(NPV_{\infty})$ 収穫あたりの固定コストとプロットの最大値の比率です。

この式を議論するために、簡単な数式を考えてみましょう $V(x)$ 木の成長曲線、またはその派生物の同等物 $V'(x)$ 、例えば

$$V'(x) = V_{\infty} \frac{(\gamma/\tau)^{\gamma+1}}{\Gamma(\gamma+1)} x^{\gamma} e^{-\gamma x/\tau},$$

ここで、 Γ は通常のガンマ関数です。成長速度を表すこの関数は、0 から $x = \tau$ で到達する最大値まで増加し、次に 0 に向かって収束しながら減少します。 $x \rightarrow \infty$ 。そう $V(x) = \int_0^x V'(\xi) d\xi$ $x < \tau$ の場合は凸で、 $x > \tau$ の場合は凹の増加関数です。パラメータ化により、ツリーの最大ボリュームが強調表示されます $V_{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} V(x)$ 。

図1 は、 $i = 1, \dots, 4$ に対応する切削直径のさまざまな値に対して、切削サイクルの長さ T に応じて割引収入の予想がどのように変化するかを示しています。右端の曲線は $i = 1$ (明確なカットとプロット)。最適な戦略は $T^* \simeq 9.5$ として $i = 2$ 、つまり、すべてをカットして T^* 樹齢枯れ木と生木 $2T^*$ 以上。収穫あたりの固定コストがゼロではないため、 T が 0 に近づくときすべての曲線が負になることに注意してください。この図に使用されるパラメータ値は $\alpha = 0.05$ 年間 (木の平均寿命は $1/\alpha = 20$ 年)、 $\tau = 10$ 年 (これは成長が最も速い年齢です) および $\gamma = 2$ 成長曲線の割引率 $\beta = 0.03$ 年間の費用 $c/(PV_{\infty}) = 0$ として $c'/(NPV_{\infty}) = 0.1$ 、および正規化プロットの最大値 $NPV_{\infty} = 1$ 。

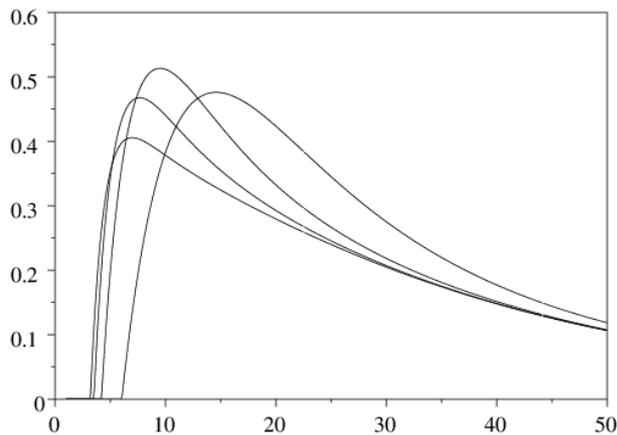


図1. 切削直径の長さの異なる値に対する切削サイクルの長さ T の関数としての割引収入の期待（これは $i = 1 \dots 4$ ）。

図2は、死亡率 α 、割引率 β 、収穫あたりの固定費によって、最適な切削サイクルと直径がどのように変化するかを示しています。固定パラメーターの値は図1と同じです。予想どおり、短い切削サイクルの不均一な経年管理（領域 $i = 2$ および $i = 3$ で表されます）は、均一な管理（ $i = 1$ ）

- 死亡率が高い場合（左上と右上の図）、
- 割引率が高い場合（左と下の図）
- または、収穫ごとの固定コストが低い場合（右上と下）。

左上（右上）の図では、制限内であることにも注意してください $\alpha \rightarrow 0$ （ファウストマンのモデルの場合）、割引率（各収穫あたりの固定費）が特定のしきい値を上回っている（または下回っている）場合、不均等な年齢管理は偶数年齢の管理よりも収益性が高くなります。。

図2は、切削サイクルの最適な長さの等高線も示しています。切削サイクルの最適な長さと死亡率の間には単純な関係がないことに注意してください：最初の図は、上の図のように、パラメーターの値に応じて2番目の関数の増加または減少の関数になる可能性があります正しい。

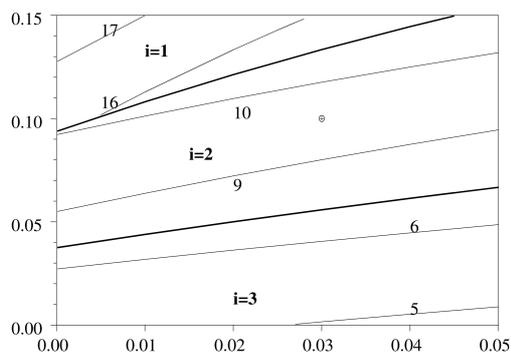
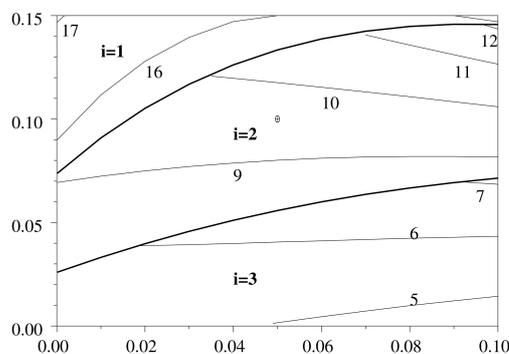
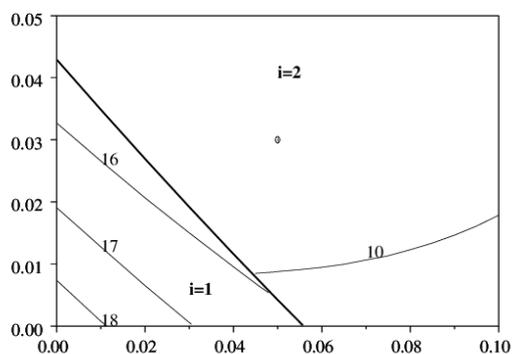


図2. 死亡率 α が変動する場合の最適なサイクルの長さや直径、割引率 β 、および収穫ごとの固定費 c' 。左上：図 (α, β) 。右上：図 $(\alpha, c'/NPV_\infty)$ 。下：図 $(\beta, c'/NPV_\infty)$ 。太い線は、 $i = 1$ （均等管理が最適）の領域と $i = 2$ および $i = 3$ （不均等管理が最適）の領域を分けています。他の線は、切削サイクルの最適な長さのレベル線です。いずれの場合も、点は図1のパラメーターの値を思い起こさせます。

4. ボーダーラインのケースと拡張

生きている木の切断の臨界直径 D を0（明確な切断）に設定すると、対応する年齢は $X = 0$ になります。したがって、 $i = 1$ であり、式(1)は

$$\frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ N \left[P \int_0^T e^{-\alpha x} V'(x) dx - c \right] - c' \right\}.$$

さらに、収穫ごとの固定費 c' そして、死亡率 α はごくわずかであり、式はファウストマンの式に削減されます[2、3]

$$N \frac{PV(T) - c}{e^{\beta T} - 1}.$$

割引係数 β と切断サイクルの長さ T が0に収束すると、もう1つの境界線のケースが得られます。 X より大きい。年間の平均収入と将来のすべての作物の割引収入との関係を思い出してください。

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu T} \sum_{n=1}^{\nu} K_n = \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta n T} K_n.$$

続けましょう $c' = 0$ 。次に、式(1)は平均収入を与えます

$$N \alpha \frac{P \int_0^X e^{-\alpha x} V'(x) dx - c}{1 - e^{-\alpha X}},$$

と密度 $p(x, t)$ そして $q(x, t)$ 定常解に収束する

$$\hat{p}(x) = N \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha X}} \mathbf{1}_{x \in (0, X)}$$

そして $\hat{q}(x) = 0$ 。式(2)は、壊滅的な火災リスクの対象となる森林の平均収入の[6]と同じです。確かに $T \rightarrow 0$ [6]のように、木の死とその収穫の間に遅延はありません。したがって、平均所得が同じであることは正常です。しかし、火災の場合の死亡の同期は、割引き所得の表現に違いをもたらします。

拡張。死亡率は一定ではなく、年齢に依存するとします。定義しよう

$$\Delta(x) = \exp\left(-\int_0^x \alpha(\xi) d\xi\right).$$

場合は、 Q は死んだ木の価格である場合、 P は最近、カット緑の木の価格です、そして、すべての将来の収穫の割引収入の期待があります

$$\frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ N \frac{\Delta(iT) [PV(iT) - c] - \int_0^{iT} \Delta'(x) [QV(x) - c] dx}{\sum_{n=0}^{i-1} \Delta(nT)} - c' \right\},$$

と $i = [X/T] + 1$ 。式(1)は $Q = P$ および定数 a に対応するため、 $\Delta(x) = \exp(-\alpha x)$ 。制限内で $\beta \rightarrow 0$ そして $T \rightarrow 0$ 、この式($c' = 0$)平均所得につながる

$$N \frac{\Delta(X) [PV(X) - c] - \int_0^X \Delta'(x) [QV(x) - c] dx}{\int_0^X \Delta(x) dx},$$

火災の危険性のある森林の文脈で[6]で見つかる式ですが、焼けた木材の一部を回収できます。

5. 結論

単純なモデルのフレームワークでは、管理が T 年ごとに D より大きい直径の枯れ木と生きている木を切ることにある場合、伐採サイクルの最適な長さや直径の式が見つかりました。このモデルは、枯死木が収穫の主要部分を形成し、薪として使用される、高い自然死亡率の影響を受ける森林向けに設計されました。これらの状況では、不均衡な管理がより好ましいことがわかりました。自然死亡率が低い場合、割引率が低い場合、または収穫あたりの固定費が高い場合、管理でさえより収益性が高くなります。

ニジェールと他のサヘル諸国の森林管理はまだ始まったばかりです。ローテーションはわずか10年前に導入されました。フィールドデータはまだ不足しています。先進国での最適なローテーションの問題について150年以上にわたって蓄積された数多くの研究にもかかわらず、現地の状況への適応が必要です。この研究では、1つの側面、つまり高い自然死亡率のみに焦点を当てます。このミクロ経済モデルがマクロ経済モデル[17,18,19]と組み合わされて、より完全なモデリングツールを公共の熱心な人々に提供することを期待しましょう。

ありがとう

2人目の著者は、エディスベリエ (IRD)、アランベルトラン、マルティエヌアントナ、クリストフルペイジ (CIRAD) および Aboubacar Ichaou (ニジェール環境省) に感謝します。この記事はOvide Arinoの思い出に捧げられています。

参考文献

1. J. M. d'Herbès, J. M. K. Ambouta, R. Peltier, *Fonctionnement et gestion des écosystèmes forestiers contractés sahéliens*, John Libbey Eurotext, Paris, 1997.
2. M. Faustmann, Berechnung des Wertes welchen Waldboden sowie noch nicht haubare Holzbestände für die Waldwirtschaft besitzen. *Allgemeine Forst – und Jagd – Zeitung* 15 (1849).
3. C. W. Clark, *Mathematical bioeconomics : the optimal management of renewable resources*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
4. D. H. Newman, *The optimal forest rotation : a discussion and annotated bibliography*, USDA Forest Service, Technical Report SE – 48, Asheville, 1988.
5. *J. Forest Econ.* 8 (2002) 5 – 27.
6. *Can. J. For. Res.* 15 (1985) 180 – 190.
7. *For. Sci.* 27 (1981) 739 – 744.
8. *Forest policy and economics* 6 (2004) 145 – 152.
9. *J. Appl. Ecol.* 8 (1966) 355 – 367.
10. *For. Sci.* 26 (1980) 609 – 625.
11. *For. Sci.* 47 (2001) 466 – 474.
12. J. Buongiorno, J. K. Gilles, *Decision methods for forest resource management*, Academic Press, Boston, 2003.
13. A. Ichaou, *Dynamique et productivité des structures forestières contractées des plateaux de l'ouest nigérien*, Thèse, Université de Toulouse III, 2000.
14. www.handels.gu.se/econ/EEU/cifor.html
15. C. Rorres, W. Fair, Optimal age specific harvesting policy for a continuous – time population model, in : T. A. Burton (Ed.), *Modeling and differential equations in biology*, Marcel Dekker, New York, 1980, pp.239 – 254.
16. www2.fundacion-centra.org/pdfs/E200337.pdf
17. CSFD, *Pour une gestion viable des ressources ligneuses péri – urbaines : analyse et modélisation des impacts des règles et des pratiques coutumières sur divers milieux naturels sahéliens et sahélo – soudaniens au Niger et au Mali*, www.csf-desertification.org/projets/projet3.php
18. www.dec.org/pdf_docs/PNACQ877.pdf
19. MARGE, *Le modèle GLOBUS*, www.marge.fr