



“ If... then... ” dans le discours mathématique : déduction ou argumentation ?

Eric Morvan

► To cite this version:

Eric Morvan. “ If... then... ” dans le discours mathématique : déduction ou argumentation ?. 2016. <hal-01386657>

HAL Id: hal-01386657

<https://hal.science/hal-01386657v1>

Preprint submitted on 24 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

« If... then... » dans le discours mathématique : déduction ou argumentation ?

« If... then... » in mathematical discourse : deduction or argumentation ?

Résumé :

Cet article a pour objet d'étudier, dans le cadre de la linguistique de l'énonciation et plus particulièrement de la pragmatique intégrée d'Oswald Ducrot, les utilisations de la structure *If...,(,)(then)...* dans un corpus de textes mathématiques pédagogiques écrits en anglais. Pour ce faire, certaines caractéristiques du discours mathématique sont mises en évidence, en particulier l'importance des opérations déductives et l'établissement de relations aussi bien inférentielles qu'argumentatives entre les énoncés. Nous étudions ensuite dans quelle mesure les effets provoqués par l'utilisation de la structure *Si...,(,)(alors)...* sont confirmés ou modifiés dans le contexte du discours mathématique.

Summary :

The purpose of this article is to study the uses of the *If...,(,)(then)...* structure in a corpus made up of mathematical educational texts written in English, within the framework of utterance linguistics and specifically of Oswald Ducrot's integrated pragmatics. To this end, some particular characteristics of mathematical discourse are highlighted such as the importance of deductive operations and the establishment of inferential relations between utterances. We then study to what extent the effects due to the use of the *If...,(,)(then)...* structure are confirmed or modified in the context of mathematical discourse.

Mots-clés :

Discours mathématique, déduction, argumentation, inférence, si

Keywords :

Mathematical discourse, deduction, argumentation, inference, if

Plan :

Introduction

I – Dédution et argumentation dans le discours mathématique

- 1 - Langue logique**
- 2 - Nature du discours**
- 3 - Insuffisance de la langue logique pour rendre compte du discours**
- 4 - Nécessité de l'argumentation dans le discours mathématique**
- 5 - Procédés argumentatifs dans le discours mathématique**

II – Relations inférentielles et relations argumentatives

- 1 - Dédutions et relations inférentielles**
- 2 - Dédutions et modalité implicative**
- 3 - Impossibilité d'identifier les inférences à des implications**
- 4 - Comparaison des relations inférentielles et argumentatives**
- 5 - Orientations et échelles argumentatives**

III – La structure « *Si...()*(*alors*)... »

- 1 - Modification du cadre du discours par utilisation de *si***
- 2 - Glissement de la condition suffisante à la condition nécessaire**
- 3 – Les si non implicatifs**

IV – Étude sur corpus de la structure « *If ...()*(*then*) ... » dans le discours pédagogique mathématique en anglais

- 1 - Caractéristiques fonctionnelles du discours mathématique**
- 2 - Conditions de l'étude et résultats quantitatifs**
- 3 – Énoncés de résultats**
- 4 - Définitions et données de notations**
- 5 - Textes d'exercices**
- 6 - Parties à fonction intra-démonstrative**
- 7 - Parties à fonction métadiscursive**

Conclusion

Introduction

Un raisonnement mathématique est une suite de déductions qui, à partir d'axiomes ou de résultats connus, produisent de nouveaux résultats. Ces déductions doivent respecter les règles de la logique et sont présentées dans un discours en langue naturelle qui établit donc un certain nombre de relations inférentielles entre les énoncés qui le composent. Mais le discours mathématique établit aussi entre certains de ses énoncés des relations argumentatives, car le recours à des procédés argumentatifs est généralement indispensable pour que le discours soit à la fois efficace et convaincant. Bien évidemment les relations argumentatives ne respectent pas les règles logiques, et nous verrons que les relations inférentielles ne les respectent pas forcément non plus et ne sont en tout cas pas réductibles à des implications logiques. Ces rappels et considérations occupent les parties I et II. Nous rappelons ensuite dans la partie III les effets de l'utilisation de la structure *Si...,(,)(alors)...* avant de faire dans la partie IV une étude des utilisations de la structure *If...,(,)(then)...* basée sur un corpus composé d'extraits d'ouvrages mathématiques de niveau universitaire à vocation pédagogique écrits en anglais.

*Mathematics is the only science
where one never knows what one
is talking about, nor whether
what is said is true.*
Bertrand Russell (1872-1970).

I – Dédution et argumentation dans le discours mathématique

1 - Langue logique

Le respect des règles de la logique formelle permet de définir les formes valides de raisonnements déductifs faits en langue naturelle. Nous qualifierons par la suite de langue logique l'ensemble des moyens lexicaux et syntaxiques dont dispose l'utilisateur de la logique formelle. Notons toutefois que :

« [La] logique a créé son propre langage, mais il faut être attentif à ce que ce langage ne se parle pas. Certes le logicien prononce les signes qu'il écrit, mais ceci est bien loin de suffire à faire une langue, au sens des langues naturelles. » (Grize 1997 : 19)

Pour construire de la manière la plus efficace possible des raisonnements corrects, la langue logique dispose d'un petit nombre d'opérateurs (non, ou, et, implication, équivalence) qui s'appliquent à des propositions. On peut « définir la proposition comme un énoncé déclaratif (grammaticalement correct) susceptible d'être Vrai ou Faux » (Vernant 2001 : 27). Toutefois la signification d'une proposition ou l'établissement de sa véracité relèvent du contexte extra-linguistique :

« Science de la démonstration, la logique mathématique consiste surtout en l'étude des rapports formels existant entre les propositions indépendamment de toute interprétation que l'on pourrait en donner ou des valeurs de vérité que l'on peut leur attribuer¹. »

2 - Nature du discours

Un texte ou un discours² n'est pas une simple succession de propositions ou de phrases. En effet tout discours ou texte est indissociable des conditions de sa production, alors qu'une phrase est « une entité linguistique abstraite, purement théorique, en l'occurrence un ensemble de mots combinés selon les règles de la syntaxe, ensemble pris hors de toute situation de discours [...]. Ce que produit un locuteur, ce qu'entend un auditeur, ce n'est [...] pas une phrase, mais un énoncé particulier d'une phrase » (Ducrot 1980 : 7) ; et tout discours (y

¹ Cette définition est extraite du *Dictionnaire des mathématiques* (Paris : PUF). Voir :

http://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/math/autres_documents/Vocabulaire_de_la_logique_et_theorie_des_ensembles.pdf, page consultée le 15/06/2014.

² On conviendra dans la suite de l'article que le terme « discours » désigne une production langagière aussi bien écrite qu'orale.

compris mathématique) est une succession d'énoncés repérés par rapport à une situation d'énonciation qui comporte deux paramètres : le sujet énonciateur³ d'une part, le moment et le lieu de l'énonciation d'autre part. L'énonciation est « un acte assumé par un locuteur qui s'adresse à un interlocuteur spécifié dans une situation déterminée de communication » (Vernant 2001 : 23).

3 - Insuffisance de la langue logique pour rendre compte du discours

« La création de la logique –comme étude du raisonnement– implique [...] une annulation du discours. Elle suppose que l'on puisse isoler des phrases ayant une valeur sémantique complète, indépendamment de tout contexte discursif, pour s'interroger ensuite sur leurs possibilités inférentielles [...]. C'est alors une hypothèse, certes intéressante, mais hardie, que de vouloir rendre compte des enchaînements discursifs effectifs à l'aide de concepts constitués précisément par négation du discursif. » (Anscombe & Ducrot 1983 : 112)

On ne peut donc pas espérer rendre compte de la richesse d'un discours en n'utilisant que les outils de la langue logique. Toutefois « il arrive que les opérateurs logiques aient entre eux des rapports analogues à ceux que les entités linguistiques ont entre elles » (Ducrot 1973 : 69). Le modèle logique peut alors représenter une référence (satisfaisante ou non) et il est intéressant de mettre en évidence les situations où les énoncés en langue naturelle se conforment aux règles logiques et les situations où ils s'en écartent, voire les contredisent apparemment. Le discours mathématique est un terrain fertile pour une telle étude contrastive des langues logiques et naturelles puisque les auteurs ou locuteurs doivent présenter dans une langue naturelle des raisonnements qui respectent les règles de la logique formelle; en même temps ils ont à leur disposition les ressources argumentatives de la langue naturelle dont nous verrons que les règles d'utilisation diffèrent des règles logiques, voire les contredisent. Par exemple « il y a toutes les opérations du genre *or*, *car*, *comme*, *parce que*, *puisque* [...] qui émaillent les démonstrations mathématiques et que l'algèbre de Boole ignore » (Grize 1997 : 76-77).

³ Le sujet énonciateur est un concept théorique linguistique. On le distingue du locuteur ou de l'auteur qui appartiennent à la réalité extra-linguistique. « L'énonciateur est [...] envisagé comme point de référence abstrait dans le calcul du temps, de l'espace et des personnes et comme support des modalités » (Guillemin-Flescher 2003 : 183).

4 - Nécessité de l'argumentation dans le discours mathématique

On a vu que tout discours est une succession d'énoncés. Le discours mathématique en langue naturelle se distingue des autres discours de deux manières. En premier lieu, le discours mathématique écrit a une caractéristique formelle évidente : l'utilisation abondante de symboles permettant de représenter des objets conceptuels de manière condensée et de mener des calculs remplaçant des raisonnements. En second lieu, dans le discours mathématique écrit ou oral, les propositions contenues dans chaque énoncé doivent se déduire de celles contenues dans les énoncés précédents par un enchaînement de raisonnements et de calculs qui respectent les règles logiques⁴. Pour autant, la transcription d'un discours mathématique en langue logique est impossible ; le lecteur (ou auditeur) valide un discours mathématique lorsque celui-ci présente une suite finie –mais d'une longueur raisonnable– de déductions ou calculs suffisamment élémentaires pour être acceptés d'emblée. Toujours pour des raisons pratiques, l'auteur (ou locuteur) ne va pas détailler toutes ces étapes élémentaires ; une bonne partie vont rester implicites⁵. Mais, de ce fait, il s'impose la tâche de convaincre le lecteur que les étapes non explicitées n'ont pas besoin de l'être, et que les calculs ou déductions qui y sont effectués sont corrects. Pour accomplir cette tâche, l'auteur va compléter le travail de déduction par des opérations d'argumentation.

Argumenter pour la conclusion C au moyen de l'énoncé A, c'est « présenter A comme devant amener le destinataire à conclure C », « donner A comme une raison de croire C » (Anscombe & Ducrot 1983 : 13). La distinction entre déduction et argumentation tient au fait que « l'argument n'est pas forcément concluant [et qu'] on peut, sans cesser de se comporter raisonnablement, refuser d'admettre une conclusion C alors qu'il existe un argument pour C, qu'on ne le conteste pas, et qu'on n'a pas d'argument pour non-C. [...] [Inversement,] toutes les fois que le degré de certitude de l'argument se transmet intégralement à la conclusion, il n'y a pas argumentation » (Plantin 1990 : 160)⁶ mais déduction. Contrairement à la déduction, l'argumentation est donc raisonnablement réfutable, ce qui ne l'empêche pas d'être indispensable dans le discours mathématique.

⁴ On verra au début du §IV que les caractéristiques formelles et fonctionnelles des textes mathématiques sont plus complexes que ne le laisse supposer cette description rapide.

⁵ La détermination de ce qu'est une déduction « élémentaire » ainsi que des étapes explicitées dépend à la fois des connaissances supposées du destinataire du discours et des caractéristiques de l'ouvrage dans lequel ce discours est inclus (pédagogique, de recherche, de vulgarisation, ...).

⁶ L'énoncé placé au début d'un ouvrage de niveau universitaire *Des connaissances d'arithmétique élémentaire suffisent pour lire cet ouvrage avec profit* est une bonne illustration de la remarque de Plantin.

« Le but de l'énonciation est moins de faire voir que de faire croire : même les énoncés les plus objectivés, tels ceux du discours scientifique, se veulent convaincants. Disons d'un mot que l'énonciateur manipule l'énonciataire pour que celui-ci adhère au discours qui lui est tenu. » (Courtès 1991 : 250)

Argumenter est d'autant plus indispensable que l'approbation de la conclusion d'un raisonnement relève in fine d'un « déclic » dont les conditions de déclenchement diffèrent pour chaque individu.

« Une démonstration d'un théorème (T) peut se définir comme un chemin qui, partant de propositions empruntées au tronc commun et de ce fait intelligibles par tous, conduit par étapes successives à une situation psychologique telle que (T) y apparaît comme évident. » (René Thom, cité par Nordon 1999 : 12)

5 - Procédés argumentatifs dans le discours mathématique

L'auteur d'un discours en langue naturelle dispose d'un grand nombre de procédés argumentatifs qui utilisent des éléments de la langue naturelle. Signalons deux catégories d'éléments linguistiques utilisés dans ces procédés. La première est celle des connecteurs argumentatifs : « dans l'enchaînement linéaire du texte, les connecteurs sont des éléments de liaison entre des propositions ou des ensembles de propositions ; ils contribuent à la structuration du texte en marquant des relations sémantico-logiques entre les propositions ou entre les séquences qui les composent » (Riegel, Pellat & Rioul 1994 : 618). Bien que les connecteurs argumentatifs viennent à l'appui des opérations logiques, ils « ont aussi une fonction énonciative ; ils marquent les stratégies d'organisation du discours mises en œuvre par le locuteur » (Riegel, Pellat & Rioul 1994 : 618)⁷. Voici quelques sous-catégories de connecteurs, avec des exemples (en anglais) :

- les connecteurs inférentiels *so, thus, then, therefore, ...* ;
- les connecteurs justificatifs ou explicatifs *because, as, since, ...* ;
- les connecteurs contrastifs *but, though, however, on the contrary, ...* ;
- les connecteurs additifs *and, or, also, moreover, similarly, ...*

⁷ Les linguistes anglo-saxons attribuent de même aux « discourse markers » une double fonction : « a discourse marker [is] a linguistic expression [...] which : (i) has a core meaning which can be enriched by the context ; and (ii) signals the relationship that the speaker intends between the utterance the discourse marker introduces and the foregoing utterance » (Fraser 1999 : 936).

Une deuxième catégorie est celle des marqueurs de modalisation⁸. La modalité est « l'expression de l'attitude du locuteur par rapport au contenu propositionnel de son énoncé » (Le Querler 1996 : 61). On considère qu'il y a modalisation d'un énoncé si l'auteur exprime un jugement⁹ ou donne une évaluation¹⁰. Compte tenu de la nécessité pour l'auteur d'abréger certaines étapes du raisonnement et en même temps de convaincre le lecteur de la légitimité de cette démarche, les opérations de modalisation sont fréquentes dans le discours mathématique. En voici quelques exemples (Morvan 2012, 2013) :

- rappel d'un résultat antérieur supposé connu du lecteur : *We **may** now apply Theorem 9.4 and Lemma 9.2 to yield the important Theorem 9.5 ;*

- exposé de la démarche poursuivie et/ou du but à atteindre : *We **shall** soon define categories, and see that G -sets form a category ;*

- conseils ou instructions donnés au lecteur : *The reader **should** verify that this expression agrees with the expression obtained for $y(t)$;*

- commentaires et appréciations sur la démarche poursuivie : ***It is natural** to ask whether there is any simple relationship between $\psi(t)$ and the functions $f(t)$ and $y_2(t)/a$. **It would be nice, of course**, if $\psi(t)$ were the product of $f(t)$ and $y_2(t)/a$, but this is **obviously** false. However, there is an **extremely interesting** way of combining two functions f and g together to form a new function $f * g$, which resembles multiplication, and for which $L\{(f * g)(t)\} = L\{f(t)\} \times L\{g(t)\}$;*

- affirmation qu'une proposition peut être facilement prouvée : *It is **easily** verified that the function $\frac{1}{2} - e^{(t-n)} + \frac{1}{2} e^{2(t-n)}$ and its derivative are both zero at $t=n$. ;¹¹*

- déclaration qu'aucune explication supplémentaire n'est nécessaire : *$H \cap K$ is **obviously** a normal subgroup of H , and equally **obviously** $HK=KH$ is a subgroup of G .*

- en complément de la fonction précédente, recherche d'établissement d'une relation de confiance avec le lecteur : ***It is clear** that the set of all such products is a subgroup of G (the empty product is the unit element), and is the smallest subgroup of G containing S .¹²*

⁸ Dont les plus connus en anglais sont les auxiliaires modaux **can**, **may**, **must**, **shall** et **will**.

⁹ par exemple d'ordre appréciatif : **happily**, *we got back home early enough*.

¹⁰ par exemple de nature épistémique, lorsqu'il évalue les chances de validation de la relation prédicative contenue dans l'énoncé : *it **may** rain tomorrow, it **will surely** rain tomorrow, ...*

¹¹ Encore plus bref : *Proof. **Trivial** (remembering $1 \in D$)*

¹² L'auteur anticipe l'existence, chez le lecteur, de doutes quant à la véracité de la proposition. Il veut donc lui certifier qu'il est possible de la démontrer et obtenir sa confiance afin de pouvoir poursuivre le raisonnement :

*Tu entends ? Même les corbeaux
qui croassent sur les toits
s'enquière : « Qu'est-ce qu'une
implication logique ? »
Callimaque (315-240 av. JC)*

II – Relations inférentielles et relations argumentatives

1 - Dédutions et relations inférentielles

« On ne peut se servir d'une langue sans reconnaître entre ses énoncés des relations inférentielles, ou encore « logiques », en entendant par là que la vérité de certains [énoncés] entraîne [...] la vérité de certains autres ». (Anscombe & Ducrot 1983 : 94). Il y a tout d'abord des relations inférentielles qu'on peut qualifier d'intrinsèques (Anscombe & Ducrot 1983 : 90) car leur validité est vérifiée quelle que soit la situation d'énonciation ; ainsi *Pierre a les oreillons* entraîne toujours *Pierre est malade*. Il y a ensuite des relations inférentielles dites empiriques dont la validité dépend du contexte extra-linguistique et du discours dans lesquels elles apparaissent. Par exemple l'énoncé *Si j'arrive à l'avance à la gare j'aurai mon train* contient une relation inférentielle qui ne sera pas forcément validée en cas de grève des cheminots.

Une relation inférentielle est souvent signalée par un trait linguistique, par exemple la présence d'un connecteur inférentiel tel que *donc*, *alors*, *puisque*, Mais la simple juxtaposition de deux énoncés peut suffire à établir une inférence : *Camille est la petite sœur de Julie. Elles se disputent beaucoup*. En revanche d'autres juxtapositions d'énoncés n'autorisent aucune inférence : *Camille est brune et Julie est blonde. Elles se disputent beaucoup*. Ceci confirme, si besoin était, que l'inférence n'a pas une origine uniquement linguistique et qu'elle repose donc sur des présuppositions et connaissances extra-linguistiques.

Suivant en cela Anscombe & Ducrot (1983) et Plantin (1990)¹³, nous réserverons dans cet article le nom d'inférence aux seuls raisonnements déductifs et nous considérons que les raisonnements inductifs¹⁴ ou abductifs¹⁵ sont en fait des formes d'argumentation.

« asserting clarity means that the proposition is clear enough to proceed as if it were true » (Taranto 2008 : 322). Autre exemple d'établissement d'une relation de confiance, voire de connivence : *Needless to say, the example will not be used in any way throughout the rest of the book*.

¹³ Grize (1997 : 46-47) fait une distinction entre inférence et déduction mais la relativise en ajoutant qu'« une fois l'inférence faite, il est toujours possible de la transformer en une déduction ».

2 - Dédutions et modalité implicative

Il est intéressant de remarquer qu'un choix analogue se retrouve dans la typologie des modalités établie par Larreya (1984) et reprise par Le Querler (1996). Larreya (2001 : 2) subdivise la « modalité de la connaissance » en :

- modalité implicative, qui établit une relation d'implication entre deux propositions.

Exemples : *For a region to be fertile, water movements **must** occur* ou : *If it rains we **shall** stay at home*¹⁶. Cette modalité se caractérise par le fait que la relation est, « comme l'implication matérielle des logiciens, une relation « forte » : elle met en jeu des valeurs de vérité absolue (le « vrai » ou le « faux ») » (Larreya 1984 : 172). L'implication est ici le résultat d'une déduction qui crée donc une relation inférentielle.

- modalité épistémique, qui « marque le degré de certitude du locuteur sur le contenu propositionnel de son énoncé » (Le Querler 2004 : 647). Le jugement porté sur la probabilité de réalisation d'un événement est placé sur une échelle allant de la quasi-impossibilité à la quasi-certitude, mais l'impossibilité ou la certitude absolues sont exclues. Exemples : *John **must** be at home at this time of day* (événement probable) ; *John **should** be at home at this time of day* (événement vraisemblable) ; *John **may** be at home at this time of day* (événement possible). Ces énoncés ne portent pas forcément la trace d'un raisonnement. Mais d'autres énoncés, oui : si nous disons *I've seen John's car parked below his apartment, so he **must** be at home*, nous faisons un raisonnement. Toutefois celui-ci n'est pas déductif mais abductif, car le fait que John soit chez lui n'est qu'une explication possible parmi d'autres de la présence de sa voiture. Nous sommes donc en présence d'une relation argumentative.

3 - Impossibilité d'identifier les inférences à des implications

On pourrait être tenté de ramener l'étude des relations inférentielles en langue naturelle à celle des relations d'implication logique¹⁷. Cela permettrait, après transcription de langue naturelle en langue logique, de conditionner la validité d'une inférence à celle de l'implication

¹⁴ On raisonne par induction si on conclut qu'une cause P a un effet Q après avoir examiné de nombreux cas particuliers où cette inférence est vérifiée. Exemple : dans un sac il y a des haricots, tous ceux que je tire du sac sont blancs, j'en conclus que tous les haricots du sac sont blancs.

¹⁵ On raisonne par abduction si on observe un effet Q, si on sait que P est une cause de Q et si on en conclut que P est (peut-être ? probablement ? vraisemblablement ? ...) la cause de Q. Exemple : je sais que tous les haricots du sac sont blancs, j'ai des haricots blancs dans la main et j'en conclus qu'ils ont été tirés du sac. (Exemples extraits de ginoux.univ-tln.fr/HDS/Raisonnement.pdf, page consultée le 24/06/2014).

¹⁶ La première proposition peut rester implicite. Dans ce cas l'implication s'appuie sur les caractéristiques extra-linguistiques de la situation de discours. Ainsi, si un invité a pris congé une heure auparavant pour rentrer chez lui et que le trajet lui prend normalement une demi-heure, ses hôtes pourront dire : *He **must** be home by now*.

¹⁷ symbolisées dans la suite de l'article par \Rightarrow .

correspondante. Une telle démarche est a priori inenvisageable car elle fait fi de la distinction signalée au §I-2 entre proposition et énoncé : les inférences relient des énoncés successifs inclus dans un discours, les implications sont des opérations logiques qui relient des propositions. En se limitant à des relations inférentielles intrinsèques, on peut toutefois constater sur certains exemples l'existence d'un lien étroit entre inférence et implication. Ainsi, si on considère les propositions P : *Un nombre est divisible par 4* et Q : *Un nombre est pair*, on a $P \Rightarrow Q$; et l'énoncé *Tout nombre divisible par 4 est pair* est bien reconnu comme l'expression d'une inférence par toute personne possédant des notions de mathématiques élémentaires. Mais dans beaucoup d'autres cas, la véracité de l'implication n'entraîne nullement l'existence d'une inférence. Ainsi, en notant V et F les deux valeurs de vérité « Vrai » et « Faux », les trois implications $F \Rightarrow F$, $V \Rightarrow V$ et $F \Rightarrow V$ sont vraies¹⁸. Or $F \Rightarrow F$ peut être la transcription en langue logique des deux énoncés *Si la lune est un fromage mou, alors Paris est en Belgique* et *S'il y a un restaurant dans cette rue, je suis le pape*¹⁹ : le premier énoncé semble bien peu naturel et le second relève plus de l'argumentation que de l'inférence. De même $V \Rightarrow V$ et $F \Rightarrow V$ peuvent respectivement correspondre aux énoncés *Si $2+2=4$, alors la Terre tourne autour du Soleil* et *Si $2+2=5$, alors la Terre tourne autour du Soleil* dans lesquels il semble peu naturel d'envisager une relation inférentielle. En effet on voit mal quelle suite de déductions élémentaires pourrait être construite pour passer de la première proposition à la seconde.

Pour montrer que les relations inférentielles ne sont en général pas réductibles à des implications, on peut aussi mettre en évidence des propriétés que vérifient les implications mais pas les inférences. Considérons par exemple la transitivité : si P , Q et R sont trois propositions, $(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow R)$ entraîne $P \Rightarrow R$. Or si P : *il fait une chaleur étouffante*, Q : *il fait chaud* et R : *je me sens bien*, on peut accepter *S'il fait une chaleur étouffante, il fait chaud* et *S'il fait chaud, je me sens bien* mais l'énoncé *S'il fait une chaleur étouffante, je me sens bien*²⁰ est plus surprenant.

Pour finir, considérons la contraposée d'une implication $P \Rightarrow Q$ qui est l'implication $\text{non-}Q \Rightarrow \text{non-}P$; on sait que ces deux implications sont logiquement équivalentes. Par analogie, on peut envisager de contraposer des énoncés ; on obtient alors des énoncés qui ne sont pas

¹⁸ En effet $P \Rightarrow Q$ a pour définition $(\text{non-}P) \text{ ou } Q$. Or $\text{non-}F = V$, donc, par exemple, $(F \Rightarrow F) = [(\text{non-}F) \text{ ou } F] = (V \text{ ou } F) = V$.

¹⁹ Exemple emprunté à Plantin (1990 : 175).

²⁰ (Ducrot 1973 : 234).

toujours acceptables. Ainsi *S'il m'interroge, je lui répondrai* a pour contraposé *Si je ne lui réponds pas, c'est parce qu'il ne m'a pas interrogé*²¹ qui est tout à fait cohérent avec l'énoncé initial. Par contre *S'il m'interroge, je ne lui répondrai pas* a pour contraposé *Si je lui réponds, c'est qu'il ne m'a pas interrogé*, qui est absurde. Dans les deux cas, l'énoncé contraposé a pour conclusion non-P, c'est-à-dire précisément la négation de l'hypothèse de l'énoncé initial ; on conçoit que cette contradiction d'une hypothèse qui vient juste d'être faite puisse ne pas être acceptée par le destinataire du discours. Dans le premier cas, les propositions non-P et non-Q sont quand même compatibles, puisqu'il s'agit de *Il ne m'interroge pas* et *Je ne lui répondrai pas*. Par contre dans le deuxième cas, non-P et non-Q sont clairement incompatibles : *Il ne m'interroge pas* et *Je lui répondrai*²².

4 - Comparaison des relations inférentielles et argumentatives

Dans une relation inférentielle, grâce au respect des règles déductives, l'acceptation de la proposition P entraîne l'acceptation de Q, même si celle-ci peut être contestée pour des raisons extra-linguistiques. Par contre une relation argumentative, qui n'est pas contrainte au respect des règles logiques, est plus susceptible d'être réfutée (cf. §I-4). Il est même possible que l'argumentation et l'inférence appliquées à des énoncés de départ identiques conduisent à des conclusions opposées. Exemple : – *Est-ce que le dîner est prêt ?* – *Oui, c'est presque prêt*. L'énoncé *C'est presque prêt* implique que le dîner n'est pas encore prêt, mais représente un argument du second locuteur pour convaincre le premier que le dîner est prêt. De même des énoncés logiquement contradictoires peuvent être des arguments orientant vers la même conclusion. Exemple : – *Est-ce qu'il est en état de prendre le volant ?* – *Oui, il n'a rien bu* et : – *Est-ce qu'il est en état de prendre le volant ?* – *Oui, il n'a bu qu'un verre de vin*.

Les relations argumentatives peuvent permettre une progression plus importante du discours que les relations inférentielles : à partir d'un même énoncé de départ on obtiendra souvent par inférence des énoncés moins riches par déduction que par argumentation. Ainsi l'énoncé *Pierre n'est pas aussi grand que Jacques* permet seulement d'inférer *Pierre n'a pas la même taille que Jacques*, mais il est compris comme argument pour *Pierre est plus petit que Jacques*²³. De même, dans la situation où on nous rappelle à 11h30 que nous avons un rendez-vous prévu à midi, la phrase *J'en ai pour une bonne demi-heure* est un argument pour

²¹ (Ducrot 1973 : 77).

²² Voir aussi note 26.

²³ (Anscombe & Ducrot 1983 : 98).

Je serai en retard alors qu'elle ne permet pas de l'inférer. Pour que l'inférence devienne possible, il faut un argument plus fort : *J'en ai pour 3/4 d'heure. Je serai en retard.*

5 - Orientations et échelles argumentatives

Cette comparaison entre les deux énoncés *J'en ai pour une bonne demi-heure* et *J'en ai pour 3/4 d'heure* est possible car ils ont dans la situation d'énonciation considérée la même orientation argumentative, notion qu'Anscombe & Ducrot (1983 : 150) définissent comme « une classe de conclusions suggérées au destinataire : celle que l'énoncé présente comme une des visées de l'énonciation ». A contrario, dans la même situation, *J'en ai pour une bonne demi-heure* et *J'en ai pour une petite demi-heure* n'ont pas la même orientation, le premier énoncé orientant vers *Je serai en retard* et le deuxième vers *Je serai à l'heure*.

Au sein d'une classe d'énoncés ayant la même orientation argumentative, il y a une hiérarchie possible²⁴ : certains arguments sont plus forts que d'autres, plus décisifs pour amener le destinataire du discours à une certaine conclusion. Ainsi en réponse à la question : – *Est-ce que le dîner est prêt ?* on peut avoir les réponses suivantes : *C'est bientôt prêt, C'est presque prêt, C'est quasiment prêt*. Pris dans cet ordre, ces énoncés fournissent des arguments de plus en plus forts, sans pour autant permettre d'inférer *C'est prêt*. La notion de hiérarchie ou échelle argumentative permet d'expliquer certains phénomènes linguistiques, comme celui-ci : pour convaincre un interlocuteur que les places d'un cinéma ne sont pas chères, on pourra lui dire *La place de cinéma ne coûte pas 10€*. Connaissant notre intention, il comprendra qu'elle coûte moins de 10€. On explique ce glissement sémantique par le fait que la négation d'une phrase contenant un argument A orientant vers une conclusion C exclut non seulement A mais aussi tous les arguments A' plus forts que A²⁵. Si A est *La place de cinéma coûte 10€*, A' est *La place de cinéma coûte plus de 10€* et C est *La place de cinéma est chère*, A' est un argument plus fort que A pour conclure C ; donc non-A exclut non seulement que la place coûte 10€, mais aussi qu'elle coûte plus de 10€.

²⁴ Hiérarchiser deux énoncés sans préciser leur orientation argumentative est par contre impossible. Ainsi *La place de cinéma coûte 10€* est un argument plus fort que *La place de cinéma coûte 12€* si ces deux énoncés sont orientés vers la conclusion *La place de cinéma n'est pas trop chère*. La relation est inversée s'ils sont orientés vers la conclusion *La place de cinéma est chère*.

²⁵ C'est la « loi d'abaissement » (Anscombe & Ducrot 1983 : 72).

III – La structure « *Si...()*(*alors*)... »

1 - Modification du cadre du discours par utilisation de *si*

Nous nous intéressons ici aux énoncés de la forme *Si P()*(*alors*) *Q*. Dans un tel énoncé, le sujet énonciateur demande au destinataire du discours « d'accepter pour un temps une certaine proposition *p* qui devient, provisoirement, le cadre du discours, et notamment de la proposition principale *q* » (Ducrot 1991 : 167). Par conséquent « une proposition du type *Si p, q* n'a pas pour *signification* première « *p* est cause de *q* » ni « *p* est condition de *q* » [...]. Sa valeur fondamentale est de permettre la réalisation de deux actes illocutoires : 1° demander à l'auditeur d'imaginer « *p* », 2° une fois le dialogue introduit dans cette situation imaginaire, y affirmer « *q* » » (Ducrot 1991 : 168). Notons en outre que la relation entre P et Q peut être inférentielle ou argumentative :

« la structure *Si p, q* [...], utilisée pour exprimer une relation de type implicatif, suppose que le locuteur non seulement déclare *q* nécessaire après *p*, mais présuppose, d'une façon générale, que les propositions du type de *p* sont des arguments en faveur des propositions du type de *q*. » (Anscombe & Ducrot 1983 : 100)

Comme l'utilisation de *si* dans la phrase *Si P()*(*alors*) *Q* a pour effet de restreindre l'univers du discours aux situations où P est vraie, la proposition Q n'est pas considérée indépendamment de P ; il s'agit en fait de « Q restreinte à la situation où P est vraie ». Si on l'oublie, on s'expose à élaborer des « raisonnements » conduisant à des conclusions absurdes²⁶. Exemple : *Si tu désires la Légion d'Honneur, il faut que tu la demandes. Or rien ne t'oblige à la demander* (dans le cadre de ce discours, où la Légion d'Honneur est désirée, c'est faux). *Donc* (par contraposition) *tu ne la désires pas*²⁷. Signalons enfin que la supposition faite explicitement après *si* se rapproche des suppositions implicites ou présuppositions : « supposition et présupposition ont en commun cette propriété de transformer, l'une, explicitement, l'autre, implicitement, l'univers du discours, de transporter le destinataire dans une situation choisie par le locuteur » (Ducrot 1991 : 185).

²⁶ Ainsi dans la contraposition déjà rencontrée au §II-3 de l'énoncé *S'il m'interroge, je ne lui répondrai pas*, la proposition *Je lui répondrai* ne se conçoit que dans la situation de discours où j'ai été interrogé ; c'est pourquoi il est impossible de conclure *Il ne m'a pas interrogé* et donc d'énoncer *Si je lui réponds, c'est qu'il ne m'a pas interrogé*. Par contre, après *S'il m'interroge je lui répondrai* la proposition *Je ne lui répondrai pas* est compatible avec les deux situations de discours (il m'a interrogé ou il ne m'a pas interrogé) ce qui explique la possibilité de la contraposition.

²⁷ (Ducrot 1991 : 184).

2 - Glissement de la condition suffisante à la condition nécessaire

Énoncer *Si P(,)(alors) Q* indique que P est une condition suffisante d'énonciation de Q. La simple présence dans le discours de cette condition suggère qu'il y a une relation de dépendance entre P et Q (sinon, à quoi bon poser P avant d'affirmer Q ?). De ce fait le destinataire est tenté de penser que non seulement P est une condition suffisante d'énonciation de Q, mais aussi qu'il en est une condition nécessaire. Ainsi l'enfant qui entend *Si tu fais tes devoirs avant le dîner, tu auras un bon dessert* comprend simultanément (à juste titre) que, pour avoir un bon dessert, il lui faut faire ses devoirs. Ce phénomène de glissement sémantique, bien connu de tous les enseignants de mathématiques, a pour origine l'existence de la loi d'exhaustivité : « cette loi exige que le locuteur donne, sur le thème dont il parle, les renseignements les plus forts qu'il possède, et qui sont susceptibles d'intéresser le destinataire » (Ducrot 1991 : 134). Il s'agit en quelque sorte d'un contrat implicite entre l'auteur et le destinataire du discours qui, lorsqu'il n'est pas respecté, induit le destinataire en erreur. Ainsi dire *Certains chapitres de ce livre sont intéressants* sous-entend qu'ils ne le sont pas tous, afficher *Magasin ouvert du mardi au samedi* sous-entend qu'il est fermé le lundi²⁸. Autre exemple : *Adèle a bu un verre de vin* ne permet pas d'en déduire qu'elle peut conduire (car elle a peut-être bu trois verres), mais c'est a priori un argument pour qu'elle soit en état de conduire car, si je sais qu'elle a bu trois verres, on attend de moi que je le dise.

La loi d'exhaustivité explique bien le glissement de la condition suffisante à la condition nécessaire. En effet l'énoncé *Si P(,)(alors) Q* affirme la véracité de « Q restreinte à P ». Or Q seule serait une affirmation plus forte. Si cette affirmation n'a pas été faite, c'est, d'après la loi d'exhaustivité, qu'elle ne peut l'être. Le destinataire du discours en déduit qu'il est impossible d'affirmer Q sans avoir d'abord affirmé P²⁹. Nous verrons au §IV-4 que les auteurs d'ouvrages mathématiques profitent des effets de la loi d'exhaustivité pour alléger l'écriture des définitions.

3 – Les *si* non implicatifs

On a donné au §II-3 de nombreuses raisons pour ne pas réduire les relations inférentielles à des relations d'implication. A fortiori le symbole \Rightarrow ne peut « traduire adéquatement [ni] le *si*

²⁸ Ces deux énoncés sont respectivement interprétés comme *Seuls certains chapitres sont intéressants* et *Magasin ouvert seulement du mardi au samedi*.

²⁹ Si l'énoncé *Si P(,)(alors) Q* était compris seulement comme l'expression d'une relation entre P et Q sans modification de la situation de discours, la loi d'exhaustivité ne permettrait pas d'expliquer le glissement de la condition suffisante à la condition nécessaire. En effet il n'y a aucune raison de considérer le fait que « P est condition nécessaire de Q » comme une information plus forte que le fait que « P est condition suffisante de Q ».

des mathématiciens, [ni] celui du langage ordinaire » (Ducrot 1991 : 169) à cause de la grande variété des utilisations de *si*³⁰. Voyons quatre exemples, dont les trois premiers sont extraits de Ducrot (1991 : 175-176) :

- *Si tu as soif il y a de la bière au frigo*. L'énoncé contraposé est absurde : *S'il n'y a pas de bière au frigo, c'est que tu n'as pas soif*. La raison en est que la proposition conditionnelle n'entraîne pas ici la proposition principale mais établit la pertinence de l'énonciation de la proposition principale : si tu as soif, il est utile que je t'informe qu'il y a de la bière au frigo. L'énoncé correctement contraposé serait donc plutôt *Si je ne te dis pas qu'il y a de la bière au frigo, c'est parce que je sais que tu n'as pas soif*.

- *Si la Cité est le cœur de Paris, le Quartier Latin en est l'âme*. Une paraphrase possible est *Si on peut dire que la Cité est le cœur de Paris, on peut dire aussi que le Quartier Latin en est l'âme*. Ducrot parle de *si* « contrastif ». Notons que l'énoncé *Si le Quartier Latin est l'âme de Paris, la Cité en est le cœur* est acceptable et reçoit la même interprétation.

- *S'il a de l'esprit, **en revanche** il n'a guère de cœur*. Ducrot parle de *si* « oppositif ».

- *S'il a beaucoup voyagé, c'est **encore** dans les livres qu'il a le plus appris*. On parle ici de *si* « concessif ». Notons sur ces deux derniers exemples la présence des adverbes *en revanche* et *encore* qui concourent à l'interprétation de *si*.

Dans le cadre du discours mathématique pédagogique écrit en anglais, nous allons nous intéresser au §IV à la structure *If ... (,)(then) ...* avec l'intention d'examiner si, compte tenu de la nécessité pour le discours mathématique de respecter les règles logico-déductives, les énoncés utilisant cette structure sont plus souvent que dans les autres discours réductibles à des implications, ou si, à défaut, ils expriment des relations plus inférentielles qu'argumentatives. Nous nous demanderons également si les énoncés échappent aux effets de la loi –linguistique mais contraire à la logique– d'exhaustivité.

³⁰ Voir Plantin (1990 : 190-191) pour un aperçu des classifications des utilisations de *si* proposées par divers auteurs.

IV – Étude sur corpus de la structure « *If ...,(then) ...* » dans le discours pédagogique mathématique en anglais

1 - Caractéristiques fonctionnelles du discours mathématique

Un texte mathématique se présente globalement comme une succession de définitions et de résultats, chaque résultat étant justifié avant ou après son énonciation par un enchaînement de raisonnements et de calculs³¹. A ces constituants obligatoires s'ajoutent, dans les textes à visée pédagogique, des éléments facultatifs : remarques, commentaires, exemples, exercices. Comme l'a montré Petit (1993 : 239), ces divers constituants peuvent remplir deux fonctions différentes dans le discours mathématique. En premier lieu, il y a la fonction **intra-démonstrative** qui apparaît dans les parties où un raisonnement ou un calcul est développé pour démontrer un résultat, détailler un exemple, aider à la résolution d'un exercice, etc. En second lieu, il y a la fonction **métadiscursive** qui apparaît dans les parties où l'auteur annonce, commente ou complète les raisonnements, les calculs, les définitions, les résultats, les exemples, etc.

2 - Conditions de l'étude et résultats quantitatifs

Pour le présent article, je me suis appuyé sur un corpus non numérisé constitué d'extraits de six ouvrages de mathématiques de niveau universitaire à vocation pédagogique, écrits en anglais. Chaque extrait représente un passage continu de 15 à 20 pages dont l'emplacement dans l'ouvrage a été choisi aléatoirement ; l'ensemble des extraits fait au total 111 pages. J'ai relevé dans ce corpus de travail 160 occurrences d'énoncés de la forme *If P,(then) Q*. Parmi eux, 43 sont inclus dans des résultats (§3), 18 dans des définitions ou des données de notations (§4), 26 dans des textes d'exercices (§5). En outre 67 sont inclus dans des démonstrations ou calculs, donc dans des parties à fonction intra-démonstrative (§6) et 6 dans des parties à fonction métadiscursive (§7).

3 – Énoncés de résultats

Les six ouvrages utilisés pour constituer le corpus ont fourni des exemples d'énoncés de résultats de la forme *If P,(then) Q*, et ce en nombre plus important que ne pourrait le laisser penser l'espace réduit occupé par les énoncés de résultats puisque ces exemples représentent 43 occurrences sur 160.

³¹ En anglais, les résultats sont en général précédés des titres *Theorem*, *Proposition*, *Lemma* ou *Corollary* et les démonstrations, lorsqu'elles sont placées après le résultat qu'elles justifient, sont annoncées par *Proof* ou *Solution*.

If peut introduire une seule hypothèse comme dans (1) et (2) ou plusieurs hypothèses comme dans (3) et (4) :

- (1) THEOREM 3. [...] **If** χ_φ is defined for two of the above three complexes, **then** it is defined for the third, and we have $\chi_\varphi(E) = \chi_\varphi(E') + \chi_\varphi(E'')$. (L100)³²
- (2) Proposition 3 (Möbius inversion formula). For any function f defined on natural numbers, **if** we set $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ for every $n \geq 1$, **then** $f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d)$. (C277)
- (3) 5.45 EXAMPLE. **If** $f(x)$ is bounded **and** has Fourier coefficients $O(1/n)$ **then** the partial sums $S_n(x)$ are uniformly bounded. (PS126)
- (4) THEOREM 47. **If** $K \subset L \subset M$, L is separable over K , **and** M is separable over L (all extensions finite-dimensional), **then** M is separable over K . (K57)

Dans chacun des exemples (1) à (4), on peut penser que l'auteur utilise la construction *If P(,)(then) Q* pour mettre au premier plan les hypothèses contenues dans la proposition P. En revanche, en cas d'utilisation de *Q(,) if P*, c'est le résultat contenu dans Q qui est mis en avant :

- (5) Fact 5. $R(f, b) = b^{\deg f}$ **if** b is a scalar. (C283)³³

Lorsque les hypothèses sont nombreuses, l'utilisation de *If ... (,)(then) ...* peut conduire à une phrase trop lourde. On voit alors apparaître des énoncés introduits par *Let*, *Assume* ou *Suppose*. *Let* est prioritairement utilisé pour poser des notations et donc introduire un ou plusieurs nouveaux objets mathématiques³⁴ alors qu'*Assume* et *Suppose* sont plutôt utilisés pour poser des conditions portant sur un ou plusieurs des objets précédemment définis³⁵ :

- (6) THEOREM 41. **Let** K be a field of characteristic $\neq 2$. **Let** f be a polynomial over K , M a splitting field of f . **Assume** that f has distinct roots in M . **Let** G be the Galois group of M/K , thought of as a group of permutations of the roots of f . **Then** in the Galois correspondence $K(\Delta)$ corresponds to the even subgroup of G . (K50)

³² Chaque occurrence est repérée par une lettre désignant l'ouvrage d'où elle provient suivie du numéro de la page d'origine. Les lettres sont B pour le livre de Braun, C pour le livre de Childs, HS pour le livre de Hewitt & Stromberg, K pour le livre de Kaplansky, L pour le livre de Lang et PS pour le livre de Powell & Shah.

³³ Les exemples comme celui-ci qui ne contiennent pas la structure *If ... (,)(then) ...* ne sont pas comptabilisés dans les 160 exemples mentionnés au §2, mais ils sont extraits du même corpus de travail.

³⁴ Voir aussi les exemples (13), (14), (19), (22), (23), (27), (28) et (29).

³⁵ Voir les exemples (22) et (23).

(7) **Let** $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of functions in $\mathcal{L}_1(R)$ and write $u_n = \hat{k}_n$. **Suppose** that for each $n \in N$ we have $u_n \in \mathcal{L}_1(R)$, $(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_R u_n(t) dt = 1$, and $u_n(-t) = u_n(t)$ for all $t \in R$. [...] **Then if** f is a function in $\mathcal{L}_1(R)$ and x is a Lebesgue point for f , we have

$$(iv) \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_R \hat{f}(y) k_n(y) \exp(ixy) dy = f(x). \quad (\text{HS404})$$

Notons que *Let* peut remplir les mêmes fonctions qu'*Assume* et *Suppose*³⁶ (c'est la deuxième occurrence de *Let* qui est ici concernée) :

(8) **Let** $f, g \in L[-\pi, \pi)$ and **let** both functions have period 2π . (PS114)

et que *Let*, *Assume*, *Suppose* peuvent être préférés à *If* même lorsqu'une seule hypothèse est exposée :

(9) Theorem. **Let** $f \in \mathcal{L}_1(R) \cap \mathcal{L}_2(R)$. **Then** $\hat{f} \in \mathcal{L}_2(R)$ and

$$(i) (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_R |\hat{f}(y)|^2 dy = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_R |f(x)|^2 dx. \quad (\text{HS410})$$

Les 43 énoncés relevés expriment une relation d'implication entre deux propositions P et Q. Lorsque cette relation d'implication est démontrée (avant ou après l'énoncé du résultat), il y a établissement d'une relation inférentielle (cf. §II-1). Notons que, dans le seul énoncé contenant un marqueur de modalisation, celui-ci pourrait être omis sans que le sens de l'énoncé en soit affecté :

(10) 5.38 COROLLARY. *Suppose*, for some x , $f(x+0)$ and $f(x-0)$ exist. **If** $\{S_n(x)\}$ converges **then** it **must** converge to $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$. (PS122)

(10') 5.38 COROLLARY. *Suppose*, for some x , $f(x+0)$ and $f(x-0)$ exist. **If** $\{S_n(x)\}$ converges **then** it converges to $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$.

4 - Définitions et données de notations

17 des 18 occurrences de *If P(,)(then) Q* dans des définitions ou des données de notations ont été relevées dans l'ouvrage de Lang, ce qui s'explique par le fait que l'extrait inclus dans le corpus contient une grande quantité de définitions et de données de notations.

³⁶ et *Assume* ou *Suppose* peuvent remplir les mêmes fonctions que *Let* : voir l'exemple (18).

Dans 12 des 18 énoncés, la proposition P est la donnée d'une ou plusieurs notations qui sont ensuite utilisées dans Q. P pose donc un cadre à l'intérieur duquel l'énonciation de Q est possible (cf. §III-1), mais il n'y a entre les deux propositions ni relation inférentielle, ni relation argumentative :

(11) *If K is the quotient field of A , the quotient field of $A[X_1, \dots, X_n]$ is denoted by $K(X_1, \dots, X_n)$. (L116)*

(12) *If M is a module (over a ring A), then a sequence of submodules $M = M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_r = 0$ is also called a finite filtration, and we call r the length of the filtration. (L104)*

Notons que Lang utilise également *Let* :

(13) *Let $a \in A$ and $x \in G$. We denote by $a.x$ (and sometimes also by ax) the function whose value at x is a , and whose value at y is 0 if $y \neq x$. (L107)*

Comme on le voit dans (11), (12) et (13), l'introduction dans Q de la définition ou de la notation se fait souvent au moyen d'une structure verbale passive ou d'une structure verbale active de sujet *we*. Mais il y a des exceptions :

(14) *Let A be a commutative ring. An A -algebra (or an algebra over A) is a module E together with a bilinear map $E \times E \rightarrow E$. (L106)*

Dans les 6 énoncés restants, la proposition P est la donnée d'une ou plusieurs conditions :

(15) *If the family of monomials $M_{(\vee)}(S) = \prod_{x \in S} x^{v(x)}$ is linearly independent over A , then we shall say that S , or that the elements of S , are algebraically independent over A . (L112)*

(16) *The function f is said to satisfy Lipschitz condition of order α at the point x . If this condition is satisfied for all x in the interval $[-\pi, \pi]$, we write $f \in Lip_C \alpha$. (PS118)*

La proposition Q contenant des termes qui n'ont pas été rencontrés antérieurement dans le discours, la loi d'exhaustivité vue au §III-2 exerce ici un effet maximal et amène le lecteur à penser que P est une condition non seulement suffisante mais nécessaire de Q. De fait, ceci est exact : dans la suite du discours, les propositions P et Q seront considérées comme logiquement équivalentes. En fin de compte, bien que la structure *If...,(.) (then)...* transcrive habituellement une relation d'implication, c'est le non-respect des règles logiques dû aux effets de la loi d'exhaustivité qui permet à l'auteur de transmettre au lecteur l'information

correcte. Nous sommes en présence d'une relation inférentielle qui n'est pas réductible à une implication (cf. §II-3)³⁷.

Notons que la loi d'exhaustivité produit le même effet dans les cas d'utilisation de la structure ...(.) *if* ... :

- (17) DEFINITION. *Let K be a field of characteristic p . An element u is purely inseparable over K if for some K , u^{p^k} lies in K . A field L containing K is purely inseparable over K if every element of L is purely inseparable over K . (K55)*

5 - Textes d'exercices

Le corpus fournit 26 exemples d'utilisation de *If P(.) (then) Q* dans des textes d'exercices, où le travail à accomplir est généralement précédé de *Show* ou *Prove* :

- (18) Exercise. (i) **Suppose** that $f \in BV[a,b]$. **If** $[a',b'] \subseteq (a,b)$ **prove** that the partial sums $S_n(x)$ remain bounded on $[a',b']$. (PS120)
- (19) 6. **Let** K be a subfield of the real numbers, f an irreducible quartic over K . **Let** G be the Galois group of f . **Prove** : **if** f has exactly two real roots, **then** G is the whole symmetric group S_4 or is of order 8. (K53)

L'utilisation de *Suppose* et *Let* précédemment à *If* dans ces énoncés permet à l'auteur de scinder en plusieurs parties l'exposition des hypothèses. Les propositions introduites par *Suppose* dans (18) et par *Let* dans (19) sont simplement la donnée de notations ; l'hypothèse décisive, qui va permettre de faire la démonstration, est dans les deux cas introduite par *If*. En effet l'utilisation de *If P* a pour effet de restreindre l'univers du discours aux situations où P est vraie. Grâce à cela, le lecteur qui doit résoudre l'exercice est placé dans une situation claire : les hypothèses contenues dans P sont exactement celles dont il a besoin. On retrouve le glissement sémantique dû à la loi d'exhaustivité : le lecteur doit démontrer que P est une condition suffisante de Q , mais la manière dont les hypothèses sont présentées le conduit à travailler comme si P était aussi une condition nécessaire de Q ³⁸.

Dans d'autres énoncés, l'auteur n'hésite pas à accumuler les hypothèses introduites par *If*, sans doute pour ne pas établir de hiérarchie entre ces hypothèses :

³⁷ Même si 5 des 6 énoncés proviennent de l'ouvrage de Lang, il est aisé de trouver, hors corpus de travail, des énoncés analogues issus des autres ouvrages : *Definition. If $A \cap B = \emptyset$, then A and B are said to be disjoint.* (HS3)

³⁸ Il arrive parfois que, pour lever l'ambiguïté, une note de l'auteur signale que P peut être remplacée par une proposition P' plus « faible » (et donc que P n'est pas une condition nécessaire de Q), ou au contraire que P est bien une condition nécessaire et suffisante de Q . Exemple : *If K is perfect and L is a finite-dimensional extension of K , then L is perfect (The converse is also true ; see Exercise 7 of the next section.)* (K59).

(20) Exercise. [...] (b) **Prove that if** $f \in \mathcal{L}_1(R)$, $a \in R$ **and** $g(x) = \exp(-iax)$, **then**
 $\hat{fg}(y) = (\hat{f})_a(y)$ **for all** $y \in R$. (HS414)

(21) E2. **Show that if** $q(x)$ in $\mathbb{Z}_p[X]$ **has degree** d **and** F **is a field with** p^n **elements, where**
 $d|n$, **then** F **is a splitting field** (Chapter III-8) **of** $q(x)$. (C281)

Dans tous les cas, le travail demandé par l'exercice étant un raisonnement déductif, l'emploi de la structure *If ... (,) (then) ...* établit ici une relation inférentielle.

Bien entendu, il y a des textes d'exercices qui n'utilisent pas *If*. Dans ce cas, lorsque *Let* est utilisé en même temps que *Assume* ou *Suppose*, il est fréquent que *Let* introduise des notations ou des hypothèses simples alors qu'*Assume* ou *Suppose* introduisent des hypothèses « importantes » :

(22) 4. **Let** p, q **be distinct primes. Assume that** q **is a primitive root of** p , **i.e., for no**
 $d < p-1$ **is** $q^d - 1$ **divisible by** p . **Prove that** $(x^p - 1)/(x - 1)$ **is irreducible over the**
field of integers mod q . (K47)

(23) Exercise. [...] **Let** f **and** g **be functions in** $\mathcal{L}_1(R)$ **such that** $f(x) = g(x) = 0$ **for all**
 $x < 0$. **Suppose that** $f * g = 0$ **a.e. Prove that** $f = 0$ **a.e. or** $g = 0$ **a.e.** (HS 416)

6 - Parties à fonction intra-démonstrative

La structure *If P(,) (then) Q* est utilisée dans 67 énoncés qui sont inclus dans des parties à fonction intra-démonstrative. Il s'agit de démonstrations ou calculs servant à prouver un résultat, à étudier un exemple ou à fournir une indication pour la résolution d'un exercice.

Dans 12 de ces énoncés, la proposition P est la donnée d'une ou plusieurs notations et Q est l'exposition d'une ou plusieurs propriétés faisant intervenir (entre autres) les objets mathématiques nommés dans P :

(24) PROOF. **For if** $q(x)$ **is the polynomial, and** F_2 **is the field, then** $F_2 \cong \mathbb{Z}_p[X]/q(x)$, **by**
the theorem. (C281)

(25) Hints [...]. **Now if** $(u^{(n)})$ **is an approximate unit in** $\mathcal{L}_1(R)$ (21.36), **the relations**
 $u^{(n)} * (f_a) \rightarrow f_a$, $(u_a^{(n)}) * f \in \mathcal{F}$ **prove that** $f_a \in \mathcal{F}$. (HS417)

Dans (24), P n'est que la donnée de deux notations ($q(x)$ et F_2) utilisées dans l'écriture de Q. C'est une troisième proposition (rappelée par *by the theorem*) qui permet de valider Q. Il n'y a pas de passage déductif de P à Q et donc pas de relation inférentielle. Par contre, dans (25), la notation $(u^{(n)})$ désigne un objet mathématique (une *approximate unit*) dont les propriétés,

même si elles ne sont pas rappelées explicitement, sont utilisées dans l'opération déductive qui fait passer de P à Q. Il y a établissement d'une relation inférentielle.

Dans 3 énoncés, ce sont à la fois P et Q qui attribuent des propriétés aux objets nommés dans P :

- (26) *Consequently, if (13) has two real roots r_1, r_2 with $r_1 > r_2$ and $r_1 - r_2$ not an integer, then Equation (9) has two solutions of the form $y_1(t) = t^{r_1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(r_1) t^n$, $y_2(t) = t^{r_2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(r_2) t^n$, and these solutions can be shown to converge wherever $tp(t)$ and $t^2q(t)$ both converge. (B209)*

Dans les 52 autres énoncés, P consiste en des hypothèses faites sur des objets mathématiques précédemment définis. De ces hypothèses, on déduit les propriétés qu'expose Q ; il y a donc établissement d'une relation inférentielle :

- (27) *Let f be a quartic root [...]. If $f = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, an elementary computation shows that the resolvent cubic is $y^3 - cy^2 + (bd - 4e)y - b^2e + 4ce - d^2$. (K52)*
- (28) *First let A be fixed, and let S, S' be two sets with a bijection $\lambda : S \rightarrow S'$. If we identify S' as a subset of $A[S']$, we obtain an isomorphism $A[S] \approx A[S']$ inducing the bijection from S onto S' . (L114)*
- (29) *Consider $\mathbb{Z}_p[X]/q(x) = K$ [...]. Let F be a field with p^n elements [...]. Let K' be the image of K in F [...]. Let α be a primitive element of F [...]. Let $s(x)$ be the minimal polynomial of α over K' [...]. If $s(x)$ has degree e , and K has m elements, then $K'[X]/(s(x))$ has m^e elements. (C275)*

Dans les parties à fonction intra-démonstrative, le discours mathématique procède par déductions successives et la validité de chaque relation inférentielle est garantie par celle des relations précédemment énoncées. D'où l'abondance de références à des résultats antérieurs et l'utilisation de connecteurs inférentiels (cf. §I-5) :

- (30) *If $a \geq 4/\pi$ then we obtain, by Lemma 5.35 with $\phi(x) = 1/x$, that there exists*

$$\eta \in [a, b] \text{ such that } \left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \frac{1}{a} \int_a^\eta \sin x dx \right| \leq \frac{2}{a} \leq \frac{\pi}{2}. \quad (\text{PS118})$$

(31) **Hence, if χ_ϕ is defined for E' and E'' it is defined for E .** (L100)

La validité de ces relations inférentielles est donc établie indépendamment des conditions d'énonciation et en particulier du sujet énonciateur. Pourtant une prise en charge explicite par le sujet énonciateur n'est pas rare. Dans 17 des 67 énoncés, elle est marquée par l'utilisation du pronom *we*³⁹ :

(32) **If we assume that at least one of the leading coefficients a_n or b_m is not a divisor of 0 in A , then $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ and the leading coefficient of fg is a_nb_m .** (L118)

(33) **If we take $f(x)=1$ then we obtain $a_0/2=1$, $a_n=0=b_n$, $S_n(x)=1$ and consequently we have (from (5.20ii)) $1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2 \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin(u/2)} du$.** (PS114)

Cette prise en charge par l'énonciateur peut être accentuée par l'utilisation de verbes modaux (Morvan 2013) :

(34) **On the other hand, if the sum in the right hand side of (19) vanishes, then a_N is arbitrary, and we can obtain a second solution of the form $y_2(t) = t^{r_2} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$.** (B213)

(35) **This last sum is now symmetric, and if we had computed $(\alpha(\beta\gamma))(t)$, we would have found this sum also.** (L107)

Dans (35), le calcul de $((\alpha\beta)\gamma)(t)$ a été fait précédemment et, plutôt que de calculer $(\alpha(\beta\gamma))(t)$ pour prouver que le résultat est identique, l'auteur préfère utiliser l'argument que le résultat du premier calcul est symétrique en α, β, γ pour convaincre le lecteur qu'un second calcul est inutile. Ici l'énoncé modalisé établit une relation à la fois argumentative et inférentielle.

Il arrive même que la modalisation de l'énoncé soit indispensable :

(36) **Suppose that S is contained in S' . Then $A[S]$ has a canonical injection in $A[S']$. If S is the set $\{X_1, \dots, X_n\}$ and S' is the set $\{X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_N\}$, then we can view the polynomial ring $A[X_1, \dots, X_n]$ as contained in $A[X_1, \dots, X_N]$.** (L114)

³⁹ qui désigne en général à la fois l'auteur et le lecteur.

Il y a dans cet énoncé une première relation implicative, donc inférentielle, qui pourrait être transcrite ainsi : ***If** S is contained in S' **then** $A[S]$ has a canonical injection in $A[S']$* . Mais l'injection de $A[S]$ dans $A[S']$ n'entraîne pas l'inclusion de $A[S]$ dans $A[S']$; donc un énoncé non modalisé tel que : ***If** S is contained in S' **then** $A[S]$ is contained in $A[S']$* serait trompeur car il laisserait supposer l'existence d'une relation inférentielle. Via l'utilisation de *we can* l'énoncé est clairement pris en charge par le sujet énonciateur : l'inclusion de $A[S]$ dans $A[S']$ repose sur un « abus de langage » que l'auteur conseille d'accepter pour faciliter les calculs ultérieurs. La relation est ici clairement argumentative.

7 - Parties à fonction métadiscursive

Il n'est pas toujours facile de décider si un énoncé remplit une fonction intra-démonstrative ou métadiscursive (cf. § IV-1). C'est le cas par exemple des énoncés contenant le rappel de résultats antérieurs. Lorsque le rappel est factuel, l'énoncé remplit une fonction intra-démonstrative :

- (37) (21.54) Remarks. (a) ***The proof of (21.53)** shows that **if** $\phi, \psi \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, **then** there exists a function $h \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{C}_0$ such that $\hat{h} = \phi * \psi$* . (HS413)

Dans (38), il en va de même, bien que le rappel soit suivi de l'annonce d'un nouveau résultat :

- (38) ***We showed** in Chapter 11 that **if** F is a field with n elements, **then** n has to be a power of a prime. **Here is the converse***. (C273)

Par contre lorsque l'énoncé porte une appréciation sur un résultat antérieur ou annonce l'obligation de prouver un nouveau résultat, on peut considérer qu'il remplit une fonction métadiscursive :

- (39) ***The remarkable fact** is that **if** F_1 and F_2 are any two fields with p^n elements, **then** F_1 and F_2 are isomorphic*. (C280)
- (40) ***If** all three roots are real the discriminant is positive, and we **must** determine whether it is a square in K* . (K51)

La structure *If $P(\cdot)$ (then) Q* étant un outil particulièrement bien adapté à l'expression des déductions par lesquelles procède le raisonnement mathématique, il n'est guère étonnant qu'elle se rencontre beaucoup plus fréquemment dans les parties à fonction intra-démonstrative (67 occurrences) que dans les parties à fonction métadiscursive, où je n'ai trouvé que 6 occurrences. L'exemple (41) permet de comparer deux énoncés juxtaposés dont

le premier établit une relation inférentielle et remplit une fonction intra-démonstrative et le second établit une relation argumentative et remplit une fonction métadiscursive :

- (41) ***If** $f \in C[-\pi, \pi]$ and is periodic **then** the convergence of $\sigma_n(x)$ to $f(x)$ is uniform on any interval $[A, B]$ (see Theorem 5.37(ii) and 5.37(iii)). But, **if** we consider the convergence of $S_n(x)$ **then** the situation is completely different. (PS127)*

Conclusion

La structure *If... (,)(then)...* est l'un des outils syntaxiques dont dispose l'auteur d'un texte mathématique pour exposer les déductions ou relations implicatives qui lui permettent de faire progresser son discours. Ces déductions peuvent être justifiées par la rédaction d'une preuve (§IV-3), ou par l'instruction adressée au lecteur de chercher une preuve (§IV-5) ; elles peuvent aussi être justifiées au moment même où elles sont énoncées lorsqu'elles constituent une étape « élémentaire » de démonstration (§IV-6). Dans tous ces cas l'utilisation de *If... (,)(then)...* aboutit à établir une relation inférentielle entre deux énoncés.

Dans le cas des définitions et données de notations (§IV-4), les effets conjugués de la modification du cadre du discours due à l'utilisation de *If... (,)(then)...* et de la loi d'exhaustivité conduisent à établir une relation inférentielle qui exprime non seulement une implication, mais une équivalence entre deux propositions.

Un texte mathématique, en particulier s'il est à visée pédagogique, ne peut se résumer à une succession de déductions et l'argumentation y a aussi sa place (§I-4). Nous avons effectivement rencontré des cas où l'utilisation de *If... (,)(then)...* établit une relation argumentative : il s'agit de certains énoncés inclus dans des parties du texte à fonction intra-démonstrative (§IV-6) ou métadiscursive (§IV-7), où la prise en charge par l'énonciateur est en outre fréquemment explicitée par l'utilisation du pronom personnel *we* ou de marqueurs de modalité.

Corpus :

- BRAUN, M. (1993). *Differential Equations and their Applications*. New York : Springer-Verlag. 198-220.
- CHILDS, L. (1979). *A Concrete Introduction to Higher Algebra*. New York: Springer-Verlag. 273-290.
- HEWITT, E., STROMBERG, K. (1965). *Real and Abstract Analysis*. New York : Springer-Verlag. 400-418.
- KAPLANSKY, I. (1969). *Fields and Rings*. Chicago : The University of Chicago Press. 45-59.
- LANG, S. (1965). *Algebra*. Reading, Massachussets : Addison-Wesley. 100-118.
- POWELL, R.E., SHAH, S.M. (1972). *Summability theory and applications*. London : Van Nostrand Reinhold. 113-129.

Bibliographie :

- ANSCOMBRE, J.-C., DUCROT, O. (1983). *L'argumentation dans la langue*. Bruxelles : Pierre Mardaga.
- BRACOPS, M. (2010). *Introduction à la pragmatique*. Bruxelles : De Boeck-Duculot.
- COURTÈS, J. (1991). *Analyse sémiotique du discours. De l'énoncé à l'énonciation*. Paris : Hachette.
- DUCROT, O. (1973). *La preuve et le dire*. Paris : Mame.
- DUCROT, O. (1980). *Les mots du discours*. Paris : Éditions de Minuit.
- DUCROT, O. (1991). *Dire et ne pas dire*. Paris : Hermann.
- FRASER, B. (1999). « What are discourse markers? » in *Journal of Pragmatics*, 31. 931-952.
- GRIZE, J.-B. (1997). *Logique et langage*. Gap : Ophrys.
- GUILLEMIN-FLESCHER, J. (2003). « Sujet énonciateur, sujet de l'énoncé dans la relation d'interlocution fictive » in Merle, J.-M. (ed) *Le sujet*. Paris : Ophrys. 183-192
- LARREYA, P. (1984). *Le possible et le nécessaire*. Paris : Nathan.
- LARREYA, P. (2001). *Modalités et auxiliaires modaux en anglais*.
<ftp.univ-pau.fr/pub/ALAES/DIVERS/modaux.rtf>, page consultée le 4/07/2014.
- LE QUERLER, N. (1996). *Typologie des modalités*. Caen : Presses Universitaires de Caen.
- LE QUERLER, N. (2004). « Les modalités en français. » in *Revue belge de philologie et d'histoire*, tome 82, fasc. 3. 643-656.

- MORVAN, E. (2012). *Modalisation dans le discours mathématique écrit en anglais*. Mémoire de master : Université de Poitiers.
- MORVAN, E. (2013). « Modalisation dans le discours mathématique pédagogique écrit en anglais » in *Corela*, vol.11-1. <http://corela.revues.org/2876>
- NORDON, D. (1999) . *Deux et deux font-ils quatre? Sur la fragilité des mathématiques*. Paris : Belin.
- PETIT, M. (1993). *Analyse contrastive de la relation discursive et inter-énonciative dans un corpus d'ouvrages mathématiques en français et en anglais*. Thèse : Université de Paris VII.
- PLANTIN, C. (1990). *Essais sur l'argumentation*. Paris : Kimé.
- RIEGEL, M., PELLAT J.-C., RIOUL, R. (1994). *Grammaire méthodique du français*. Paris : Presses Universitaires de France.
- TARANTO, G. (2008). « Discourse adjectives » in McNally, C. et Kennedy, C. (eds.) *Adjectives and Adverbs: Syntax, Semantics, and Discourse*. Oxford : Oxford University Press. 305-327.
- VERNANT, D. (2001). *Introduction à la logique standard*. Paris : Flammarion.