HAL
open science

Dynamique de systèmes à liaisons unilatérales avec frottement sec éventuel ; essais numériques

Jean Jacques Moreau

To cite this version:

Jean Jacques Moreau. Dynamique de systèmes à liaisons unilatérales avec frottement sec éventuel ; essais numériques. [Rapport de recherche] Université des Sciences et Techniques du Languedoc. 1986. hal-01386377

HAL Id: hal-01386377

https://hal.science/hal-01386377

Submitted on 24 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NOTE TECHNIQUE N° 85-1

DYNAMIQUE DE SYSTEMES A LIAISONS UNILATERALES AVEC FROTTEMENT SEC EVENTUEL ; ESSAIS NUMERIQUES

JEAN JACQUES MOREAU

2ÈME ÉDITION FÉVRIER 1986

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE GÉNERALE DES MILIEUX CONTINUS

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

Place Eugène Bataillon

34060 MONTPELLIER CEDEX - France

Tél. (67) 63.91.44

DYNAMIQUE DE SYSTEMES A LIAISONS UNILATERALES AVEC FROTTEMENT SEC EVENTUEL ; METHODES NUMERIQUES

J.J. MOREAU

Laboratoire de Mécanique Générale des Milieux Continus
Université des Sciences et Techniques du Languedoc
Place Eugène Bataillon

34060 MONTPELLIER Cédex

Seconde édition, février 1986

Cette seconde édition diffère de la première par la correction de quelques fautes d'impression et le remplacement des planches 12 et 13, Essai 9, par des exemples plus démonstratifs.

TABLE DES MATIERES

		Page
1.	INTRODUCTION	1
2.	CONTENU DU RAPPORT	6
3.	CARACTERISATION DES MOUVEMENTS REGULIERS	15
4.	PROPRIETES CINEMATIQUES	21
5.	CHOCS ELASTIQUES	26
6.	STRUCTURE COMMUNE AUX ALGORITHMES PRESENTES	33
7.	ALGORITHME ELAST	40
8.	CHOCS INELASTIQUES	46
9.	LE PROBLEME D'EVOLUTION INELASTIQUE STANDARD	51
10.	ALGORITHME INEL	56
11.	PRISE EN COMPTE D'UN FROTTEMENT SEC	63
12.	PARTICULE FROTTANT CONTRE UNE PAROI	77
13.	FROTTEMENT BIDIMENSIONNEL	82
14.	UN MODELE BIDIMENSIONNEL ELEMENTAIRE	90
15.	COMPTES RENDUS D'ESSAIS	95
16.	REFERENCES	110
17.	PLANCHES	114

1. INTRODUCTION

Les mécanismes usuels sont constitués de pièces, en première approximation rigides. La conception de ces mécanismes repose de façon constante sur l'impénétrabilité mutuelle desdites pièces : elles entrent ou non en contact au cours du mouvement mais jamais les portions d'espace qu'elles occupent n'empiètent. Cela se traduit dans le calcul par des *inégalités* concernant les paramètres qui repèrent à chaque instant l'état du système ; on dit traditionnellement que l'impénétrabilité de deux pièces constitue une *liaison unilatérale*.

Lorsque des conditions d'égalité sont désirées, on les obtient couramment au moyen de liaisons unilatérales antagonistes et cela laisse en pratique un certain *jeu*. La dynamique de mécanismes affectés de jeu figure parmi nos objectifs. Techniquement, toutefois, la connotation du terme "jeu" est la présence de liaisons unilatérales laissant aux paramètres de position du système un débattement additionnel considéré comme petit par rapport à la variation globale de ces paramètres. L'efficacité numérique exigera qu'on tire parti de cette hiérarchie des ordres de grandeur, surtout si, comme en robotique par exemple, une certaine économie de calcul est imposée par le traitement en temps réel.

Le présent rapport aborde la dynamique de solides parfaitement rigides entre lesquels des contacts sont susceptibles de s'établir ou de se rompre, sans rechercher prioritairement l'économie de temps de calcul ni le traitement spécifique du jeu.

La Mécanique Rationnelle classique n'a certes pas ignoré les liaisons unilatérales, mais les développements qu'elle leur consacre sont infimes au regard de la place accordée aux liaisons bilatérales. L'approche traditionnelle consiste à observer qu'*en pratique*, le mouvement d'un système de liberté finie avec liaisons unilatérales (pour fixer les idées, nous appellerons ces liaisons des contacts ; mais la liaison réalisée par un fil inextensible reliant deux constituants du système se traite de la même façon) exhibe habituellement une succession finie d'intervalles de temps sur chacun desquels aucun contact ne cesse ni aucun contact nouveau ne survient. Le calcul du mouvement sur un tel intervalle est alors effectué en traitant provisoirement les contacts présents comme des liaisons bilatérales de type classique ; les réactions en chaque point de contact sont évaluées. Les instants de transition d'un de ces intervalles au suivant sont marqués par deux types d'événement :

1° Cessation de certains contacts, ce qui est inéluctable si le calcul précédent, poursuivi au delà de l'instant en question, livre pour la réaction en certains des contacts, un sens incompatible avec l'unilatéralité (attention : ce ne sont pas nécessairement ces contacts-là qui cessent ; il a fallu attendre le premier quart de ce siècle [1] pour découvrir le fait).

2° Introduction brusque de nouveaux contacts ; cela implique habituellement une discontinuité des vitesses, c'est à dire un *choc*. On sait que les conditions physiques de ce phénomène sont difficiles à appréhender. Deux situations idéales extrêmes sont classiquement considérées :

- les *chocs élastiques*, conservant l'énergie (réalisation approximative : rebondissement d'une bille d'acier sur une paroi de marbre) ;

- les *chocs parfaitement inélastiques* ou "mous" (exemple : impact d'une boule de pétanque sur un sol de terre), essentiellement *dissipatifs*.

Selon la problématique familière de la Mécanique Rationnelle, les diverses situations ci-dessus ont d'abord été appréhendées dans l'hypothèse de contacts *parfaits*, c'est-à-dire sans frottement. Le réalisme impose de ne pas en rester là. On sait que le frottement est un phénomène mal défini, fortement influencé par des éléments difficilement reproductibles : présence de résidus de matériaux usés, de contaminants divers et, bien sûr, radicalement affecté par l'introduction intentionnelle de lubrifiants.

Le concept de *frottement sec* ou "frottement de Coulomb" fournit néanmoins, pour d'innombrables situations techniques, le cadre d'une étude de précision quantitative modérée mais irremplaçable.

Frottement sec et unilatéralité de la liaison introduisent l'un et l'autre dans le calcul des relations *non différentiables*. On a généralement dans le passé éprouvé des difficultés à les traiter simultanément, bien que ces deux aspects du phénomène de contact soient physiquement indissociables. Les techniques numériques proposées dans ce rapport parviennent à les appréhender tous les deux à la fois.

L'intérêt du public scientifique et technologique pour les liaisons unilatérales s'élargit actuellement. Ne citons aucune des nombreuses publications consacrées (depuis Signorini) aux contacts unilatéraux entre *milieux déformables*, sujet qui inclut en particulier la

mécanique des milieux fissurés. Il s'agit dans ce cas de systèmes de *liberté infinie*.

Le travail mathématique de M. Schatzman [8] supposait le système dynamiquement équivalent à un point de masse unité dans un espace euclidien de dimension n ; dans cet espace l'ensemble des positions permises par les liaisons unilatérales, sans frottement, était supposé convexe ; l'hypothèse additionnelle de conservation de l'énergie entraînait l'élasticité des chocs éventuels. Même dans ce cadre, prouver l'existence d'une solution pour le problème à données initiales classiques exige une mathématique raffinée ; l'unicité n'est pas assurée.

Plus près des aspects calculatoires, et sans étude d'existence, P. Lötstedt [10] retrouve en particulier un résultat ancien de l'auteur [11][12] : le "principe de moindre contrainte" de Gauss-Appell se généralise au cas de systèmes à liaisons unilatérales sans frottement, ce qui ramène, à chaque instant, la recherche de l'accélération à un problème de programmation quadratique.

Classiquement, l'ensemble des configurations éventuelles d'un système mécanique de liberté finie, liaisons unilatérales mises à part, est une variété différentielle, notons-là $\mathcal{Q}$, sans structure vectorielle naturelle. L'hypothèse de convexité, pour l'ensemble des configurations permises par les liaisons unilatérales surimposées, ne peut donc en général se formuler. Par contre, à chaque position éventuelle $q \in \mathcal{Q}$ est associé l'espace vectoriel des valeurs possibles de la vitesse du système ; c'est l'espace vectoriel tangent $\mathcal{Q}'_q$ au point q de la variété $\mathcal{Q}$. Dans cet espace vectoriel et dans son dual $\mathcal{Q}'^{\star}_q$ (l'espace des forces,

au sens de la mécanique analytique), la notion de convexité est disponible. Ainsi, l'ensemble $V(q)$ des valeurs de la vitesse à droite compatibles avec le respect des liaisons unilatérales constitue, en un sens que nous préciserons, le cône (convexe fermé) tangent au point q considéré de la région $L \subset \mathcal{Q}$ permise par ces liaisons.

Si les liaisons unilatérales consistent, dans l'espace physique, en contacts *sans frottement* et *sans adhésion*, il vient élémentairement (cf. parag. 3, ci-après) que le total des réactions, représenté par l'élément r de $\mathcal{Q}'^{\star}_{q}$, vérifie $-r \in N(q)$ où $N(q)$, cône polaire de $V(q)$, constitue le *cône normal sortant* au point q de L.

P.D. Panagiotopoulos [9][34] a proposé, dans un cadre général, d'étendre la considération d'une paire de cônes mutuellement polaires tels que ci-dessus au cas de liaisons unilatérales moins régulières que celles que nous considérons ici : il choisit alors pour $N(q)$ le cône normal au sens de F.H. Clarke [35][36], ce qui constitue une définition formelle du non-frottement.

P. Lötstedt [37] présente, pour le calcul du mouvement d'un système bidimensionnel avec contacts unilatéraux et frottement de Coulomb un algorithme moins direct que celui qu'on trouvera dans ce rapport puisqu'il calcule explicitement les multiplicateurs de Lagrange associés à un problème de programmation convexe. Nous ne sommes pas en mesure de comparer les coûts de calcul pour une précision donnée.

On n'abordera pas ici les questions d'existence de solutions ou de convergence des algorithmes présentés. Le cas du problème inélastique sans frottement (cf. parag. 9 ci-après) fait l'objet d'études en cours de MONTEIRO MARQUES [31].

2. CONTENU DU RAPPORT

Le parag. 3 formule la dynamique du système mécanique considéré en termes d'équations de Lagrange ; on postule donc à ce stade une régularité suffisante du mouvement. Par suite de liaisons parfaites posées sans discussion (exemple : la liaison de rigidité parfaite de chacune des pièces d'une machine), l'ensemble des configurations éventuelles du système constitue une variété différentielle $\mathcal{Q}$, de dimension n . Les liaisons unilatérales sont surimposées ; leur effet géométrique s'exprime par ν inégalités $f_\alpha(q) \leqslant 0$, $\alpha \in \{1,2,\ldots,\nu\}$, définissant une région L de $\mathcal{Q}$.

Pour alléger, on suppose que toutes les liaisons sont indépendantes du temps (système dit "scléronomique"). L'expression générique de l'énergie cinétique T définit alors une forme quadratique $\dot{q} \longrightarrow 2T(q,\dot{q})$ sur l'espace vectoriel tangent $\mathcal{Q}'_q$ en chaque point q de $\mathcal{Q}$. Cette forme quadratique est classiquement employée pour munir $\mathcal{Q}$ d'un ds^2 riemannien

$$ds^2 = a_{ij}(q)\, dq^i dq^j \ .$$

Dans toute la suite, on évitera des complications inessentielles en supposant que des coordonnées locales peuvent être trouvées, telles que les a_{ij} soient constants par rapport à $q = (q^1,q^2,\ldots,q^n)$. Cela veut dire que la variété riemannienne $\mathcal{Q}$ s'identifie, au moins localement, avec un *espace vectoriel euclidien* E , de dimension n ; grâce au produit

scalaire de cet espace, noté $.\,,$ les espaces vectoriels tangents $\mathcal{Q}'_q$ et cotangents $\mathcal{Q}'^{\star}_q$ en tout point q s'identifient tous à E lui-même.

Si les liaisons unilatérales surimposées sont *sans frottement* et *sans adhésion*, on obtient *l'inclusion différentielle du second ordre* caractérisant les mouvements compatibles avec les principes de la dynamique

(2.1)) $\quad -\ddot{q} + Q(t,q) \in N(q)$.

La fonction donnée $(t,q) \to Q(t,q) \in E$ représente les forces exercées par ailleurs sur le système. L'ensemble $N(q)$ est le cône convexe engendré dans E par les $\operatorname{grad} f_\alpha(q)$, $\alpha \in J(q)$, où l'on pose

(2.2) $\quad J(q) = \{\alpha \in \{1,2,\ldots,\nu\} : \; f_\alpha(q) \geqslant 0\}$.

Cet ensemble d'indices caractérise donc les liaisons unilatérales qui, dans la configuration éventuelle q , sont actives (i.e. le "contact" $f_\alpha = 0$ a lieu) ou violées. Lorsque $q \in L$, l'ensemble $N(q)$ est, en un sens classique, le *cône normal sortant* au point q de L .

Le parag. 4 développe l'analyse cinématique de la situation ci-dessus, en introduisant le *cône polaire* de $N(q)$, soit

$$V(q) = \{v \in E \;:\; \forall \alpha \in J(q) \;,\; v.\operatorname{grad} f_\alpha(q) \leqslant 0\} \quad .$$

Pour $q \in L$, c'est l'ensemble des valeurs éventuelles de la *vitesse à droite* $u^+ = \dot{q}^+$ cinématiquement compatibles avec le respect des liaisons unilatérales ; on appelle usuellement $V(q)$ le *cône tangent* au point q de L . Symétriquement, $-V(q)$ est l'ensemble des valeurs éventuelles de la *vitesse à gauche* compatibles avec le respect des liaisons unilatérales.

Pour les mouvements réguliers, dont la dynamique est régie par (2.1) , l'existence de l'accélération $\ddot{q}$ entraîne la continuité de la vitesse $u = \dot{q}^+ = \dot{q}^-$. On trouve alors que (2.1) entraîne une inclusion différentielle *plus forte*

$$(2.3) \qquad -\frac{du}{dt} + Q(t,q) \in \partial\psi_{V(q)}(u) \quad ;$$

l'ensemble écrit au second membre est *le cône normal sortant au point* u *de* $V(q)$. Jointes à

$$(2.4) \qquad q(t) = q_o + \int_{t_o}^{t} u(\tau)d\tau$$

et à une donnée initiale $u(t_o) = u_o$ les inclusions différentielles de cette sorte jouent un rôle crucial dans toute la suite. Dès ce parag. 4 on montre comment une discrétisation temporelle de (2.3) de *type implicite* ramène la détermination de la suite u_i des valeurs d'un approximant à des opérations de projection ou *proximations* (au sens de la distance euclidienne de E) ; h_i désigne la durée du pas :

$$(2.5) \qquad q_{i+1} = q_i + h_i u_i$$

$$(2.6) \qquad u_{i+1} = \text{prox}\ (V(q_{i+1})\ ,\ u_i + h_i Q(t_i, q_{i+1}))\ .$$

Le parag. 5 aborde l'éventualité de *choc*, laquelle ne peut être esquivée si, par exemple, à l'issue d'un épisode de mouvement régulier tel qu'étudié ci-dessus, l'un des $f_\alpha(q(t))$, précédemment < 0 , atteint la valeur 0 à un instant t_c : la liaison unilatérale de condition $f_\alpha \leqslant 0$ devient "active" ; brusquement l'ensemble $J(q(t))$ s'accroît ; l'ensemble $V(q(t))$ décroît.

On rappelle l'argumentation traditionnelle de la dynamique des *percussions* : la percussion de liaison représente l'intégrale, sur la durée "infiniment brève" du choc, des réactions "infiniment grandes" mises en oeuvre. Admettre que, durant ce phénomène, l'hypothèse de non frottement reste valide est classiquement insuffisant pour la détermination complète de la vitesse après choc $u^+(t_c)$. L'hypothèse additionnelle de conservation de l'énergie caractérise les chocs dits *élastiques*. Dans le cas particulier où $J(q)$ se réduit à un singleton $\{\alpha\}$ la conservation de l'énergie équivaut banalement à la règle de *réflexion* : au sens de la métrique euclidienne de E (définie, rappelons-le, par l'expression de l'énergie cinétique), $u^+(t_c)$ est symétrique de $u^-(t_c)$ par rapport à l'hyperplan tangent à l'hypersurface $f_\alpha = 0$. Par contre, si plusieurs liaisons unilatérales sont actives à l'instant t_c , l'hypothèse de conservation de l'énergie ne suffit plus en général pour caractériser $u^+(t_c)$ (on indique toutefois un cas usuel où tout se passe encore bien).

Le parag. 6 fixe un plan et des notations communes à tous les algorithmes de discrétisation du temps présentés dans la suite. L'exemple de base est celui d'un point de masse unité, mobile sans liaison surimposée dans l'espace euclidien E et soumis à un champ de forces Q constant sur l'espace et le temps. Pour alléger l'écriture, on se restreint à des discrétisations $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots$ de pas $h = t_{i+1} - t_i$ constant. La fonction vitesse $t \to u(t) \in E$ est approchée par une fonction u_{app} *en escalier, continue à droite*, de valeur u_i sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$.

La fonction position $t \to q(t) \in E$ est approchée par une primitive de u_{app}, donc affine sur chaque intervalle et continue partout. L'équation de la dynamique est alors discrétisée en

$$(2.7) \qquad q_{i+1} = q_i + h\, u_i \quad , \quad u_{i+1} = u_i + h\, Q$$

ce qui fait une méthode d'Euler, classiquement d'ordre 1 . Toutefois, par l'emploi d'une "procédure d'entrée" (ajustement aux données initiales) et d'une "procédure de sortie" (lecture des valeurs des approximantes u_{app}, q_{app}) basées sur les milieux des intervalles, la précision est améliorée au point de fournir la solution exacte du problème modèle à champ constant. On peut dire qu'il s'agit d'une méthode "d'ordre 3/2" (d'ordre 1 en u et d'ordre 2 en q) .

Le parag. 7 calcule le mouvement d'un système soumis, outre une loi de forces $(t,q) \to Q$, à une liaison unilatérale sans frottement, d'effet géométrique exprimé par *une seule inégalité* $f(q) \leq 0$. Les chocs éventuels sont supposés *élastiques*, donc régis par la loi de réflexion rappelée au parag. 5 .

Tant qu'il s'agit de mouvements genre "billard" (traversées de la région $f < 0$, séparées par des réflexions sur la frontière ; cf. Planche 1) l'écriture d'un algorithme n'exige pas de précaution particulière. Mais on ambitionne de fournir des méthodes numériques s'appliquant aussi bien, si les données initiales y conduisent, à des mouvements avec persistance des contacts. Un accident possible dans ce cas est une oscillation numérique engendrant des incursions divergentes erronées dans la région $f < 0$ (cf. Essai 3 , Planche 3) . On maîtrise ce phénomène en conduisant la discrétisation de manière à *équilibrer le bilan énergétique*

de chaque pas. Nous dénommons ELAST l'algorithme ainsi construit.

Abandonnant l'hypothèse de conservation de l'énergie, le parag. 8 présente le concept de *choc inélastique standard*, récemment proposé par l'auteur [2][3] : quel que soit le nombre de liaisons unilatérales actives à l'instant t_c du choc, on pose que u_c^+ égale *la projection de* u_c^- *sur le cône* $V(q(t_c))$.

Le parag. 9 fait ressortir l'intérêt de ce type de chocs. On récrit l'inclusion différentielle (2.3) sous une forme qui conserve un sens lorsque la fonction u est discontinue, mais tout au moins *à variation bornée*. Alors l'objet mathématique représentant l'accélération n'est plus en général une fonction mais une *mesure vectorielle* sur l'intervalle de temps concerné, notée du, appelée *mesure différentielle* de la fonction u . L'accélération proprement dite, lorsqu'elle existe sur un intervalle, est la densité de cette mesure par rapport à la mesure de Lebesgue dt . C'est l'esprit même de la théorie traditionnelle des percussions. Pour tout épisode de mouvement régulier, l'écriture proposée est équivalente à (2.3) ; d'autre part, en cas de saut de u ce sont précisément les conditions d'un choc inélastique standard que l'on obtient.

Le parag. 10 développe un algorithme de discrétisation du temps, baptisé INEL, pour calculer la solution du problème ci-dessus consécutive à des données initiales. L'approximante u_{app} étant en escalier, sa mesure différentielle consiste en atomes portés par les points t_i , de valeurs (vectorielles) respectivement égales aux sauts de u_{app} en ces points. L'approximation de la loi d'évolution précédente s'exprime alors sous la forme déjà écrite en (2.5) , (2.6) . Cela demande, à chaque pas,

la résolution d'un problème de programmation quadratique, d'autant plus simple que le nombre de liaisons unilatérales actives dans le pas considéré est petit (le cône $V(q_{i+1})$ est l'intersection d'un nombre égal de demi-espaces ; ce cône est l'espace entier si aucune liaison unilatérale n'est active, ce qui ramène à (2.7)) . Les Essais 5, 6, 7, 8, (parag. 15) permettent de juger la qualité de cet algorithme. Un défaut (il apparaîtra négligeable au stade ultérieur, lorsqu'on introduira en outre un frottement) est que, même en l'absence de choc, la solution approchée exhibe une certaine dissipation d'énergie, d'autant plus faible que la discrétisation est plus fine. On l'explique aisément comme une "rugosité numérique" des frontières ; remédier à ce défaut entre dans le cadre général des *corrections de courbure* non abordées dans ce rapport (rappelons qu'à un stade ultérieur, il faudra aussi prendre en compte la variation des a_{ij} avec q , ce qui exprime a priori une courbure de la variété $\mathcal{Q}$.

Le reste du rapport est consacré à la prise en compte d'un *frottement sec* au cas de contact entre deux pièces du système. Il est supposé qu'*une seule inégalité* $f(q) \leq 0$ caractérise à chaque instant l'ensemble L des positions permises.

Le parag. 11 donne une formulation nouvelle de la loi d'un tel frottement, avec anisotropie éventuelle des surfaces en contact. On prouve en appendice l'équivalence de cette écriture à une formulation proposée anciennement par l'auteur. La nouveauté est ici d'éviter la décomposition traditionnelle de la réaction $\vec{R}$ au contact en une composante normale et une composante tangentielle. On énonce au lieu de cela une relation

de forme "conique", assez commode à traduire dans le formalisme de la dynamique analytique. L'exploitation de cette loi de frottement dans le calcul du mouvement par discrétisation du temps peut être vue comme une généralisation de l'algorithme INEL. Comme dans ce dernier, le caractère conique de la loi de la réaction au contact permet à l'algorithme d'appréhender automatiquement les chocs éventuels qui seront alors traités comme *inélastiques*.

L'algorithme n'est développé complètement que dans deux cas particuliers.

Le parag. 12 traite le cas élémentaire du système constitué par un simple point matériel confiné unilatéralement par une paroi, avec frottement sec en cas de contact. Comme dans tout ce rapport, l'équation $f = 0$ de la paroi est supposée indépendante du temps, mais grâce à un changement de repère, une paroi mobile se ramène à ce cas. Cette technique fait l'objet de l'Essai 9, parag. 15, concernant le mouvement d'un petit objet posé sur une table à secousses.

Le parag. 13 envisage des systèmes plus complexes, mais avec l'hypothèse simplificatrice d'un *frottement bidimensionnel* : le cône de frottement est réduit à une région angulaire d'un plan, dépendant a priori de q. Moyennant cela, le problème de programmation quadratique à résoudre à chaque pas consiste simplement, dans l'espace euclidien E de dimension n, en la projection de l'origine sur un segment de droite ou sur une demi droite.

Le parag. 14 détaille la mise en oeuvre de l'algorithme pour le système constitué par un seul solide en mouvement plan, confiné dans la région $y \geqslant 0$. Ce système est utilisé dans l'Essai, parag. 15, pour

modéliser le mouvement de *broutage* d'un solide forcé élastiquement à se déplacer contre une paroi plane, avec frottement au contact. Ressortent, selon les valeurs des constantes, divers types de régimes, avec éventuellement cessation épisodique du contact, soit périodiques, soit doublement périodiques, soit sans ordre apparent.

Le parag. 15 rend compte d'un certain nombre d'essais et commente les planches rassemblées à la fin du volume.

3. CARACTÉRISATION DES MOUVEMENTS RÉGULIERS

On ne considère dans ce rapport que des systèmes *de liberté finie* : par hypothèse l'ensemble des positions possibles d'un tel système est paramétré, au moins localement, par n variables $q^1, q^2, \ldots, q^n$. Cette restriction de liberté est la conséquence de liaisons supposées, sans autre analyse, *parfaites*. Ainsi, dans un mécanisme, toute partie qu'on aura accepté de traiter comme un *solide parfaitement rigide* voit sa position générale repérée par 6 paramètres ; cette rigidité constitue une liaison parfaite, en ce sens que les efforts intérieurs dudit solide, efforts assurant au cours du mouvement effectif l'indéformabilité, présentent une puissance nulle pour tout état de vitesse imaginé, compatible avec ladite indéformabilité (élémentairement, cette propriété équivaut à la nullité de la résultante et du moment résultant des efforts en question).

On sait comment la méthode de Lagrange permet d'écrire les équations de la dynamique d'un système à liaisons parfaites : la première étape est la construction de l'expression générique de l'énergie cinétique T comme fonction des paramètres q^i , de leurs dérivées par rapport au temps notées $\dot{q}^i$ et éventuellement aussi du temps t en tant que variable indépendante.

Pour alléger les calculs, on se limite dans ce rapport au cas d'un système dit *scléronomique*, i.e. à *liaisons indépendantes du temps*. Cela implique que les éventuelles "commandes", fonctions données du temps, exercées sur lui se décrivent uniquement en définissant explicitement certaines forces ; les pièces extérieures sur lesquelles le système serait

articulé sont, dans cette hypothèse, fixes et ne peuvent donc transmettre une commande. Alors l'expression générique de l'énergie cinétique est une forme quadratique $\geqslant 0$ par rapport aux $\dot{q}^i$

$$(3.1) \qquad T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\, a_{ij}(q)\dot{q}^i\, \dot{q}^j \ ,$$

avec des coefficients $a_{ij} = a_{ji}$ fonctions connues du n-uplet $q = (q^1, q^2, \ldots, q^n)$, mais constantes par rapport à la variable t .

La variation des a_{ij} avec q entraîne des complications de calcul inessentielles ; on se limite dans toute la suite au cas où, par un choix convenable du paramétrage, on peut obtenir que *les fonctions* a_{ij} *soient des constantes* . Le paramétrage est naturellement supposé *régulier*, de sorte que la forme quadratique ci-dessus se trouve *définie positive* ; un dernier changement de paramètre permet alors d'obtenir que $[a_{ij}]$ soit la matrice unité d'où

$$(3.2) \qquad T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\, \dot{q}^i \dot{q}^i \ .$$

Autrement dit le système est (au moins sur un voisinage de chaque position) analytiquement équivalent à un *point de masse unité dans un espace vectoriel euclidien* E , *de dimension* n . Dans cet espace, les q^i sont les coordonnées cartésiennes orthonormées du point noté q .

Des forces, fonctions données de q et t , sont par ailleurs appliquées : leurs *composantes covariantes* $Q_i(t,q)$ (coefficients de la forme différentielle "travail virtuel") définissent un champ vectoriel Q , dépendant a priori de t , dans la région concernée de E .

Enfin, le système est supposé soumis à des *liaisons unilatérales* dont l'effet géométrique s'exprime par ν inégalités

$$(3.3) \qquad f_\alpha(q) \leqslant 0 \quad , \quad \alpha \in \{1,2,\ldots,\nu\} \quad ,$$

définissant une région fermée L de E . Les f_α sont ν fonctions réelles continûment différentiables au moins une fois, indépendantes du temps pour simplifier. On fait de plus l'hypothèse

$$(3.4) \qquad \text{grad } f_\alpha(q) \neq 0 \ ,$$

au moins pour q dans un voisinage de l'hypersurface $f_\alpha = 0$.

Pour tout t tel que les dérivées secondes $\ddot{q}^i$ existent, les n équations de Lagrange prennent la forme d'une équation différentielle dans l'espace vectoriel E ,

$$(3.5) \qquad \ddot{q} = Q(t,q) + r$$

où r , de composantes r_i , représente la totalité des *forces de liaison* mises en jeu par la réalisation matérielle des liaisons unilatérales en question.

La prédiction du mouvement exige une information sur r . Rappelons qu'en mécanique, la description d'une liaison exige fondamentalement plus que la donnée des conditions géométriques — ici les inégalités (3.3) — que cette liaison assure.

Une première partie de ce rapport est développée dans l'hypothèse de *non frottement* qu'on peut introduire comme suit : Imaginons que, pour chacune des valeurs de α , l'inégalité (3.3) exprime *l'impénétrabilité*

mutuelle de deux solides, à frontière suffisamment régulière. Alors l'égalité $f_\alpha(q) = 0$ signifie, que dans la position q du système, le contact α a lieu. Les forces s'exerçant sur le système au niveau de ce contact ont, relativement au paramétrage (q^i), des composantes covariantes notées r_i^α, définissant un élément r^α de E. L'élément r écrit en (3.5) vaut ainsi

$$(3.6) \qquad r = \sum_{\alpha=1}^{\nu} r^\alpha$$

Jusqu'au parag. 11, où sera introduit le frottement, nous posons que les r^α obéissent aux lois suivantes :

1° Pour tout q tel que $f_\alpha(q) < 0$ (i.e. le contact α n'a pas lieu), $r^\alpha = 0$.

2° Pour tout q tel que $f_\alpha(q) = 0$, le contact est sans frottement : comme on le montre classiquement, cela s'écrit

$$(3.7) \qquad \exists\, \lambda_\alpha \in \mathbb{R} : r^\alpha = -\lambda^\alpha \operatorname{grad} f_\alpha(q) .$$

La convention de sommation d'Einstein ne sera jamais appliquée aux indices grecs.

3° En cas de contact, chaque corps subit une réaction dirigée vers son intérieur, ce qui se traduit par

$$(3.8) \qquad \lambda_\alpha \geqslant 0 .$$

Cette dernière hypothèse implique *l'absence d'adhésion* pour tout contact éventuel.

On résume ces conditions en notant, pour tout q,

(3.9) $\quad J(q) = \{\alpha \in \{1,2,\ldots,\nu\} : f_\alpha(q) \geqslant 0\}$,

puis en appelant $N(q)$ le *cône convexe engendré dans* E *par les* grad $f_\alpha(q)$, $\alpha \in J(q)$ (conventionnellement réduit au zéro de E si $J(q) = \phi$) , i.e.

(3.10) $\quad N(q) = \{s \in E : s = \sum_{\alpha \in J(q)} \lambda^\alpha \text{ grad } f_\alpha(q) \ , \ \lambda^\alpha \geqslant 0\}$.

Alors, pour tout mouvement $t \longrightarrow q(t)$ tel que l'accélération $\ddot{q}$ existe, l'élimination de r entre (3.5) et les conditions précédentes laisse *l'inclusion différentielle*

(3.11) $\quad -\ddot{q} + Q(t,q) \in N(q)$,

à joindre à la condition géométrique (3.3) , i.e.

(3.12) $\quad \forall\, t \ : \ q(t) \in L$.

Noter que, si q appartient à la frontière de L , $N(q)$ est ce qu'on appelle classiquement le *cône normal sortant* en ce point à la région L . En particulier, si $J(q)$ se réduit à un seul élément α , le cône $N(q)$ consiste simplement en la demi-droite engendrée dans E par grad $f_\alpha(q)$ (gradient non nul par hypothèse), c'est-à-dire la *demi-normale sortante* au point régulier q de l'hypersurface $f_\alpha = 0$.

Lorsque q appartient à l'intérieur de la région L , $N(q)$ se réduit au zéro de E et (3.11) devient l'équation différentielle usuelle de la dynamique d'un point libre soumis à la force Q .

Pour l'étude ultérieure de solutions approchées, lesquelles violent éventuellement la condition $q(t) \in L$ il est important d'observer

que (3.9) et (3.10) définissent $N(q)$ même pour $q \notin L$ (à la différence de ce qui était fait dans [3], où le préalable $q \in L$ permettrait, dans la définition de $J(q)$, d'écrire $f_\alpha(q) = 0$ au lieu de $f_\alpha(q) \geqslant 0$).

4. PROPRIÉTÉS CINÉMATIQUES

Soit $t \to q(t)$, à valeurs dans la région L . Pour t tel que la *vitesse à droite* $\dot{q}^+(t)$ existe, on trouve élémentairement,

(4.1) $\dot{q}^+(t) \in V(q(t))$

en posant, pour tout q , avec $J(q)$ défini en (3.9) ,

(4.2) $V(q) = \{v \in E : \forall \alpha \in J(q) , v.\text{grad } f_\alpha(q) \leqslant 0\}$.

Autrement dit, $V(q)$ est le *cône polaire* du cône $N(q)$ défini en (3.10) . Classiquement, si $q \in L$, ce cône est appelé *cône tangent* en ce point à la région L ; pour q intérieur à L , $V(q)$ est l'espace E tout entier.

Si la vitesse à gauche $\dot{q}^-(t)$ existe, elle appartient, symétriquement, à $-V(q)$. A tout instant tel que $t \to q(t)$ soit dérivable bilatéralement, la dérivée $\dot{q}$ appartient donc à $V(q) \cap -V(q)$, *espace vectoriel orthogonal à l'ensemble* $N(q)$.

Appliquons cette remarque à l'étude du mouvement du système *sur un intervalle de temps où la dérivée seconde* $\ddot{q}$ *est supposée exister* au sens élémentaire. En prenant comme inconnue auxiliaire la vitesse, soit

(4.3) $u(t) = \dot{q}(t)$,

on récrit (3.11) sous la forme

(4.4) $-\dfrac{du}{dt} + Q(t,q(t)) \in N(q(t))$

à joindre à

$$(4.5) \qquad q(t) = q_o + \int_{t_o}^{t} u(\tau)d\tau \ ,$$

où q_o désigne la valeur de $q(t)$ pour un instant, dit initial, t_o .

D'après ce qu'on vient de voir, $u(t)$ est orthogonal à l'ensemble $N(q(t))$, donc orthogonal au premier membre de (4.4) si cette inclusion différentielle est satisfaite. Cela montre que ce premier membre, d'une part, et l'élément $u(t)$ de $V(q(t))$, d'autre part, sont des *points conjugués* par rapport au couple de *fonctions convexes duales* $\psi_{N(q(t))}$ et $\psi_{V(q(t))}$, fonctions indicatrices des deux cônes mutuellement polaires en question. De façon équivalente

$$(4.6) \qquad -\frac{du}{dt} + Q(t,q) \in \partial\psi_{V(q)}(u) \ ,$$

inclusion différentielle *plus forte* que (4.4) . Rappelons que le *sous-différentiel* $\partial\psi_V(u)$ constitue le cône normal sortant au point u de l'ensemble convexe fermé V ; ce sous-différentiel est vide si $u \notin V$. De façon symétrique on trouve

$$(4.7) \qquad -\frac{du}{dt} + Q(t,q) \in -\partial\psi_{-V(q)}(u) \ .$$

Aucune dissymétrie n'apparaît au stade présent entre les deux sens du temps. Corrélativement, l'orthogonalité susdite fournit *l'équation de l'énergie*

$$(4.8) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|u|^2\right) = Q.\,u$$

exactement comme pour un système à liaisons bilatérales sans frottement ; nous avons supposé, rappelons-le, que *toutes les liaisons sont indépendantes du temps*. En introduction aux paragraphes ultérieurs, examinons comment (4.6) ou (4.7) suggèrent des *algorithmes à temps discrétisé* pour le calcul du mouvement.

On choisit une suite strictement croissante $t_o, t_1, \ldots, t_i, \ldots$. On note $h_i = t_i - t_{i-1}$ la longueur du i-ème pas. Soient q_i , u_i des approximants de $q(t_i)$, $u(t_i)$; on adopte $(u_i - u_{i-1})/h_i$ comme approximant de du/dt sur le i-ème pas. On note simplement V l'ensemble $V(q)$ lorsqu'on donne à q une certaine valeur q' dite *valeur de référence* de q sur ce pas (selon les types de méthode, q' pourra être par exemple q_{i-1} ou q_i ou $q_{i-1} + h_i u_{i-1}/2$, etc...) . Alors, si l'on calcule aussi la valeur de Q en un point de référence du pas, (4.6) pourra être approché par une "discrétisation de type implicite"

$$(4.9) \qquad -\frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} + Q \in \partial\psi_V(u_i)$$

ou, de façon équivalente, puisque $h_i > 0$ et que l'ensemble $\partial\psi_V(u_i)$ est *conique*

$$(4.10) \qquad u_{i-1} + h_i Q - u_i \in \partial\psi_V(u_i) \ .$$

Une discrétisation "de type explicite" consisterait à remplacer $u(t)$ par u_{i-1} au second membre de (4.6) , d'où

$$(4.11) \qquad u_{i-1} + h_i Q - u_i \in \partial\psi_V(u_{i-1}) \ .$$

En opérant de même avec (4.7) on obtient les deux autres discrétisations

(4.12) $\quad u_i - h_i Q - u_{i-1} \in \partial\psi_{-V}(u_i)$

(4.13) $\quad u_i - h_i Q - u_{i-1} \in \partial\psi_{-V}(u_{i-1})$

La caractérisation classique du *point proximal*, ou "projection", d'un point donné sur un convexe fermé montre que (4.10) équivaut à

(4.14) $\quad u_i = \text{prox}\,(V\,,\, u_{i-1} + h_i Q)$.

Jointe à une discrétisation convenable de (4.5) , cette relation permet la détermination, de proche en proche, des u_i , q_i dans l'ordre croissant des indices ; de là une approximation du mouvement sur un intervalle de temps faisant suite à l'instant t_o , avec données initiales q_o , u_o .

Symétriquement, (4.13) équivaut à

$$u_{i-1} = \text{prox}\,(-V\,,\, u_i - h_i Q)$$

qui servirait à résoudre des problèmes d'inférence rétrograde. Par contre, ni (4.11) ni (4.12) ne se résolvent en une expression univoque de u_i ou u_{i-1} : elles n'engendrent pas de méthode de calcul.

REMARQUE 1 . La propriété (4.14) est l'analogue discret d'une *caractérisation extrêmale de l'accélération* [11] , [12] qui généralise au cas de systèmes à liaisons unilatérales sans frottement le "principe de moindre contrainte" de Gauss-Appell.

REMARQUE 2 . Le premier membre de (4.9) est un approximant de la réaction r , élément de E représentant les *forces de contact* ;

le Théorème des deux cônes (cf. parag. 7 ci-après) fournirait, symétriquement à (4.14) , une caractérisation extrêmale de cette réaction.

REMARQUE 3 . A l'inclusion différentielle (3.11) nous avions dû adjoindre la condition géométrique (3.12) des liaisons unilatérales considérées. Que la discrétisation précédente ait permis un calcul de proche en proche des u_i sans invoquer cette condition suggère qu'elle est désormais devenue redondante. De fait on suppose naturellement que la position initiale q_o appartient à L , c'est à dire que, pour tout α , on a $f_\alpha(q_o) \leqslant 0$. La solution supposée $t \to q(t)$ de l'inclusion différentielle (4.6) est continue, puisque dérivable ; s'il existait t dans l'intervalle de temps considéré tel que $f_\alpha(q(t)) > 0$, on conclurait l'existence de τ tel que $f_\alpha(q(\tau)) = 0$ et d'un intervalle non nul $]\tau , \tau + \varepsilon]$ sur lequel $f_\alpha(q(t)) > 0$. Vu (4.6) , le sous-différentiel $\partial\psi_{V(q(t))}(u(t))$ est non vide pour tout t , donc $u(t) \in V(q(t))$.
D'après la définition de V , on aurait donc, pour tout $t \in [\tau , \tau + \varepsilon]$,

$$\frac{d}{dt} f_\alpha(q(t)) = u(t).\text{grad } f_\alpha(q(t)) \leqslant 0$$

Par intégration sur l'intervalle $[\tau , \tau + \varepsilon]$, on en tire $f_\alpha(q(\tau + \varepsilon)) \leqslant 0$, ce qui est contradictoire.

5. CHOCS ÉLASTIQUES

Rappelons, en utilisant le cadre cinématique du parag. précédent, l'argumentation traditionnelle de la dynamique des chocs.

Soit t_c la fin d'un intervalle de temps sur lequel le mouvement est supposé régulier. Si la vitesse à gauche $u^-(t_c)$, notée abréviativement u_c^- , n'appartient pas à $V(q_c)$, $q_c = q(t_c)$, une discontinuité de vitesse intervient nécessairement. Elle ne peut résulter que d'un processus brutal, appelé choc, non proprement régi par l'équation (3.5) de la dynamique "douce".

L'idée directrice en ce cas est de relaxer la schématisation sous laquelle on avait décidé de décrire le système réel étudié. On acceptera donc que les pièces, jusqu'à présent traitées comme parfaitement rigides, se déforment quelque peu durant un intervalle de temps très court $[t_c - \varepsilon , t_c + \varepsilon]$. Au cours de ce processus, la réaction r est susceptible de prendre des valeurs très grandes, permettant cependant l'écriture de (3.5) . On égale les intégrales des deux membres de cette équation sur l'intervalle en cause ; vu la petitesse de la durée 2ε , l'intégrale du terme de champ continu Q est négligée et il reste, en notant u_c^+ la vitesse de *fin de choc*

$$(5.1) \qquad u_c^+ - u_c^- = P \quad .$$

La *percussion de liaison* P , intégrale de la force de liaison r , *laquelle est supposée appartenir pendant tout l'intervalle au même cône*

convexe $-N(q_c)$, vérifiera elle-même

(5.2) $\quad P \in -N(q_c)$

(cet argument ne doit pas être accepté aveuglément : voir une discussion dans [24] , parag. 9.7.c) .

Dans les cas usuels, u_c^+ constitue la limite à droite $u^+(t_c)$ d'une phase de mouvement régulier faisant suite au choc, d'où, comme en (4.1) , la condition cinématique

(5.3) $\quad u_c^+ \in V(q_c)$.

Même dans le cas simple où $J(q_c)$ se réduit à un seul élément, il est classique que les conditions (5.1) , (5.2) , (5.3) , avec q_c et u_c^- supposés connus, ne suffisent pas à déterminer u_c^+ .

Le choc est traditionnellement dit *élastique* si l'énergie cinétique est conservée, c'est-à-dire $|u_c^+| = |u_c^-|$ (rappelons que la forme quadratique $\dot{q} \longrightarrow T$ a été utilisée pour définir la métrique euclidienne de E , espace vectoriel tangent au point q_c de la variété des positions du système).

Lorsque $J(q_c)$ se réduit, pour fixer les idées, au singleton $\{1\}$, cette hypothèse de conservation de l'énergie adjointe à (5.1) , (5.2) et (5.3) , fournit par un calcul facile ou un raisonnement géométrique élémentaire dans E

$$(5.4) \qquad u_c^+ = u_c^- - 2\,\frac{u_c^-.\mathrm{grad}\ f_1(q_c)}{|\mathrm{grad}\ f_1(q_c)|^2}\ \mathrm{grad}\ f_1(q_c)$$

$$= \mathrm{refl}_T\ u_c^-$$

On note ici refl_T l'opération de *réflexion* d'un vecteur par rapport à T , hyperplan vectoriel tangent au point q_c de l'hypersurface $f_1 = 0$.

Toujours avec $J(q_c) = \{1\}$, le choc est dit *inélastique* (ou *mou*) si, au lieu de (5.4) , on a

$$(5.5) \qquad u_c^+ = \mathrm{proj}_T\, u_c^-$$

situation qui sera généralisée au parag. 8 et qui implique au contraire une *dissipation d'énergie*.

REMARQUE 1 . L'hypothèse d'un choc conservant l'énergie est souvent faite par raison de commodité mais, en pratique, hasardeuse. Même si l'on a de bonnes raisons d'estimer que les matériaux constituant le système étudié évoluent sans dissipation, les objections suivantes se présentent : la déformation "très petite" évoquée ne concerne pas seulement les deux pièces supposées venir en contact à l'instant t_c . Par l'effet des liaisons du système, elle peut affecter d'autres pièces ainsi que les corps extérieurs (macroscopiquement fixes par hypothèse, mais microscopiquement déformables) que ces pièces touchent. A l'intérieur de tous ces solides légèrement déformables, elle peut en outre se propager dynamiquement. Après cessation du contact, les divers corps impliqués resteront ainsi en vibration ce qui, à l'échelle de description qui nous concerne, constitue une dissipation d'énergie.

C'est seulement si l'on a des raisons sérieuses de penser que toute la déformation reste localisée au voisinage du point de contact, et qu'elle a repris la valeur zéro lors de la cessation de ce contact, qu'on peut tabler sur la conservation de l'énergie.

REMARQUE 2 . La conservation de l'énergie fournit par (5.4) , lorsque $J(q_c)$ se réduit à un singleton, le moyen de déterminer complètement u_c^+ . Si cette assertion de conservation de l'énergie vient au terme d'une analyse dans la ligne de la Remarque 1 ci-dessus, il apparaîtra parfois légitime d'écrire une relation de la forme (5.4) pour *chacun* des $\alpha \in J(q_c)$. Le cas le plus clair est le suivant :

On suppose que le système étudié est la conjonction de deux systèmes $\check{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{S}}$ (on étendra aisément ce qui suit au cas d'un nombre fini quelconque de tels sous-systèmes) de variétés de configurations respectives $\check{\mathcal{Q}}$ et $\hat{\mathcal{Q}}$.

On suppose que l'interaction entre $\check{\mathcal{S}}$ et $\hat{\mathcal{S}}$ se formule exclusivement au moyen de forces, fonctions explicites des configurations (ou éventuellement des vitesses) et *non par des liaisons*. Alors $\mathcal{Q}$ est la variété produit $\check{\mathcal{Q}} \times \hat{\mathcal{Q}}$; l'espace vectoriel tangent au point $q = (\check{q},\hat{q})$ de ce produit se représente sous la forme $\check{E} \oplus \hat{E}$. L'expression de l'énergie cinétique se décompose en

$$T(q,\dot{q}) = \check{T}(q,\check{\dot{q}}) + \hat{T}(q,\hat{\dot{q}}) \quad .$$

Les deux formes quadratiques $\check{\dot{q}} \longrightarrow \check{T}$ et $\hat{\dot{q}} \longrightarrow \hat{T}$ munissent $\check{E}$ et $\hat{E}$ respectivement de structures euclidiennes ; E est le produit euclidien de $\check{E}$ et $\hat{E}$.

On suppose qu'à l'instant t_c du choc sont actives au plus deux liaisons unilatérales $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$, affectant respectivement les deux sous-systèmes de manières séparées, c'est-à-dire, en rappelant que q consiste dans le couple $(\check{q},\hat{q})$,

$$f_1(q) \equiv \check{f}(\check{q}) \qquad , \qquad f_2(q) \equiv \hat{f}(\hat{q})$$

Alors, dans l'espace euclidien $E = \check{E} \oplus \hat{E}$,

$$\text{grad } f_1(q) = (\text{grad } \check{f}(\check{q}) \ , \ 0)$$

$$\text{grad } f_2(q) = (0 \ , \ \text{grad } \hat{f}(\hat{q})) \ .$$

Par hypothèse, les interactions entre les parties $\check{\mathcal{E}}$ et $\hat{\mathcal{E}}$ du système s'expriment uniquement dans le champ continu désigné plus haut par Q . L'analyse faite au début de ce paragraphe s'applique donc *séparément* à $\check{\mathcal{E}}$ et $\hat{\mathcal{E}}$ et met en évidence deux percussions de liaison

$$\check{P} = - \check{\Lambda} \text{ grad } \check{f}(\check{q}) \in \check{E}$$
$$\hat{P} = - \hat{\Lambda} \text{ grad } \hat{f}(\hat{q}) \in \hat{E}$$

Chaque valeur de u est un couple $(\check{u},\hat{u}) \in \check{E} \oplus \hat{E}$. La condition de conservation de l'énergie de $\check{\mathcal{E}}$, soit $|\check{u}_c^+|^2 = |\check{u}_c^-|^2$, donne

$$\check{\Lambda} = \frac{2}{|\text{grad } \check{f}|^2} \ \check{u}_c^- . \text{grad } \check{f}$$

et calcul semblable pour $\hat{\Lambda}$ d'où finalement la relation suivante au sens de l'espace euclidien E

$$u_c^+ = u_c^- - 2 \frac{u_c^- . \text{grad } f_1(q_c)}{|\text{grad } f_1(q_c)|^2} \text{ grad } f_1(q_c)$$

$$- 2 \frac{u_c^- . \text{grad } f_2(q_c)}{|\text{grad } f_2(q_c)|^2} \text{ grad } f_2(q_c)$$

En langage géométrique, cela signifie que u_c^+ résulte de u_c^- par le produit des deux réflexions relatives aux deux hyperplans T_1 et T_2, tangents respectifs au point q_c aux deux hypersurfaces $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ de la variété $\mathcal{Q}$. *Ces deux réflexions commutent* parce que les deux hyperplans sont orthogonaux dans E. Un fait corrélatif de cette commutativité est le suivant : si on considère un mouvement, consécutif à des conditions voisines des précédentes, dans lequel les discontinuités de $\check{u}$ et $\hat{u}$ ne se produisent pas rigoureusement au même instant t_c, mais à des instants voisins, la vitesse finale ne dépendra pas de l'ordre dans lequel ces deux discontinuités sont intervenues. *Cela ne serait plus vrai si* grad f_1 et grad f_2 *n'étaient pas orthogonaux.*

Le présent rapport ne traite pas de problèmes de liberté infinie ; rappelons toutefois que d'assez nombreux travaux actuels sont consacrés à la dynamique d'une corde vibrante en présence d'obstacles. Souvent, dans ces études, il est admis que pour chaque particule de la corde venant toucher l'obstacle, la vitesse (purement transversale, vu l'hypothèse des petits mouvements) de cette particule est instantanément multipliée par -1. De notre point de vue la justification de cette règle se trouve dans l'analyse d'un "découplage" du type présenté ci-dessus.

REMARQUE 3 . Tout ce qui précède est exposé dans l'hypothèse traditionnelle d'un choc séparant deux épisodes réguliers, ce qui sous-entend l'existence des limites à droite et à gauche pour les fonctions concernées de t. Le stade suivant de l'analyse sera d'inférer à partir de là une formulation synthétique des problèmes. Dans le cadre de cette

formulation synthétique il ne sera plus évident que les solutions éventuelles aient une forme aussi simple (cf., pour des problèmes dissipatifs [39]) .

Le présent rapport n'aborde *aucune étude d'existence de solutions, ni même de convergence d'algorithmes*. Pour le cas des chocs élastiques, moyennant des hypothèses de commodité mathématique (existence d'un paramétrage q^i permettant d'identifier la région L à un convexe de $\mathbb{R}^n$) une telle étude est développée dans [8] . Dans le cas des chocs inélastiques la question fait l'objet des travaux en cours de MONTEIRO MARQUES [5] [6] [7] [31] .

6. STRUCTURE COMMUNE AUX ALGORITHMES PRÉSENTÉS

La formulation qu'on vient de donner pour la dynamique d'un système à liaisons unilatérales sans frottement, ainsi que les autres lois d'évolution qui seront envisagées dans la suite de ce rapport, suggèrent immédiatement des algorithmes de calcul numérique (on en a déjà examinés au parag. 4) . Les possibilités dans ce sens sont extrêmement variées. L'objet du rapport est seulement de montrer des procédures praticables. La lisibilité exige qu'on simplifie l'itinéraire d'exploration en faisant a priori certains choix ; on les précise maintenant.

On utilisera toujours une discrétisation du temps : une suite strictement croissante $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots$ sera choisie ; on note $h_i = t_{i+1} - t_i$.

Chaque étape du calcul fera intervenir au plus deux intervalles consécutifs. On cherche en effet des algorithmes permettant de prendre en compte des chocs éventuels, survenant à des instants a priori inconnus : des méthodes "multipas" semblent a priori inadéquates (mais il ne faudrait pas fermer la voie à toute recherche dans ce sens).

Ce parti se prête tout naturellement à un choix contrôlé des instants t_i , adaptant chacune des longueurs h_i aux circonstances locales, afin d'économiser le volume de calcul. Par exemple l'usage dans le programme d'un "détecteur de choc" permettrait de raffiner le pas lors de l'analyse d'un choc, et de les distendre dans les épisodes de mouvement régulier. Cette adaptation facile ne sera pas discutée dans la suite : on simplifiera désormais l'exposition *en supposant une valeur uniforme* h *pour tous les* h_i .

Puisque les solutions qu'on cherche à calculer (leur existence est admise) comportent a priori une fonction vitesse $t \to u(t) \in E$ discontinue, un approximant éventuel $t \to u_{app}(t)$ sera discontinu aussi : on se limitera dans toute la suite à des approximants u_{app} "en escalier", *constants sur chaque intervalle* $[t_i, t_{i+1}[$, donc *continus à droite* (vu qu'on a choisi les t_i de façon non adaptative, une technique plus raffinée que celle-là admettrait des approximants discontinus sur chacun de ces intervalles, par exemple affines par morceaux : l'instant t_c d'un choc éventuel, intérieur à l'intervalle en cause, serait estimé en étudiant le signe des fonctions f_α , ces dernières elles-mêmes remplacées, au voisinage du point concerné de E , par des approximantes affines).

Dans la formulation du problème mécanique, la fonction "position" $t \to q(t)$ est toujours une primitive de u . *Dans la suite on supposera de même que l'approximant* q_{app} *est une primitive de* u_{app} , donc une fonction continue de t , affine sur chacun des intervalles.

On note u_i la valeur constante de u_{app} sur $[t_i, t_{i+1}[$; autrement dit

(6.1) $$u_i = u_{app}(t_i)$$

De même on note

(6.2) $$q_i = q_{app}(t_i)$$

Un algorithme visera la construction inductive des fonctions q_{app} , u_{app} en parcourant la succession des intervalles dans l'ordre

croissant. L'algorithme peut donc être vu comme un *simulateur* (on pourrait dire, plus pompeusement, un "morphisme") *du processus mathématique* par lequel on a modélisé le système mécanique étudié. L'utilisation de ce simulateur exige qu'on fixe des *procédures d'entrée et de sortie* ; leur choix a une influence considérable sur la précision des résultats.

Expliquons la situation au moyen du problème dynamique prototype : *le mouvement d'un point matériel de masse unité dans un champ* (pesanteur) *uniforme.*

Dans ce cas élémentaire, le champ vectoriel Q présente une valeur constante par rapport à t et q et les équations de la dynamique sont simplement

$$\frac{du}{dt} = Q \tag{6.3}$$

$$\frac{dq}{dt} = u \tag{6.4}$$

d'intégration immédiate. Le problème le plus usuel est la détermination du mouvement consécutif à des données "initiales"

$$q(t_{init}) = q_{init} \quad , \quad u(t_{init}) = u_{init} \tag{6.5}$$

problème dont la solution s'écrit ici explicitement

$$q(t) = q_{init} + (t - t_{init})u_{init} + \frac{1}{2}(t - t_{init})^2 Q \ . \tag{6.6}$$

Nous avons fait débuter à $i = 1$ le numérotage de la suite (t_i) , de pas constant choisi h . On va voir que le *calage de cette suite* par rapport à l'instant t_{init} ci-dessus est un choix crucial.

On simule naturellement (6.3) par

(6.7) $$u_{i+1} = u_i + hQ$$

(plus précisément on simule ici l'égalité des intégrales des deux membres de (6.3) sur l'intervalle d'ordre i ; la considération, au parag. 9 , d'équations concernant des mesures différentielles fera ressortir cela plus clairement). Et puisque q_{app} est continue, affine par morceaux, (6.4) est simulé par

(6.8) $$q_{i+1} = q_i + h\,u_i$$

Dans ce cas simple, la récurrence (6.7) , (6.8) se résoud sous la forme

(6.9) $$u_{i+1} = u_1 + i\,h\,Q = u_1 + (t_{i+1} - t_1)Q$$

(6.10) $$q_{i+1} = q_1 + i\,h\,u_1 + \frac{1}{2}\,i(i-1)h^2Q$$

$$= q_1 + (t_{i+1} - t_1)u_1 + \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_1)^2Q - \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_1)h\,Q$$

Ayant ici sous forme explicite l'état du simulateur, on constate que si on identifiait t_1 , q_1 , u_1 aux données t_{init} , q_{init} , u_{init} du problème posé, la fonction q_{app} réaliserait une approximation assez médiocre de la solution exacte (6.6) . En effet (6.10) montre que, avec cette identification, $q_{app}(t_{i+1})$ diffèrera de la valeur exacte $q(t_{i+1})$ par le terme $-(t_{i+1} - t_1)h\,Q/2$: erreur proportionnelle à h et au temps écoulé $t_{i+1} - t_1$.

Une exploitation bien meilleure du simulateur est basée sur les *milieux des intervalles*. Mettons d'abord cette idée en oeuvre par un calcul direct : posons pour tout $i \geqslant 0$

$$\bar{t}_i = \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1}) = t_i + \frac{h}{2}$$

$$\bar{u}_i = u_{app}(\bar{t}_i) = u_i$$

$$\bar{q}_i = q_{app}(\bar{t}_i) = q_i + \frac{h}{2} u_i$$

(on fait donc ici commencer à t_o la suite des t_i) . Dans ces notations, (6.7) et (6.8) se récrivent

$$\bar{u}_{i+1} = \bar{u}_i + h\,Q \tag{6.11}$$

$$\bar{q}_{i+1} = \bar{q}_i + \frac{1}{2}h\,\bar{u}_i + \frac{1}{2}h\,\bar{u}_{i+1} \tag{6.12}$$

récurrence qui se résoud explicitement en

$$\bar{u}_{i+1} = \bar{u}_o + (\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_o)Q$$

$$\bar{q}_{i+1} = \bar{q}_o + (\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_o)\bar{u}_o + \frac{1}{2}(\bar{t}_{i+1} - \bar{t}_o)^2 Q .$$

On voit cette fois que, si on choisit $\bar{t}_o = t_{init}$, $\bar{q}_o = q_{init}$, $\bar{u}_o = u_{init}$, les fonctions q_{app} et u_{app} coïncident rigoureusement avec la solution exacte (6.6) en tous les points $\bar{t}_i$. Pour tout t , la différence $q(t) - q_{app}(t)$ sera de l'ordre de h^2 .

Un premier procédé pour exploiter cette observation consiste à fonder systématiquement les calculs sur des récurrences du type (6.11) , (6.12) : la loi (6.11) est formellement identique à (6.7) et la loi (6.12) est à peine plus compliquée que (6.8) (cf. passage d'une méthode dite d'Euler à une méthode dite de Runge-Kutta). Toutefois, dès qu'on quitte la situation prototype traitée ci-dessus, le champ vectoriel Q n'est plus constant par rapport à q et peut aussi dépendre de t . La valeur la plus plausible à introduire au second membre de (6.11) est $Q(t_{i+1}, q_{app}(t_{i+1}))$; on n'est donc pas dispensé de calculer

$$q_{app}(t_{i+1}) = q_{i+1} = \overline{q}_i + \frac{1}{2} h\, u_i$$

qui serait atteint directement par les lois de récurrence (6.7) , (6.8) .

Une manière plus rationnelle d'effectuer *le même calcul* pour traiter le mouvement consécutif à des données initiales $q(t_{init}) = q_{init}$, $u(t_{init}) = u_{init}$ est la suivante

1° Une *procédure d'entrée* calculera un "demi-pas de démarrage" en faisant

(6.13) $\quad t_1 = t_{init} + \frac{1}{2} h$

(6.14) $\quad q_1 = q_{init} + \frac{1}{2} h\, u_{init}$

(6.15) $\quad u_o = u_{init}$

Bref, t_{init} est identifié au milieu $\overline{t}_o$ de l'intervalle d'ordre zéro et u_{init} à la valeur constante de u_{app} sur cet intervalle.

2° L'algorithme est alors construit sur l'usage de (6.7) suivi de (6.8) . La valeur de Q placée en (6.7) est $Q(t_{i+1}, q_{i+1})$.

3° Le cas prototype Q = const. nous a suggéré que c'était aux milieux des intervalles (t_i, t_{i+1}) que la fonction $t \longrightarrow q_{app}(t)$ approche le mieux la solution théorique $t \longrightarrow q(t)$. On pourra mettre cela à profit dans une *procédure de sortie* qui, au lieu des t_i , q_i , affichera

$$\bar{t}_i = t_i + \frac{1}{2}h \tag{6.16}$$

$$\bar{q}_i = q_i + \frac{1}{2}h\,u_i = q_{app}(\bar{t}_i) \tag{6.17}$$

Compte tenu de ces procédures d'entrée et de sortie, on peut dire que l'algorithme proposé est d'ordre 3/2 , en fait d'ordre 1 relativement à u et d'ordre 2 relativement à q .

.7. ALGORITHME ELAST

Un algorithme du type qu'on vient de définir va être développé pour un système dont les chocs éventuels sont *élastiques* (cf. parag. 5).

Par hypothèse, la région L de E permise par la liaison unilatérale est définie par *une seule inégalité*

(7.1) $f(q) \leqslant 0$.

Tout épisode de mouvement s'effectuant dans l'intérieur de cette région, i.e. avec $f(q(t)) < 0$, sous l'effet de la loi de force donnée $(t,q) \longrightarrow Q(t,q)$ se calcule comme on l'a vu. Le pas h est supposé constant, d'où

$$t_{i+1} = t_i + h = t_1 + i\,h$$

On fait

(7.2) $q_{i+1} = q_i + h\,u_i$

et on calcule

$$u' = u_i + h\,Q\,(t_{i+1}\,,\,q_{i+1})$$

$$g = \text{grad}\ f(q_{i+1})$$

Si $f(q_{i+1}) < 0$ ou $u'.g \leqslant 0$, le pas se termine par

(7.3) $u_{i+1} = u'$

Si au contraire $f(q_{i+1}) \geqslant 0$ et $u'.g > 0$, on conclut l'impossibilité du mouvement libre. L'idée la plus simple pour transcrire la formulation (5.4) consisterait à poser que, dans cette éventualité, la valeur attribuée à u_{app} sur l'intervalle $[t_{i+1}, t_{i+2}[$ sera non pas u' , mais son image par réflexion relativement à l'hyperplan T , de vecteur normal g . Bref, dans cette éventualité, au lieu de (7.3) on adopterait

$$(7.4) \qquad u_{i+1} = u' - 2 \frac{u'.g}{|g|^2} g$$

Cette technique fonctionne pour prévoir des mouvements de type "billard" : réflexions élastiques, à des instants isolés, sur l'hypersurface frontière (cf. parag. 15 , essai 1 et planches 1 et 2) .

Mais notre ambition est de fournir des algorithmes calculant aussi bien, si les conditions initiales y conduisent, des mouvements *le long de la frontière*, avec prévision correcte de la cessation éventuelle du contact. A première vue, (7.4) semblerait capable d'assurer ce calcul, puisque cette loi introduira une réflexion sur l'hyperplan T (sous angle quasi-rasant) lorsqu'il le faudra pour empêcher le point mobile de violer notablement la condition $f \leqslant 0$. Malheureusement, l'expérimentation révèle un défaut radical : une *oscillation de l'algorithme* si le champ de forces Q présente, dans le voisinage de l'hypersurface frontière, une composante normale de même sens que grad f . Le calcul génère dans ce cas des incursions erronées dans la région $f < 0$, séparées par des rebonds, d'amplitude croissant linéairement avec le temps (cf. parag. 15, essai 2 et planche 3) . On s'explique le phénomène en dressant le *bilan énergétique d'un pas*.

L'algorithme baptisé ELAST , que voici, évite le défaut en se fondant sur *un contrôle direct du bilan énergétique de chaque pas* au lieu de discrétiser a posteriori la condition (5.4) . Cette idée d'un contrôle énergétique pas à pas semble d'ailleurs systématiquement utile en analyse numérique des problèmes de dynamique.

Lorsque, ayant calculé q_{i+1} par (7.2) , il vient $f(q_{i+1}) \geqslant 0$ on invoquera, au lieu de (7.3) , une discrétisation de l'équation de la dynamique contenant l'*impulsion de réaction*, colinéaire à $g = \text{grad } f(q_{i+1})$, soit

$$(7.5) \qquad u_{i+1} = u_i + h\,Q - \lambda\, g\,.$$

Ici Q est écrit abréviativement pour $Q(t_{i+1}, q_{i+1})$ et λ désigne un multiplicateur scalaire. Le vecteur $\lambda\, g$ représentera indifféremment la percussion de liaison en cas de choc ou, pour un éventuel mouvement régulier à contact persistant, l'intégrale de la réaction sur un intervalle d'amplitude h . Conformément au système de notations fixé au parag. 6 , u_i et u_{i+1} sont respectivement les valeurs constantes de la fonction u_{app} sur les intervalles $[t_i, t_{i+1}[$ et $[t_{i+1}, t_{i+2}[$. En utilisant la norme et le produit scalaire euclidiens de E , on déduit de (7.5) l'expression suivante du *saut d'énergie cinétique*

$$(7.6) \qquad \frac{1}{2}\,|u_{i+1}|^2 - \frac{1}{2}\,|u_i|^2 = -\,(\lambda\, g - h\,Q).u_i + \frac{1}{2}\,|\lambda\, g - h\,Q|^2.$$

Si on désire que la solution approchée respecte le théorème de l'énergie et l'hypothèse d'une *liaison non dissipative même en cas de choc*, cette expression doit égaler le travail de la force active $Q(t,q(t))$;

encore faut-il préciser sur quel intervalle de temps. Vu que le calcul présent approche la fonction vectorielle $t \longrightarrow Q(t,q(t))$ par la constante $Q = Q(t_{i+1}, q_{app}(t_{i+1}))$, le plus plausible est d'invoquer un intervalle, naturellement de longueur h , ayant t_{i+1} pour milieu. Cela rejoint l'argumentation du parag. 6 concernant la "procédure de sortie" ; cette procédure exhibe les instants

$$\bar{t}_i = t_{i+1} - \frac{h}{2} \quad , \quad \bar{t}_{i+1} = t_{i+1} + \frac{h}{2}$$

entre lesquels on a l'estimation suivante du vecteur déplacement

$$q_{app}(\bar{t}_{i+1}) - q_{app}(\bar{t}_i) = \frac{1}{2}\, h(u_i + u_{i+1}) \ .$$

En exprimant u_{i+1} par (7.5) on obtient donc comme valeur du travail de Q

$$\frac{1}{2}\, h(u_i + u_{i+1}).Q = h\ u_i.Q - \frac{1}{2} h\,(\lambda\, g - h\, Q).Q \ ,$$

à égaler à l'expression (7.6) . Cela donne une équation du second degré à l'inconnue scalaire λ , dont les racines sont $\lambda = 0$ et

$$(7.7) \qquad \lambda = g.(2u_i + hQ)/|g|^2 \ .$$

Comme plus haut, posons $u' = u_i + h\,Q$; notons G la droite vectorielle engendrée dans E par $g = \text{grad}\, f(q_{i+1})$ et toujours T l'hyperplan orthogonal à g .

Pour $\lambda = 0$, (7.5) se réduit à la dynamique (7.3) du mouvement libre : c'est l'expression qu'on retiendra pour u_{i+1} dans le cas où $u'.g \leqslant 0$. Au contraire si $u'.g > 0$, on invoque la

valeur (7.7) de λ d'où, dans ce dernier cas, trois expressions équivalentes

$$(7.8) \qquad u_{i+1} = \mathrm{proj}_T\, u' - \mathrm{proj}_G\, u_i$$

$$= \mathrm{refl}_T\, u' + h\, \mathrm{proj}_G\, Q$$

$$= \mathrm{refl}_T\, u_i + h\, \mathrm{proj}_T\, Q \quad .$$

Vu que le calcul de u' et du produit scalaire $u'.g$ auront dû être faits dans tous les cas, c'est la deuxième ligne qui est la plus facile à programmer, soit

$$(7.9) \qquad u_{i+1} = u' + \frac{(h\,Q - 2\,u').g}{|g|^2}\, g \quad .$$

Les essais de cet algorithme donnent de bons résultats ; en particulier *il est stable pour le calcul de mouvements avec persistance du contact.*

Comme expliqué au parag. 6 , si les conditions initiales sont $q(t_{init}) = q_{init}$, $u(t_{init}) = u_{init}$, on commencera l'itération à $i = 0$, pour calculer u_1 après un *demi-pas de démarrage* :

$$t_1 = t_{init} + \frac{1}{2}\, h$$

$$q_1 = q_{init} + \frac{1}{2}\, h\, u_{init}$$

$$u_o = u_{init} \quad .$$

REMARQUE . Les mouvements avec persistance du contact seront également appréhendés (avec possibilité de plusieurs fonctions critères f_α) au parag. 10 , par l'algorithme INEL. Il apparaîtra efficace, à ce moment là, pour tenir compte au mieux de la courbure des frontières de calculer les gradients, tels qu'ici $g = \text{grad } f$, non pas au point q_{i+1} , mais en un point "anticipé"

$$q' = q_{i+1} + A_V h\, u_i = q_i + (1 + A_V) h\, u_i$$

où est choisie une constante réelle A_V , *coefficient d'anticipation du cône tangent*. L'essai 3 , parag. 15 ci-après, montre que cette pratique est mauvaise pour l'algorithme ELAST ; autrement dit l'optimum est ici $A_V = 0$. C'est ce que confirme très précisément l'essai 4 , basé non plus sur l'observation graphique, mais sur le calcul des écarts.

8. CHOCS INÉLASTIQUES

Examinant, au parag. 5 , la formulation de lois de choc dans l'hypothèse d'un seul contact unilatéral actif à l'instant t_c , soit pour fixer les idées $f_1(q_c) = 0$, on a défini par la condition (5.5) la situation appelée traditionnellement choc inélastique. L'analyse était faite en supposant qu'à l'instant t_c la vitesse à gauche u_c^- existait et n'appartenait pas au cône tangent $V(q_c)$ au point q_c de la région L . Puisque $J(q_c) = \{1\}$, ce cône tangent est un demi-espace dont l'hyperplan T constitue précisément la frontière. Donc (5.5) équivaut dans ce cas à

$$(8.1) \qquad u_c^+ = \text{prox}\,(V(q_c)\,,\,u_c^-)$$

avec une notation usuelle pour le *point proximal de* u_c^- *dans l'ensemble convexe fermé* $V(q_c)$, au sens de la métrique euclidienne de E (on dit aussi *projection* de u_c^- sur ce convexe fermé.

Observer que la relation (8.1) est aussi bien vraie lorsque $u_c^- \in V(q_c)$ puisque, dans ce cas, aucune discontinuité de vitesse n'est attendue. La relation (8.1) est banalement vraie encore si t_c désigne un instant tel que $q_c = q(t_c)$ appartienne à l'intérieur de la région L : alors $V(q_c)$ devient l'espace E entier et $u_c^+ = u_c^-$.

L'auteur [2][3] a récemment proposé d'adopter la loi de choc (8.1) *quel que soit l'ensemble d'indices* $J(q_c)$, comme décrivant un concept à forte cohérence théorique, vraisemblablement pertinent dans des situations physiques usuelles (cf. exemple ci-après). On dira alors

que les liaisons unilatérales considérées sont, dans leur ensemble, *inélastiques standard* et que le choc éventuel à l'instant t_c est un *choc inélastique standard*. Cette définition n'est pas restreinte au cas, spécialement développé dans ce rapport, d'un système à variété de configurations $\mathcal{Q}$ euclidienne : dans le cas général, on prendra pour E l'espace vectoriel tangent au point q_c de cette variété, muni de la métrique euclidienne associée à l'expression locale $\dot{q} \to T(q_c,\dot{q})$ de l'énergie cinétique.

Rappelons que toutes les liaisons ont été supposées *sans frottement* : comme on l'a vu au parag. 3 , dans le cas de mouvements réguliers, cela implique l'appartenance de la réaction totale r au cône $-N(q)$. En cas de choc, mettant en oeuvre une percussion de liaison P ,

$$(8.2) \qquad u_c^+ - u_c^- = P \quad ,$$

on a admis au parag. 5 (en renvoyant à [24] pour discussion) l'extension de cette hypothèse de non frottement sous la forme

$$(8.3) \qquad P \in -N(q_c) \ .$$

La proposition suivante formule un commentaire important :

PROPOSITION . *On ne suppose pas l'ensemble* $J(q) = \{\alpha \in \{1,2,\dots,\nu\} : f_\alpha(q) \geq 0\}$ *réduit à un singleton. Moyennant* (8.2) *et* (8.3) *, la définition* (8.1) *d'un choc inélastique standard est équivalente à l'une et l'autre des conditions suivantes*

(8.4) $\quad - P = \text{prox}\,(N(q_c)\,,\,u_c^-)$

(8.5) $\quad P.u_c^+ = 0$

L'équivalence résulte immédiatement du *théorème des deux cônes* [25] : Si A et B sont deux cônes mutuellement polaires d'un espace hilbertien réel (ici de dimension finie), les conditions i) et ii) suivantes sont équivalentes :

i) $\quad x = \text{prox}\,(A,z) \quad , \quad y = \text{prox}\,(B,z)$

ii) $\quad z = x + y \quad , \quad x \in A \quad , \quad y \in B \quad , \quad x.y = 0$

La propriété (8.1) avait l'aspect sécurisant d'un principe d'économie : parmi toutes les valeurs de u_c^+ cinématiquement compatibles avec le respect de $q(t) \in L$, (8.1) impose celle qui est *la plus proche de la vitesse avant choc* u_c^- .

Par ailleurs, on peut interpréter l'élément $- u_c^-$ comme la percussion qu'il faudrait appliquer au système pour amener sa vitesse à zéro. Alors (8.4) exprime que P , dans l'ensemble $- N(q_c)$ des valeurs qui lui sont permises par la loi des contacts unilatéraux sans frottement, est *le point le plus proche de cette percussion d'arrêt.*

Enfin la propriété (8.5) a pour conséquence le caractère *dissipatif* du choc, puisque, moyennant (8.2) , elle équivaut à

(8.6) $$\frac{1}{2}\,|u_c^+|^2 - \frac{1}{2}\,|u_c^-|^2 = -\,\frac{1}{2}\,|u_c^- - u_c^+|^2 \quad .$$

Noter que (8.5) est vérifiée en particulier si la vitesse de fin de choc est cinématiquement compatible avec la persistance de tous les

contacts $f_\alpha = 0$ effectifs à l'instant t_c , i.e. $u_c^+ \in V(q_c) \cap - V(q_c)$. Ainsi (8.6) généralise un théorème classique de Carnot, relatif à l'introduction brusque de liaisons bilatérales persistantes (cf. par exemple [24] , parag. 9.7.e) .

Une fois le cône $V(q_c)$ fixé, l'application $u_c^- \to - P$ a formellement l'aspect d'une relation entre une vitesse et une force du type aujourd'hui appelé *processus dissipatif standard*, i.e. cette application est le gradient d'une fonction convexe, à savoir ici $u \to \frac{1}{2} (\text{dist } (u,V(q_c)))^2$.

EXEMPLE . Soit le système constitué par un seul point matériel de masse unité en mouvement dans un plan vertical ; (q^1,q^2) sont les coordonnées cartésiennes, avec q^2 vertical ascendant. Des parois fixes et sans frottement sont supposées assurer

$$q^2 \geqslant 0 \quad , \quad q^1 \cos\theta + q^2 \sin\theta \leqslant 0 \quad ,$$

$\theta \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ donné.

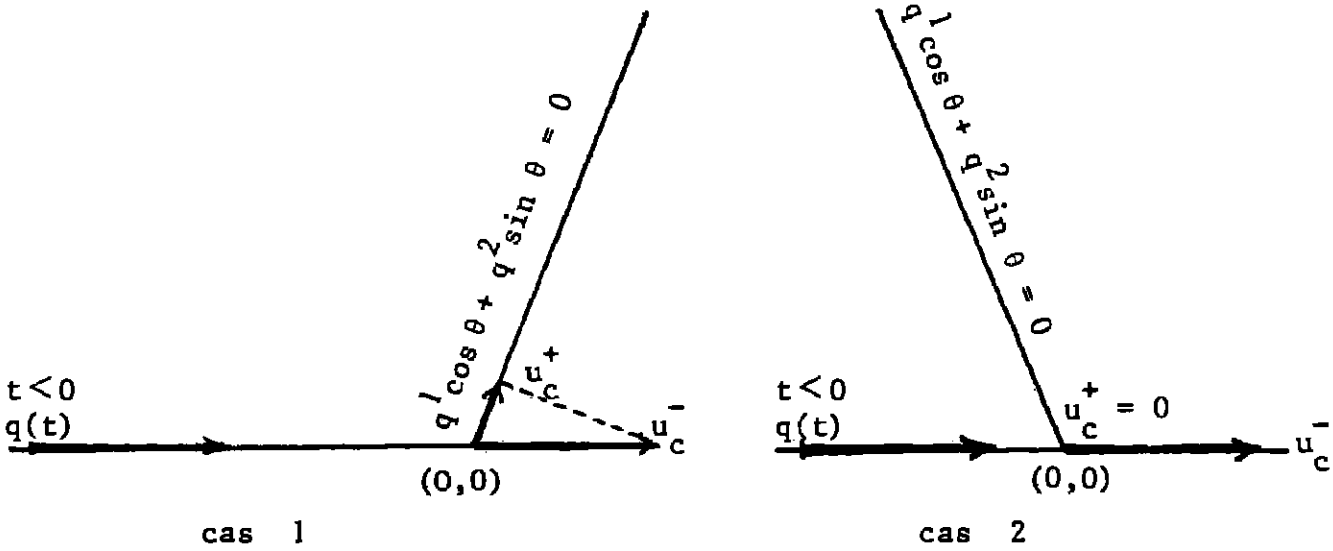
Un épisode de mouvement

$$t < 0 \quad , \quad q^1(t) = wt \quad , \quad q^2(t) = 0$$

($w > 0$ constant) se termine par un choc à l'instant $t_c = 0$, $q_c = (0,0)$, puisque la vitesse à gauche $u_c^- = (w,0)$ n'appartient pas au cône

$$V(q_c) = \{v \in \mathbb{R}^2 \ : \ v^2 \geqslant 0 \ , \ v^1 \cos\theta + v^2 \sin\theta \leqslant 0\} \ .$$

Ici $E = \mathbb{R}^2$ avec sa norme euclidienne naturelle.



<u>Cas</u> 1 : $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$. Le mouvement pour $t > 0$ s'effectue sur la frontière ascendante avec la vitesse initiale

$$u_c^+ = (w \sin^2 \theta , - w \sin \theta \cos \theta)$$

<u>Cas</u> 2 : $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$. Le mouvement pour $t > 0$ est le repos au point $(0,0)$.

On voit par cet exemple que des situations réelles existent certainement dont le concept de choc inélastique standard rend compte correctement. Mais ce qui motive avant tout notre intérêt pour ce cadre conceptuel, c'est la cohérence théorique du problème d'évolution afférent, tel qu'on va le formuler au parag. 9 . Cette cohérence donne au modèle une robustesse logique qui, pensons-nous, lui permettra de supporter, sans se dissoudre dans la confusion, les altérations empiriques que les praticiens lui feront subir immanquablement.

9. LE PROBLÈME D'ÉVOLUTION INÉLASTIQUE STANDARD

On a, au parag. 4 , caractérisé les mouvements réguliers éventuels du système par l'inclusion différentielle, plus forte que (3.11) ,

$$(9.1) \qquad -\frac{du}{dt} + Q(t,q) \in \partial\psi_{V(q)}(u)$$

à joindre naturellement à

$$(9.2) \qquad \frac{dq}{dt} = u \ .$$

L'objet de ce paragraphe est la formulation synthétique d'une loi d'évolution redonnant (9.1) et (9.2) pour tout intervalle où les fonctions q et u sont suffisamment régulières et redonnant par ailleurs, en cas de discontinuité de u , des chocs inélastiques standard, tels qu'on vient de les définir.

Le point essentiel est que l'ensemble écrit au second membre de (9.1) est une partie *conique* de l'espace vectoriel E . Cela permet d'appliquer à cette inclusion différentielle la notion, introduite primitivement dans [4][22] pour un problème plus simple, de *solution au sens des mesures différentielles*. Cette notion se place exactement dans la ligne de la traditionnelle théorie des percussions.

Rappelons qu'à toute application u d'un intervalle réel I dans un espace de Banach X (ici X est l'espace vectoriel euclidien E) *à variation localement bornée*, i.e. à variation bornée sur tout sous-intervalle compact de I — notation $u \in \mathrm{vlb}(I,X)$ — s'associe une mesure vectorielle sur I , à valeurs dans X qu'on peut appeler *mesure*

différentielle de u . Notant du cette mesure, on a la propriété caractéristique suivante : pour tout sous-intervalle compact $[a,b]$ de I

$$(9.3) \qquad \int_{[a,b]} du = u^+(b) - u^-(a) ,$$

où u^+ et u^- désignent les limites à droite et à gauche de chaque point pour la fonction u (elles existent nécessairement puisque $u \in vlb$; conventionnellement, si I est fermé à gauche avec a pour début, on pose $u^-(a) = u(a)$; convention semblable si I est fermé à droite avec b pour fin) .

Appliquant (9.3) avec $a = b$ on constate en particulier que si u est discontinue en un point, la mesure du possède en ce point un *atome* de poids (vectoriel) égal au saut de la fonction.

De (9.3) découle plus précisément que la connaissance de la mesure du permet de reconstituer, à une constante additive près, ajustée par exemple à des conditions initiales, les fonctions $t \longrightarrow u^-(t)$ (continue à gauche) et $t \longrightarrow u^+(t)$ (continue à droite) mais non la valeur que prend u en un éventuel point de discontinuité. On ne peut donc obtenir un schéma analogue à celui du calcul intégral élémentaire qu'en adjoignant des hypothèses reliant la valeur de u en chaque point à ses limites à droite ou à gauche. Un courant actuel de recherches sur certains problèmes d'évolution — éventuellement stochastique [23] — met en vedette la *continuité à droite* $u = u^+$. Voir en particulier dans [3] [22] [27] [28] comment cette continuité permet, par une extension de formules du calcul différentiel élémentaire, d'obtenir des *inégalités d'énergie* ou inégalités *d'irréversibilité* (alors que les iné-

galités semblables, en cas de continuité à gauche, n'apportent rien à l'étude du problème d'évolution).

En multipliant formellement (9.1) par dt (conçu comme un réel > 0 se rappeler que le second membre est un cône), on obtient

$$(9.4) \qquad -du + Q(t,q)dt \in \partial\psi_{V(q)}(u) \quad ,$$

à joindre naturellement à (9.2) qui se récrit

$$(9.5) \qquad q(t) = q_o + \int_{t_o}^{t} u(\tau)d\tau \quad ,$$

q_o donné dans L. On cherche une solution s'accordant à la donnée initiale

$$(9.6) \qquad u(t_o) = u_o \quad , \text{ donné dans } V(q_o).$$

Par solution de (9.4), nous entendons une fonction $u \in vlb(I,E)$ *continue à droite* possédant la propriété suivante : *Il existe une mesure réelle* $d\mu \geqslant 0$ *relativement à laquelle les mesures* dt (mesure de Lebesgue sur I) *et* du *possèdent des densités respectives* $t'_\mu \in \mathcal{L}^1_{loc}(I,d\mu;\mathbb{R})$ *et* $u'_\mu \in \mathcal{L}^1_{loc}(I,d\mu;E)$ *telles que, pour tout* $t \in I$,

$$(9.7) \qquad -u'_\mu + Q(t,q)t'_\mu \in \partial\psi_{V(q)}(u).$$

Le choix de la mesure $d\mu$ n'est évidemment pas unique : le fait que le second membre de (9.7) soit un *cône* rend la définition *indépendante de ce choix*.

Voici ce que donne cette formulation, au cas où u est discontinue en un point t_c. La mesure vectorielle du possède un atome en ce point, donc la mesure $d\mu$ possède un atome, de masse $\mu_c > 0$

telle que

$$u'_\mu(t_c)\mu_c = u^+(t_c) - u^-(t_c) .$$

Puisque la mesure de Lebesgue est sans atome, (9.7) se réduit pour $t = t_c$ à

$$-\frac{1}{\mu_c}(u^+ - u^-) \in \partial\psi_{V(q)}(u) ,$$

c'est-à-dire, puisque $\mu_c > 0$ et que par hypothèse $u = u^+$,

$$(9.8) \qquad u^- - u^+ \in \partial\psi_{V(q)}(u^+) .$$

Cela équivaut classiquement à

$$(9.9) \qquad u^+ = \text{prox}\,(V(q),u^-) ,$$

où on reconnaît la définition (8.1) d'un *choc inélastique standard.*

Nous appellerons *problème inélastique standard* la recherche des solutions de (9.4) , (9.5) . La cohérence mécanique qu'on vient de constater suggère que l'écriture (9.4) recèle plus qu'un artifice de condensation formelle et que cette formulation synthétique véhicule des hypothèses physiquement significatives.

Le parag. 3, consacré aux mouvements présumés réguliers ne faisait que reprendre la stratégie traditionnelle : tant qu'un mouvement semble exister, pour lequel les réactions sont des forces proprement dites, on écrit une équation (ou inclusion) différentielle au sens ordinaire, repoussant par là l'éventualité d'une discontinuité de vitesse. C'est seulement lorsque la continuité de la vitesse se trouve cinématiquement impossible qu'on accepte de traiter l'action d'un contact comme

une percussion. Une telle stratégie, dite de la "singularité minimale", est d'utilité heuristique dans de nombreux domaines d'applications des mathématiques, mais elle ne repose sur aucun principe physique clair. Si des corps en contact sont mécaniquement capables d'exercer l'un sur l'autre ces efforts concentrés sur un instant qu'on appelle percussions, pourquoi le feraient-ils seulement lorsque la géométrie ne laisse pas la possibilité d'un mouvement régulier ? De fait la circonstance suivante est familière : un objet posé sur une table saute si l'on donne un coup sur la table ; pourtant, à l'échelle macroscopique, qui est celle de notre étude, la table n'a pas de mouvement ; elle a exercé une percussion sur l'objet sans que la cinématique visible l'exige.

La formulation inélastique standard exclut automatiquement de tels accidents : nous considérons qu'elle englobe, dans la modélisation de la situation, une hypothèse de *passivité des contacts*.

REMARQUE . La condition $q(t) \in L$ pour tout t ne figure pas dans la formulation du problème. Elle est de fait redondante ; vu qu'on a supposé $q(t_o) = q_o \in L$, le raisonnement fait au parag. 4 , Remarque 3 s'étend aisément au cas présent pour montrer que (9.4) et (9.5) entraînent $q(t) \in L$ pour tout $t \geqslant t_o$.

10. ALGORITHME INEL

On présente ici un algorithme pour la construction d'une solution approchée q_{app} , u_{app} du problème d'évolution inélastique standard (9.4) , (9.5) , (9.6) . Dans la ligne fixée au parag. 6 , une suite réelle croissante $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots$ est choisie, avec un pas $h = t_{i+1} - t_i$ constant. Par hypothèse, la fonction u_{app} est en escalier, donc à variation localement bornée ; en accord avec tout ce qui précède, nous convenons de la construire continue à droite et de noter u_i sa valeur constante sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$; on lui attribue par ailleurs une valeur constante u_o à gauche de t_1 . La mesure différentielle du_{app} est donc la somme d'atomes placés aux points t_i , de poids vectoriels respectifs $u_i - u_{i-1}$. On va astreindre la fonction u_{app} à vérifier une simulation de (9.4) , simulation dans laquelle la mesure absolument continue $Q(t,q)dt$ est remplacée par une somme d'atomes, de poids vectoriels respectifs hQ_i placés aux points t_i . On écrit donc

$$- (u_{i+1} - u_i) + hQ_{i+1} \in \partial\psi_{V(q)}(u_{i+1}) ,$$

ce qui équivaut comme on sait à

$$(10.1) \qquad u_{i+1} = \text{prox}\ (V(q)\ , u_i + hQ_{i+1})$$

(on a déjà rencontré une construction semblable au parag. 4). Il reste en (10.1) à spécifier les valeurs de q et Q_{i+1} ; le plus simple, quitte à étudier ultérieurement les perfectionnements possibles, est

de prendre $q = q_{app}(t_{i+1})$, noté comme d'habitude q_{i+1} et $Q_{i+1} = Q(t_{i+1}, q_{i+1})$.

On a décidé au parag. 6 de prendre toujours pour q_{app} une primitive de u_{app} , d'où la récurrence :

(10.2) $t_{i+1} = t_i + h$

(10.3) $q_{i+1} = q_i + h\, u_i$

(10.4) $u' = u_i + h\, Q_{i+1}$

(10.5) $u_{i+1} = \text{prox}\ (V(q_{i+1}), u')$.

Comme précédemment, on traitera un problème à données initiales $q(t_{init}) = q_{init}$, $u(t_{init}) = u_{init}$ en faisant précéder les itérations d'un demi-pas de démarrage :

$$t_1 = t_{init} + \frac{h}{2}$$

$$q_1 = q_{init} + \frac{1}{2}\, h\, u_{init}$$

$$u_o = u_{init} ,$$

après quoi (10.4) et (10.5) seront appliquées dès $i = 0$.

La procédure de sortie (6.16) , (6.17) améliorera par ailleurs l'exploitation des résultats.

Nous baptisons INEL l'algorithme ci-dessus.

La mise en oeuvre de (10.5) appelle quelques commentaires.

La définition du cône polyédrique $V(q_{i+1})$ repose sur la détermination de l'ensemble d'indices $J(q_{i+1})$, c'est-à-dire sur des tests

de signe des $f_\alpha(q_{i+1})$. Lorsque $J(q_{i+1}) = \phi$, le cône $V(q_{i+1})$ est l'espace E entier et (10.5) se réduit à $u_{i+1} = u'$, i.e.

$$(10.6) \qquad u_{i+1} = u_i + h\,Q_{i+1} \ ,$$

discrétisation de l'équation de la dynamique d'un mouvement libre, déjà rencontrée au parag. 6 .

Lorsque $J(q_{i+1})$ consiste en un singleton, soit $\{\alpha\}$, le cône $V(q_{i+1})$ est le demi-espace homogène de vecteur normal sortant $g = \text{grad } f_\alpha(q_{i+1})$ (essentiellement supposé non nul). Alors (10.5) s'explicite en

$$(10.7) \qquad u_{i+1} = \begin{cases} u' & \text{si } u'.g \leqslant 0 \\ u' - \dfrac{u'.g}{|g|^2}\, g & \text{sinon} \end{cases}$$

Lorsque $J(q_{i+1})$ consiste en deux éléments, soit pour fixer les idées $J(q_{i+1}) = \{1,2\}$, tels que les vecteurs $g_1 = \text{grad } f_1(q_{i+1})$ et $g_2 = \text{grad } f_2(q_{i+1})$ forment un système libre, $V(q_{i+1})$ est un cône dièdre ; notons-le simplement V . Il est commode alors, pour l'exploitation de (10.5) d'utiliser les diverses expressions algébriques que prend l'application $u' \longrightarrow \text{prox}\,(V,u')$ selon que u' tombe dans l'une ou l'autre de 4 régions dièdres de E (expressions qui se raccordent de façon continue sur les frontières communes). Sans entrer dans le détail, observons l'utilité des deux vecteurs γ^1 , γ^2 constituant, dans le plan P engendré par g_1 , g_2 la *base duale* de $\{g_1 , g_2\}$, i.e. $\gamma^\alpha.g_\beta = 1$ si $\alpha = \beta$ et zéro sinon. Expliciter ces deux vecteurs

est particulièrement rentable si l'on décide en outre d'effectuer une correction de violation (cf. Remarque 2 ci-après).

Si le cardinal de $J(q_{i+1})$ excède 2 , l'usage de bases duales reste praticable pourvu que les grad $f_\alpha(q_{i+1})$, $\alpha \in J(q_{i+1})$ forment un système libre dans E . Dans le cas contraire il deviendra sans doute préférable de recourir aux algorithmes itératifs de la "programmation quadratique".

REMARQUE 1 . L'expression délivrée par (10.5) pour la valeur constante u_{i+1} de u_{app} sur l'intervalle $[t_{i+1}, t_{i+2}[$ est, par construction, compatible avec le respect de la frontière de la région L telle qu'elle se présente au point q_{i+1} , valeur de q_{app} au *début* de cet intervalle. Cette frontière est usuellement courbée, de sorte que, surtout pour le calcul d'un mouvement éventuel avec persistance des contacts, il sera préférable d'*anticiper la variation de* $V(q_{app}(t))$. On le fera pratiquement en évaluant le cône polyédrique $V(q)$ (c'est-à-dire l'ensemble $J(q)$ et les vecteurs grad $f_\alpha(q)$, $\alpha \in J(q)$) non pas au point q_{i+1} , mais en un point de la forme

$$q' = q_{i+1} + A_V h u_i = q_i + (1 + A_V) h u_i$$

où on choisit un réel A_V , *coefficient d'anticipation du cône tangent.* L'essai 5 , parag. 15 donnera $A_V = 0,5$ comme meilleure valeur.

Dans ce cas, il paraît préférable de calculer la force, en ce même point, c'est-à-dire de prendre

$$Q_{i+1} = Q(t_{i+1}, q') .$$

Grâce à cela, par exemple, dans le calcul d'un mouvement avec conservation du contact $f_\alpha = 0$, une force éventuelle orthogonale à la frontière sera bien "inactive" ; si on n'évaluait pas Q au même point que V , il risquerait d'apparaître une petite composante tangentielle erronée, faussant de manière cumulative le bilan énergétique.

REMARQUE 2 . Toutes les méthodes présentées dans ce rapport ont en vue le calcul de mécanismes ; l'hypothèse de non frottement entre deux pièces en contact ne pourra se trouver satisfaite qu'assez grossièrement (et même les lois de frottement qu'on introduira dans les parag. ultérieurs sont approximatives). On ne peut donc espérer une grande précision dans la prévision des trajectoires et des horaires de mouvements ; on se permettra par suite de réduire le coût de calcul en choisissant un pas de temps h relativement grand avec la contrepartie indésirable que voici : une discrétisation trop grossière risque de fournir des solutions approchées violant exagérément les conditions géométriques $f_\alpha \leq 0$. Or, dans les calculs usuels de mécanismes, l'indéformabilité des pièces présumées rigides et leur impénétrabilité mutuelle seront souvent des hypothèses bien garanties et les applications demanderont que le calcul les respecte avec précision. L'insertion, dans les algorithmes, de *corrections de violation* est alors souhaitable. Le procédé suivant alourdit très peu l'algorithme décrit plus haut : supposons qu'une valeur de q atteinte dans le calcul (ce sera q_{i+1} ou l'anticipation q' selon les variantes adoptées) fournisse des valeurs strictement positives pour certains des réels $\varphi_\alpha = f_\alpha(q)$, $\alpha \in J(q)$. Pour ces indices α , le point q

de E tombe du côté interdit de l'hypersurface $f_\alpha = 0$. La correction la plus naturelle de toutes ces transgressions consisterait à remplacer q par q_c , point le plus proche de q (au sens de la métrique euclidienne de E) dans la variété C , intersection des hypersurfaces $f_\alpha = 0$, $\alpha \in J(q)$. Le vecteur $q - q_c$ est contenu dans l'espace vectoriel G_c engendré par les grad $f_\alpha(q_c)$, $\alpha \in J(q)$. Supposons que ces derniers forment un système libre, donc une base de G_c et notons $(\gamma^\alpha(q_c))$, $\alpha \in J(q)$, la base duale ; alors

$$(10.8) \qquad q - q_c = \sum_{\alpha \in J(q)} [(q - q_c).\text{grad } f_\alpha(q_c)]\, \gamma^\alpha(q_c)$$

Or la linéarisation de chacune des fonctions f_α au voisinage de q_c donne justement

$$\varphi_\alpha = (q - q_c).\text{grad } f_\alpha(q_c) + \ldots$$

Cela permet, par (10.8) , une bonne estimation du point q_c ; les $\gamma^\alpha(q_c)$ seront naturellement estimés en effectuant la construction de la base duale non pas à partir des vecteurs inconnus grad $f_\alpha(q_c)$ mais de leurs approximants grad $f_\alpha(q)$: c'est précisément ces vecteurs qu'on aura déjà dû exhiber si on utilise la méthode algébrique pour le calcul de prox $(V(q), u_i')$.

Dans le cas banal où $J(q)$ est un singleton, soit $\{\alpha\}$, il vient

$$\gamma^\alpha = \text{grad } f_\alpha(q) / |\text{grad } f_\alpha(q)|^2$$

d'où, par (10.8) ,

$$(10.9) \qquad q_c = q - \frac{f_\alpha(q)}{|\text{grad } f_\alpha(q)|^2} \text{ grad } f_\alpha(q) + \ldots$$

REMARQUE 3 . Terminons en soulignant un défaut de l'algorithme INEL : même pour des mouvements sans chocs le long de la frontière de L , il se révèle une *dissipation d'énergie* liée à la discrétisation, d'autant plus faible sur un intervalle de temps donné que le pas h est plus petit. Par exemple, dans le cas particulier $Q \equiv 0$, l'énergie cinétique $\frac{1}{2}|u|^2$ d'une solution exacte de (9.1) , (9.2) demeure constante (cf. parag. 4 , equ. (4.8)) . L'examen de (10.5) , dans le cas d'une frontière courbée, explique pourquoi $\frac{1}{2}|u_{app}|^2$ ne sera pas tout à fait constant. A cause de la courbure de la frontière, le cône $V(q_{i+1})$ est un peu différent de $V(q_i)$, même si l'ensemble d'indices J n'a pas varié. On trouve élémentairement (toujours dans cet exemple où $Q \equiv 0$)

$$|u_{i+1}| = |u_i| \cos \varepsilon$$

où ε désigne l'angle des vecteurs u_i et u_{i+1} . C'est une sorte d'effet de *rugosité*, introduit par la discrétisation et simulant un frottement (cf. l'exemple traité au parag. 8 , où le passage de q sur un point anguleux de la frontière implique un choc dissipatif).

11. PRISE EN COMPTE D'UN FROTTEMENT SEC

Les paragraphes précédents ont montré comment l'unilatéralité des contacts se manifeste dans le calcul numérique. Il s'impose de perfectionner les méthodes jusqu'à faire entrer en compte le frottement, dans la réalité toujours présent.

La discipline intitulée Tribologie explore les circonstances physiques du contact et révèle leur complexité. Le modèle "frottement de Coulomb" n'en reste pas moins irremplaçable : on ne dispose pas en pratique des informations sur le contact (présence de matière usée, contaminants, etc...) qui fournirait une connaissance fine du phénomène. Le dilemme pour le calculateur est donc : loi de Coulomb ou pas de loi du tout. Certains travaux (par exemple [14][15]) ont par ailleurs conforté l'usage de la loi de Coulomb comme procédé d'analyse de situations mécaniques, en mettant en lumière une cohérence théorique bien supérieure à celle d'un simple système de formules empiriques à invoquer faute de mieux. Constater cela procure plus que la satisfaction esthétique. Dans l'urgence industrielle, on sait combien les formulations scientifiques sont malmenées : la nécessité de fournir coûte que coûte un chiffre conduit à faire souvent des "hypothèses simplificatrices" sauvages, logiquement hétérogènes, souvent même contradictoires. Les procédés de calcul ainsi élaborés et testés dans un cadre spécifique donné risquent de perdre toute fiabilité dans d'autres cas. Nous pensons que l'ancrage sur un fond théorique cohérent permet de mieux estimer la résistance du modèle à ces traitements brutaux.

Un souci analogue de cohérence théorique, dans une analyse du contact dépassant la loi de Coulomb, mais par ailleurs restreinte au cadre des petits déplacements, se manifeste chez A. Curnier [29].

Les équations de la dynamique d'un système de liberté finie avec frottement de Coulomb s'écrivent sans difficulté majeure. Mais ces équations différentielles se révèlent peu régulières ; on connaît depuis longtemps (cf. par exemple [20], chap. 10, Sect. 4, où sont reprises des discussions dues à Delassus [26] ; plus récemment, Lötstedt [18]) l'éventualité d'arc-boutements dynamiques produisant des discontinuités de vitesse sans qu'il y ait, comme dans les exemples que nous avons traités précédemment, apparition de nouveaux contacts : on appelle cela des *chocs tangentiels*. Un travail récent de M. Jean et E. Pratt [21] délimite des conditions suffisantes garantissant contre cette éventualité, moyennant lesquelles ces auteurs obtiennent un théorème d'existence local. Mais l'étude générale de ces équations reste largement ouverte.

Nous choisissons dans ce rapport d'attaquer directement la construction d'algorithmes, dans la lancée des paragraphes précédents. On constate que ces algorithmes appréhendent sans difficulté les chocs tangentiels possibles.

Nous nous limiterons au cas $\nu = 1$: *une seule liaison unilatérale est présente*, d'effet géométrique exprimé par $f(q) \leqslant 0$.

Tout $q \in E$ tel que $f(q) = 0$ correspond à une situation de contact : nous supposons que ce contact s'effectue *en un point unique* M, dépendant de q, entre deux pièces S_1 et S_2 du système ou entre une pièce S_1 du système et un solide extérieur S_0 *fixe*. Considérons

d'abord ce dernier cas.

La particule M_1 de S_1 qui se trouve au contact dépend a priori de q . Pour tout mouvement différentiable $t \to q(t)$, la vitesse $\vec{U}$ de cette particule est un élément de $\mathcal{E}$, espace vectoriel euclidien de dimension 3 (l'espace des vecteurs de la géométrie et de la physique élémentaires). Pour chaque q tel que $f(q) = 0$, l'analyse cinématique du système fournit une expression de $\vec{U}$, linéaire par rapport à l'élément $\dot{q} = u$ de E , soit

(11.1) $\vec{U} = G(u)$.

L'application linéaire $G : E \to \mathcal{E}$ dépend a priori de q . Les surfaces des corps S_1 et S_0 en contact sont supposées permettre l'emploi des formules usuelles de la cinématique (cf. par exemple [24] , vol. 1 , parag. 3.6) , lesquelles exigent la régularité d'une au moins des deux surfaces, d'où l'existence d'un plan tangent au point M (l'autre surface peut présenter une arête ou une pointe). On note $\vec{N} \in \mathcal{E}$ le vecteur unité normal *dirigé vers* S_1 . Si le mouvement $t \to q(t)$ comporte la persistance du contact sur un voisinage de la valeur de t considérée, on a classiquement $\vec{N}.\vec{U} = 0$.

Les efforts subis par S_1 de la part du corps extérieur S_0 sont supposés exprimés par une simple force $\vec{R}$, appliquée à la particule M_1 (on néglige donc tout "couple de contact"). Telle est ici la force de liaison ; par définition ses composantes covariantes, relativement à un paramétrage (q^i) de la variété des configurations du système, sont les réels r_i tels que, pour tout $u \in E$,

(11.2) $\quad u^i r_i = \vec{\mathcal{R}}.\vec{\mathcal{U}}$.

Le produit scalaire euclidien banal invoqué au second membre met l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ en dualité avec lui-même. En ce qui concerne E , nous utilisons comme précédemment la forme quadratique "énergie cinétique" pour le munir d'une structure euclidienne, dont on note également . le produit scalaire. Dès lors (11.2) définit l'élément r de E tel que

$$\forall\, u \in E \;:\; u.r = G(u).\vec{\mathcal{R}}$$

Cela équivaut à

(11.3) $\quad r = G^{\star}(\vec{\mathcal{R}})$

où $G^{\star} : \mathcal{E} \longrightarrow E$ est l'application linéaire *transposée* de G .

Le cône tangent à la région L au point q , soit $V(q) \subset E$, consiste ici dans le demi-espace de normale sortante grad $f(q)$ (gradient non nul, par hypothèse). Tout u appartenant à ce demi-espace est la vitesse à droite $\dot{q}^+$ d'un mouvement $t \longrightarrow q(t)$ respectant l'impénétrabilité de S_1 et S_0 , donc dans lequel la vitesse $\vec{\mathcal{U}}$ de M_1 vérifie $\vec{N}.\vec{\mathcal{U}} \geqslant 0$. Pour u élément de E on a de la sorte l'implication

$$u.\ \mathrm{grad}\ f(q) \leqslant 0 \Rightarrow \vec{N}.G(u) \geqslant 0 \quad \text{i.e.} \quad u.G^{\star}(\vec{N}) \geqslant 0 \ .$$

Par une version unilatérale du théorème du multiplicateur de Lagrange, cette implication équivaut à

(11.4) $\quad \exists\, \lambda \geqslant 0 \;:\; G^{\star}(\vec{N}) = -\lambda\, \mathrm{grad}\ f(q)$.

Faisons maintenant l'hypothèse que les liaisons du système, qui ont permis sa paramétrisation par l'élément q de E, *laissent à la particule de contact* M_1 *la liberté complète, i.e. toute valeur de* $\vec{U}$ *dans* $\mathcal{E}$ *peut être obtenue par un choix convenable de* $\dot{q} = u$ *dans* E.

Autrement dit $G : E \longrightarrow \mathcal{E}$ est surjective, donc, de façon équivalente, sa transposée $G^{\star} : \mathcal{E} \longrightarrow E$ est *injective* (on étudiera au parag. 13 un cas où il n'en est plus ainsi). En particulier cela entraîne

(11.5) $\quad G^{\star}(\vec{N}) \neq 0$.

La formulation d'une *loi de frottement sec* ou loi de Coulomb généralisée [13][15] comporte la donnée, dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}$, d'un *cône convexe fermé* C, contenant $\vec{N}$, dit *cône de frottement* au point de contact considéré (pour la loi de Coulomb classique, il est de révolution autour de $\vec{N}$; restons pour l'instant au cas général, prévoyant un frottement anisotrope). Notons

(11.6) $\quad C = G^{\star}(C)$,

cône convexe contenu dans le sous-espace vectoriel $G^{\star}(\mathcal{E})$ de E et contenant $G^{\star}(\vec{N})$, c'est-à-dire contenant la demi-normale entrante à L au point q, en vertu de (11.4) . Tous ces éléments dépendent naturellement de q .

Une première spécification de la loi du frottement sec est $\vec{\mathcal{R}} \in C$, inclusion équivalente, vu l'injectivité de $G^{\star}$, à

(11.7) $\quad r \in C$.

En outre, la loi du frottement sec édicte traditionnellement une *relation entre* $\vec{\mathcal{R}}$ *et la vitesse* $\vec{U}$ *de la particule* M_1 . On a dit plus haut que des discontinuités de vitesse sont possibles ; dans cette éventualité quelle valeur de $\vec{U}$ devra entrer dans la loi du frottement ? Persistons dans le parti-pris qui caractérise ce rapport : *privilégier les limites à droite* pour toutes les fonctions du temps considérées ou, ce qui est techniquement équivalent, traiter ces fonctions comme *continues à droite*.

Vient alors banalement un deuxième article de la loi. Si $\vec{U}$, égal par convention à sa limite à droite $\vec{U}^+$, vérifie $\vec{N}.\vec{U} > 0$, le contact cesse nécessairement sur un intervalle de temps consécutif à l'instant considéré, d'où $\vec{\mathcal{R}} = 0$ sur cet intervalle : la réaction possède alors une limite à droite, égale à zéro. Le deuxième article est par suite :

(11.8) $\vec{N}.\vec{U} > 0 \Rightarrow \vec{\mathcal{R}} = 0$

équivalent, vu (11.4) et (11.5) , à

(11.9) $u.\mathrm{grad}\ f(q) < 0 \Rightarrow r = 0$

Reste à traiter le cas $\vec{N}.\vec{U} = 0$, i.e. $\vec{U}$ dans le plan vectoriel T , tangent commun aux deux surfaces en contact. Traditionnellement pour la formulation du frottement, la réaction $\vec{\mathcal{R}}$ est écrite comme somme d'une composante normale et d'une composante tangentielle

(11.10) $\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{R}}_T + \mathcal{R}_N \vec{N}$, $\vec{\mathcal{R}}_T \in T$.

La condition $\vec{\mathcal{R}} \in C$ équivaut alors à

(11.12) $\vec{\mathcal{R}}_T \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_N)$,

avec

(11.13) $\mathcal{D}(\mathcal{R}_N) = \begin{cases} \mathcal{R}_N \mathcal{D}_1 & \text{si} \quad \mathcal{R}_N \geqslant 0 \\ \phi & \text{sinon} \end{cases}$.

L'ensemble $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(1)$ est la projection orthogonale sur T de la section plane du cône C , à distance unité de T : c'est un *convexe fermé contenant l'origine* (dans le cas de la loi isotrope de Coulomb, $\mathcal{D}_1$ est le disque centré à l'origine et de rayon égal au coefficient de frottement). La loi du frottement sec prend alors un aspect formellement semblable à celui d'une loi de plasticité parfaite [13] , en écrivant simplement $\mathcal{D}$ pour $\mathcal{D}(\mathcal{R}_N)$,

(11.14) $-\vec{\mathcal{U}} \in \partial\psi_{\mathcal{D}}(\vec{\mathcal{R}}_T)$,

au sens de l'autodualité du plan euclidien T (équivalents familiers de cette relation : "principe de la dissipation maximale" et usage d'une "fonction de dissipation" ; cf. [14],[15]) .

Pour les applications qui vont suivre, il se révèle plus efficace d'utiliser la formulation nouvelle que voici, évitant la décomposition (11.10) et l'introduction des ensembles $\mathcal{D}$,

(11.15) $-\vec{\mathcal{U}} \in \mathrm{proj}_T\, \partial\psi_C(\vec{\mathcal{R}})$

(voir démonstration de l'équivalence en Appendice, à la fin de ce paragraphe).

En termes d'éléments de E , cela prend la forme

(11.16) $\quad - G(u) \in \mathrm{proj}_T\, \partial\psi_C(G^{\star -1}(r))$

qu'on apprendra à exploiter dans les paragraphes suivants.

La tactique numérique proposée ci-dessous généralise l'algorithme INEL ; ce dernier concerne le cas particulier où le cône C consiste simplement en la demi-droite engendrée dans $\mathcal{E}$ par le vecteur $\vec{N}$.

Avec les notations du parag. 6 , un pas se présente comme suit

(11.17) $\quad t_{i+1} = t_i + h$

(11.18) $\quad q_{i+1} = q_i + h\, u_i$

(11.19) $\quad u' = u_i + h\, Q_{i+1}$

(11.20) $\quad g = \mathrm{grad}\, f(q_{i+1})$.

Si $f(q_{i+1}) < 0$ ou $g.u' \leqslant 0$ alors $u_{i+1} = u'$, ce qui termine le pas.

Sinon, la réaction $\vec{R}$ doit être prise en compte, ce que nous faisons d'abord *dans l'hypothèse d'un pas sans choc.*

Au cours du calcul approché, il faut s'attendre à voir la liaison $f(q) \leqslant 0$ plus ou moins violée. On choisit donc un prolongement de la définition du cône $C = G^{\star}(C)$ pour les q tels que $f(q)$ excède un peu zéro. Cela revient à dire que, même en cas de valeurs de q impliquant une pénétration mutuelle de S_o et S_1 , sont invoqués comme précédemment une particule M_1 , un vecteur N et un cône de frottement T. La définition de ces éléments sera choisie aussi simple que possible, en continuité avec le cas $f(q) = 0$.

On écrit la dynamique du pas

(11.21) $u_{i+1} = u' + h\,r$

Comme au parag. 9 l'argument de *passivité du contact* est invoqué pour renforcer la condition cinématique $u_{i+1} \in V(q_{i+1})$ en

(11.22) $u_{i+1} \in T(q_{i+1})$

où $T(q_{i+1})$ désigne la frontière de $V(q_{i+1})$, c'est-à-dire l'hyperplan orthogonal à g dans E .

Nous adoptons u_{i+1} comme valeur de u dans la loi de frottement (11.16) . Vu que C est un cône, le second membre de (11.16) est indifférent au remplacement de r par $h\,r$, d'où l'élimination de r avec (11.21)

(11.23) $- G(u_{i+1}) \in \mathrm{proj}_T\, \partial\psi_C(G^{\star -1}(u_{i+1} - u'))$.

Le plan T et le cône C sont ici déterminés en faisant $q = q_{i+1}$.

Les cas particuliers développés aux parag. 12 et 13 montreront comment (11.22) et (11.23) permettent de déterminer u_{i+1} (de façon unique dans ces cas là ; l'unicité n'est pas assurée en général).

Tant qu'il s'agit de mouvements sans discontinuité de vitesse, ce parti d'introduire u_{i+1} comme valeur de u en (11.16) répond simplement au souci de construire un algorithme "de type implicite" avec les garanties de stabilité apportées par là.

L'éventualité $f(q_{i+1}) \geqslant 0$, $g.u' > 0$ débouche sur une fin

de pas plus problématique si une *discontinuité de vitesse* est attendue sur l'intervalle de temps considéré. Nous exprimerons toujours *l'inélasticité du contact* par la condition (11.22) . Mais le terme $h\,r$, au second membre de (11.21) doit être remplacé par une *percussion de réaction* R , intégrale de r sur l'intervalle de temps. A la différence du cas sans frottement, la loi (11.16) , reliant à chaque instant r et u , apporte peu d'information sur R car cette relation n'est pas linéaire, donc ne commute pas avec l'intégration.

J. Pérès ([20] , p. 316-328) , à la suite de Darboux, tente une analyse de l'évolution de la vitesse u pendant la durée du choc, tout en négligeant l'évolution de la configuration. Cette approche constitue un exemple historique de méthode d'échelles multiples ; elle se prêterait sans difficulté majeure au calcul numérique. Il n'est pas certain que les résultats soient physiquement valides, vu notamment la difficulté d'estimer l'instant de cessation éventuelle du contact.

Nous nous contenterons d'une analyse plus grossière, censée correspondre, tout comme l'inélasticité définie dans les parag. antérieurs, à une *irréversibilité extrême*. Parce que C est un cône, l'élément $u_{i+1} - u'$ de E intervient au second membre de (11.23) seulement par sa direction et son sens ; peu importe que la norme de cet élément soit ou non "petite" (c'est-à-dire de l'ordre de h) : on verra dans les parag. qui viennent comment l'usage de (11.22) et (11.23) permet de déterminer u_{i+1} sans référence à la petitesse de $u_{i+1} - u'$. *Adoptons donc la même fin de pas que dans le cas d'une vitesse continue.* Cela sera clairement justifié au moins si on a une raison de penser que la réaction $\vec{R}$ conserve même direction et même sens pendant toute la durée du choc.

Le cas le plus simple est naturellement celui du frottement bidimensionnel traité au parag. 13 ci-après.

Ce qui précède supposait un contact entre une pièce du système et un solide extérieur fixe. Le cas d'un contact entre deux pièces S_1 et S_2 faisant partie toutes deux du système aboutit à la même écriture : pour tout q tel que $f(q) = 0$, on notera M le point de contact, supposé unique, entre ces deux pièces. Les particules M_1 et M_2 des deux pièces qui sont au contact (elles dépendent a priori de q) ont, pour tout mouvement différentiable $t \longrightarrow q(t)$, des vitesses qui s'expriment linéairement par rapport à l'élément $\dot{q} = u$ de E , soit respectivement $\vec{U}_1 = G_1(u)$, $\vec{U}_2 = G_2(u)$ (cela parce qu'on a supposé un système scléronomique, i.e. à liaisons indépendantes du temps ; sinon ces expressions seraient affines relativement à u) . On suppose à nouveau la régularité d'une au moins des deux surfaces, d'où la définition de $\vec{N} \in \mathcal{E}$, vecteur unité normal commun *dirigé vers* S_1 . On admet que les efforts exercés par S_2 sur S_1 se réduisent à une simple force $\vec{\mathcal{R}}_1$ appliquée à la particule M_1 ; alors les efforts exercés par S_1 sur S_2 se réduisent à la simple force $\vec{\mathcal{R}}_2 = -\vec{\mathcal{R}}_1$ appliquée à la particule M_2 . Cette famille de deux forces admet pour composantes covariantes, relativement au paramétrage (q^i) , les réels r_i tels que, pour tout $u \in E$, on ait

$$u^i r_i = \vec{\mathcal{R}}_1 . \vec{U}_1 + \vec{\mathcal{R}}_2 . \vec{U}_2$$

$$= \vec{\mathcal{R}}_1 . (\vec{U}_1 - \vec{U}_2)$$

Cela met en évidence la *vitesse de glissement de* S_1 *par rapport à* S_2 , soit

$$\vec{U} = \vec{U}_1 - \vec{U}_2 = G_1(u) - G_2(u) \quad \text{notée} \quad G(u)$$

Si on écrit simplement $\vec{R}$ pour $\vec{R}_1$ il vient à nouveau (11.3) . La loi du frottement entre S_1 et S_2 formule une relation entre $\vec{R}$ et $\vec{U}$; tout ce qui a été développé plus haut s'applique sans modification.

REMARQUE . Strictement parlant, la structure *conique* de la relation formulée ci-dessus entre $\vec{R}$ et $\vec{U}$ implique, dans le cas élémentaire (frottement isotrope) où l'écriture de la relation se fait au moyen d'un *coefficient de frottement*, que ledit coefficient ne dépend pas de la grandeur de la vitesse de glissement.

On sait que l'expérience révèle usuellement une dépendance non monotone du coefficient de frottement à l'égard de cette vitesse. Il est classique de tenir compte sommairement de cette dépendance en adoptant une valeur plus grande pour le coefficient de frottement "statique" que pour le coefficient de frottement "dynamique". Les algorithmes présentés dans la suite peuvent sans difficulté incorporer cette donnée : *il suffira, à chaque pas, de faire dépendre le cône* C *de la vitesse en début de pas.* Le calcul basé sur ce cône fournit la vitesse en *fin de pas*. La considération du cône reste cruciale : c'est elle qui donne à l'algorithme son type "implicite" à l'égard des vitesses, garant de stabilité numérique.

APPENDICE : *Equivalence de* (11.14) *et* (11.15) .

Supposons (11.15) ; alors $-\vec{U} \in T$ et, en notant N la droite vectorielle orthogonale à T ,

(11.24) $\exists\ \vec{W} \in N \quad , \quad \exists\ \vec{V} \in \partial\psi_C(\vec{R}) \ : -\vec{U} = \vec{V} + \vec{W}$.

On décompose $\vec{R}$ sous la forme (11.10) ; nécessairement $R_N \geqslant 0$ puisque (11.15) implique $\vec{R} \in C$. Soit le plan affine $A = T + R_N \vec{N}$; par construction $\vec{R} \in A$ d'où $\partial\psi_A(\vec{R}) = N$. Alors (11.24) implique

(11.25) $-\vec{U} \in \partial\psi_A(\vec{R}) + \partial\psi_C(\vec{R}) \subset \partial\psi_{A \cap C}(\vec{R})$.

Vu la définition (11.13) de $\mathcal{D}(R_N)$, noté simplement $\mathcal{D}$, on a

$$A \cap C = \mathcal{D} + R_N \vec{N}$$

d'où

(11.26) $\partial\psi_{A \cap C}(\vec{R}) = \partial\psi_{\mathcal{D}}(\vec{R} - R_N\vec{N}) = \partial\psi_{\mathcal{D}}(\vec{R}_T)$.

En rapprochant de (11.25) , cela donne l'écriture (11.14) , au sens de l'autodualité de l'espace euclidien tridimensionnel $\mathcal{E}$. Mais, comme $\vec{U}$ et $\vec{R}_T$ sont des éléments de T , (11.14) est vrai aussi bien au sens de l'autodualité de ce sous-espace euclidien de $\mathcal{E}$, c.q.f.d. .

Réciproquement, supposons (11.14) , au sens de l'autodualité de T (donc $\vec{U} \in T$; l'éventualité $\vec{N}.\vec{U} > 0$, $\vec{R} = 0$, i.e. cessation du contact, a été traitée à part). Alors, vu la définition (11.13) de $\mathcal{D}(R_N)$, noté simplement $\mathcal{D}$, on a $R_N \geqslant 0$; en outre (11.14) est vrai aussi bien au sens de l'autodualité de $\mathcal{E}$. Par translation, comme en (11.26) , on obtient

$$- \vec{U} \in \partial\psi_{A \cap C}(\vec{R}) .$$

On a besoin ici de savoir si l'inclusion de droite en (11.25) est une égalité d'ensembles. Si $R_N > 0$, cette égalité d'ensembles est assurée par le théorème de Rockafellar ([32] , theorem 23.8) puisqu'alors A rencontre l'intérieur relatif de C . En ce cas (11.15) est établi.

Le cas $R_N = 0$ demande une étude spéciale ; alors $\mathcal{D}$ se réduit à $\{0\}$ et (11.14) signifie : "$\vec{R}_T = 0$, $\vec{U}$ arbitraire dans T" . Le sous-différentiel $\partial\psi_C(0)$, au sens de l'autodualité de $\mathcal{E}$, consiste dans le cône polaire $C^\star$ de C : donc (11.15) sera établi si

(11.27) $\quad \mathrm{proj}_T\, C^\star = T$.

Par hypothèse, C contient $\vec{N}$, donc $C^\star$ est contenu dans le demi-espace de $\mathcal{E}$ ayant $\vec{N}$ pour normale sortante. Visiblement, (11.27) équivaut à dire que $-\vec{N}$ est dans l'intérieur de $C^\star$. Par des arguments classiques de dualité (cf. par exemple [33] , parag. 8.7) cette dernière propriété équivaut à la compacité des sections de C par les plans parallèles à T , c'est-à-dire la compacité des ensembles $\mathcal{D}(R_N)$. *Cela signifie que le frottement est fini dans toutes les directions* ; le cas contraire serait celui d'un frottement suffisant pour interdire certaines valeurs de $\vec{U}$, aussi petit que soit R_N : il ne s'agit plus d'un frottement proprement dit, mais de ce qu'on appelle traditionnellement une *liaison non holonome*.

12. PARTICULE FROTTANT CONTRE UNE PAROI

Si le système consiste en une simple particule, E coïncide avec l'espace vectoriel $\mathcal{E}$, de dimension 3. On suppose que $f = 0$ est l'équation d'une paroi matérielle fixe, constituant le solide appelé S_o au parag. précédent. L'application G se réduit à l'identité, donc $u = \vec{U}$, $r = \vec{R}$, etc...

A chaque point q de la paroi est associé un cône de frottement $C = C(q)$. Comme le calcul numérique violera plus ou moins la condition $f(q) \leqslant 0$, on doit étendre la définition de $C(q)$ au cas $f(q) > 0$, au moins pour q voisin de la frontière de la région L : le plus naturel est d'associer le même C à tous les points d'une demi-droite normale sortante. Par exemple, si on a un frottement de Coulomb classique (isotrope), on prendra un cône $C(q)$ de révolution, d'axe défini par $\operatorname{grad} f(q)$.

La particule est soumise à une force $Q(t,q,u)$; que cette force puisse dépendre de la vitesse u permettra d'y inclure un terme de Coriolis et donc de traiter le cas usuel où la paroi solide, prise comme système de référence, est mobile par rapport à un repère galiléen.

Après un demi-pas de démarrage, tel qu'on l'a décrit au parag. 6, chaque pas de l'algorithme consiste en premier lieu dans le calcul des expressions (11.17) à (11.20) ; ici on prend

$$Q_{i+1} = Q(t_{i+1}, q_{i+1}, u_i) .$$

Si $f(q_{i+1}) < 0$ ou $g.u' \leqslant 0$, le pas se termine avec

$u_{i+1} = u'$.

Sinon on invoque (11.23) , qui se simplifie dans le cas présent en

(12.1) $\quad - u_{i+1} \in \mathrm{proj}_T\, \partial\psi_C(u_{i+1} - u')$

avec T et C évalués pour $q = q_{i+1}$ (on pourra aussi utiliser un coefficient d'anticipation A_V , comme au parag. 10 , Remarque 1) .

Notons C' le cône convexe fermé non homogène $u' + C(q_{i+1})$; par translation :

$$\partial\psi_C(u_{i+1} - u') = \partial\psi_{C'}(u_{i+1}) ,$$

de sorte que (12.1) se récrit

(12.2) $\quad - u_{i+1} \in \mathrm{proj}_T\, \partial\psi_{C'}(u_{i+1})$.

Cela contient la condition de passivité du contact

(12.3) $\quad u_{i+1} \in T$.

Comme antérieurement, appelons G la droite vectorielle engendrée par $g = \mathrm{grad}\, f(q_{i+1})$, c'est-à-dire le sous-espace orthogonal de T dans E . Alors (12.2) équivaut à la conjonction de (12.3) et de

(12.4) $\quad - u_{i+1} \in G + \partial\psi_{C'}(u_{i+1})$.

Noter que (12.3) équivaut à

$$\partial\psi_T(u_{i+1}) = G ,$$

d'où une écriture équivalente à (12.2)

(12.5) $\quad - u_{i+1} \in \partial\psi_T(u_{i+1}) + \partial\psi_{C'}(u_{i+1})$.

Nous nous trouvons, rappelons-le, dans l'hypothèse $g.u' > 0$; cela assure que le plan T rencontre l'intérieur relatif du convexe fermé C' . Une règle d'addition des sous-différentiels (cf. [32] , theorem 23.8) fournit alors

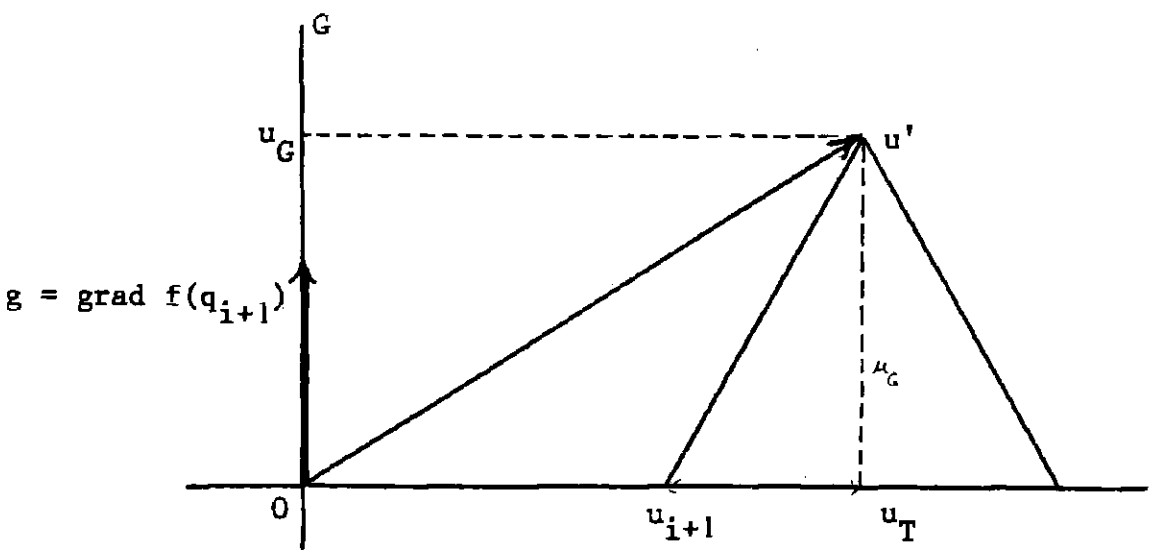
$$\partial\psi_T + \partial\psi_{C'} = \partial(\psi_T + \psi_{C'}) = \partial\psi_{T\cap C'} \ .$$

Vu la caractérisation connue du point proximal d'un élément donné (ici le zéro de E) dans un convexe fermé, on obtient la forme finale sous laquelle nous exploiterons (12.1) :

(12.6) $\quad u_{i+1} = \text{prox}\ (T \cap C' , 0)$.

La détermination de u_{i+1} consiste donc, pour un tel pas, en un problème de "programmation quadratique" dans le plan T .

Le cas le plus simple est celui d'un frottement isotrope, selon la loi de Coulomb traditionnelle : le cône C est de révolution autour de G . On est alors ramené à une figure plane :



On note respectivement u_T et u_G les projections orthogonales de u' sur T et G (u_T est la valeur que, dans l'hypothèse de non frottement, l'algorithme INEL attribuerait à u_{i+1})

$$u_G = \frac{g.u'}{|g|^2}\, g$$

$$u_T = u' - u_G \ .$$

Soit γ le coefficient de frottement ; l'intersection $T \cap C'$ est le disque de centre u_T, de rayon $\gamma|u_G|$; alors (12.6) devient :

1° Si $|u_T| \leqslant \gamma|u_G|$, alors $u_{i+1} = 0$

2° Sinon

$$(12.7) \qquad u_{i+1} = u_T - \gamma|u_G| \frac{u_T}{|u_T|} = u_T\left(1 - \gamma\frac{|u_G|}{|u_T|}\right) \ .$$

Comme pour les algorithmes antérieurement décrits, on peut escompter une meilleure précision si les résultats sont exploités à travers la *procédure de sortie* (6.16) , (6.17) .

REMARQUE 1 . Le coefficient γ et, plus généralement, le cône C dépendent a priori de q . Pour une description plus poussée du frottement, on peut aussi faire dépendre γ de la vitesse, c'est-à-dire, dans l'algorithme précédent, le faire dépendre de u_i . En particulier, on peut prendre des valeurs de γ différentes selon que $u_i = 0$ ou non : c'est la distinction classique entre le "coefficient de frottement statique" et le "coefficient de frottement dynamique". La programmation est facile, puisque l'éventualité $u_i = 0$ correspond précisément, dans le pas précédent, à la condition de branchement 1° ci-dessus.

REMARQUE 2 . Supposer f indépendant du temps entraîne que la paroi est fixe. Cela ne nous empêchera pas de traiter, au parag. 15 , des problèmes de table vibrante : on fera un changement de repère, en incorporant à Q une force d'inertie d'entraînement et, éventuellement, une force de Coriolis.

REMARQUE 3 . Les essais de cet algorithme pour le calcul de mouvements sans chocs sont très satisfaisants. En cas de choc, on a pris au parag. précédent, le parti d'appliquer (11.23) , devenu ici (12.1) , au calcul de la vitesse après choc, schématisation a priori audacieuse. Dans le cas particulier présent, si le frottement est isotrope, l'hypothèse est toutefois très plausible : il semble bien que, pendant toute la durée très brève du choc, la vitesse $u = \vec{U}$ et la réaction $r = \vec{R}$ conservent des directions et un sens invariables ; alors la non linéarité du second membre de (11.15) ne s'oppose pas à l'écriture d'une relation de même forme pour la percussion de réaction, intégrale de r .

REMARQUE 4 . Ici, comme dans l'algorithme INEL, on pourra compléter chaque pas tel que $f(q_{i+1}) > 0$ par une correction de violation, selon la formule (10.9) .

13. FROTTEMENT BIDIMENSIONNEL

Dans ce paragraphe la dimension n de E est quelconque ; par contre, il est supposé que, en conséquence des liaisons (parfaites) qui ont engendré le paramétrage (q^i) du système, l'ensemble des valeurs éventuelles de la vitesse de glissement $\vec{U}$ au point de contact M n'est plus, comme précédemment, l'espace tridimensionnel $\mathcal{E}$ mais un sous-espace $\mathcal{E}_2(q)$, de dimension 2 . C'est ce qui arrive en particulier si le système peut être modélisé comme plan, cas de beaucoup de machines usuelles.

Soit $q \in E$ une position du système vérifiant la condition de contact $f(q) = 0$; écrivons abréviativement $\mathcal{E}_2$ pour $\mathcal{E}_2(q)$. De nouveau, on note G (dépendant de q) l'application linéaire, *supposée surjective de* E *sur* $\mathcal{E}_2$, exprimant, pour tout mouvement différentiable $t \to q(t)$, la vitesse relative, au point M , des deux pièces en contact en fonction de $u = \dot{q}$:

$$\vec{U} = G(u) \ . \tag{13.1}$$

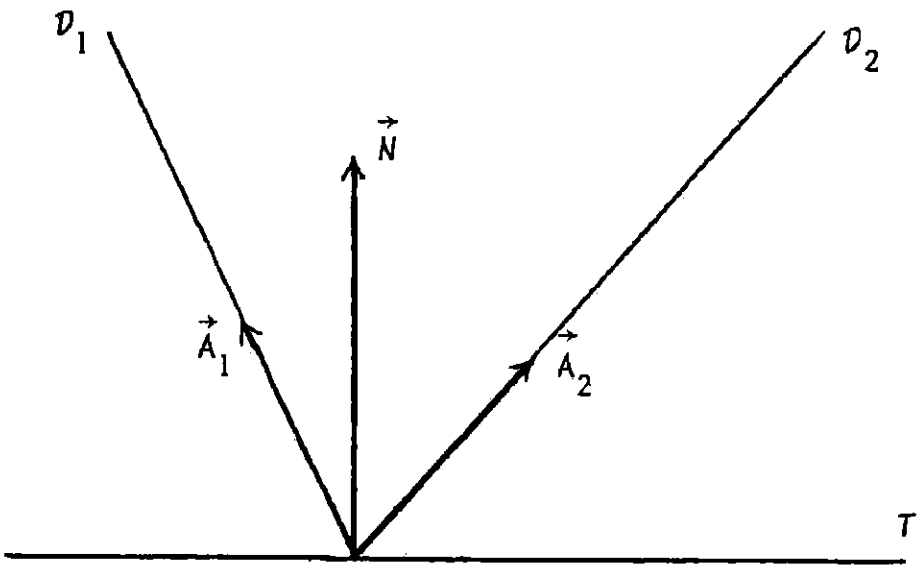
Comme au parag. 11 , $\vec{U}$ peut constituer la vitesse de glissement d'une pièce S_1 du système, au contact en M avec une pièce extérieure fixe, ou aussi bien la vitesse de glissement de S_1 relativement à une autre pièce S_2 du système. Dans les deux cas on note $\vec{N}$ le vecteur unité de $\mathcal{E}_2$ normal au point de contact et *dirigé vers* S_1 .

La transposée $G^{\star} : \mathcal{E}_2 \longrightarrow E$ est injective. Comme en (11.4), on trouve que $G^{\star}(\vec{N})$ est un élément non nul de E, normal entrant au point q de l'hypersurface frontière de la région L. L'image de $\mathcal{E}_2$ par $G^{\star}$ est un sous-espace vectoriel de E, soit $E_2(q)$ (abréviativement noté E_2), de dimension 2, contenant $g = \text{grad } f(q)$.

Physiquement, le contact est toujours un phénomène tridimensionnel mais les conditions présentes font que, pour la dynamique du système, les forces orthogonales à $\mathcal{E}_2(q)$ que peuvent exercer l'une sur l'autre les particules au contact possèdent des composantes covariantes nulles. On notera $\vec{\mathcal{R}}$ la composante selon $\mathcal{E}_2(q)$ de la force de contact subie par la particule M_1 de la pièce S_1 (si la pièce antagoniste fait aussi partie du système, la force qu'elle subit possède la composante $-\vec{\mathcal{R}}$ selon $\mathcal{E}_2$). Comme au parag. 11, les composantes covariantes de $\vec{\mathcal{R}}$ relativement au paramétrage définissent l'élément r de E :

(13.2) $\quad r = G^{\star}(\mathcal{R}) \subset E_2(q)$.

On pose que $\vec{\mathcal{R}}$ satisfait une *loi de Coulomb bidimensionnelle*. Dans le plan vectoriel $\mathcal{E}_2(q)$, est donné le *cône de frottement* $\mathcal{C}$, région angulaire fermée, contenant $\vec{N}$ et délimitée par deux demi droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.



On définit respectivement ces deux demi-droites par deux vecteurs non nuls $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$ les engendrant. Les tangentes des angles que font $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$ avec $\vec{N}$ sont les *coefficients de frottement* correspondant aux deux sens de glissement éventuels. Soit

$$\vec{B} = \vec{A}_2 - \vec{A}_1 ,$$

vecteur non colinéaire à $\vec{N}$ si l'un au moins des coefficients de frottement en question est non nul.

Ce qui suit évite l'usage de sous-différentiels dans l'écriture de la loi de Coulomb bidimensionnelle. Comme en (11.6) et (11.8) , on a d'abord

(13.3) $\quad \vec{R} \in C$

(13.4) $\quad \vec{N}.\vec{U} > 0 \Rightarrow \vec{R} = 0$.

Si par contre $\vec{N}.\vec{U} = 0$ (en particulier, mouvement à contact persistant) la loi consiste simplement dans les deux implications,

complétant (13.3) ,

(13.5) $\vec{\mathcal{B}}.\vec{\mathcal{U}} > 0 \Rightarrow \vec{\mathcal{R}} \in \mathcal{D}_1$

(13.6) $\vec{\mathcal{B}}.\vec{\mathcal{U}} < 0 \Rightarrow \mathcal{R} \in \mathcal{D}_2$

où les deux demi-droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont expressément entendues comme "pointées", c'est-à-dire contenant le zéro de $\mathcal{E}_2$.

Noter que C est un cône bidimensionnel saillant, i.e. non égal à un demi-plan ; il en est de même pour son image par l'application linéaire injective $G^\star$, soit

$$C(q) = G^\star(C) \subset E_2(q) \ .$$

Cette image est la région angulaire fermée de $E_2(q)$ délimitée par les deux demi-droites $D_j = G^\star(\mathcal{D}_j)$, engendrées respectivement par les éléments $a_j = G^\star(\vec{\mathcal{A}}_j)$ $j = 1,2$, de E . Puisque C contient $\vec{\mathcal{N}}$, $C(q)$ contient $- g = - \text{grad } f(q)$.

Vu que $G^\star$ est injective, la formulation qui précède se traduit de façon équivalente en termes des éléments u et r de E correspondant à $\vec{\mathcal{U}}$ et $\vec{\mathcal{R}}$. D'abord, en s'appuyant toujours sur (11.4) et (11.5) ,

(13.7) $r \in C$

(13.8) $g.u < 0 \Rightarrow r = 0$

Puis, en posant

$$b = G^\star(\vec{\mathcal{B}}) = a_2 - a_1$$

on a, si $g.u = 0$, les implications

(13.9) $b.u > 0 \Rightarrow r \in D_1$

(13.10) $b.u < 0 \Rightarrow r \in D_2$.

Pour le calcul numérique on suppose que les définitions de $E_2(q)$, $C(q)$, etc... sont étendues aux valeurs de q telles que $f(q) \geqslant 0$, au moins au voisinage de l'hypersurface $f = 0$; la discussion des résultats, en cas de violation notable de la liaison $f \leqslant 0$, sera plus claire si on suppose toujours que $-\operatorname{grad} f(q) \in C(q)$ et que le cône $C(q)$ est saillant.

Un pas d'algorithme débute comme on l'a écrit en (11.17)-(11.20) . Si $f(q_{i+1}) < 0$ ou $g.u' \leqslant 0$, le pas se termine par $u_{i+1} = u'$.

Si $f(q_{i+1}) \geqslant 0$ avec $g.u' > 0$, l'exploitation de la loi de frottement ci-dessus, jointe à notre hypothèse habituelle de *passivité du contact* $g.u_{i+1} = 0$, se présente comme suit :

On écrit la dynamique du pas

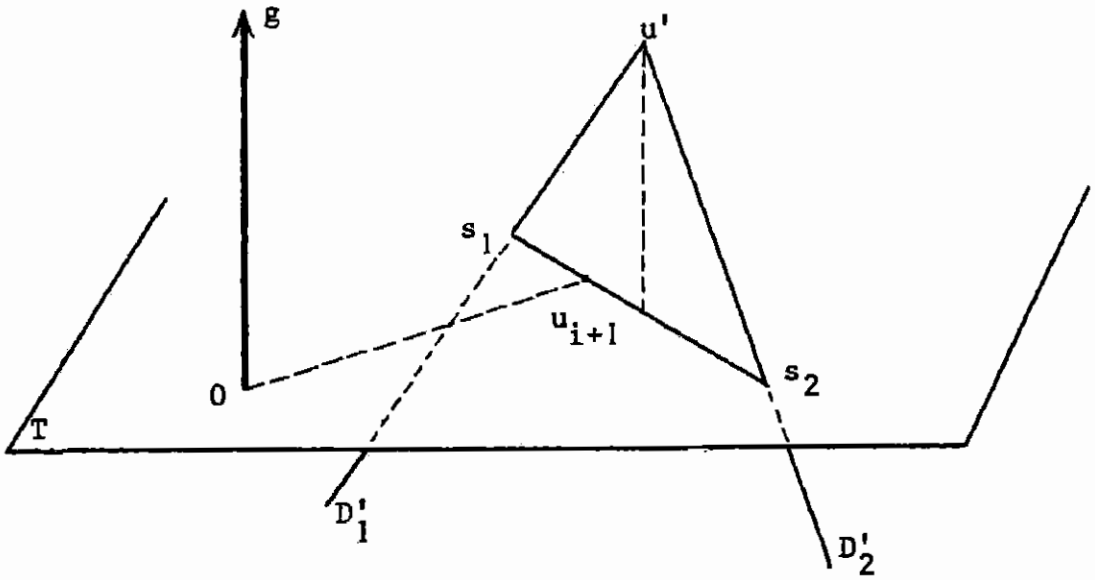
$$u_{i+1} = u' + h\,r$$

et r , ou de façon équivalente $h\,r$, est relié par (13.9) et (13.10) à une valeur de u qu'on pose être u_{i+1} , vu le parti, adopté dans tout ce rapport, de rechercher des algorithmes "de type implicite". Bref

(13.11) $b.u_{i+1} > 0 \Rightarrow u_{i+1} - u' \in D_1$

(13.12) $b.u_{i+1} < 0 \Rightarrow u_{i+1} - u' \in D_2$

On note T l'hyperplan orthogonal à g dans E ; l'illustration est faite pour $n = 3$.



Soit C' le convexe $u' + C(q_{i+1})$, enveloppe convexe des deux demi-droites $D'_j = u' + D_j$, $j = 1,2$. Puisque $g.u' > 0$ et que $-g \in C(q_{i+1})$, l'ensemble C' , cône convexe bidimensionnel de sommet u' , a une intersection non vide, soit S avec T . Ce cône étant saillant, l'une au moins des deux demi-droites D'_j rencontre T , mais pas nécessairement les deux. La demi-droite D'_j possède avec T une intersection

$$s_j = u' + \lambda a_j$$

pourvu que

$$\lambda = -\frac{g.u'}{g.a_j}$$

soit > 0 , i.e. $g.a_j < 0$.

Considérons d'abord le cas où s_1 et s_2 existent ; alors l'intersection S est le segment $[s_1,s_2]$. Il existe des réels ξ , ζ , avec $\xi > 0$ tels que

$$b = \xi(s_2 - s_1) + \zeta g .$$

Pour tout élément v de T le signe de $b.v$ est donc égal au signe de $(s_2 - s_1).v$. Vu que $u_{i+1} \in T$ on récrit ainsi (13.11) et (13.12) sous la forme équivalente

$$(s_2 - s_1).u_{i+1} > 0 \Rightarrow u_{i+1} = s_1$$

$$(s_2 - s_1).u_{i+1} < 0 \Rightarrow u_{i+1} = s_2 .$$

Si $(s_2 - s_1).u_{i+1} = 0$, il reste simplement, d'après (13.7) , que $u_{i+1} \in S$. Ce système de conditions admet visiblement une solution et une seule

(13.13) $\quad u_{i+1} = \text{prox}\ (S,0)$.

Conclusion semblable, lorsqu'un seul des deux points, soit s_1 par exemple, existe. Alors S est une demi-droite d'origine s_1 dont on notera d un vecteur directeur ; pour tout $v \in T$ le signe de $b.v$ est égal au signe de $d.v$ et on obtient à nouveau (13.13) . Raisonnement semblable si s_2 seul existe.

La situation est donc formellement semblable à ce qu'on a obtenu en (12.6) pour le cas d'une particule frottant contre une paroi.

Le calcul du point le plus proche de l'origine dans le convexe unidimensionnel S est élémentaire.

REMARQUE 1 . Jointe à $g.u = 0$ l'éventualité $b.u = 0$ équivaut à l'orthogonalité de u au plan vectoriel $E_2(q)$. Puisque ce dernier est égal à $G^{\star}(\mathcal{E}_2)$ l'orthogonalité en question équivaut à $G(u) = 0$, i.e. *nullité de la vitesse de glissement* U .

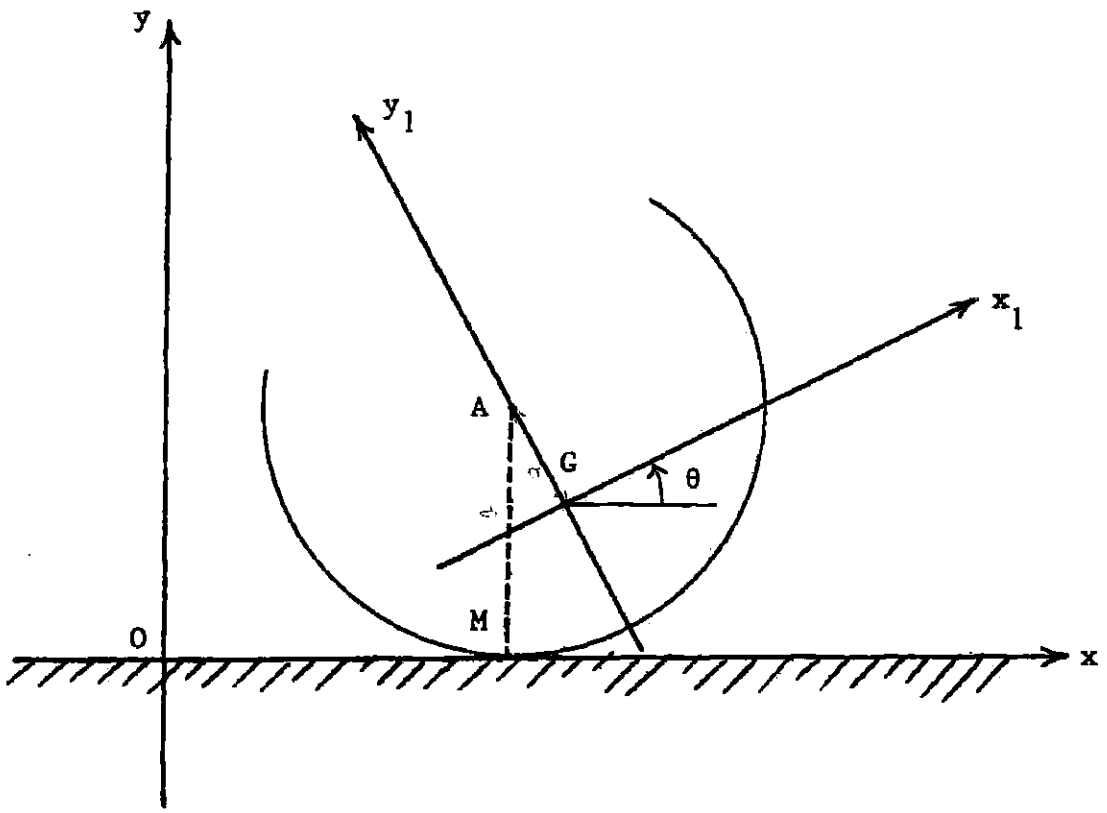
REMARQUE 2 . Le cône C dépend a priori de q ; on peut supposer qu'il dépend aussi de la vitesse, c'est-à-dire, dans l'algorithme ci-dessus, qu'il dépendra de u_i . Comme au parag. 12, cela permet par exemple de prendre en compte une différence entre frottement "statique" (i.e. pour $U = 0$) et frottement "dynamique" : le cas $U_i = G(u_i) = 0$ correspond justement à l'une des conditions de branchement rencontrées lorsque, au pas précédent, on aura dû calculer prox $(S,0)$.

REMARQUE 3 . Comme dans l'algorithme INEL, on pourra compléter chaque pas où $f(q_{i+1}) > 0$ par une correction de violation conformément à (10.9) . D'autre part, vu que l'hypersurface $f = 0$ dans E est habituellement courbe, il peut être avantageux d'introduire ici aussi un coefficient d'anticipation A_V .

REMARQUE 4 . En cas de discontinuité de vitesse, le vecteur $u_{i+1} - u'$ n'est plus de l'ordre de h : c'est la percussion de liaison. Comme au parag. 12 , il est plausible d'admettre qu'elle obéit aux mêmes lois que l'élément noté ci-dessus $h\,r$, d'où à nouveau (13.13) (cela suppose implicitement que la vitesse de glissement ne change pas de signe au cours du choc). Ainsi l'algorithme permettra en particulier de calculer les mouvements avec un choc d'arc-boutement. Le système dont on développe le calcul dans le paragraphe qui vient en fournit des exemples.

14. UN MODÈLE BIDIMENSIONNEL ÉLÉMENTAIRE

Le formalisme du parag. précédent est appliqué ici au système constitué par un unique solide S_1 dont le mouvement est supposé *à plan invariant*, par suite de liaisons parfaites qu'on n'a pas à expliciter. Tous les éléments du problème seront ainsi représentés dans le plan des axes dits fixes Oxy .



Soit G le centre d'inertie de S_1 et soient Gx_1y_1 des axes attachés à ce solide, dont chaque position dans le plan Oxy est repérée par les trois paramètres suivants :

ξ , η , coordonnées de G relativement à Oxy

$\theta = (Ox, Gx_1)$

Soit m la masse de S_1 et I son moment d'inertie par rapport à la droite issue de G, perpendiculaire au plan de figure. Pour tout mouvement différentiable $t \to (\xi, \eta, \theta)$, l'énergie cinétique de S_1 a l'expression

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 .$$

On introduit les nouveaux paramètres

$$X = \xi\sqrt{m} \quad , \quad Y = \eta\sqrt{m} \quad , \quad Z = \theta\sqrt{I}$$

d'où

$$T = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) .$$

La variété des positions du système sera donc traitée comme un espace euclidien E, de dimension $n = 3$, où X, Y, Z constituent des coordonnées orthonormées : tels sont dans le cas présent les paramètres (q^i) de l'exposé général.

La partie de la frontière de S_1 concernée dans la suite est représentée par un cercle Γ_1 de rayon $b \geqslant 0$, de centre A ; soient $0,a$ (a de signe quelconque) les coordonnées de A dans les axes Gx_1y_1. On suppose S_1 confiné dans la région $y \geqslant 0$ du plan Oxy, ce qui s'exprime par l'inégalité

$$\eta + a \cos \theta \geqslant b$$

i.e. $f(X,Y,Z) \leqslant 0$, avec

$$(14.1) \qquad f(X,Y,Z) = b - \frac{Y}{\sqrt{m}} - a \cos \frac{Z}{\sqrt{I}}$$

La droite d'équation $y = 0$ représente la frontière d'un solide extérieur fixe S_o. L'égalité $f(X,Y,Z) = 0$ caractérise les positions de S_1 dans lesquelles Γ_1 touche cette frontière. Par rapport aux axes Oxy, le point de contact a pour coordonnées $(\xi - a \sin\theta , 0)$ et les composantes de la vitesse de la particule de S_1 au contact sont $(\dot{\xi} + \dot{\theta}\eta , \dot{\eta} - \dot{\theta} a \sin \theta)$. L'espace vectoriel $\mathcal{E}_2$ s'identifie au plan Oxy, quelle que soit la position du système ; si le mouvement est décrit au moyen du paramétrage (X,Y,Z), les composantes de $\vec{U}$ dans $\mathcal{E}_2$ ont ainsi pour expression

$$(14.2) \qquad \frac{\dot{X}}{\sqrt{m}} + \frac{\dot{Z}}{\sqrt{I}} \frac{Y}{\sqrt{m}} \quad , \quad \frac{\dot{Y}}{\sqrt{m}} - \frac{\dot{Z}}{\sqrt{I}} a \sin \frac{Z}{\sqrt{I}}$$

(on vérifie que la seconde est nulle dans un mouvement à contact persistant).

L'application linéaire $G : u \to \vec{U}$, de E dans $\mathcal{E}_2$, a donc pour matrice

$$(14.3) \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & \frac{Y}{\sqrt{Im}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} & -\frac{a}{\sqrt{I}} \sin \frac{Z}{\sqrt{I}} \end{bmatrix}$$

Vu que les bases employées dans E et dans $\mathcal{E}_2$ sont orthonormées, l'application $G^\star : \mathcal{E}_2 \to E$ a pour matrice la transposée de la précédente.

A priori, G est seulement définie en cas de contact. Pour les besoins du calcul numérique, on doit prolonger la définition à des positions telles que $f(X,Y,Z) > 0$, ce qui peut se faire d'une infinité de manières : le plus simple est de conserver, (14.3) dans tous les cas ; le rang de

la matrice est toujours maximal (noter que la donnée b n'y apparaît pas).

Dans $\mathcal{E}_2$ le *cône de frottement* $\mathcal{C}$ est engendré par deux vecteurs $(\gamma_1 , 1)$ et $(\gamma_2 , 1)$ où γ_1 et γ_2 désignent deux réels de signes contraires. On suppose pour fixer les idées $\gamma_1 > 0$: c'est le coefficient de frottement pour les vitesses de glissement négatives ; alors $-\gamma_2$ est le coefficient de frottement pour les vitesses de glissement positives.

Le cône C de E est engendré par les images a_j des $(\gamma_j,1)$, $j = 1,2$, par l'application $\mathcal{G}^\star$; composantes de a_j dans E :

$$(14.4) \qquad \frac{\gamma_j}{\sqrt{m}} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{m}} \quad , \quad \frac{Y}{\sqrt{Im}}\gamma_j - \frac{a}{\sqrt{I}} \sin \frac{Z}{\sqrt{I}} \quad .$$

Les composantes de $g = \text{grad } f$ étant

$$(14.5) \qquad 0 \quad , \quad -\frac{1}{\sqrt{m}} \quad , \quad \frac{a}{\sqrt{I}} \sin \frac{Z}{\sqrt{I}}$$

on voit que, si on introduit $k \in E$ de composantes

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \quad , \quad 0 \quad , \quad \frac{Y}{\sqrt{Im}}$$

on a

$$a_j = -g + \gamma_j k \ .$$

La manière dont on a choisi de prolonger $\mathcal{G}$ hors du cas de contact $f = 0$ sauvegarde donc la propriété $-g \in C$ (le calcul numérique pourrait être exécuté sans cela, mais cette propriété clarifie la discussion éventuelle des résultats, en cas de violation notable de la liaison).

Outre la réaction à son point de contact éventuel avec S_o , le solide S_1 subit des forces, définies a priori comme fonctions de la

position (et éventuellement des vitesses) : soit $\vec{R}$ la résultante de ces forces, de composantes R_x et R_y relativement à Oxy , et soit H leur moment résultant par rapport à un axe issu de G , perpendiculaire au plan de figure, orienté selon la convention habituelle. La forme différentielle "travail virtuel" de ces forces s'écrit

$$R_x \, d\xi + R_y \, d\eta + H \, d\theta = \frac{R_x}{\sqrt{m}} \, dX + \frac{R_y}{\sqrt{m}} \, dY + \frac{H}{\sqrt{I}} \, dZ \, .$$

Les composantes covariantes, notées Q_i dans la théorie générale, sont donc ici les trois réels

$$P = \frac{R_x}{\sqrt{m}} \quad , \quad Q = \frac{R_y}{\sqrt{m}} \quad , \quad R = \frac{H}{\sqrt{I}} \quad ,$$

à définir comme fonctions de X , Y , Z (et, éventuellement, de $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{Z}$) .

Ce qui précède n'exclut pas le cas $b = 0$; alors le contact éventuel entre S_1 et S_o s'effectue par la particule A , représentant une pointe du solide S_1 . En particulier, S_1 peut être une barre rigide admettant A pour extrêmité.

L'application au présent système de l'algorithme décrit au parag. 13 permet le traitement numérique de situations techniquement importantes : phénomènes de *broutage* avec cessation éventuelle du contact (cf. parag. 15, essai 10, ci-après). La conclusion la plus importante est que, contrairement à ce qu'on croit souvent, de tels broutages n'exigent pas une variation du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement (stick-slip), ni de chocs tangentiels de Delassus [20].

15. COMPTES RENDUS D'ESSAIS

ESSAI 1

Les planches 1 et 2 illustrent la différence entre chocs élastiques et chocs inélastiques dans un cas banal. Le système consiste en une simple particule en mouvement dans un plan vertical sous l'effet de la pesanteur. Cette particule est confinée par une paroi sinusoïdale, de moyenne horizontale.

La planche 1 a été obtenue par un algorithme du type décrit au parag. 7 , basé sur la relation (7.4) sans contrôle du bilan énergétique (de fait l'énergie du mouvement augmente légèrement à chaque rebond).

La planche 2 a été obtenue par l'algorithme INEL (parag. 10).

Dans les deux cas, la finesse du pas h est tout à fait superflue pour le calcul des épisodes paraboliques (cf. l'analyse, faite au parag. 6, du mouvement dans un champ de forces constant) ; elle a été adoptée pour rendre négligeables les violations de la liaison unilatérale, au moment des chocs, sans recours à aucune procédure de correction de violation.

ESSAI 2

La planche 3 (en haut) illustre l'emploi de l'algorithme ELAST pour le calcul d'un mouvement pendulaire. Une particule de masse 1 , mobile dans le plan Oxy est soumise au champ de forces uniforme de composantes (0;8) (un champ de pesanteur, si on veut, ici dirigé dans le sens des y positifs). Elle est astreinte à la liaison unilatérale sans frottement de condition géométrique

$$x^2 + y^2 - 120\ y \leqslant 0\ .$$

On a donc comme frontière de la région permise L le cercle de centre (0;-60) , de rayon 60 , partiellement tracé. La position initiale est (0;0) , la vitesse initiale (25;0) d'où, comme solution exacte, un mouvement pendulaire sans cessation du contact car l'élongation angulaire maximale n'atteint pas $\frac{\pi}{2}$ (pour l'étude du pendule unilatéral —— ou de façon équivalente pendule suspendu par un fil inextensible parfaitement souple —— voir, par exemple, [24] vol. 2, parag. 6.4.d) .

La période d'oscillation est de l'ordre de 19,5 . On a pris un pas h = 0,1 ; la trajectoire calculée par l'algorithme ELAST est cotée pour les valeurs entières de t . A la précision du traceur, elle est presque indiscernable de l'arc de cercle correspondant à la solution exacte. Des comparaisons numériques de trajectoires et d'horaires pour un système du même type font l'objet de l'essai 4 ci-après.

L'objet du présent essai est de faire ressortir la supériorité de l'algorithme ELAST sur un quelconque algorithme de "billard" basé sur la loi de réflexion (7.4) sans souci d'équilibrer le bilan énergétique de chaque pas. Le tracé du bas de la planche 3 est obtenu par ce dernier type d'algorithme, avec les mêmes données et le même pas que le tracé du haut. Les oscillations parasites divergentes rendent le calcul inutilisable, encore que la durée et l'amplitude de la première oscillation pendulaire, si on examine seulement le mouvement d'ensemble, sont assez bien obtenues. Le bilan énergétique étant positif, les oscillations pendulaires successives de ce mouvement d'ensemble ont des amplitudes légèrement croissantes.

ESSAI 3

En illustration de la remarque finale du parag. 7 , *un coefficient d'anticipation du cône tangent,* soit A_V , est introduit dans l'algorithme ELAST, pour traiter (planche 4) le même exemple que dans l'essai précédent. Une valeur négative de A_V , soit -0,5 (tracé du haut) entraîne une violation régulièrement croissante de la liaison unilatérale. Une valeur positive, soit 0,5 (tracé du bas) produit des incursions incorrectes dans la région L , bien que le bilan énergétique soit équilibré.

L'objet de l'essai 4 qui vient sera de contrôler que, pour des problèmes de cette sorte, la valeur $A_V = 0$ est très précisément optimale.

ESSAI 4

Le tableau de la planche 5 est réalisé par un programme appliquant divers algorithmes à un problème de même sorte que tout à l'heure. Dans le plan Oxy , une particule est soumise au champ de forces uniforme de composantes (0;-1000) . Elle est confinée sans frottement dans la région limitée par le cercle de centre (0;0) , de rayon 40 . La position initiale est le point (0;-40) du cercle frontière ; la vitesse initiale (v,0) est tangente à ce cercle. Si $|v|$ ne dépasse pas un certain seuil, la solution exacte est, comme dans l'essai 2 , un mouvement oscillatoire à contact persistant . Si $|v|$ dépasse un autre seuil, le mouvement est *révolutif*, encore avec contact persistant, parce que la "force centrifuge" se trouve suffisante, même en position haute, pour contrebalancer la pesanteur (et maintenir le fil tendu, si on visualise le système comme un pendule proprement dit). C'est

cette dernière situation qui est traitée.

En colonne 1 sont indiquées les valeurs considérées du temps de 0,1 en 0,1 jusqu'à $t = 1$, ce qui correspond à un peu moins de deux révolutions. En dessous, dans la même colonne, figure la valeur correspondante précise de l'angle θ , compté à partir de la position initiale ; c'est la solution pour la vitesse angulaire initiale choisie de l'équation différentielle classique

$$(15.1) \qquad \ddot{\theta} = - 25 \sin \theta$$

calculée par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 , surabondamment précise. Tous les calculs de cet essai sont faits en double précision (16 chiffres) avec le même pas de temps 0,005 .

En regard de chacune des 11 valeurs du temps apparaissent, à la colonne 2 , 6 valeurs estimées de l'angle θ . La première est obtenue en traitant l'équation différentielle (15.1) , c'est à dire le système

$$(15.2) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega \qquad , \qquad \frac{d\omega}{dt} = - 25 \sin \theta$$

par un algorithme de la forme définie au parag. 6 . Compte tenu des procédures d'entrée et de sortie décrites audit paragraphe, equ. (6.13) à (6.17) , cet algorithme "d'ordre 3/2" peut s'écrire

$$\theta_{i+1} = \overline{\theta}_i + \frac{1}{2} h \, \omega_i$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h \, Q(\theta_{i+1})$$

$$\overline{\theta}_{i+1} = \theta_{i+1} + \frac{1}{2} h \, \omega_{i+1}$$

où Q est ici la fonction $\theta \rightarrow -25 \sin \theta$.

L'algorithme ELAST est par ailleurs appliqué au mouvement de la particule dans le plan Oxy , confinée unilatéralement par la paroi circulaire, avec les 5 valeurs suivantes de A_V , coefficient d'anticipation du cône tangent : $-0{,}02$; $-0{,}01$; 0 ; $0{,}01$; $0{,}02$. Des coordonnées x et y calculées, on a tiré l'angle θ , d'où 5 valeurs listées en dessous de celle fournie par l'algorithme unidimensionnel d'ordre $3/2$.

On voit que la meilleure approximation est obtenue avec $A_V = 0$ et qu'elle est presque aussi bonne que celle du calcul unidimensionnel (effectué, rappelons-le, avec le même pas h) .

Mais c'est à l'égard du *respect de la liaison* que l'optimalité de la valeur $A_V = 0$ est la plus pointue. La colonne 3 affiche les valeurs de la violation, évaluée en millionièmes du rayon du cercle, c'est à dire

$$10^6.(\sqrt{x^2+y^2} - 40)/40 .$$

Les violations positives correspondent au passage du point (x,y) dans la région interdite ; les violations négatives à des cessations du contact.

En bas du tableau sont données la moyenne des valeurs absolues et la moyenne quadratique de cette violation, sur la totalité des pas.

La dernière colonne, prévue dans le programme pour l'étude de l'algorithme INEL (cf. essai 5 , ci-après) affiche la variation de l'énergie totale du système : par construction elle est ici nulle, à l'arrondi d'affichage près.

En conclusion, avec ce pas de 0,005 (l'intervalle d'affichage 0,1 correspond donc à 20 pas) l'algorithme ELAST apparaît très bon. Au temps 1 , la rotation totale atteint presque deux révolutions ; la valeur précise de θ est 11,88258 ; l'algorithme ELAST, avec $A_V = 0$, donne 11 , 88134 ; dans l'ensemble des valeurs affichées, l'erreur de trajectoire atteint au plus 3/10.000 du rayon du cercle.

ESSAI 5

La planche 6 traite le même problème que dans l'essai précédent, avec les mêmes conditions initiales et le même pas de discrétisation, mais par l'algorithme INEL.

On n'affiche plus les résultats de l'algorithme unidimensionnel d'ordre 3/2 ; la colonne 2 fait seulement apparaître les valeurs de θ résultant du calcul bidimensionnel par l'algorithme INEL, avec les 5 valeurs suivantes du coefficient d'anticipation A_V : 0,3 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,7 .

La colonne 3 affiche la violation : résultats encore plus satisfaisants que pour l'algorithme ELAST. L'optimum correspond à $A_V = 0,5$ (beaucoup moins pointu toutefois que l'optimum $A_V = 0$ obtenu précédemment pour ELAST puisque, dans l'essai 4, les valeurs de A_V étaient testées à intervalle 0,01).

La colonne 4 fait ressortir la chute d'énergie associée à la discrétisation, défaut majeur de l'algorithme INEL. Après une révolution, cette chute d'énergie approche 20 % de l'énergie cinétique initiale. Elle est d'autant plus grande que A_V est plus grand, et les valeurs de A_V supérieures à 0,5 paraissent particulièrement nocives.

Cette chute d'énergie est naturellement corrélative de valeurs trop faibles pour la vitesse ; en conséquence les valeurs de $\theta(t)$ affichées dans la colonne 2 sont en retard sur la valeur précise donnée colonne 1 . C'est malgré tout avec $A_V = 0,5$ que le retard est le moins grand ; alors pour $t = 0,5$ (soit un peu moins d'une révolution) on trouve $\theta = 5,275$ contre une valeur précise de 5,939.

ESSAI 6

La planche 7 est produite par l'algorithme INEL appliqué au problème suivant : une particule est lancée dans le champ de la pesanteur (composantes : 0;0;-981) avec les conditions initiales affichées. Après un épisode de mouvement parabolique la particule rencontre la paroi interne d'un vase conique de révolution d'axe vertical, imposant la condition

$$9x^2 + 9y^2 - 4z^2 \leqslant 0 .$$

Le choc étant supposé inélastique, le mouvement consécutif a lieu, sans frottement par hypothèse, au contact de la paroi. Que, sur la projection verticale, la trajectoire apparaisse tangente au contour apparent du cône, atteste que, à la précision du traceur, le calcul n'engendre ni violation de la liaison ni cessation de contact.

Cet épisode se poursuit jusqu'à ce que la particule atteigne le bord du vase (critère $z \geqslant 45$, équivalent ici à $x^2 + y^2 \geqslant 900$) . Un nouvel épisode de mouvement parabolique, dans le champ de la pesanteur, fait alors suite, puis la particule rencontre le plan $z = 0$ avec, à nouveau, un choc inélastique sans frottement ; ce choc conserve la composante horizontale de la vitesse, de sorte que la discontinuité est

invisible en projection horizontale.

ESSAI 7

La planche 8 montre, toujours sur deux projections, un autre mouvement de particule dans le même champ de pesanteur que ci-dessus. Une paroi rigide sphérique impose la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 45^2 .$$

Avec les conditions initiales affichées, le mouvement débute par un épisode parabolique. Un choc inélastique se produit un peu avant l'instant $t = 0,1$ (marque 1) suivi d'une phase de mouvement sans frottement contre la paroi sphérique. Un peu après $t = 0,2$ la "force centrifuge" n'est plus suffisante pour contrebalancer la pesanteur et le contact cesse. Le mouvement parabolique qui fait suite se termine un peu après $t = 0,6$ par un choc inélastique. Le mouvement se poursuit, désormais sans perte de contact, par les oscillations classiques du pendule sphérique ; on arrête le tracé à $t = 2,5$.

Classiquement, les oscillations du pendule sphérique ont toutes la même altitude maximale. La dissipation de l'algorithme INEL fait que le deuxième lobe tracé monte un peu moins haut que le premier.

La planche 9 reprend le même problème, avec un pas de discrétisation deux fois et demie plus petit. La perte d'énergie est nettement moins grande, mais encore visible. La comparaison des deux planches permet d'estimer de combien cette amélioration de la précision modifie la trajectoire et l'horaire.

ESSAI 8

La planche 10 est obtenue par l'algorithme INEL, appliqué à un système de liberté 3 , avec deux liaisons unilatérales.

Le système est une barre rectiligne AB de longueur 50 , en mouvement dans un plan vertical, soumise au champ de pesanteur (0;-981).

Cette barre n'est pas supposée homogène ; la position du centre d'inertie et le rayon de giration k sont affichés.

La barre est confinée par le cercle rigide de centre 0 , de rayon $r = 45$, ce qui équivaut à dire que ses deux extrêmités A et B sont astreintes l'une et l'autre à ce confinement. En notant $GA = a$, $GB = b$ et en prenant comme variables les coordonnées (x,y) de G ainsi que l'angle $(Ox,\overrightarrow{AB}) = \theta$, l'ensemble des positions permises est caractérisé par les deux inégalités

$$x^2 + y^2 + 2bx \cos\theta + 2by \sin\theta + b^2 - r^2 \leqslant 0$$

$$x^2 + y^2 - 2ax \cos\theta - 2ay \sin\theta + a^2 - r^2 \leqslant 0 .$$

Si on remplace la variable θ par $k\theta$, noté z , l'expression de l'énergie cinétique se trouve la même que si x , y , z étaient les coordonnées orthonormées d'un point d'un espace euclidien, d'où programmation facile de l'algorithme INEL.

Le dessin distingue les deux extrêmités par les marques + et x . Les positions, tracées tous les 5 pas, sont numérotées consécutivement. Les données initiales fournissent un épisode avec conservation des deux contacts. Dès la position 2 , on voit l'extrêmité A perdre le contact. A la position 6 l'extrêmité B s'est aussi détachée, d'où un épisode

de chute libre de la barre, avec la vitesse de rotation acquise. A la position 12 , l'extrêmité A a retrouvé le contact, par un choc inélastique. A la position 21 (numéro non affiché pour éviter d'encombrer le dessin), l'extrêmité B à son tour a heurté inélastiquement la frontière. Le mouvement qui fait suite, avec conservation des deux contacts, est pendulaire de liberté 1.

La discrétisation assez grossière doit entraîner une dissipation numérique notable. Par contre, aucune violation des liaisons unilatérales n'est visible, grâce à la procédure de correction de violation exposée parag. 10, Remarque 2.

ESSAI 9

Les planches 11 à 13 représentent des mouvements d'un point M (un petit objet, non susceptible de rouler ni de basculer) reposant unilatéralement, avec frottement isotrope, sur une table vibrante plane. Unités physiques : centimètre, seconde ; pesanteur : 981.

Le calcul est fait par la méthode du parag. 12 ; l'usage d'un repère lié à la table (Ox,Oy dans le plan de la table ; côté permis : $z \geqslant 0$) permet de traiter celle-ci comme une paroi fixe, moyennant écriture d'une force d'inertie d'entraînement, d'une force de Coriolis et d'une variation de direction de la pesanteur.

La planche 11 montre le cas d'une table animée d'un mouvement de translation circulaire uniforme dans un plan horizontal fixe. Ici, la composante normale de la réaction est constante ; une étude élémentaire [38] montre que le mouvement de M par rapport à la table est asymptote à un mouvement circulaire uniforme ; le calcul du rayon est en excellent accord.

Dans la planche 12 la table, au voisinage d'une position moyenne horizontale, présente une oscillation de rotation de petite amplitude autour de la droite issue de O dans la direction (0,-1,1) . Sont tracées, chacune sur la durée de 15 oscillations, les trajectoires correspondant à 12 positions initiales équidistantes, alignées entre (1.5, -12, 0) et (1.5, -1, 0) . Au voisinage de O s'étend une plage de repos. Au delà, les trajectoires sont approximativement circulaires ; elles aboutiraient toutes, pour t assez grand, sur la demi-droite $x = 0$, $y > 0$; au contraire, la demi-droite $x = 0$, $y < 0$ est une ligne de répulsion. Le mouvement est, en gros, d'autant plus rapide qu'on s'éloigne de $x = 0$; pour un éloignement suffisant, chaque oscillation comporte une cessation de contact, visible en projection sur yOz .

La planche 13 montre une situation usuelle dans les transporteurs industriels. Oy et Oz restent dans un plan fixe ; le point O oscille sur un segment de droite horizontal tandis que le point A (0, 50, 0) est contraint (par un excentrique) à un mouvement circulaire uniforme, de rayon 0.5 . La direction de Oy présente ainsi une oscillation, de demi-amplitude 0.01 radian, au voisinage d'une position horizontale. Pour obtenir des trajectoires qui se déploient dans la direction des x on suppose Ox incliné de 13° sur l'horizontale. Les trajectoires, chacune sur une durée de 50 oscillations, sont dessinées pour 10 positions initiales équidistantes alignées sur Oy entre $y = 5$ et $y = 130$. Des valeurs initiales négatives donneraient des tracés symétriques.

Le dessin du haut correspond à une rotation de l'excentrique dans le sens négatif autour de l'axe Ox (i.e. le sens des aiguilles

d'une montre dans le plan yOz tel que figuré). L'axe Ox est une ligne d'attraction ; une autre ligne d'attraction, un peu brouillé par le caractère légèrement chaotique des mouvements à cessation de contact est visible vers $y = 103$. Un dessin à plus petite échelle montrerait d'autres bandes d'attractions parallèles, d'autant plus floues qu'on s'éloigne de Ox .

Le dessin du bas correspond au sens de rotation opposé ; l'axe Ox devient ligne de répulsion ; une ligne d'attraction apparaît vers $x = 70$; d'autres bandes parallèles plus floues existent en dehors du champ représenté.

ESSAI 10

Le système décrit au parag. 14 est utilisé pour modéliser le *broutage* d'un solide astreint par un entraînement élastique à se mouvoir contre une paroi plane, avec frottement au contact.

Dans ce but, les forces actives sont spécifiées comme suit. Un point D du solide, de coordonnées DX,DY relativement aux axes Gx_1y_1 , est rappelé élastiquement vers un point qui décrit une droite parallèle à Ox d'un mouvement uniforme imposé (vitesse $VR = 30$) . Les coordonnées de ce centre de rappel relativement à Oxy ont donc la forme $XR = (VR)t + const$, $YR = const$. Le rappel obéit à une loi linéaire avec une raideur $RY = 2000$ dans la direction des y , dix fois plus forte que la raideur $RX = 200$ dans la direction des x . En outre est appliqué un *couple de rappel* CR , négatif donc induisant plus ou moins le solide à buter contre la paroi $y = 0$. Seule la valeur de ce couple distingue les divers essais que voici.

Le rayon de giration GI est fixé à 1. Sont affichées les valeurs initiales des coordonnées X et Y de G , les composantes U , V de sa vitesse, la valeur initiale de θ (noté TH) et la vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}$ (noté OM) .

Le solide est montré dans sa position initiale. Ensuite le traceur dessine seulement, à des intervalles de temps spécifiés, la position d'un segment d'origine A (centre du contour circulaire) dirigé selon Gy_1 , de longueur conventionnellement choisie. Le point A se trouve dans la région $y-b \geqslant 0$; qu'il atteigne la frontière $y-b = 0$ signale que le profil circulaire du solide est en contact avec la paroi $y = 0$.

La planche 14 correspond à CR = -700 (la plus grande en valeur absolue des valeurs considérées ; pour CR = -800 le solide s'arcboute et bascule vers des positions à θ négatif). Le mouvement de régime manifeste un contact permanent entre le solide et la paroi $y = 0$. On constate une oscillation angulaire superposée à une variation, à période plus longue, du décalage entre G et le centre de rappel. La "trajectoire relative" de G , montrée à la partie inférieure est celle du point de coordonnées X-XR,Y . Elle exhibe l'aspect typique d'un mouvement "doublement périodique" (c'est certainement la projection, sur le plan de ces deux variables, d'une trajectoire qui, dans l'espace des 6 variables X-XR , Y , Z , U , V , W , s'enroule sur un "tore à deux dimensions").

La planche 15 montre un régime d'oscillation pour CR = -200 . Cette fois, le contact entre le solide et la paroi est épisodique ; on réalise un mouvement de ce type en guidant à la main, sous un angle convenable, un bâton de craie contre un tableau noir : la craie trace un pointillé.

Le deuxième graphique montre l'évolution, en fonction du temps, de la composante en x du vecteur vitesse de la particule M_1 du profil circulaire qui, à l'instant en cause présente l'ordonnée minimale. Dans un épisode de contact, cette composante constituerait la vitesse de glissement du solide sur la paroi. A l'instant où le solide reprend contact avec la paroi, la composante en question a la valeur -14 environ et passe brusquement à zéro.

Le graphique du bas explicite la situation en montrant la trajectoire d'un point ayant pour coordonnées les deux composantes de la vitesse de M_1 . Le segment rectiligne correspond en fait à la discontinuité que manifeste cette vitesse à l'instant du choc du solide contre la paroi. Comme prévu, puisque les chocs sont inélastiques, la composante en y de la vitesse tombe aussi à zéro à cet instant ; elle croît ensuite, montrant que le contact cesse aussitôt après le choc. A la précision du traceur, la courbe est fermée, ce qui confirme le caractère périodique du mouvement (pour plus de précision, cette dernière courbe a été calculée avec un pas 0,0005 , au lieu de 0,001 pour les deux tracés du haut).

Enfin la planche 16 (entièrement calculée au pas 0,0005) concerne le cas CR = -100. On obtient un régime périodique plus compliqué que le précédent, où alternent deux formes différentes d'épisode sans contact. En bas est tracée, comme dans la planche 15 , la trajectoire d'un point ayant pour coordonnées les composantes de la vitesse de M_1 . Deux segments rectilignes marquent les deux types de choc du solide contre la paroi. L'un de ces chocs est immédiatement suivi de décollement. L'autre est suivi d'un épisode de glissement (segment horizontal de la courbe).

A la différence du cas CR = -200 , la composante horizontale de la vitesse de M_1 ne s'annule jamais. Le très léger défaut de fermeture de la courbe peut être attribué aux aléas de l'algorithme et aussi à ce que le régime n'est pas encore exactement atteint.

La valeur CR = -50 a également été essayée : elle fournit un mouvement avec chocs erratiques contre la paroi, sans structure temporelle apparente.

REFERENCES

[1] DELASSUS, E., Mémoire sur la théorie des liaisons finies unilatérales, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 34 (1917), 95-179.

[2] MOREAU, J.J., Liaisons unilatérales sans frottement et chocs inélastiques, C.R. Acad. Sci. Paris, Série II, 296 (1983), 1473-1476.

[3] MOREAU, J.J., Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints, in : (G. DEL PIERO/F. MACERI, editors) Unilateral Problems in Structural Analysis, CISM Courses and Lectures n° 288, Springer-Verlag, 1985, pp. 173-221.

[4] MOREAU, J.J., Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space, J. Diff. Equ., 26 (1977), 347-374.

[5] MONTEIRO MARQUES M.D.P., Rafle par un convexe semi-continu inférieurement d'intérieur non vide en dimension finie, Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 14 (1984), exp. n° 6.

[6] MONTEIRO MARQUES, M.D.P., Rafle par un convexe semi-continu inférieurement d'intérieur non vide en dimension finie, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 299 (1984), 307-310.

[7] MONTEIRO MARQUES, M.D.P., Regularization and graph approximation of a discontinuous evolution problem, à paraître dans J. Diff. Equ.

[8] SCHATZMAN, M., A class of nonlinear differential equations of second order in time, J. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl., 2 (1978) 355-373.

[9] PANAGIOTOPOULOS, P.D., Non-convex superpotentials in the sense of F.H. Clarke and applications, Mech. Res. Comm., 8 (1981), 335-340.

[10] LÖTSTEDT, P., Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints, SIAM J. Appl. Math. 42 (1982), 281-296.

[11] MOREAU, J.J., Les liaisons unilatérales et le principe de Gauss, C.R. Acad. Sci. Paris, 256 (1963), 871-874.

[12] MOREAU, J.J., Quadratic programming in mechanics : dynamics of one-sided constraints, SIAM J. Control, 4(1966), 153-158.

[13] MOREAU, J.J., Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 271 (1970), 608-611.

[14] MOREAU, J.J., On unilateral constraints, friction and plasticity, in New Variational Techniques in Mathematical Physics (G. Capriz and G. Stampacchia, eds.) CIME, II ciclo 1973, Editioni Cremonese, Roma, 1974, pp. 175-322.

[15] MOREAU, J.J., Application of convex analysis to some problems of dry friction, in Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, vol. 2 (H. Zorski, ed.), Pitman Pub. Ltd., London, 1979, p. 263-280.

[16] TAUBERT, K., Differenzverfahren für Schwingungen mit trockener und zäher Reibung und für Regelungssysteme, Numer. Math. 26 (1976), 379-399.

[17] TAUBERT, K., Converging multistep methods for initial value problems involving multivalued maps, Computing, 27 (1981), 123-136.

[18] LÖTSTEDT, P., Coulomb friction in two-dimensional rigid body systems, Z. Angew. Math. u. Mech, 61 (1981), 605-615.

[19] PERCIVALE, D., Uniqueness in the elastic bounce problem, J. Differential Equations 56 (1985) 206-215.

[20] PERES, J., Mécanique générale, Masson, Paris, 1953.

[21] JEAN, M. et PRATT, E., A system of rigid bodies with dry friction, Int. J. Engineering Sci., 23 (1985), 497-513.

[22] MOREAU, J.J., Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certains problèmes d'évolution, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B , 282 (1976), 837-841.

[23] CASTAING, C., Solutions continues à droite d'un problème d'évolution dans C(X) et dans les espaces hilbertiens, Trav. du Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 11 (1981), exp. n° 2 et Acta Mathematica Vietnamica, 7 (1982), n° 1.

[24] MOREAU, J.J., Mécanique classique, vol. 1, Masson, Paris, 1969, vol. 2, 1971.

[25] MOREAU, J.J., Décomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cônes mutuellement polaires, C.R. Acad. Sci. Paris, 255 (1962), 238-240.

[26] DELASSUS, E., Considérations sur le frottement de glissement, Nouv. Ann. de Mathématiques, 4ème Ser., 20 (1920), 485-496.

[27] MOREAU, J.J., et VALADIER, M., Dérivée d'une mesure vectorielle sur un intervalle, Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 14 (1984), exp. n° 1 .

[28] MOREAU, J.J. et VALADIER, M., Quelques résultats sur les fonctions vectorielles à variation bornée d'une variable réelle, Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 14 (1984), exp. n° 16.

[29] CURNIER, A., A theory of friction, Int. J. Solids Struct., 20 (1984) 637-647.

[30] RIOS, H., Une étude d'existence sur certains problèmes paraboliques, Ann. Faculté des Sci. Toulouse, 1 (1979) 235-255.

[31] MONTEIRO MARQUES, M.D.P., Chocs inélastiques standards : un résultat d'existence, Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 15 (1985), exp. n° 4.

[32] ROCKAFELLAR, R.T., Convex analysis, Princeton U.P., 1970.

[33] MOREAU, J.J., Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les Equations aux Dérivées Partielles, Collège de France, Paris, 1967.

[34] PANAGIOTOPOULOS, P.D., Inequality problems in mechanics and applications, Birkäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1985.

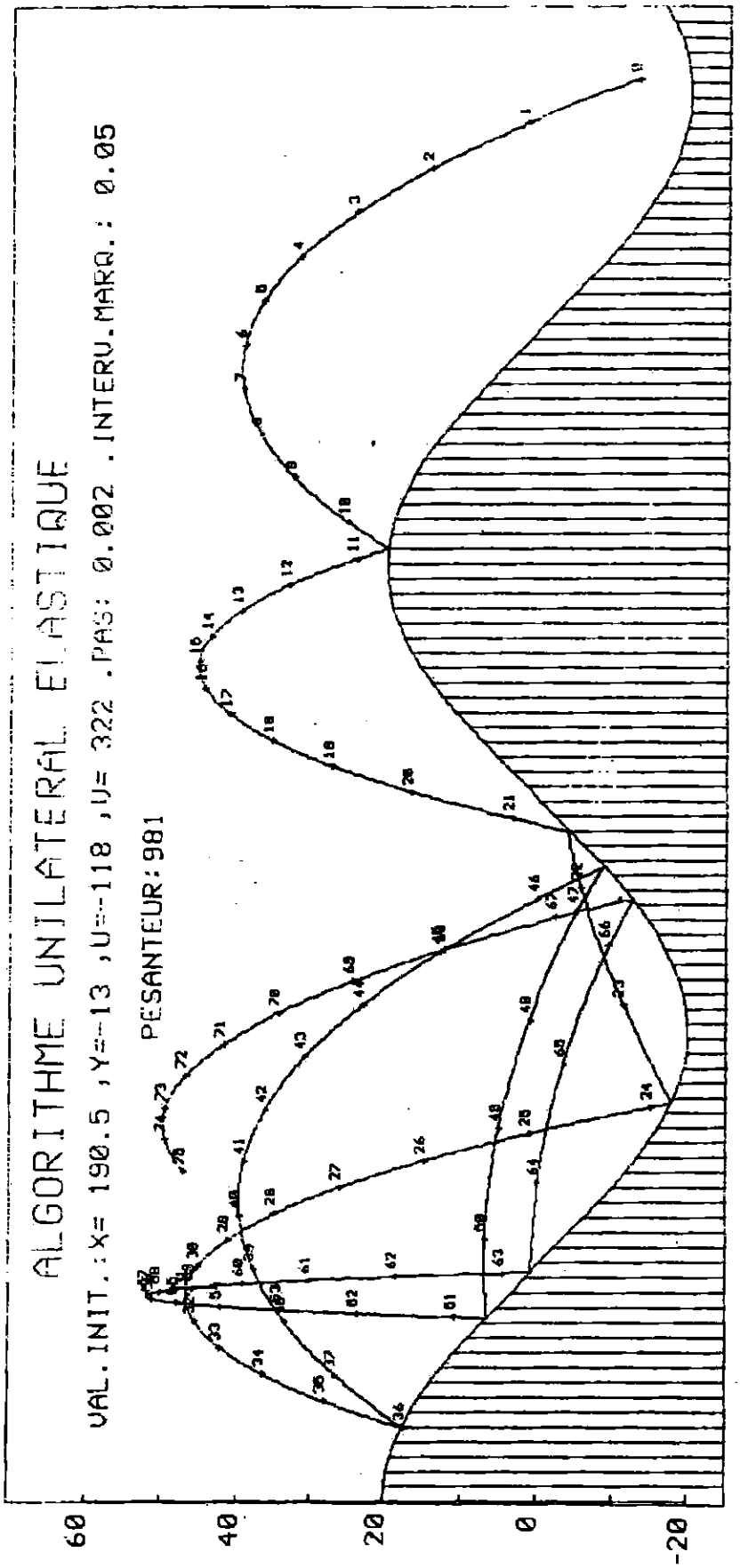
[35] CLARKE, F.H., Generalized gradients and applications, Trans. A.M.S. 205(1975) 247-262.

[36] CLARKE, F.H., Inequality constraints in the Calculus of variations, Can. J. Math. 39(1977) 528-540.

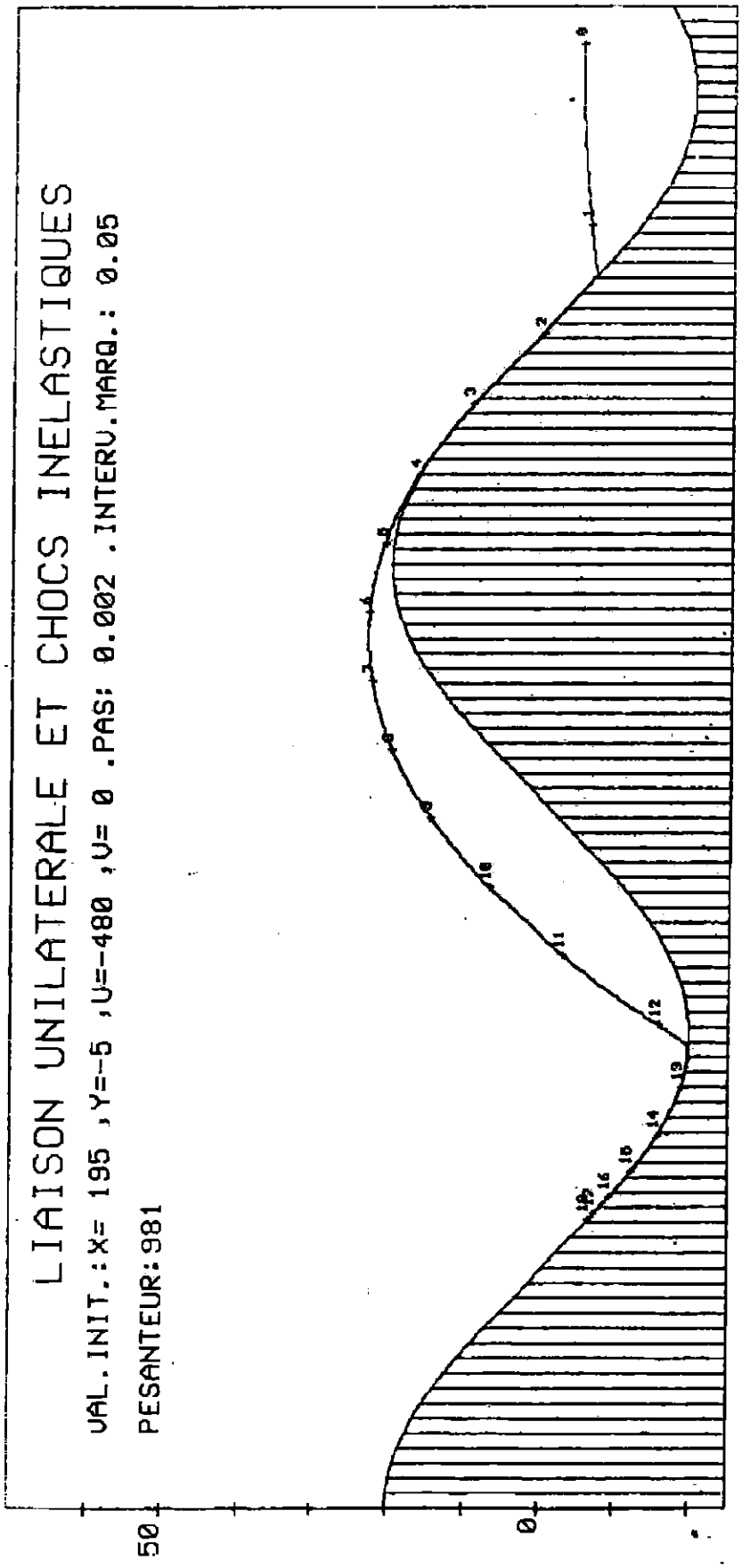
[37] LÖTSTEDT, P., Numerical simulation of time-dependent contact and friction problems in rigid body mechanics, TRITA-NA-8214, Dept. Numerical Analysis, Royal Institute of Technology, Stockholm.

[38] MAURY, S., Un problème de frottement équivalent à un problème de poursuite : étude asymptotique, Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 4 (1974), exp. n° 10.

[39] BRESSAN, A., Incompatibilité dei teoremi di esistenza e di unicità del moto per un tipo molto comune e regolare di sistemi meccanici, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. III, 14 (1960), 333-


ALGORITHME UNILATERAL ELASTIQUE
VAL. INIT. : X= 190.5 , Y=-13 , U=-118 , U= 322 . PAS: 0.002 . INTERV. MARQ. : 0.05
PESANTEUR: 981
60
40
20
0
-20

- Planche 1 -


LIAISON UNILATERALE ET CHOCS INELASTIQUES
VAL. INIT.: X= 195 ,Y=-5 ,U=-480 ,V= 0 .PAS: 0.002 .INTERV.MARQ.: 0.05
PESANTEUR: 981
50
0

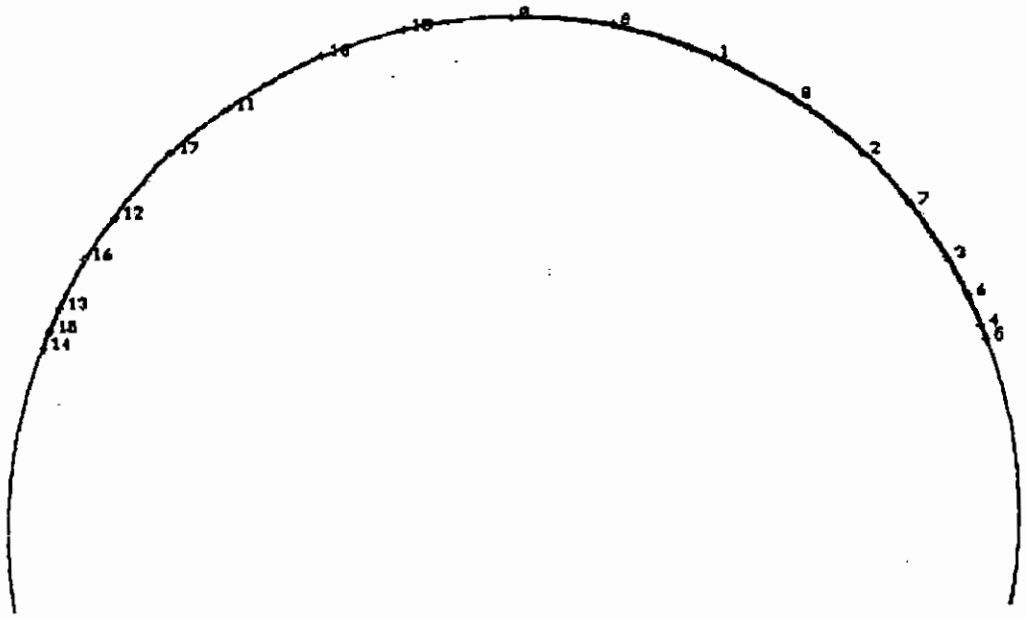
- Planche 2 -

ALGORITHME ELAST

VAL.INIT.:X= 0 ,Y= 0 ,U= 25 ,V= 0 PAS: 0.1 INTERV.MARQ.: 1

FORCE:P= 0 ,Q= 8

RAYON 60

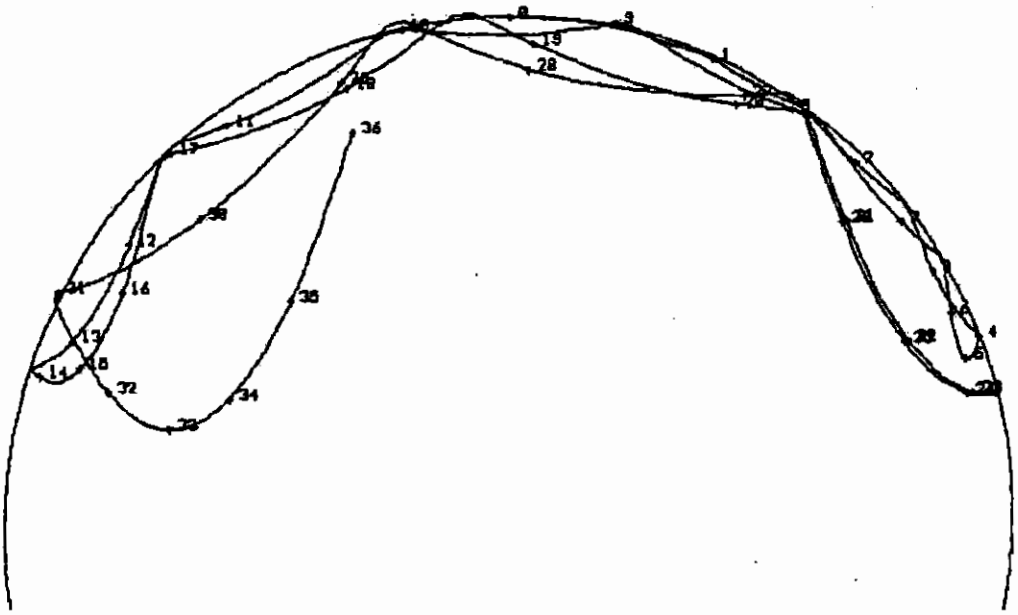


BILAN ENERGETIQUE INCORRECT

VAL.INIT.:X= 0 ,Y= 0 ,U= 25 ,V= 0 PAS: 0.1 INTERV.MARQ.: 1

FORCE:P= 0 ,Q= 8

RAYON 60

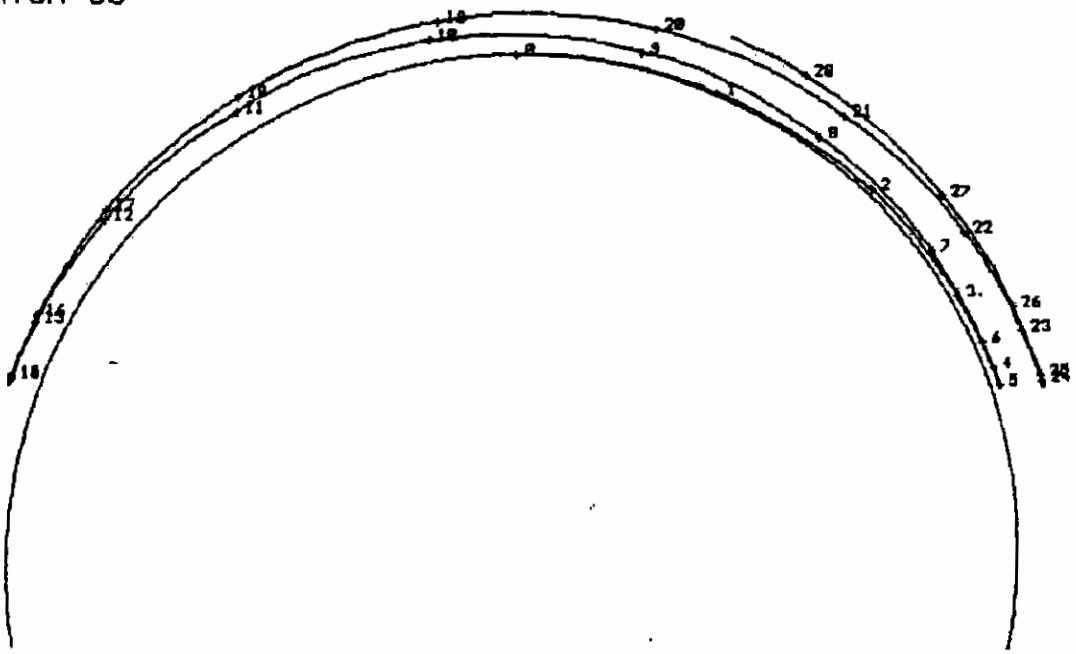


ALGORITHME ELAST

VAL.INIT.:X= 0 ,Y= 0 ,U= 25 ,V= 0 PAS: 0.1 INTERV.MARQ.: 1

FORCE:P= 0 ,Q= 8 ANTIC.CONE:AV=-0.5

RAYON 60

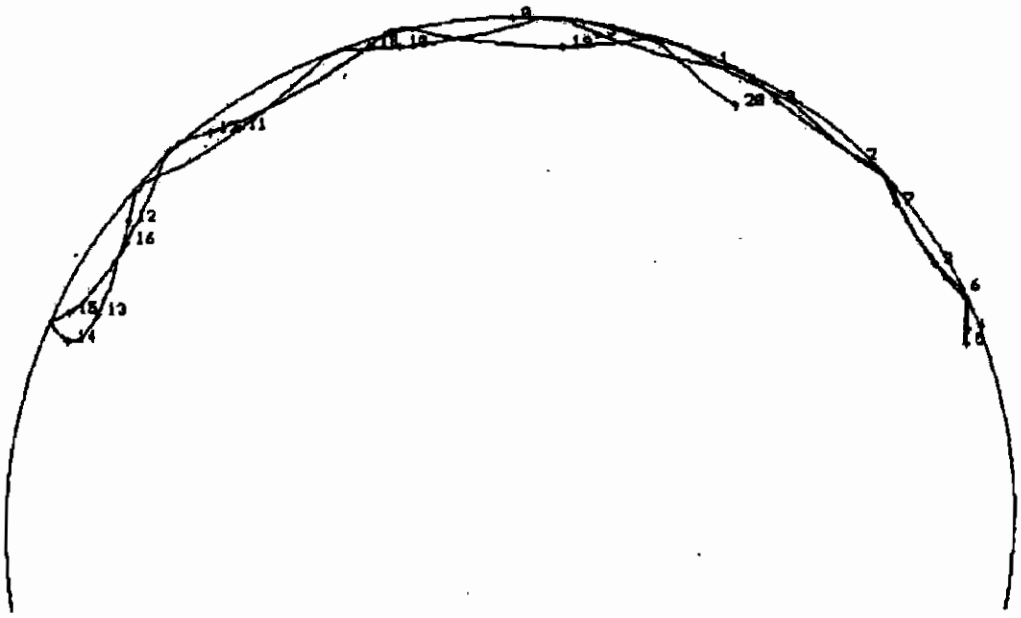


ALGORITHME ELAST

VAL.INIT.:X= 0 ,Y= 0 ,U= 25 ,V= 0 PAS: 0.1 INTERV.MARQ.: 1

FORCE:P= 0 ,Q= 8 ANTIC.CONE:AV= 0.5

RAYON 60



- Planche 4 -

PENDULE UNILATERAL.MOUVEMENT REVOLUTIF
COMPARAISON D'ALGORITHMES

Col.1:TEMPS et VALEUR DE REFERENCE DE L'ANGLE
Col.2:ANGLE
Col.3:VIOLATION en millionième du rayon
Col.4:ENERGIE rapportée à l'énergie cinétique initiale

Ligne 1:Algorithme unidimensionnel
Ligne 2:Algorithme ELAST.Anticipation AV=-.02
Ligne 3:Algorithme ELAST.Anticipation AV=-.01
Ligne 4:Algorithme ELAST.Anticipation AV= 0
Ligne 5:Algorithme ELAST.Anticipation AV= .01
Ligne 6:Algorithme ELAST.Anticipation AV= .02

Pas = .005 Vit.angulaire,init. 14.14214

0	0		
0	0	0	-.00001
	0	0	-.00001
	0	0	-.00001
	0	0	-.00001
	0	0	-.00001
.1	1.36125		
1.36131	1.3597	1733	-.00001
	1.36026	805	-.00001
	1.36083	-124	-.00001
	1.3597	-1369	-.00001
	1.35909	-137	-.00001
.2	2.50956		
2.50965	2.50539	2900	-.00001
	2.5073	1310	-.00001
	2.50922	-283	-.00001
	2.50823	1644	-.00001
	2.50719	-580	-.00001
.3	3.52165		
3.52177	3.51322	3900	-.00001
	3.51739	1802	-.00001
	3.52157	-302	-.00001
	3.52054	572	-.00001
	3.5219	-5206	-.00001
.4	4.6199		
4.62009	4.60362	5221	-.00001
	4.61175	2530	-.00001
	4.61992	-171	-.00001
	4.6182	-1122	-.00001
	4.62228	-3748	-.00001
.5	5.93852		
5.9388	5.91112	7100	-.00001
	5.92461	3555	-.00001
	5.93817	-10	-.00001
	5.93552	-3101	-.00001
	5.93772	-5847	-.00001
.6	7.32793		
7.32826	7.29208	8962	-.00001
	7.30954	4454	-.00001
	7.3271	-78	-.00001
	7.32401	-2088	-.00001
	7.32312	-789	-.00001
.7	8.532		
8.53231	8.49154	10250	-.00001
	8.5113	5008	-.00001
	8.53123	-255	-.00001
	8.52867	-6108	-.00001
	8.52693	-7135	-.00001
.8	9.55838		
9.5587	9.50828	11235	-.00001
	9.53291	5475	-.00001
	9.55789	-312	-.00001
	9.55818	-4311	-.00001
	9.56027	-16694	-.00001
.9	10.61582		
10.61622	10.54296	12404	-.00001
	10.57886	6116	-.00001
	10.61544	-215	-.00001
	10.61753	-2665	-.00001
	10.62548	-2380	-.00001
1	11.88204		
11.88258	11.77668	14121	-.00001
	11.82858	7079	-.00001
	11.88134	-36	-.00001
	11.88105	3229	-.00001
	11.89552	-13060	-.00001

PERIODE DE REVOLUTION= .51

VIOLATION MOYENNE (resp.VIOL.QUADR.MOY.) en millionnieme du rayon
Ligne 2: 7112 (resp.: 8184)
Ligne 3: 3476 (resp.: 4025)
Ligne 4: 177 (resp.: 207)
Ligne 5: 2662 (resp.: 3486)
Ligne 6: 5304 (resp.: 6875)

PENDULE UNILATERAL.MOUVEMENT REVOLUTIF
COMPARAISON D'ALGORITHMES

Col.1:TEMPS et VALEUR DE REFERENCE DE L'ANGLE
Col.2:ANGLE
Col.3:VIOLATION en millionième du rayon
Col.4:ENERGIE rapportée à l'énergie cinétique initiale

Ligne 1:Algorithme INEL.Anticipation AV= .3
Ligne 2:Algorithme INEL.Anticipation AV= .4
Ligne 3:Algorithme INEL.Anticipation AV= .5
Ligne 4:Algorithme INEL.Anticipation AV= .6
Ligne 5:Algorithme INEL.Anticipation AV= .7

Pas = .005 Vit.angulaire.init. 14.14214

0	0	0	-.00001
0	0	0	-.00001
	0	0	-.00001
	0	0	-.00001
	0	0	-.00001
.1	1.31741	17091	-.08468
1.36131	1.32167	8532	-.08573
	1.32588	-65	-.08687
	1.31583	1363	-.10517
	1.3107	2046	-.12121
.2	2.36369	28343	-.11579
2.50965	2.3778	14133	-.11711
	2.39211	-197	-.11854
	2.36598	630	-.14009
	2.34739	487	-.15861
.3	3.22151	35947	-.12607
3.52177	3.2502	17985	-.12777
	3.27976	-230	-.12962
	3.23103	590	-.1518
	3.19289	-98	-.17008
.4	4.07924	43627	-.13668
4.62009	4.13247	22010	-.13951
	4.18803	-146	-.14262
	4.10466	382	-.16307
	4.03743	197	-.18211
.5	5.09151	54462	-.1651
5.9388	5.18107	27778	-.17136
	5.27494	38	-.17826
	5.14655	1779	-.20157
	5.04204	989	-.21916
.6	6.25372	68872	-.22344
7.32826	6.37654	35245	-.23332
	6.50415	148	-.24361
	6.34301	3180	-.27436
	6.20895	1176	-.28705
.7	7.36538	82212	-.27535
8.53231	7.49892	41776	-.28329
	7.6363	59	-.29116
	7.46866	404	-.32685
	7.32802	1353	-.35863
.8	8.25333	90824	-.29504
9.5587	8.3829	45814	-.30046
	8.51754	-62	-.30602
	8.35075	300	-.34582
	8.21101	52	-.37976
.9	8.92295	95742	-.29933
10.61622	9.05598	48159	-.30408
	9.2	-116	-.30917
	9.01062	-114	-.34927
	8.85575	-74	-.38441
1	9.47815	99125	-.30018
11.88258	9.6397	49943	-.30509
	9.82469	-107	-.31058
	9.5687	-136	-.34987
	9.36478	-960	-.38471

PERIODE DE REVOLUTION= .51

VIOLATION MOYENNE (resp.VIOL.QUADR.MOY.) en millionnieme du rayon
Ligne 2: 57034 (resp.: 64249)
Ligne 3: 28823 (resp.: 32484)
Ligne 4: 110 (resp.: 129)
Ligne 5: 731 (resp.: 1078)
Ligne 6: 567 (resp.: 838)

PAS 0.002 ;TOTAL 650 ;MARQUE TOUS LES 50

P= 0 ,Q= 0 ,R=-981
X= 45 ,Y= 25 ,Z= 70
U=-170 ,V=-30 ,W= 60

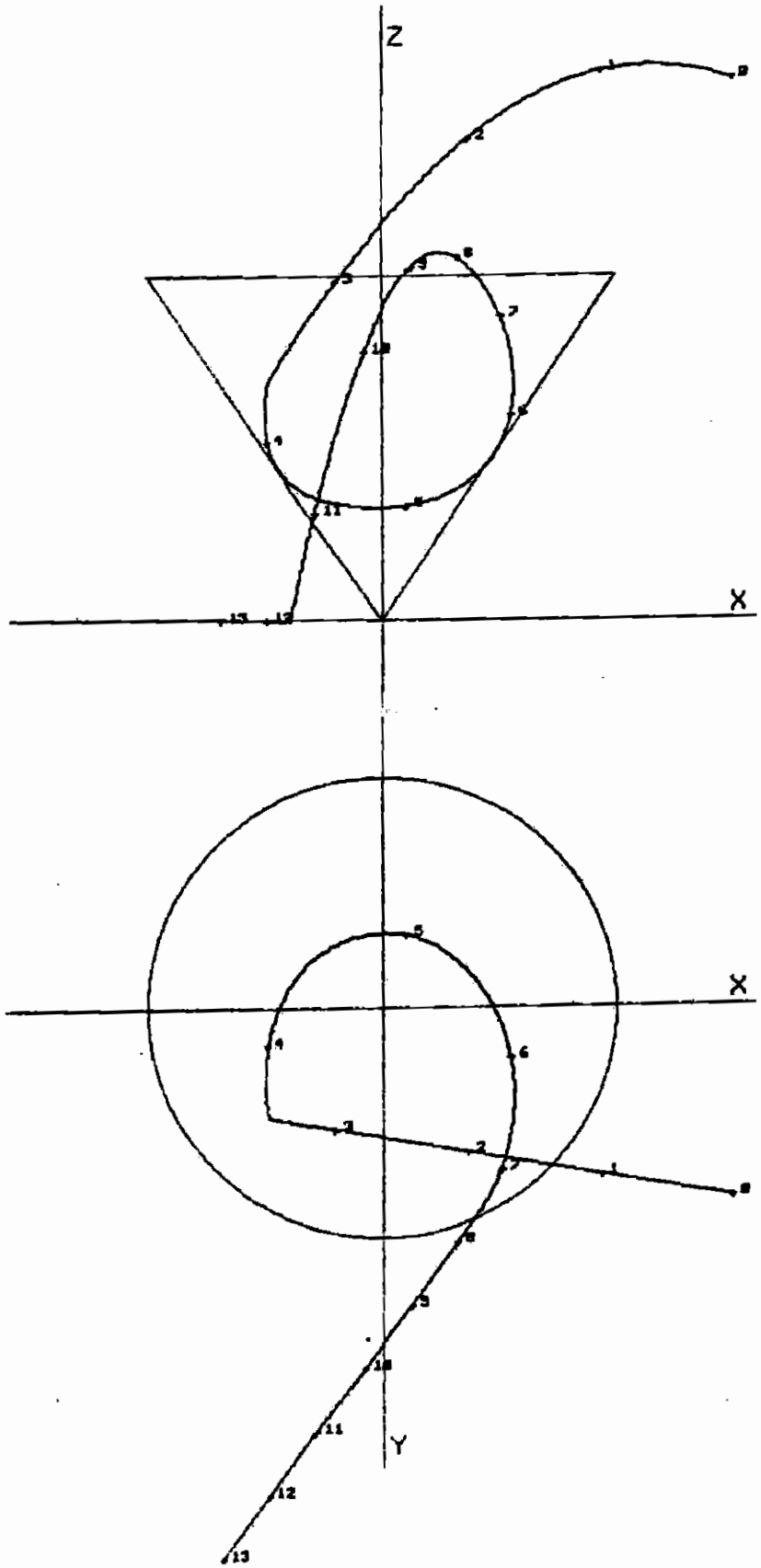
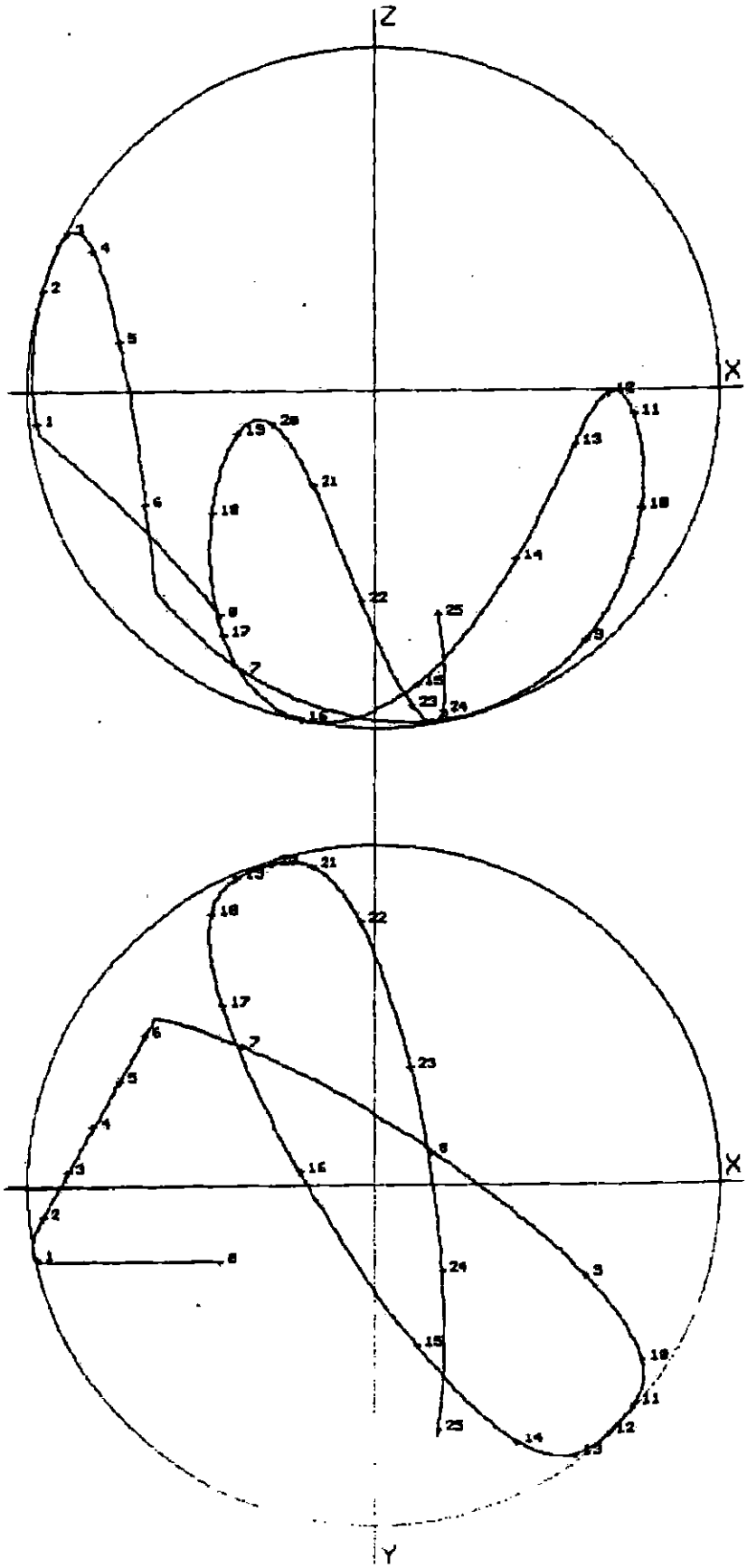


Planche 7 -

PAS 0.005 ;TOTAL 500 ;MARQUE TOUS LES 20

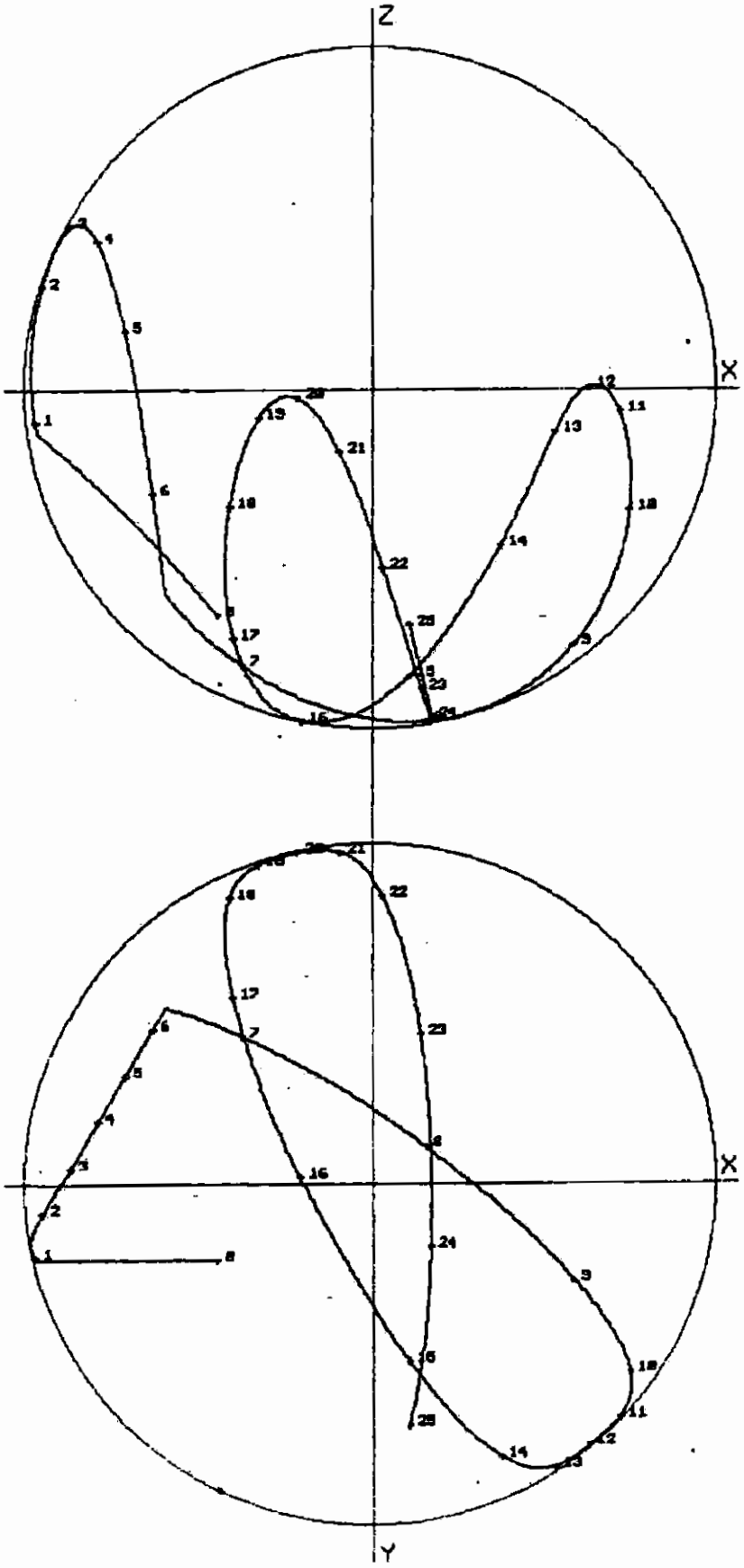
P= 0 ,Q= 0 ,R=-981
X=-20 ,Y= 10 ,Z=-30
U=-250 ,U= 0 ,W= 300



- Planche 8 -

PAS 0.002 ;TOTAL 1250 ;MARQUE TOUS LES 50

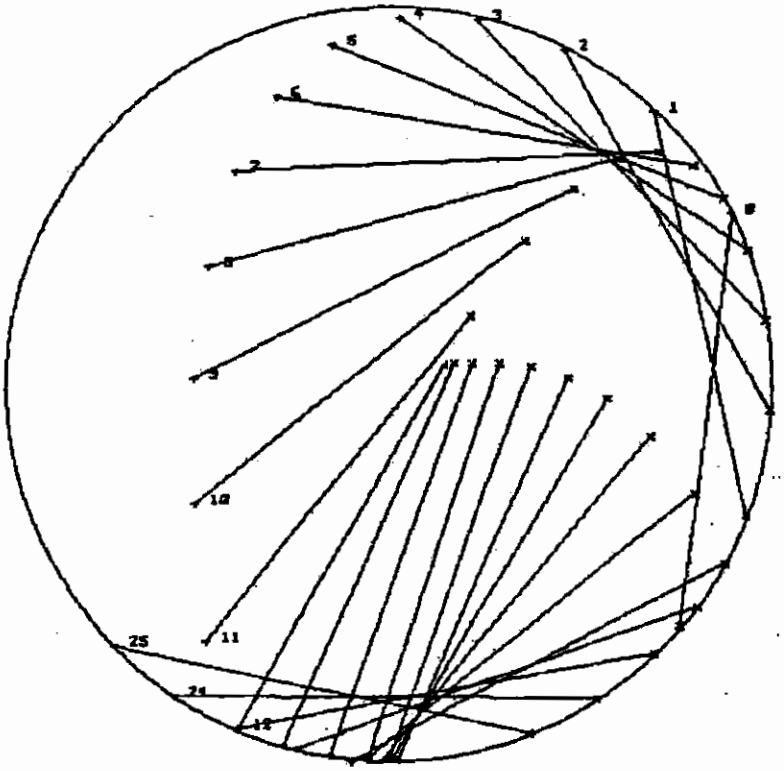
P= 0 ,Q= 0 ,R=-981
X=-20 ,Y= 10 ,Z=-30
U=-250 ,V= 0 ,W= 300



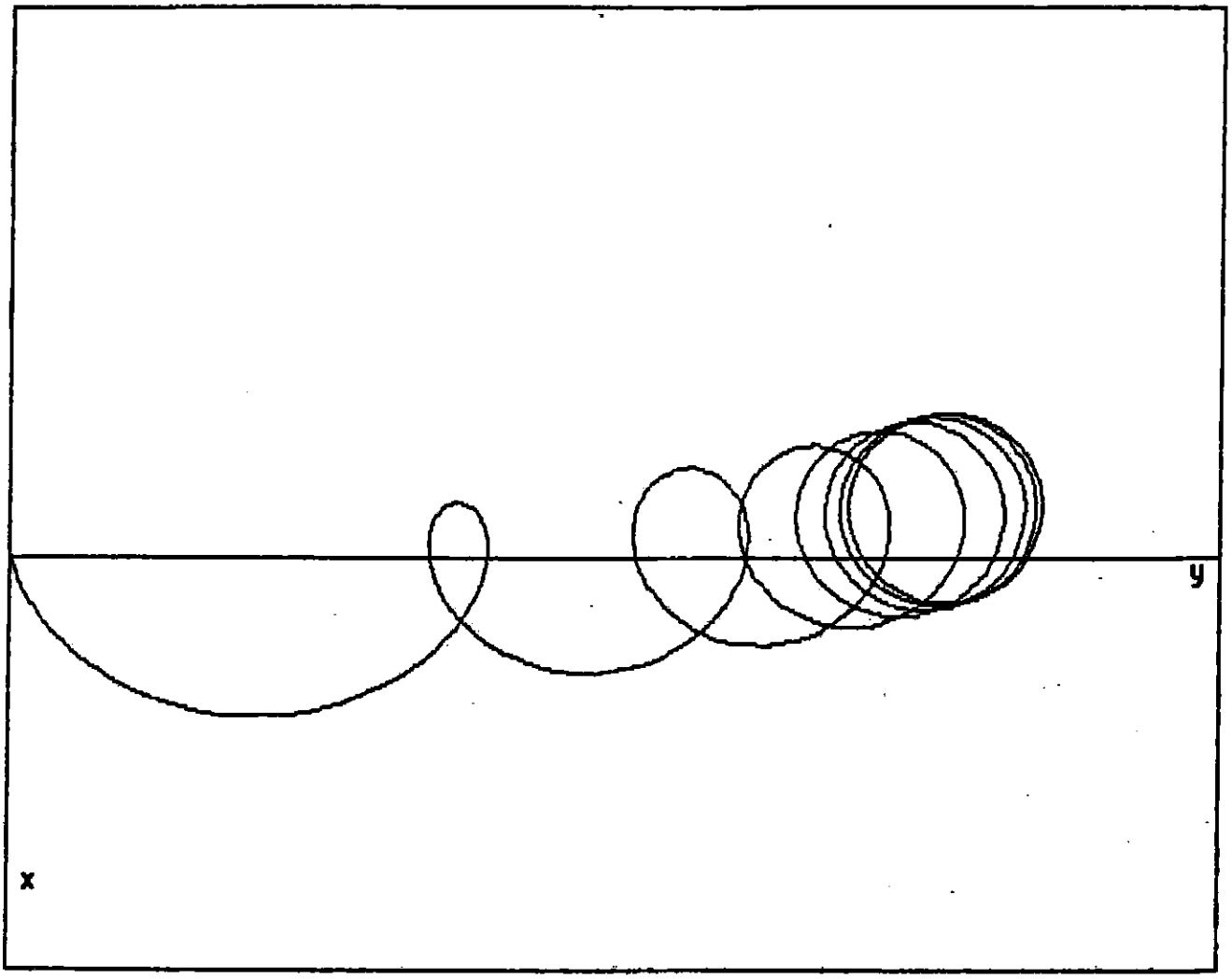
- Planche 9 -

GA= 37.5 GB= 12.5
Rayon de giration: 21.65
Position initiale de G:
X= 35.72 Y=-16.7431
Angle init.: 4.59648 radian
Vit.init.de G:
U= 121.734 V= 260.301
Vit.angulaire init.: 7.26448 rad/s
Pas: 0.01 ;trace tous les 5 pas

A:marque + B:marque X



- Planche 10 -



Coeff.de frott.statique: .6 ;coeff.de frott.dynamique: .4

Pesanteur:	0	0	-981

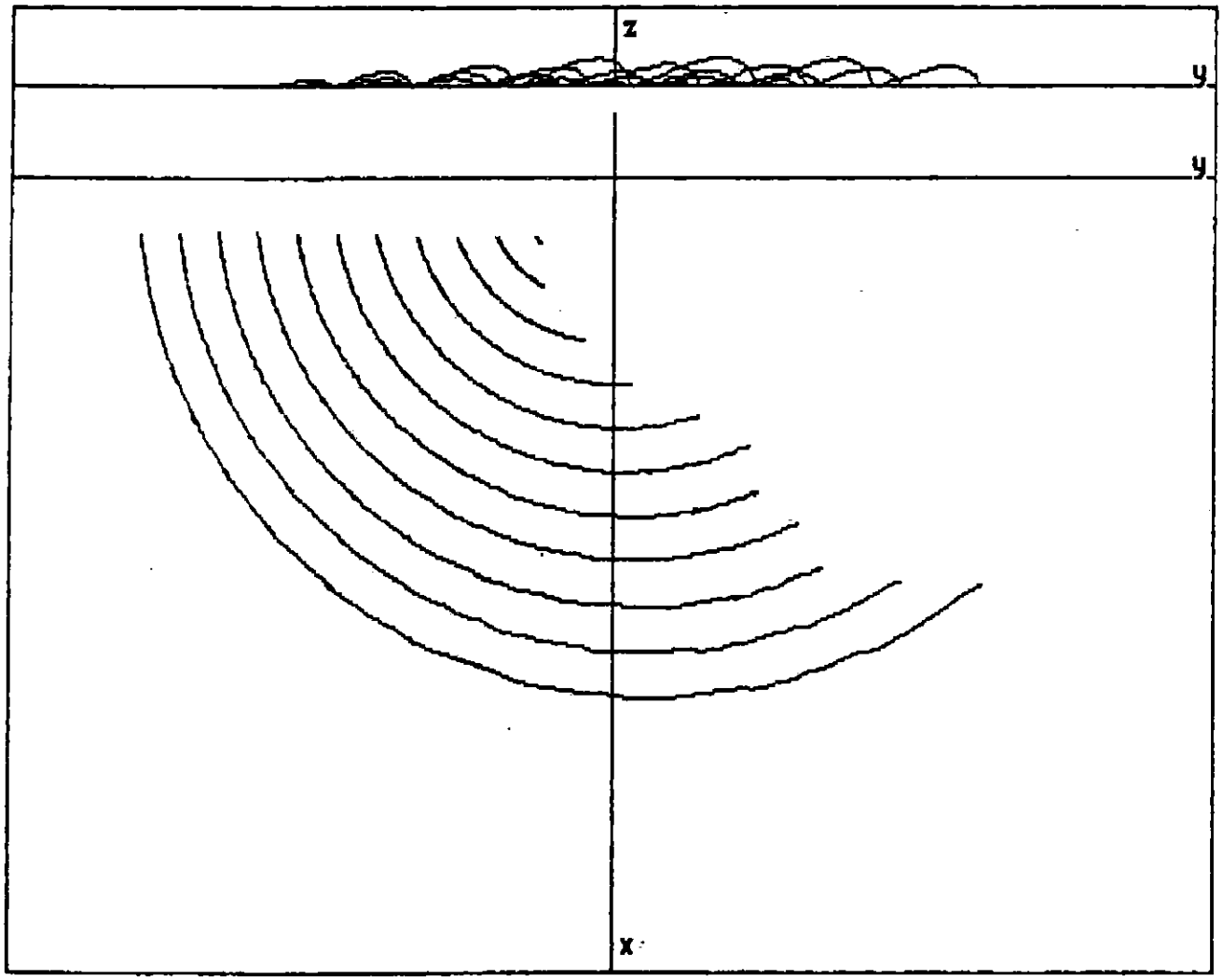
Frequence : 3.183099 hertz
Vibration de l'origine:

vecteur en COS	5	0	0
vecteur en SIN	0	5	0

Vibration de rotation:

Vecteur en SIN	0	0	0

- Planche 11 -



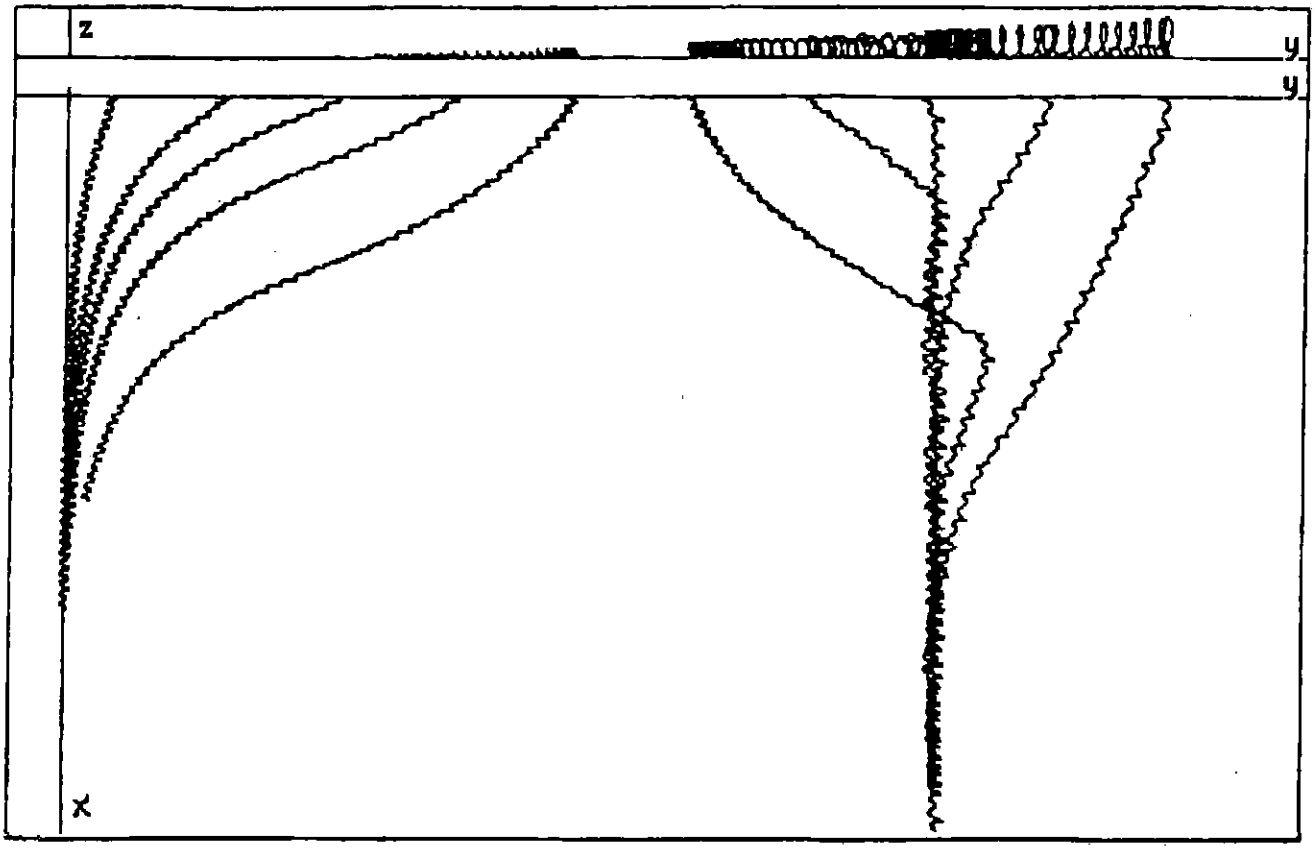
TABMULT
Coeff.frott.dynamique .4 ; coeff.frott.statique .4

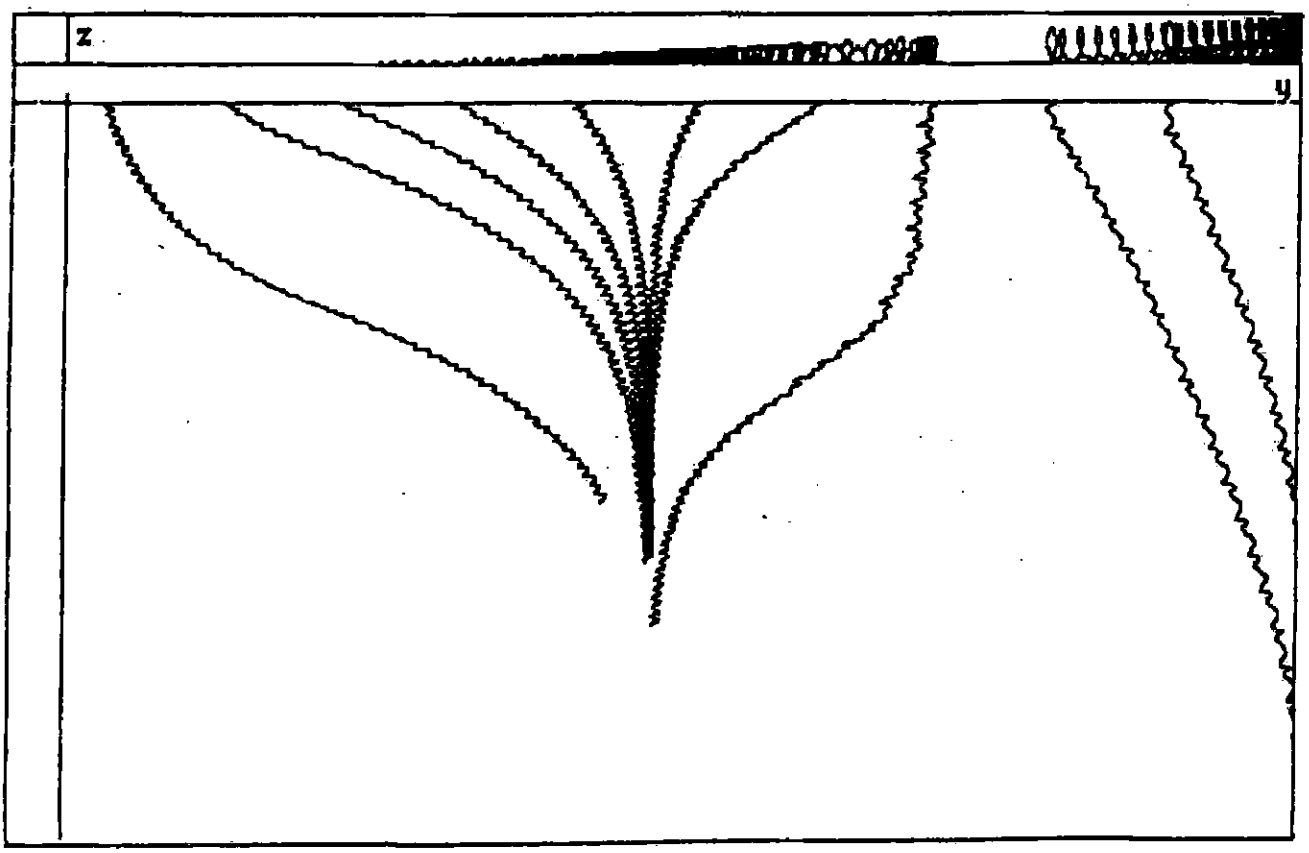
Pesanteur: 0 0 -981

Frequence : 10 hertz (26 pas par période; J initial: 6)
Vibration de l'origine (avance de phase sur la vib.de rotation: 0 rad):
vecteur en COS 0 0 0
vecteur en SIN 0 0 0
Vibration de rotation (demi-amplitude de rotation: 0.057 rad).
vecteur en SIN 0 -.04 .04
Positions initiales: (nombre de courbes 12)

X(1)= 1.5	Y(1)=-12
X(2)= 1.5	Y(2)=-11
X(3)= 1.5	Y(3)=-10
X(4)= 1.5	Y(4)=-9
X(5)= 1.5	Y(5)=-8
X(6)= 1.5	Y(6)=-7
X(7)= 1.5	Y(7)=-6
X(8)= 1.5	Y(8)=-5
X(9)= 1.5	Y(9)=-4
X(10)= 1.5	Y(10)=-3
X(11)= 1.5	Y(11)=-2
X(12)= 1.5	Y(12)=-1

Transitoire non tracé: 0 périodes; trajectoire tracée: 15 périodes
Domaine représenté:
Intervalle en X = (-4.292476 , 20.22183)
Intervalle en Y = (-15.27041 , 15.22799)
Unités graphiques. Pour X,Y : 5 mm; pour Z : 5 mm.
Zéro des X à 21.5 mm en dessous du bord supérieur.
Zéro des Z à 10 mm en dessous du bord supérieur.





Coeff.frott.dynamique .4 ; coeff.frott.statique .4

Pesanteur:	220.677	0	-955.8571

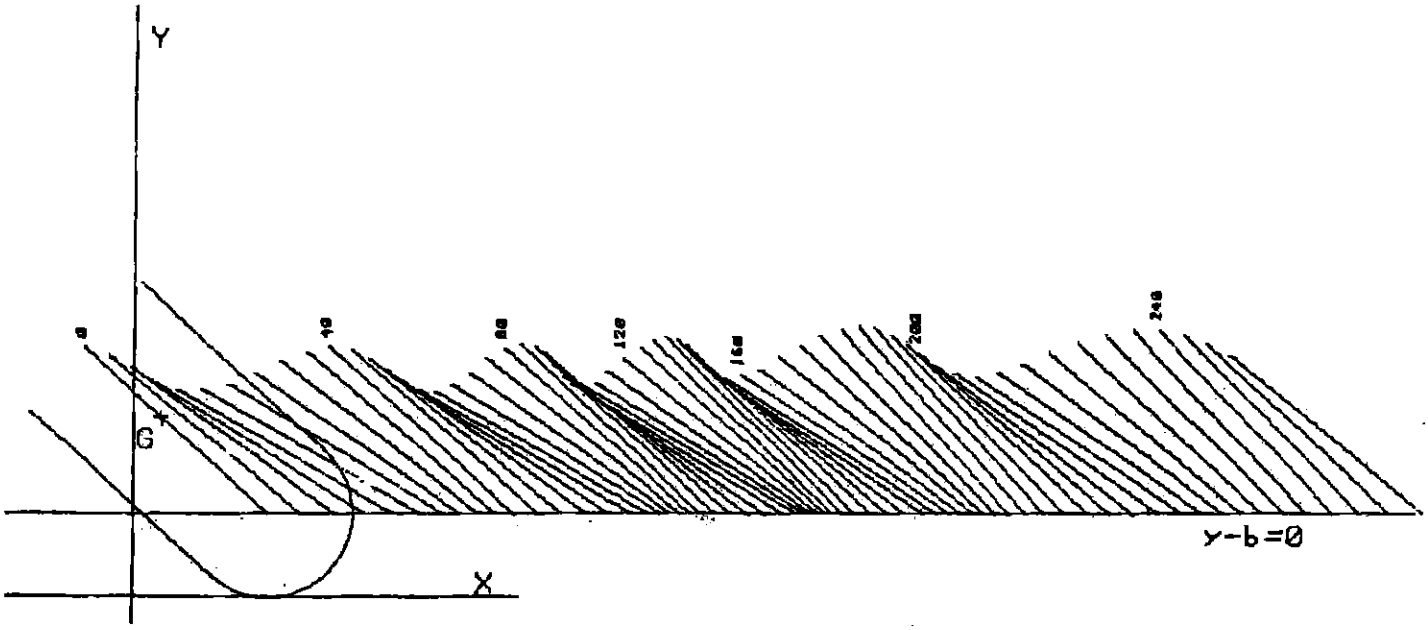
Frequence : 10 hertz (50 pas par période; J initial: 0)
Vibration de l'origine (avance de phase sur la vib.de rotation: 0 rad):

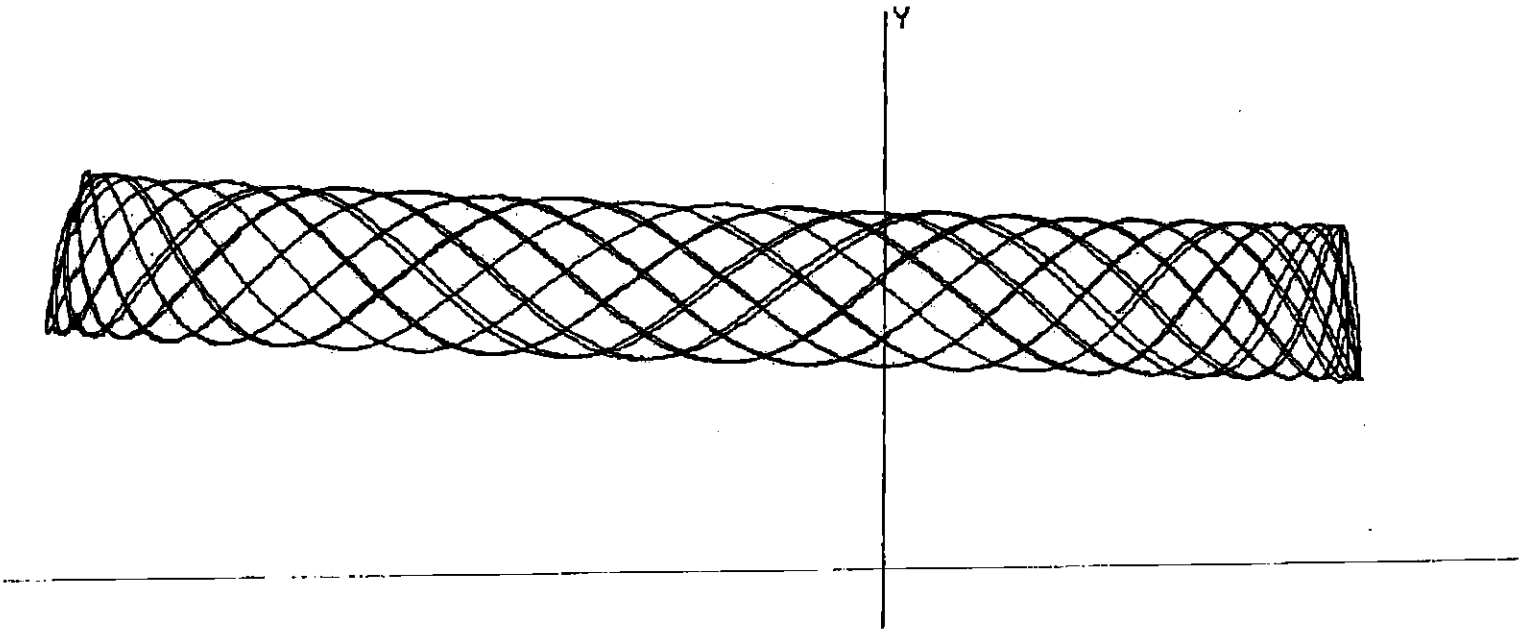
vecteur en COS	0	±.5	0
vecteur en SIN	0	0	0

Vibration de rotation (demi-amplitude de rotation: 0.010 rad).

vecteur en SIN	.01	0	0

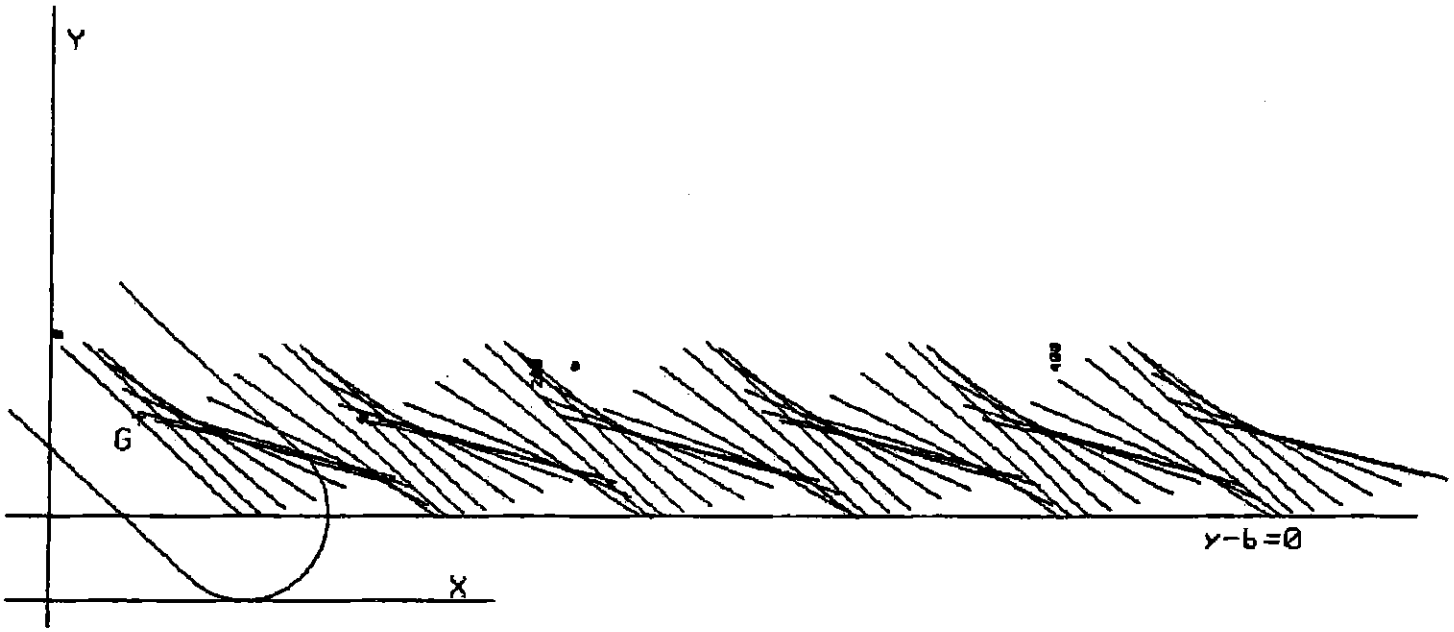
Coeff.frott. 0.5 .a=-1.73205 ,b= 1 ,GI= 1 ,DX= 0 ,DY= 1.6
YR= 2.7 ,VR= 30 ,CR=-700 ,RX= 200 ,RY= 2000
X= .343836 ,Y= 2.15387 ,TH= .841469 ;U= 41.3281 ,V=-4.9483 ,OM= 3.85829
H= 0.002 ;trace tous les 4 pas. Unite graphique: 10 mm

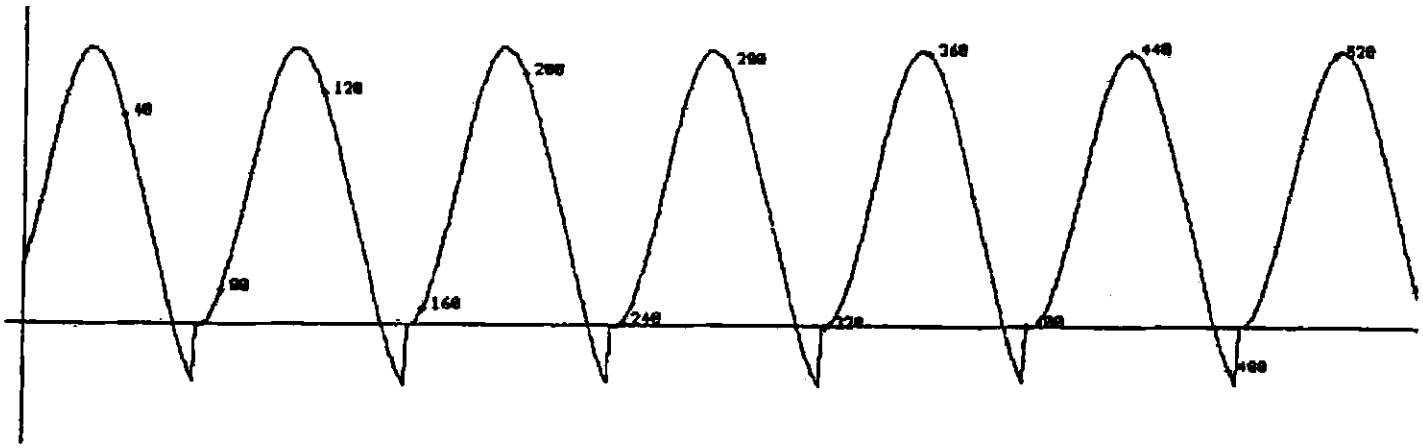




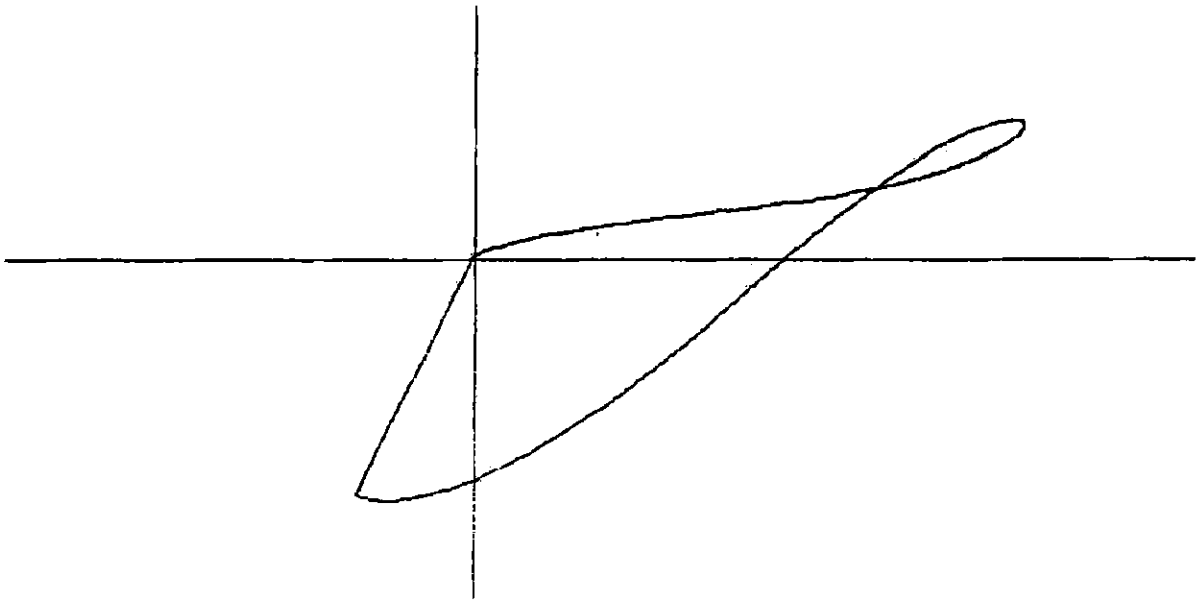
TRAJECTOIRE RELATIVE DE G. Unite:60 mm

Coeff.frott. 0.5 .a=-1.73205 ,b= 1 ,GI= 1 ,DX= 0 ,DY= 1.6
YR= 2.7 ,VR= 30 ,CR=-200 ,RX= 200 ,RY= 2000
X= 1.0967 ,Y= 2.16282 ,TH= .840773 ;U= 28.4148 ,V= 13.0379 ,OM=-7.21756
H= 0.001 ;trace tous les 8 pas. Unite graphique: 10 mm



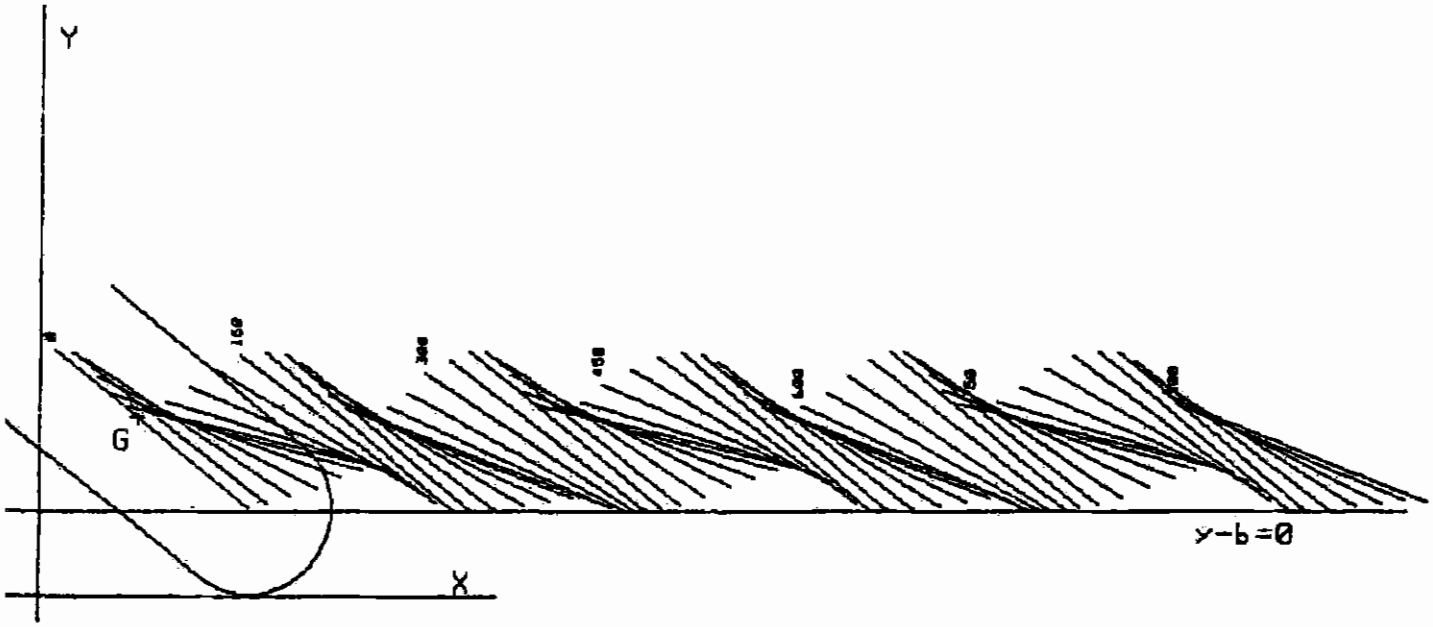
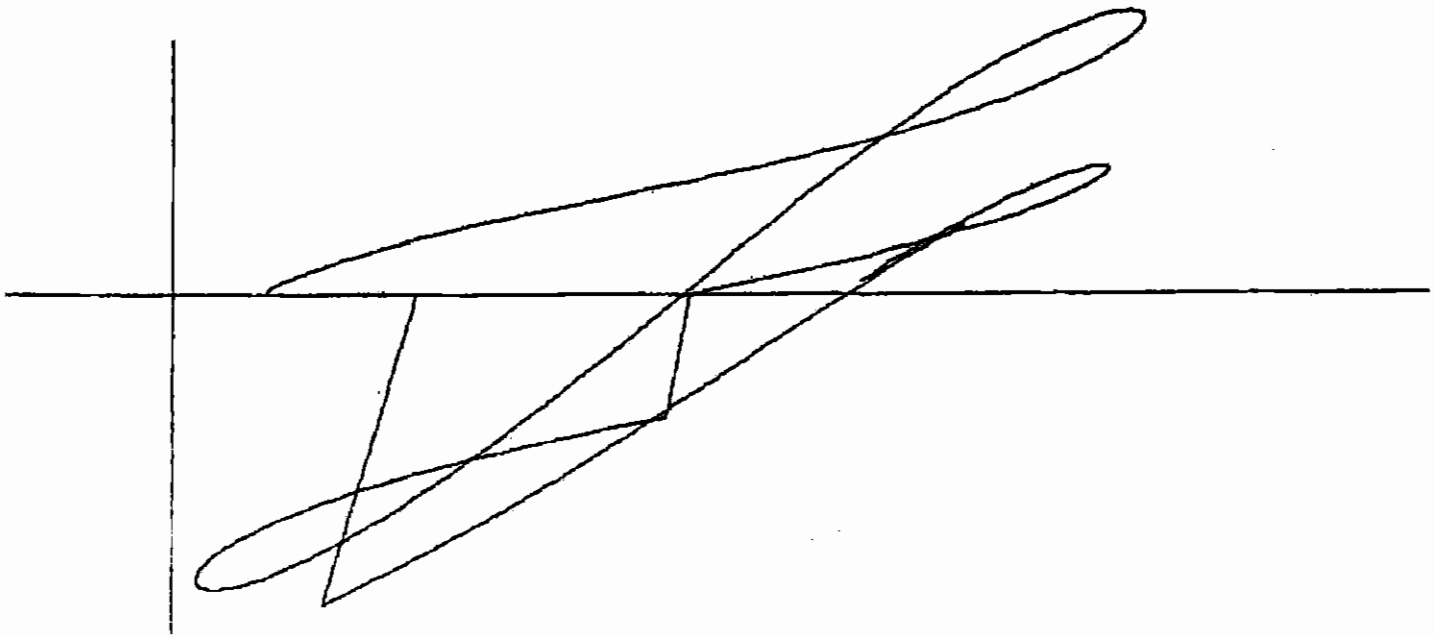


COMPOSANTE HORIZONTALE DE LA VITESSE DU POINT LE PLUS BAS. Unite 0.5 mm.



VECTEUR VITESSE DU POINT LE PLUS BAS. Unite: 1mm.

Coeff.frott. 0.5 .a=-1.73205 ,b= 1 ,GI= 1 ,DX= 0 ,DY= 1.6
YR= 2.7 ,VR= 30 ,CR=-100 ,RX= 200 ,RY= 2000
X= 1.14612 ,Y= 2.13286 ,TH= .886816 ;U= 27.5273 ,V= 6.34844 ,OM=-.534209
H= 0.0005 ;trace tous les 15 pas. Unite graphique: 10 mm



VECTEUR VITESSE DU POINT LE PLUS BAS. Unite 2mm.