

# Brennholzernte in Niger und eine Verallgemeinerung der Faustmannschen Formel

C. R. Biol. 328 (2005) 379 – 385  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01386828>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement  
32 avenue Henri Varagnat, 93143 Bondy, Frankreich  
nicolas.bacaer@ird.fr

Alassane Bah

Universität Cheikh Anta Diop von Dakar, École Supérieure Polytechnique  
DGI-SMA, BP 15915 Dakar-Fann, Senegal

Ali Mahamane

Abdou Moumouni Universität Niamey  
Fakultät für Naturwissenschaften, Institut für Biologie, BP 10662 Niamey, Niger

## Zusammenfassung

In bestimmten Wäldern in Niger, in denen „kontrollierte ländliche Märkte“ eingerichtet wurden, wird Brennholz nach einer Politik der folgenden Art geerntet: Alle  $T$  Jahre werden tote Bäume und lebende Bäume mit einem Durchmesser von mehr als  $D$  gefällt. Abgestorbene Bäume machen im Allgemeinen den größten Teil der Ernte aus. In diesem Artikel stellen wir ein einfaches Modell in kontinuierlicher Zeit für die Bewirtschaftung dieser Waldparzellen mit ungleichem Alter vor, die einer hohen Sterblichkeitsrate  $\alpha$  unterliegen, und wir erhalten eine Formel für den Zyklus und den Schnittdurchmesser, die das abgezinste Einkommen optimieren, mit einem unendlichen Horizont. Faustmanns klassische Formel für gleich große Parzellen stößt an ihre Grenzen  $\alpha \rightarrow 0$  und  $D = 0$  (klarer Schnitt).

Schlüsselwörter: Forstwirtschaft, Wald mit ungleichem Alter, Modellierung, Optimierung, Brennholz, Niger

## 1. Einleitung

In Niger ist Holz nach wie vor die wichtigste Energiequelle für das Kochen von Lebensmitteln. Aufgrund der Dürre, der wachsenden Stadtbevölkerung und des teilweise unkontrollierten Zugangs zu den Ressourcen ist der Druck auf die Wälder in Städten wie Niamey hoch. Seit 1989 hat eine neue Regierungsstrategie zum Schutz bestimmter Waldgebiete geführt, in denen die Ernte nachhaltig bewirtschaftet wird. Die Ernte wird ausschließlich auf nahe gelegenen Märkten mit behördlicher Genehmigung verkauft. Ein differenziertes Steuersystem ermutigt Händler, Brennholz von diesen Strukturen zu kaufen, anstatt die unkontrollierte Ernte von Wäldern zu organisieren [1].

Es wurden zwei Managementsysteme ausgewählt. In "orientierten ländlichen Märkten" werden nur tote Bäume geerntet. In „kontrollierten ländlichen Märkten“ werden auch einige lebende Bäume gefällt und der Schnitt ist in Zyklen organisiert, um eine räumliche Rotation zu ermöglichen. Manchmal wird eine Untergrenze für den Durchmesser lebender Bäume festgelegt, die gefällt werden sollen. Es kann mehrere Zyklen dauern, bis ein Baum diesen Durchmesser erreicht, so dass tote Bäume im Allgemeinen den größten Teil jeder Ernte ausmachen. Die Länge des Zyklus liegt normalerweise zwischen 5 und 10 Jahren.

Die Erntepolitik in diesen kontrollierten ländlichen Märkten ist daher dem selektiven Schneiden auf unebenen Parzellen in anderen Teilen der Welt ziemlich ähnlich. Die Bedeutung abgestorbener Bäume ist jedoch aufgrund ihres Bestimmungsortes (totes Holz ist besser als grünes Holz zum Kochen von Lebensmitteln), der fehlenden Transformation und seiner Verfügbarkeit (das Sahelklima verursacht eine hohe Sterblichkeit von Bäumen) weniger üblich).

Trotz einer reichhaltigen Literatur, die sich mit verschiedenen Erweiterungen der klassischen Faustmann-Formel [2,3] für das Problem der optimalen Rotation befasst ([4] und die in [5] aufgeführten 300 Artikel), wurde keine einfache Formel gefunden vorgeschlagen für den optimalen Schnittzyklus und den optimalen Durchmesser von Parzellen mit ungleichem Alter, die für eine hohe Sterblichkeit anfällig sind, wobei tote Bäume den größten Teil der Ernte ausmachen, um als Brennholz verwendet zu werden. In [6] wird eine explizite Formel erhalten, jedoch für Wälder mit gleichem Alter, die einer geringen katastrophalen Sterblichkeit wie Feuer ausgesetzt sind. Das Modell verwendete eine kontinuierliche Zeitvariable und die Formel wurde unter Verwendung der Theorie der Belohnungserneuerungsprozesse erhalten. Es sollte betont werden, dass bei hoher natürlicher Sterblichkeit Einzelne Bäume sterben von Zeit zu Zeit ab und es kann eine Verzögerung geben, bevor sie bei der nächsten geplanten Ernte gefällt werden. Im Gegenteil, bei einer katastrophalen Sterblichkeit aufgrund von Bränden ist der gesamte Wald fast augenblicklich betroffen und die Bäume werden bald darauf entfernt. Im ersten Fall kann eine einfache räumliche Rotation beibehalten werden, während dies im zweiten Fall, wie bereits erwähnt, unmöglich ist [6].

Man findet in [7] eine Formel, die die von Faustmann für die unebenen Parzellen verallgemeinert, aber das Modell konzentrierte sich auf den wirtschaftlichen Teil, ohne ein bestimmtes Modell des biologischen Wachstums zu berücksichtigen. Diese Formel wurde in [8] in Kombination mit einem zeitdiskreten Matrixmodell ähnlich [9,10] für das Wachstum verwendet; Es wurde jedoch keine einfache Formel für den optimalen Schneidzyklus gefunden, sodass die Ergebnisse nur auf Simulationen beruhen. Mehrere Artikel wie [11,12] bestehen darauf, dass das Faustmann-Modell und viele seiner Verallgemeinerungen besondere Beispiele für markovsche Entscheidungsprozesse sind, für die dynamische Programmieretechniken verwendet werden können. Wir konzentrieren uns dann mehr auf numerische Algorithmen als auf explizite Formeln. In all diesen Referenzen wird der natürlichen Sterblichkeit wenig Aufmerksamkeit geschenkt, da sie in einem europäischen oder nordamerikanischen Kontext im Vergleich zu mehreren anderen Faktoren relativ vernachlässigbar ist.

Ziel dieses Artikels ist es daher, im Rahmen eines einfachen Parzellenmodells mit ungleichem Alter und hoher Sterblichkeit eine explizite Formel für die Dauer des optimalen Zyklus und den optimalen Schnittdurchmesser zu finden. Das Optimierungskriterium ist das gleiche wie im Faustmann-Modell, nämlich das diskontierte Einkommen über einen unendlichen Horizont. Das Interesse ist hauptsächlich theoretischer Natur, da trotz [13] offensichtlich noch viel Feldarbeit erforderlich ist, bevor genügend Daten zur Kalibrierung des Modells in den Wäldern von Niger vorliegen. Da jedoch in Niger und in der gesamten Sahelzone immer mehr kontrollierte ländliche Märkte organisiert werden, werden mehr Daten verfügbar, und das Interesse könnte sich von der Bewirtschaftung des Waldes zur Optimierung der Bewirtschaftung verlagern.

Der Artikel ist wie folgt aufgebaut. In Abschnitt 2 stellen wir die Notationen des Modells vor. In Abschnitt 3 erhalten wir eine Formel für den optimalen Schnittzyklus und den optimalen Durchmesser. Anschließend diskutieren wir sie mit einem einfachen mathematischen Ausdruck für die Baumwachstumskurve. In Abschnitt 4 zeigen wir, dass die klassische Faustmann-Formel der Grenze der vernachlässigbaren Mortalität entspricht ( $\alpha \rightarrow 0$ ) und einen Schnittdurchmesser  $D = 0$  (klarer Schnitt). Wir zeigen auch, dass die in [6] angegebene Formel für den Durchschnittsertrag von Parzellen mit gleichem Alter, die einer niedrigen, aber katastrophalen Sterblichkeit wie Bränden unterliegen, der Grenze eines Schnittzyklus entspricht  $T \rightarrow 0$  mit einem Abzinsungssatz  $\beta \rightarrow 0$ . Wir präsentieren auch andere Erweiterungen der Formel: eine altersabhängige Sterblichkeit und einen möglichen Preisunterschied zwischen totem Holz und kürzlich geschnittenem grünem Holz. Sie können in anderen Kontexten verwendet werden.

## 2. Ein einfaches Modell

Wir nehmen an :

- Ein Grundstück hat eine feste Anzahl  $N$  Plätze, an denen Bäume wachsen können.  $N$  ist eine große Zahl.
- $V(x)$  ist das Volumen eines Baumes im Alter von  $x$ ,  $V(0) = 0$
- Der Preis  $P$  pro Volumeneinheit Holz ist konstant
- $c$  sind die Kosten für die Vorbereitung auf das Wachstum eines neuen Baumes
- $c'$  ist ein Fixpreis pro Ernte
- $\alpha$  ist die Sterblichkeit der Bäume: während eines kleinen Zeitintervalls  $dt$ ,  $\alpha dt$  ist der Prozentsatz der Bäume, die sterben (wenn Sie das Modell als deterministisch betrachten) oder die Wahrscheinlichkeit, dass ein Baum stirbt (wenn Sie das Modell als stochastisch betrachten). Im Moment wird angenommen, dass  $\alpha$  unabhängig vom Alter ist, aber diese Hypothese wird in Abschnitt 4 aufgegeben.
- Die Dauer des Schneidzyklus beträgt  $T$ .
- Alle  $T$  Jahre besteht die Ernte aus allen toten Bäumen und allen lebenden Bäumen, deren Durchmesser größer als  $D$  ist
- $X$  ist das Alter, in dem die Bäume den Durchmesser  $D$  erreichen .

Es wird davon ausgegangen, dass die Regeneration rein künstlich ist: Die gefälltten Bäume werden unverzüglich durch neue Bäume im Alter von 0 Jahren ersetzt, so dass die Gesamtzahl der Bäume konstant bleibt. Es wird angenommen, dass die natürliche Regeneration während einer Rotation vernachlässigbar ist. Schließlich sei  $\beta$  ein Abzinsungsfaktor, so dass das Einkommen zum Zeitpunkt  $t = nT$  mit einem Faktor gewichtet wird  $e^{-\beta nT}$  im Optimierungskriterium. Das Problem besteht darin,  $T$  und  $X$  zu wählen, um die Erwartung eines reduzierten Einkommens für alle zukünftigen Kulturen zu optimieren.

Formal,

- $p(x, t)$  ist die Erwartung der Populationsdichte lebender Bäume im Alter von  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ ,
- $q(x, t)$  ist die Erwartung der Populationsdichte von toten Bäumen im Alter von  $x$  zum Zeitpunkt  $t$  (wenn sie sterben, hören die Bäume auf zu altern),
- $K_n$  ist die Erwartung des Einkommens von der Ernte bis zur Zeit  $t = nT$ .

Das Problem kann als ein System partieller Differentialgleichungen mit Impulssteuerung formuliert werden. Wir möchten daran erinnern, dass diese partiellen Differentialgleichungen einfach das Äquivalent der Matrixmodelle in der nach Alter strukturierten diskreten Zeit in kontinuierlicher Zeit sind. Dieser Ansatz ist zum Beispiel der von [15, 16], bei dem die Ernte kontinuierlich und nicht periodisch erfolgt. Zwischen den Ernten ( $nT < t < (n+1)T$ ) überprüfen die Funktionen

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha p(x, t) = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \alpha p(x, t),$$

und  $p(0, t) = 0$ .  $nT^-$  und  $nT^+$  bezeichnen jeweils "kurz vor  $t = nT$ " und "kurz nach  $t = nT$ ". Wir haben dann

$$p(x, nT^+) = \left[ \int_0^\infty q(\xi, nT^-) d\xi + \int_X^\infty p(\xi, nT^-) d\xi \right] \delta_{x=0} + p(x, nT^-) \mathbf{1}_{x \in ]0, X[}$$

und  $q(x, nT^+) = 0$ . Hier,  $\delta_{x=0}$  bezeichnet die Dirac-Masse in  $x = 0$  während  $\mathbf{1}_{x \in ]0, X[}$  bezeichnet die charakteristische Funktion des Intervalls  $]0, X[$ . Die Einkommenserwartung bei  $t = nT$  beträgt

$$K_n = \int_0^\infty q(x, nT^-) [PV(x) - c] dx + \int_X^\infty p(x, nT^-) [PV(x) - c] dx - c'.$$

Ziel ist es, in Bezug auf  $T$  und  $X$  die Erwartung eines abgezinsten Einkommens für alle künftigen Kulturen zu maximieren

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta nT} K_n.$$

Die Funktionen  $p(x, t)$  und  $q(x, t)$  Überprüfen Sie auch die Anfangsbedingungen mit

$$\int_0^\infty [p(x, 0) + q(x, 0)] dx = N.$$

Dieses Modell entspricht dem klassischen Faustmann-Modell für das Problem der optimalen Rotation, wenn  $\alpha = 0$  und  $X = 0$ .

### 3. Optimaler Schneidzyklus und optimaler Durchmesser

Unabhängig von der Altersstruktur des Ausgangszustands sind die Dichten  $p(x, t)$  und  $q(x, t)$  konvergieren wenn  $t \rightarrow +\infty$  zu periodischen Lösungen  $\hat{p}(x, t)$  und  $\hat{q}(x, t)$  mit

$$\begin{aligned} \hat{p}(x, nT^-) &= N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \sum_{k=1}^i e^{-k\alpha T} \delta_{x=kT} \\ \hat{q}(x, nT^-) &= N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \alpha e^{-\alpha x} \mathbf{1}_{x \in (0, iT)} \\ \hat{p}(x, nT^+) &= N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \sum_{k=0}^{i-1} e^{-k\alpha T} \delta_{x=kT} \end{aligned}$$

und  $\hat{q}(x, nT^+) = 0$ .  $i = [X/T] + 1$  (und  $[X/T]$  ist der ganze Teil von  $X/T$ ). Beachten Sie, dass wenn  $X < T$  (damit  $i = 1$ ), alle lebenden Bäume, die erreichen  $t = nT^-$  sind gleich alt (gerade Parzelle) und werden bei  $t = nT$  zur gleichen Zeit wie die toten Bäume geerntet (Kahlschlag). Im Gegenteil, wenn  $X > T$  (damit  $i \geq 2$ ), lebende Bäume, die erreichen  $t = nT^-$  haben das Alter  $T, 2T, \dots, iT$ , (unebenes Grundstück) und nur diejenigen, die von  $iT$  gealtert sind, werden bei  $t = nT$  mit toten Bäumen geerntet (Auswahl). Also die ganze Zahl  $i$  stellt die Anzahl der Zyklen dar, in denen ein Baum vor der Ernte weiter wachsen kann, sofern er nicht stirbt. In diesem Fall wird der Baum während der ersten Ernte nach dem Tod geerntet. Tote Bäume, die bei  $t = nT$  geerntet wurden, liefern Einkommen

$$N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \int_0^{iT} \alpha e^{-\alpha x} [PV(x) - c] dx.$$

Die bei  $t = nT$  geernteten lebenden Bäume sind die des Alters  $iT$ . Sie geben Einkommen

$$N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} e^{-i\alpha T} [PV(iT) - c].$$

Das Gesamteinkommen bei  $t = nT$  beträgt daher (nach Teilintegration)

$$K_n = N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \left[ P \int_0^{iT} e^{-\alpha x} V'(x) dx - c \right] - c'.$$

Schließlich ist die Erwartung des Gesamteinkommens für alle zukünftigen Kulturen

$$\frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \left[ P \int_0^{iT} e^{-\alpha x} V'(x) dx - c \right] - c' \right\},$$

für die wir das Maximum relativ zu  $T$  und  $X$  finden müssen. Entsprechend muss das Maximum in Bezug auf  $T$  und die ganze Zahl gefunden werden  $i = [X/T] + 1$ . Dies ist die Verallgemeinerung der klassischen Faustmann-Formel für das betrachtete Management (wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden). Um die Anzahl der Diskussionsparameter zu verringern, schreiben wir die Formel

$$NPV_\infty \frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \left[ \int_0^{iT} e^{-\alpha x} \frac{V'(x)}{V_\infty} dx - \frac{c}{PV_\infty} \right] - \frac{c'}{NPV_\infty} \right\}.$$

$V_\infty$  ist das maximale Volumen, das ein Baum während seiner Lebensdauer erreichen kann. Beachten Sie, dass

- $c/(PV_\infty)$  ist das Verhältnis zwischen den Kosten für das Schneiden und Wiederbepflanzen eines Baumes einerseits und dem Maximalwert eines Baumes andererseits
- $c'/(NPV_\infty)$  ist das Verhältnis zwischen den Fixkosten pro Ernte und dem Maximalwert eines Grundstücks.

Betrachten Sie einen einfachen mathematischen Ausdruck, um diese Formel zu diskutieren  $V(x)$  für die Baumwachstumskurve oder äquivalent für ihre Ableitung  $V'(x)$ , beispielsweise

$$V'(x) = V_\infty \frac{(\gamma/\tau)^{\gamma+1}}{\Gamma(\gamma+1)} x^\gamma e^{-\gamma x/\tau},$$

Dabei ist  $\Gamma$  die übliche Gammafunktion. Diese Funktion, die die Wachstumsgeschwindigkeit darstellen soll, steigt von 0 auf ein Maximum, das bei  $x = \tau$  erreicht wird, und nimmt dann ab, während sie gegen 0 konvergiert, wenn  $x \rightarrow \infty$ . Damit  $V(x) = \int_0^x V'(\xi) d\xi$  ist eine zunehmende Funktion, die für  $x < \tau$  konvex und für  $x > \tau$  konkav ist. Durch die Parametrierung wird das maximale Volumen eines Baums hervorgehoben  $V_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} V(x)$ .

Abbildung 1 zeigt, wie die Erwartung eines abgezinsten Einkommens in Abhängigkeit von der Länge  $T$  des Schneidzyklus für verschiedene Werte des Schnittdurchmessers variieren kann, die  $i = 1, \dots, 4$  entsprechen. Die Kurve ganz rechts ist die mit  $i = 1$  (klare und gleichmäßige Handlung). Die optimale Strategie ist  $T^* \approx 9,5$  und  $i = 2$ , das heißt, indem man alles schneidet  $T^*$  Jahre alte tote Bäume und lebende Bäume  $2T^*$  oder mehr. Beachten Sie, dass alle Kurven negativ werden, wenn sich  $T \rightarrow 0$  nähert, da die Fixkosten pro Ernte ungleich Null sind. Die für diese Abbildung verwendeten Parameterwerte sind  $\alpha = 0,05$  pro Jahr (Lebenserwartung von Bäumen ist  $1/\alpha = 20$  Jahre),  $\tau = 10$  Jahre (dies ist das Alter, in dem das Wachstum am schnellsten ist) und  $\gamma = 2$  für die Wachstumskurve ein Abzinsungsfaktor  $\beta = 0,03$  Kosten pro Jahr  $c/(PV_\infty) = 0$  und  $c'/(NPV_\infty) = 0,1$  und ein Maximalwert des normalisierten Diagramms  $NPV_\infty = 1$ .

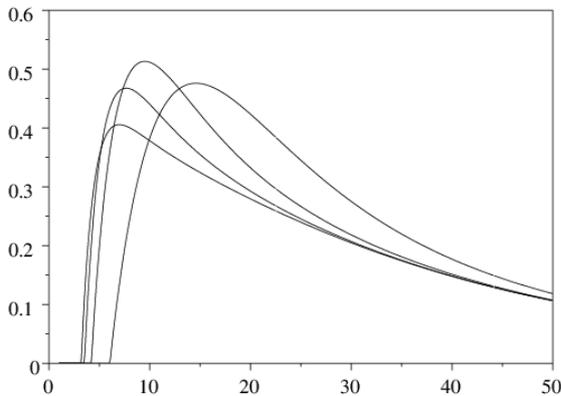


Abbildung 1. Erwartung eines abgezinsten Einkommens als Funktion der Länge des Schneidzyklus  $T$  für verschiedene Werte des Schnittdurchmessers (die entsprechen  $i = 1 \dots 4$ ).

Abbildung 2 zeigt, wie sich der optimale Schneidzyklus und Durchmesser mit der Sterblichkeit  $\alpha$ , dem Abzinsungssatz  $\beta$  und den Fixkosten pro Ernte ändern. Die Werte für die festen Parameter sind dieselben wie in Abbildung 1. Wie erwartet ist ein Management mit ungleichem Alter und einem kurzen Schnitzzyklus (dargestellt durch die Bereiche  $i = 2$  und  $i = 3$ ) rentabler als ein gleichmäßiges Management ( $i = 1$ )

- wenn die Sterblichkeit hoch ist (Zahlen oben links und oben rechts),
- wenn der Abzinsungsfaktor hoch ist (Zahlen oben links und unten),
- oder wenn die Fixkosten pro Ernte niedrig sind (oben rechts und unten).

Beachten Sie in der Abbildung oben links (bzw. oben rechts), dass auch innerhalb der Grenze  $\alpha \rightarrow 0$  (im Fall von Faustmanns Modell) wird ein Management mit ungleichem Alter rentabler als ein Management mit gleichem Alter, wenn der Abzinsungssatz (bzw. die Fixkosten pro Ernte) über (bzw. unter) einem bestimmten Schwellenwert liegt.

Abbildung 2 zeigt auch die Konturlinien für die optimale Länge des Schneidzyklus. Beachten Sie, dass es keine einfache Beziehung zwischen der optimalen Länge des Schneidzyklus und der Sterblichkeit gibt: Die erste kann eine zunehmende oder abnehmende Funktion der zweiten sein, abhängig von den Werten der Parameter, wie in der obigen Abbildung Recht.

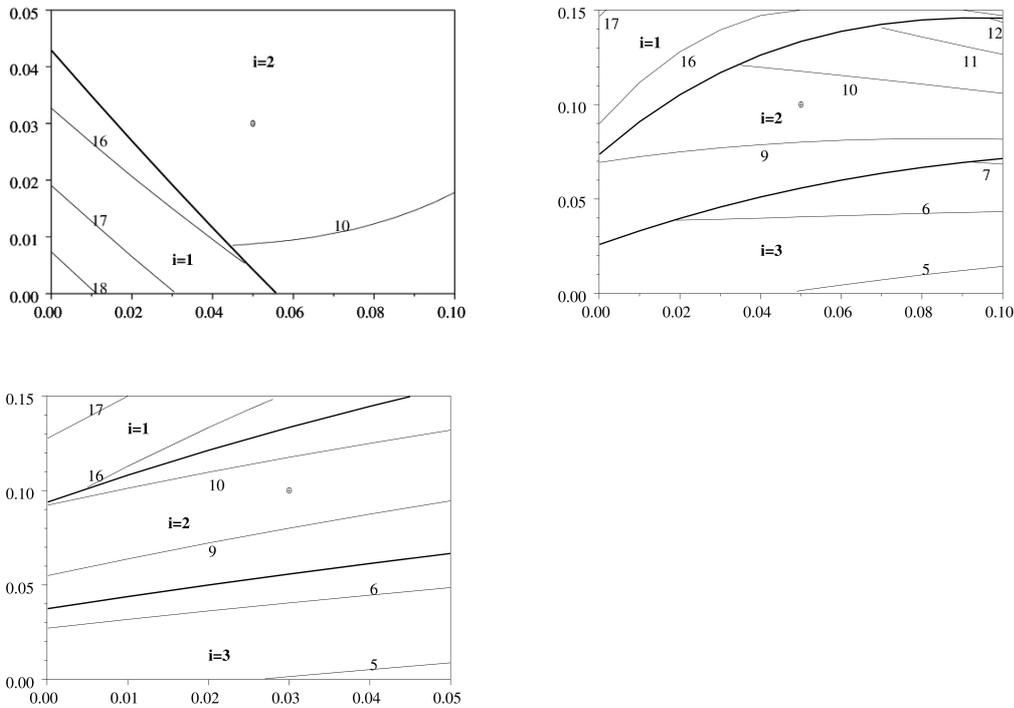


Abbildung 2. Optimale Zykluslänge und Durchmesser, wenn die Sterblichkeit  $\alpha$  variiert, der Abzinsungssatz  $\beta$  und die Fixkosten pro Ernte  $c'$ . Oben links: Diagramm  $(\alpha, \beta)$ . Oben rechts: Diagramm  $(\alpha, c'/NPV_\infty)$ . Unten: Diagramm  $(\beta, c'/NPV_\infty)$ . Die fetten Linien trennen die Bereiche mit  $i = 1$  (gleichmäßiges Management ist optimal) von Bereichen mit  $i = 2$  und  $i = 3$  (ungleichmäßiges Management ist optimal). Die anderen Linien sind die ebenen Linien für die optimale Länge des Schneidzyklus. In jedem Fall ruft ein Punkt die Werte der Parameter in Abbildung 1 auf.

#### 4. Grenzfälle und Erweiterungen

Wenn wir den kritischen Durchmesser  $D$  des Fällen lebender Bäume auf 0 setzen (Kahlschlag), ist das entsprechende Alter  $X = 0$ . Also ist  $i = 1$  und Formel (1) wird auf reduziert

$$\frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ N \left[ P \int_0^T e^{-\alpha x} V'(x) dx - c \right] - c' \right\}.$$

Wenn zusätzlich die Fixkosten pro Ernte  $c'$  und die Mortalität  $\alpha$  ist vernachlässigbar, dann werden die Formeln auf die von Faustmann reduziert [2,3]

$$N \frac{PV(T) - c}{e^{\beta T} - 1}.$$

Ein weiterer Grenzfall ergibt sich, wenn der Abzinsungsfaktor  $\beta$  und die Länge des Schnittzyklus  $T$  gegen 0 konvergieren, was einer Betrachtung des Durchschnittseinkommens bei einer kontinuierlichen Ernte toter Bäume und lebender Bäume entspricht, deren Alter gleich ist größer ist als  $X$ . Erinnern Sie sich an den Zusammenhang zwischen dem durchschnittlichen Einkommen pro Jahr und dem abgezinsten Einkommen aller zukünftigen Kulturen:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu T} \sum_{n=1}^{\nu} K_n = \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta n T} K_n.$$

Lass uns weitermachen  $c' = 0$ . Die Formel (1) gibt dann das durchschnittliche Einkommen an

$$N \alpha \frac{P \int_0^X e^{-\alpha x} V'(x) dx - c}{1 - e^{-\alpha X}},$$

und die Dichten  $p(x, t)$  und  $q(x, t)$  konvergieren auf stationären Lösungen

$$\hat{p}(x) = N \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha X}} \mathbb{1}_{x \in (0, X)}$$

und  $\hat{q}(x) = 0$ . Die Formel (2) ist dieselbe wie in [6] für das durchschnittliche Einkommen in Wäldern, die einem katastrophalen Brandrisiko ausgesetzt sind. In der Tat, wenn  $T \rightarrow 0$  gibt keine Verzögerung zwischen dem Tod des Baumes und seiner Ernte, wie in [6]. Es ist daher normal, dass das Durchschnittseinkommen gleich ist. Die Synchronisation der Todesfälle im Brandfall führt jedoch zu einem Unterschied in der Darstellung des abgezinsten Einkommens.

Erweiterungen. Nehmen wir an, dass die Sterblichkeit nicht konstant ist, sondern vom Alter abhängt. Lassen Sie uns definieren

$$\Delta(x) = \exp\left(-\int_0^x \alpha(\xi) d\xi\right).$$

Wenn  $Q$  der Preis für totes Holz ist, wenn  $P$  der Preis für kürzlich geschnittenes grünes Holz ist, dann ist die Erwartung eines reduzierten Einkommens für alle zukünftigen Ernten

$$\frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ N \frac{\Delta(iT) [PV(iT) - c] - \int_0^{iT} \Delta(x) [QV(x) - c] dx}{\sum_{n=0}^{i-1} \Delta(nT)} - c' \right\},$$

mit  $i = \lceil X/T \rceil + 1$ . Formel (1) entspricht  $Q = P$  und der Konstante  $\alpha$ , so dass  $\Delta(x) = \exp(-\alpha x)$ . In der Grenze wo  $\beta \rightarrow 0$  und  $T \rightarrow 0$ , diese Formel (mit  $c' = 0$ ) führt zu einem durchschnittlichen Einkommen

$$N \frac{\Delta(X) [PV(X) - c] - \int_0^X \Delta'(x) [QV(x) - c] dx}{\int_0^X \Delta(x) dx},$$

eine Formel, die man in [6] im Zusammenhang mit Wäldern mit Brandgefahr findet, bei denen jedoch ein Teil des verbrannten Holzes zurückgewonnen werden kann.

## 5. Schlussfolgerung

Im Rahmen eines einfachen Modells wurde eine Formel für die optimale Schnittzykluslänge und den optimalen Durchmesser gefunden, wenn das Management darin besteht, tote Bäume und lebende Bäume mit einem Durchmesser von mehr als  $D$  alle  $T$  Jahre zu fällen. Dieses Modell wurde für Wälder mit hoher natürlicher Sterblichkeit entwickelt, in denen tote Bäume den Hauptteil der Ernte ausmachen und als Brennholz verwendet werden. Wir haben gesehen, dass ein ungleichmäßiges Management unter diesen Umständen günstiger war. Wenn die natürliche Sterblichkeit niedrig, der Abzinsungssatz niedrig oder die Fixkosten pro Ernte hoch sind, kann sogar das Management rentabler sein.

Die Waldbewirtschaftung in Niger und anderen Ländern der Sahelzone steckt noch in den Kinderschuhen. Die Rotation wurde erst vor einem Jahrzehnt eingeführt. Felddaten sind noch rar. Trotz der zahlreichen über mehr als 150 Jahre gesammelten Forschungen zum Problem der optimalen Rotation in Industrieländern ist eine Anpassung an die örtlichen Gegebenheiten erforderlich. In dieser Studie konzentrieren wir uns nur auf einen Aspekt, nämlich die hohe natürliche Mortalität. Hoffen wir, dass dieses mikroökonomische Modell mit makroökonomischen Modellen kombiniert wird [17, 18, 19], um den öffentlichen Widmungsgebern ein umfassenderes Modellierungswerkzeug zur Verfügung zu stellen.

### Vielen Dank

Der zweite Autor dankt Édith Perrier (IRD), Alain Bertrand, Martine Antona, Christophe Le Page (CIRAD) und Aboubacar Ichaou (Umweltministerium von Niger). Dieser Artikel ist der Erinnerung an Ovide Arino gewidmet.

### Literaturhinweise

1. J. M. d'Herbès, J. M. K. Ambouta, R. Peltier, *Fonctionnement et gestion des écosystèmes forestiers contractés sahéliens*, John Libbey Eurotext, Paris, 1997.
2. M. Faustmann, Berechnung des Wertes welchen Waldboden sowie noch nicht haubare Holzbestände für die Waldwirtschaft besitzen. *Allgemeine Forst- und Jagd-Zeitung* 15 (1849).
3. C. W. Clark, *Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
4. D. H. Newman, *The optimal forest rotation: a discussion and annotated bibliography*, USDA Forest Service, Technical Report SE-48, Asheville, 1988.
5. *J. Forest Econ.* 8 (2002) 5-27.
6. *Can. J. For. Res.* 15 (1985) 180-190.
7. *For. Sci.* 27 (1981) 739-744.
8. *Forest policy and economics* 6 (2004) 145-152.
9. *J. Appl. Ecol.* 8 (1966) 355-367.
10. *For. Sci.* 26 (1980) 609-625.
11. *For. Sci.* 47 (2001) 466-474.
12. J. Buongiorno, J. K. Gilless, *Decision methods for forest resource management*, Academic Press, Boston, 2003.
13. A. Ichaou, *Dynamique et productivité des structures forestières contractées des plateaux de l'ouest nigérien*, Thèse, Université de Toulouse III, 2000.
14. [www.handels.gu.se/econ/EEU/cifor.html](http://www.handels.gu.se/econ/EEU/cifor.html)
15. C. Rorres, W. Fair, *Optimal age specific harvesting policy for a continuous - time population model*, in: T. A. Burton (Ed.), *Modeling and differential equations in biology*, Marcel Dekker, New York, 1980, pp.239-254.
16. [www2.fundacion-centra.org/pdfs/E200337.pdf](http://www2.fundacion-centra.org/pdfs/E200337.pdf)
17. CSFD, *Pour une gestion viable des ressources ligneuses péri - urbaines : analyse et modélisation des impacts des règles et des pratiques coutumières sur divers milieux naturels sahéliens et sahélo - soudaniens au Niger et au Mali*, [www.csf-desertification.org/projets/projet3.php](http://www.csf-desertification.org/projets/projet3.php)
18. [www.dec.org/pdf\\_docs/PNACQ877.pdf](http://www.dec.org/pdf_docs/PNACQ877.pdf)
19. MARGE, *Le modèle GLOBUS*, [www.marge.fr](http://www.marge.fr)