

Заготовка дров в Нигере и обобщение формулы Фаустмана

C. R. Biol. 328 (2005) 379 – 385
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01386828>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
Анри Вараньят, 32, 93143 Бонди, Франция
nicolas.bacaer@ird.fr

Alassane Bah

Университет Шейха Анта Диопа Дакара, Высшая политехническая школа
DGI-SMA, BP 15915 Дакар-Фанн, Сенегал

Ali Mahamane

Университет им. Абду Мумуни, Ниамейский университет
, факультет биологии, BP 10662, Ниамей, Нигер

резюме

В некоторых лесах в Нигере, где были созданы «контролируемые сельские рынки», дрова собираются в соответствии с политикой следующего типа: каждые T лет вырубается мертвые деревья и живые деревья диаметром более D , Мертвые деревья обычно составляют основную часть урожая. В этой статье мы представляем простую модель непрерывного времени для управления этими лесными участками разновозрастного возраста с высокой степенью смертности α , и мы получаем формулу для цикла и диаметра вырубке, которые оптимизируют обновленный доход, с бесконечным горизонтом. Классическая формула Фаустмана для участков одинакового размера соответствует пределу $\alpha \rightarrow 0$ и $D = 0$ (сплошной).

Ключевые слова: лесное хозяйство, разновозрастный лес, моделирование, оптимизация, дрова, нигер

1. Введение

В Нигере древесина по-прежнему является наиболее важным источником энергии для приготовления пищи. из-за засухи, растущего городского населения и частично неконтролируемого доступа к ресурсам, нагрузка на леса вокруг таких городов, как Ниамей, является высокой. С 1989 года новая правительственная стратегия привела к защите определенных лесных районов, где урожайность управляется устойчивым образом. Урожай продается исключительно на близлежащих рынках с административным разрешением. Дифференциальная налоговая система поощряет трейдеров покупать дрова у этих структур, а не организовывать неконтролируемую заготовку леса [1].

Были выбраны две системы управления. На «ориентированных сельских рынках» собирают только мертвые деревья. На «контролируемых сельских рынках» также вырубается некоторые живые деревья, и вырубка организована в циклах, чтобы обеспечить пространственное вращение. Иногда устанавливается нижний предел для диаметра живых деревьев, которые будут срезаны. Это может занять несколько циклов для дерева, чтобы достичь этого диаметра, так что мертвые деревья обычно составляют большинство каждой культуры. Продолжительность цикла обычно составляет от 5 до 10 лет.

Таким образом, политика сбора урожая на этих контролируемых сельских рынках очень похожа на выборочную рубку на неровных участках в других частях мира. Но важность мертвых деревьев менее обычна из-за ее предназначения (мертвая древесина лучше, чем зеленая древесина для приготовления пищи), отсутствия трансформации и ее доступности (климат Сахели вызывает высокую смертность деревьев).

Несмотря на обилие литературы, в которой рассматриваются различные расширения классической формулы Фаустмана [2,3] для задачи оптимального вращения ([4] и 300 статей, перечисленных в [5]), простой формулы не было предложено для оптимального цикла вырубке и оптимального диаметра участков разновозрастного возраста, склонных к высокой смертности, где мертвые деревья составляют наибольшую часть урожая, используемого в качестве дров. В [6] получена явная формула, но для ровных лесов, подверженных низкой катастрофической смертности, такой как пожар. В модели использовалась непрерывная переменная времени, а формула была получена с использованием теории процессов обновления вознаграждения. Следует подчеркнуть, что при высокой естественной смертности отдельные деревья время от времени гибнут, и может произойти задержка, прежде чем они будут срублены во время следующего запланированного сбора урожая. Напротив, в результате катастрофической смертности от пожаров весь лес поражается практически мгновенно, а вскоре деревья убираются. В первом случае можно поддерживать простое пространственное вращение, а во втором - невозможно, как указано в [6].

В [7] можно найти формулу, которая обобщает формулу Фаустмана для неровных участков, но модель концентрировалась на экономической части без учета конкретной модели биологического роста. Эта формула использовалась в [8] в сочетании с моделью матрицы дискретного времени, аналогичной [9,10] для роста; но не было найдено простой формулы для оптимального цикла резки, поэтому результаты были основаны только на моделировании. Несколько статей, таких как [11,12], настаивают на том, что модель Фаустмана и многие ее обобщения являются конкретными примерами марковских процессов принятия решений, для которых могут использоваться методы динамического программирования. Затем мы сосредоточимся больше на численных алгоритмах, чем на явных формулах. Во всех этих ссылках мало внимания уделяется естественной смертности, поскольку в европейском или североамериканском контексте она относительно незначительна по сравнению с рядом других факторов.

Таким образом, цель этой статьи - найти в рамках простой модели разновозрастного участка, подверженного высокой смертности, четкую формулу для продолжительности оптимального цикла и оптимального диаметра резки. Критерий оптимизации такой же, как в модели Фаустмана, а именно дисконтированный доход на бесконечном горизонте. Интерес в основном теоретический, поскольку, очевидно, несмотря на [13], много полевых исследований все еще необходимо, прежде чем получить достаточно данных для калибровки модели в лесах Нигера. Однако по мере того, как все больше и больше контролируемых сельских рынков организуется в Нигере и во всей Сахелианской зоне, будет доступно больше данных, и интерес может сместиться с того, как управлять лесом, на то, как оптимизировать управление.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы вводим обозначения модели. В разделе 3 мы получаем формулу для оптимального цикла резки и оптимального диаметра, а затем обсуждаем ее, используя простое математическое выражение для кривой роста дерева. В разделе 4 мы показываем, что классическая формула Фаустмана соответствует пределу незначительной смертности ($\alpha \rightarrow 0$) и диаметр резки $D = 0$ (сплошной). Мы также показываем, что формула для средней урожайности участков однолетнего возраста с низкой, но катастрофической смертностью, таких как пожары, приведенная в [6], соответствует пределу цикла резки $T \rightarrow 0$ со скидкой $\beta \rightarrow 0$. Мы также представляем другие расширения формулы: смертность в зависимости от возраста и возможную разницу в цене между мертвой древесиной и недавно вырубленной зеленой древесиной. Они могут быть использованы в других контекстах.

2. Простая модель

Мы предполагаем:

- участок имеет фиксированное количество N мест для выращивания деревьев. N большое количество.
- $V(x)$ объем дерева возраста x , $V(0) = 0$
- цена P за единицу объема древесины постоянна
- c это стоимость подготовки к росту нового дерева
- c' фиксированная стоимость за урожай
- α - смертность деревьев: в течение небольшого промежутка времени dt , αdt это процент деревьев, которые погибают (если вы думаете о модели как детерминированной), или вероятность того, что дерево умрет (если вы думаете о модели как стохастической). На данный момент мы предполагаем, что α не зависит от возраста, но это предположение будет оставлено в разделе 4.
- длина цикла резки составляет T
- каждые T лет урожай состоит из всех мертвых деревьев и всех живых деревьев, диаметр которых больше D
- X является возраст, когда деревья достигают диаметра D .

Предполагается, что регенерация является чисто искусственной: вырубленные деревья незамедлительно заменяются новыми деревьями возраста 0, так что общее количество деревьев остается постоянным. Предполагается, что естественная регенерация незначительна во время вращения. Наконец, пусть β будет фактором дисконтирования таким образом, чтобы доход в момент времени $t = nT$ был взвешен с коэффициентом $e^{-\beta nT}$ в критерии оптимизации. Проблема состоит в том, чтобы выбрать T и X , чтобы оптимизировать ожидаемый дисконтированный доход по всем будущим культурам.

формально,

- $p(x, t)$ является ожиданием плотности населения живых деревьев возраста x в момент времени t ,
- $q(x, t)$ является ожиданием плотности популяции мертвых деревьев возраста x в момент времени t (когда они умирают, деревья перестают стареть),
- K_n это ожидание дохода от урожая ко времени $t = nT$,

Задача может быть сформулирована как система уравнений в частных производных с импульсным управлением. Напомним, что эти уравнения в частных производных просто эквивалентны по непрерывному времени матричных моделей в дискретном времени, структурированном по возрасту. Этот подход является, например, подходом [15,16], где сбор урожая является непрерывным, а не периодическим. Между урожаями ($nT < t < (n+1)T$), проверка функций

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha p(x, t) = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \alpha p(x, t),$$

и $p(0, t) = 0$, если nT^- и nT^+ обозначим соответственно «непосредственно перед $t = nT$ » и «сразу после $t = nT$ », тогда

$$p(x, nT^+) = \left[\int_0^\infty q(\xi, nT^-) d\xi + \int_X^\infty p(\xi, nT^-) d\xi \right] \delta_{x=0} + p(x, nT^-) 1_{x \in]0, X[}$$

и $q(x, nT^+) = 0$, здесь $\delta_{x=0}$ обозначает массу Дирака в $x = 0$ в то время как $1_{x \in]0, X[}$ обозначает характеристическую функцию интервала $]0, X[$. Ожидаемая прибыль в $t = nT$ является

$$K_n = \int_0^\infty q(x, nT^-) [PV(x) - c] dx + \int_X^\infty p(x, nT^-) [PV(x) - c] dx - c'.$$

Цель состоит в том, чтобы максимизировать, относительно T и X , ожидание дисконтированного дохода по всем будущим культурам

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta nT} K_n.$$

Функции $p(x, t)$ и $q(x, t)$ также проверьте начальные условия с

$$\int_0^\infty [p(x, 0) + q(x, 0)] dx = N.$$

Эта модель эквивалентна классической модели Фаустмана для задачи оптимального вращения, если $\alpha = 0$ и $X = 0$,

3. Оптимальный цикл резки и диаметр

Независимо от возрастной структуры начального условия, плотности $p(x, t)$ и $q(x, t)$ сходятся, если $t \rightarrow +\infty$ к периодическим решениям $\hat{p}(x, t)$ и $\hat{q}(x, t)$ с

$$\begin{aligned} \hat{p}(x, nT^-) &= N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \sum_{k=1}^i e^{-k\alpha T} \delta_{x=kT} \\ \hat{q}(x, nT^-) &= N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \alpha e^{-\alpha x} 1_{x \in (0, iT)} \\ \hat{p}(x, nT^+) &= N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \sum_{k=0}^{i-1} e^{-k\alpha T} \delta_{x=kT} \end{aligned}$$

и $\hat{q}(x, nT^+) = 0$ где $i = [X/T] + 1$ (и $[X/T]$ это целая часть X/T). Обратите внимание, что если $X < T$ (так что $i = 1$), все живые деревья, которые достигают $t = nT^-$ одного возраста (четный участок) и *убираются* в момент времени $t = nT$ одновременно с мертвыми деревьями (сплошная рубка). Наоборот, если $X > T$ (так что $i \geq 2$), живые деревья, которые достигают $t = nT^-$ старые $T, 2T, \dots, iT$ (неровный участок) и только в возрасте от iT убирают в $t = nT$ мертвые деревья (выборочно). Итак, весь i представляет количество циклов, которые дерево может продолжать расти до того, как его собирают, если оно не умрет, и в этом случае дерево собирают во время первого урожая после смерти. Мертвые деревья, собранные при $t = nT$, дают доход

$$N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \int_0^{iT} \alpha e^{-\alpha x} [PV(x) - c] dx.$$

Живые деревья, собранные в момент времени $t = nT$, относятся к возрасту iT . Они дают доход

$$N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} e^{-i\alpha T} [PV(iT) - c].$$

Таким образом, общий доход при $t = nT$ составляет (после интегрирования по частям)

$$K_n = N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \left[P \int_0^{iT} e^{-\alpha x} V'(x) dx - c \right] - c'.$$

Наконец, ожидание общего дохода по всем будущим культурам

$$\frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ N \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \left[P \int_0^{iT} e^{-\alpha x} V'(x) dx - c \right] - c' \right\},$$

для которой мы должны найти максимум, по отношению к T и X . Эквивалентно, максимум должен быть найден относительно T и целого числа $i = [X/T] + 1$. Это обобщение классической формулы Фаустмана для рассматриваемого менеджмента (как мы увидим в следующем разделе). Чтобы уменьшить количество параметров обсуждения, напомним формулу

$$NPV_\infty \frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-i\alpha T}} \left[\int_0^{iT} e^{-\alpha x} \frac{V'(x)}{V_\infty} dx - \frac{c}{PV_\infty} \right] - \frac{c'}{NPV_\infty} \right\},$$

где V_∞ максимальный объем, который дерево может достичь за время своей жизни. Обратите внимание, что

- $c/(PV_\infty)$ это соотношение между стоимостью обрезки и пересадки дерева с одной стороны, максимальной ценностью дерева с другой стороны
- $c'/(NPV_\infty)$ это соотношение между фиксированной стоимостью за урожай и максимальной стоимостью участка.

Чтобы обсудить эту формулу, рассмотрим простое математическое выражение $V(x)$ для кривой роста дерева, или эквивалент для его производной $V'(x)$ например

$$V'(x) = V_\infty \frac{(\gamma/\tau)^{\gamma+1}}{\Gamma(\gamma+1)} x^\gamma e^{-\gamma x/\tau},$$

где Γ - обычная гамма-функция. Эта функция, которая должна представлять скорость роста, увеличивается от 0 до максимума, который достигается при $x = \tau$, а затем уменьшается, сходясь к 0, когда $x \rightarrow \infty$, поэтому $V(x) = \int_0^x V'(\xi) d\xi$ является возрастающей функцией, которая является выпуклой для $x < \tau$ и вогнутой для $x > \tau$. Параметризация выделяет максимальный объем дерева $V_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} V(x)$.

На рисунке 1 показано, как ожидаемый дисконтированный доход может варьироваться в зависимости от длины T цикла резания для разных значений диаметра резания, которые соответствуют $i = 1, \dots, 4$. Крайняя правая кривая $i = 1$ (четкий и ровный сюжет). Оптимальная стратегия $T^* \simeq 9,5$ и $i = 2$ то есть, вырезая все T^* лет мертвых деревьев и живых деревьев $2T^*$ или больше. Обратите внимание, что все кривые становятся отрицательными, когда T приближается к 0 из-за ненулевых фиксированных затрат на урожай. Значения параметров, используемые для этого рисунка: $\alpha = 0,05$ в год (продолжительность жизни деревьев $1/\alpha = 20$ года), $\tau = 10$ лет (это возраст, в котором рост наиболее быстрый) и $\gamma = 2$ для кривой роста, коэффициент дисконтирования $\beta = 0,03$ расходы в год $c/(PV_\infty) = 0$ и $c'/(NPV_\infty) = 0,1$ и максимальное значение нормализованного участка $NPV_\infty = 1$,

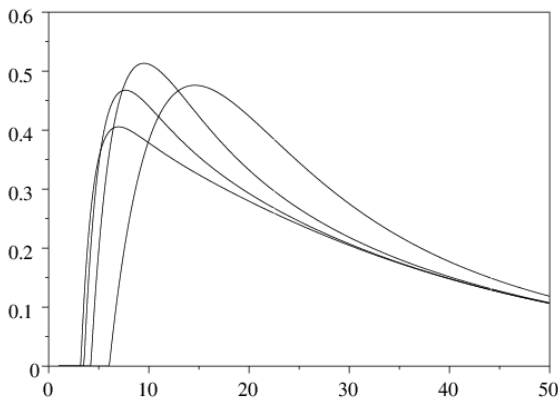


Рисунок 1. Ожидание дисконтированного дохода в зависимости от продолжительности цикла резки T для различных значений диаметра резки (которые соответствуют $i = 1 \dots 4$).

На рисунке 2 показано, как оптимальный цикл и диаметр среза изменяются в зависимости от смертности α , ставки дисконтирования β и фиксированных затрат на урожай. Значения для фиксированных параметров такие же, как на рисунке 1. Как и ожидалось, разновозрастные управления с коротким циклом резки (представленные зонами $i = 2$ и $i = 3$) являются более прибыльными, чем даже управления ($i = 1$)

- когда смертность высока (цифры сверху слева и сверху справа),
- когда коэффициент дисконтирования высокий (цифры сверху слева и внизу),
- или когда фиксированная стоимость за урожай низкая (вверху справа и внизу).

Обратите внимание на рисунок в левом верхнем углу (соответственно в правом верхнем углу), что даже в пределах предела $\alpha \rightarrow 0$ (в случае модели Фаустмана) управление по возрасту становится более прибыльным, чем управление по возрасту, если ставка дисконта (соответственно, фиксированная стоимость за урожай) выше (соответственно, ниже) определенного порога,

На рисунке 2 также показаны контурные линии для оптимальной длины цикла резки. Обратите внимание, что не существует простой зависимости между оптимальной продолжительностью цикла резания и смертностью: первая может увеличивать или уменьшать функцию второй в зависимости от значений параметров, как на рисунке выше вправо.

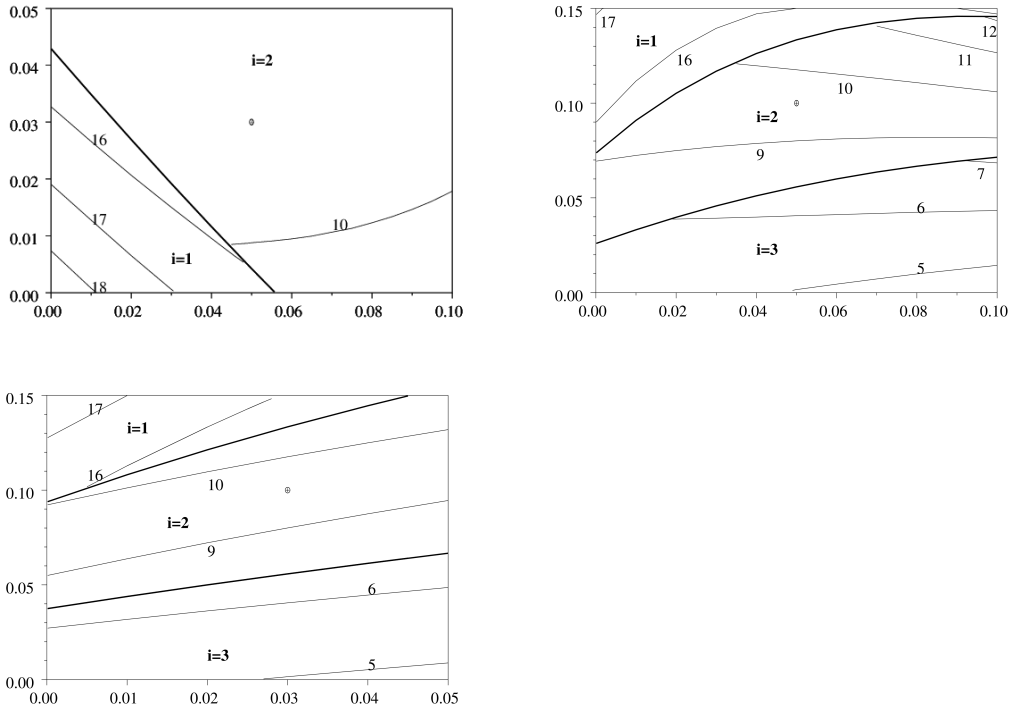


Рисунок 2. Оптимальная длина и диаметр цикла при изменении смертности α , ставки дисконтирования β и фиксированных затрат на урожай c' . Слева сверху: диаграмма (α, β) . Вверху справа: диаграмма $(\alpha, c'/NPV_\infty)$, Внизу: диаграмма $(\beta, c'/NPV_\infty)$. Жирные линии отделяют области, где $i = 1$ (четное управление оптимально), от областей, где $i = 2$ и $i = 3$ (неравномерное управление оптимально). Другие линии - это линии уровня для оптимальной длины цикла резки. В каждом случае точка напоминает значения параметров на рисунке 1.

4. Пограничные случаи и расширения

Если мы установим критический диаметр D вырубki живых деревьев на 0 (сплошная вырубка), то соответствующий возраст будет $X = 0$. Таким образом, $\gamma = 1$ и формула (1) сводится к

$$\frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ N \left[P \int_0^T e^{-\alpha x} V'(x) dx - c \right] - c' \right\}.$$

Если дополнительно фиксированная стоимость за урожай c' и смертность α незначительна, тогда формулы сводятся к формуле Фаустмана [2,3]

$$N \frac{PV(T) - c}{e^{\beta T} - 1}.$$

Другой пограничный случай получается, если коэффициент дисконтирования β и продолжительность цикла обрезки T сходятся к 0, что соответствует оценке среднего дохода с непрерывной вырубкой мертвых деревьев и живых деревьев, возраст которых составляет больше, чем X . Вспомните связь между средним доходом за год и дисконтированным доходом по всем будущим урожаям:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu T} \sum_{n=1}^{\nu} K_n = \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta n T} K_n.$$

Давайте держать $c' = 0$, Формула (1) тогда дает средний доход

$$N \alpha \frac{P \int_0^X e^{-\alpha x} V'(x) dx - c}{1 - e^{-\alpha X}},$$

и плотности $p(x, t)$ и $q(x, t)$ сходятся на стационарных решениях

$$\hat{p}(x) = N \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha X}} 1_{x \in (0, X)}$$

и $\hat{q}(x) = 0$, Формула (2) такая же, как в [6] для среднего дохода в лесах, подверженных риску катастрофического пожара. Действительно, если $T \rightarrow 0$ между смертью дерева и его урожаем нет задержки, как в [6]. Поэтому нормально, что средний доход одинаков. Однако синхронизация смертей в случае пожара приводит к разнице в выражении дисконтированного дохода.

Расширения. Предположим, что смертность, а не постоянная, зависит от возраста. Давайте определимся

$$\Delta(x) = \exp\left(-\int_0^x \alpha(\xi) d\xi\right).$$

Если Q - цена сухостойной древесины, если P - цена недавно вырубленной зеленой древесины, то ожидаемый дисконтированный доход по всем будущим урожаям равен

$$\frac{1}{e^{\beta T} - 1} \left\{ N \frac{\Delta(iT) [PV(iT) - c] - \int_0^{iT} \Delta'(x) [QV(x) - c] dx}{\sum_{n=0}^{i-1} \Delta(nT)} - c' \right\},$$

где $i = [X/T] + 1$, Формула (1) соответствует $Q = P$ и постоянной α , так что $\Delta(x) = \exp(-\alpha x)$, В пределе где $\beta \rightarrow 0$ и $T \rightarrow 0$ эта формула ($c' = 0$) приводит к среднему доходу

$$N \frac{\Delta(X) [PV(X) - c] - \int_0^X \Delta'(x) [QV(x) - c] dx}{\int_0^X \Delta(x) dx},$$

формула, которую можно найти в [6] в контексте лесов с риском пожара, но где часть сгоревшей древесины может быть восстановлена.

5. Заключение

В рамках простой модели была найдена формула для оптимальной длины и диаметра цикла обрезки, когда управление состоит в обрезке мертвых деревьев и живых деревьев с диаметром, превышающим D , каждые T лет. Эта модель была разработана для лесов с высокой естественной смертностью, где мертвые деревья составляют основную часть урожая и используются в качестве дров. Мы видели, что неравномерное управление было более благоприятным в этих обстоятельствах. При низкой естественной смертности, низкой ставке дисконтирования или высокой фиксированной стоимости за урожай даже управление может быть более прибыльным.

Управление лесами в Нигере и других странах Сахеля все еще находится в зачаточном состоянии. Вращение было введено только десять лет назад. Полевые данные все еще скудны. Несмотря на многочисленные исследования, накопленные за более чем 150 лет по проблеме оптимальной ротации в развитых странах, необходима адаптация к местным условиям. В этом исследовании мы фокусируемся только на одном аспекте, а именно на высокой естественной смертности. Будем надеяться, что эта микроэкономическая модель будет объединена с макроэкономическими моделями [17, 18, 19], чтобы предоставить более полный инструмент моделирования для государственных дедукторов.

спасибо

Второй автор выражает благодарность Эдит Перье (IRD), Алену Бертрану, Мартине Антоне, Кристофу Ле Пейджу (CIRAD) и Абубакару Ичау (Министерство окружающей среды Нигера). Эта статья посвящена памяти Овидия Арино.

ссылки

1. J. M. d'Herbros, J. M. K. Ambouta, R. Peltier, *Fonctionnement et gestion des écosystèmes forestiers contractuels sahariens*, John Libbey Eurotext, Paris, 1997.
2. M. Faustmann, *Berechnung des Wertes welchen Waldboden sowie noch nicht haubare Holzbestände für die Waldwirtschaft besitzen.* Allgemeine Forst – und Jagd – Zeitung 15 (1849).
3. C. W. Clark, *Mathematical bioeconomics : the optimal management of renewable resources*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
4. D. H. Newman, *The optimal forest rotation : a discussion and annotated bibliography*, USDA Forest Service, Technical Report SE – 48, Asheville, 1988.
5. *J. Forest Econ.* 8 (2002) 5 – 27.
6. *Can. J. For. Res.* 15 (1985) 180 – 190.
7. *For. Sci.* 27 (1981) 739 – 744.
8. *Forest policy and economics* 6 (2004) 145 – 152.
9. *J. Appl. Ecol.* 8 (1966) 355 – 367.
10. *For. Sci.* 26 (1980) 609 – 625.
11. *For. Sci.* 47 (2001) 466 – 474.
12. J. Buongiorno, J. K. Gilles, *Decision methods for forest resource management*, Academic Press, Boston, 2003.
13. A. Ichaou, *Dynamique et productivité des structures forestières contractuelles des plateaux de l'ouest nigérien*, Thèse, Université de Toulouse III, 2000.
14. www.handels.gu.se/econ/EEU/cifor.html
15. C. Rorres, W. Fair, *Optimal age specific harvesting policy for a continuous – time population model*, in : T. A. Burton (Ed.), *Modeling and differential equations in biology*, Marcel Dekker, New York, 1980, pp.239 – 254.
16. www2.fundacion-centra.org/pdfs/E200337.pdf
17. CSFD, *Pour une gestion viable des ressources ligneuses rurbaines : analyse et modélisation des impacts des rrogles et des pratiques coutumières sur divers milieux naturels sahariens et sahariens – soudaniens au Niger et au Mali*, www.csf-desertification.org/projets/projet3.php
18. www.dec.org/pdf_docs/PNACQ877.pdf
19. MARGE, *Le modrole GLOBUS*, www.marge.fr