



**HAL**  
open science

## Approche énergétique et méthode de tir pour la détermination des vibrations auto-entretenues d'un système à trois degrés de liberté en contact frottant

Lucien Charroyer, Olivier Chiello, Jean-Jacques Sinou

### ► To cite this version:

Lucien Charroyer, Olivier Chiello, Jean-Jacques Sinou. Approche énergétique et méthode de tir pour la détermination des vibrations auto-entretenues d'un système à trois degrés de liberté en contact frottant. 13ème Congrès Français d'Acoustique et 20ème colloque Vibrations, SHocks and NOise, CFA 2016 - VISHNO), Apr 2016, Le Mans, France. pp. 1857-1864. hal-01383434v1

**HAL Id: hal-01383434**

**<https://hal.science/hal-01383434v1>**

Submitted on 18 Oct 2016 (v1), last revised 21 Jun 2017 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## CFA/VISHNO 2016

**Approche énergétique et méthode de tir pour la  
détermination des vibrations auto-entretenues d'un  
système à trois degrés de liberté en contact frottant**L. Charroyer<sup>a,b,c</sup>, O. Chiello<sup>b,c</sup> et J.-J. Sinou<sup>a,c,d</sup><sup>a</sup>LTDS UMR 5513, Ecole Centrale de Lyon 36, avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully,  
France<sup>b</sup>IFSTTAR, AME, LAE, Case 24, 25 Avenue François Mitterrand Bron, 69675 Bron,  
France<sup>c</sup>Centre Lyonnais d'Acoustique, Université de Lyon, 69622 Lyon, France<sup>d</sup>Institut Universitaire de France, 1, rue Descartes, 75005 Paris, France  
lucien.charroyer@doctorant.ec-lyon.fr

LE MANS

Ce papier propose d'étudier les vibrations auto-entretenues d'un système amorti à trois degrés de liberté frottant sur un plan rigide de vitesse imposée. Des lois non linéaires et non régularisées de contact unilatéral et de frottement de Coulomb sont utilisées et le coefficient de frottement est supposé constant. En premier lieu la méthode d'intégration temporelle du système est présentée. Dans une seconde partie, la recherche du niveau vibratoire non-linéaire stationnaire du système est étudiée. Une approche se basant sur la méthode de tir combinée à une approche énergétique permettant d'initier la résolution de la réponse stationnaire non-linéaire est proposée. Dans une troisième partie, les résultats sont validés par comparaison à ceux obtenus par intégration temporelle directe. Ce travail s'inscrit dans le cadre de recherches portant sur le développement de méthodes numériques pour la modélisation des bruits de crissement.

## 1 Introduction

L'évolution temporelle de la dynamique d'un système non-linéaire est complexe. Dans les problèmes de crissement, on doit généralement traiter le cas de structures déstabilisées par le frottement et l'on cherche à déterminer un éventuel régime stationnaire de vibrations auto-entretenues dont les caractéristiques sont étroitement liées aux non-linéarités, en l'occurrence celles dues au contact frottant. L'utilisation d'intégrations temporelles numériques directes pour résoudre les équations relatives à ces systèmes peut s'avérer coûteux en temps de calcul car avant d'atteindre ce régime stationnaire, le système évolue généralement à travers un régime transitoire plus ou moins long. Ainsi plusieurs méthodes ont été développées afin de faire l'économie de ce régime transitoire pas toujours indispensable à la compréhension des phénomènes dominants et réduire les temps de calculs permettant de déterminer les vibrations auto-entretenues [1, 2, 3].

Dans ce papier, les performances d'une méthode de tir sont étudiées pour un système canonique de ce type. Cette méthode, qui permet la recherche d'une solution stationnaire sur un problème non-linéaire, est appliquée à un système masse ressort à 3 degrés de liberté sur un plan rigide de vitesse imposée. Les non-linéarités dues au caractère unilatéral du contact et à la loi de Coulomb à coefficient constant du frottement, produisent des instabilités vibratoires pour certains couples  $\mu$  et  $\theta$ , correspondant à la direction de glissement et au coefficient de frottement. Ce papier se base sur une étude préliminaire du système [4] dans laquelle sont déterminés les couples  $(\mu, \theta)$  pour lesquels ces instabilités apparaissent et peuvent conduire à des vibrations auto-entretenues.

L'un des problèmes de la méthode de tir est son initialisation. Les itérations sont effectuées par un algorithme de Newton-Raphson qui est un algorithme local ; si l'initialisation est trop écartée de la solution finale, l'algorithme ne converge pas. Dans cette étude, une solution approchée basée sur une méthode énergétique est proposée pour initialiser correctement la méthode de tir à partir des modes instables issus de l'analyse de stabilité.

Dans une première partie le problème dynamique avec contact frottant est présenté et mis en équations. La méthode numérique utilisée pour l'intégration temporelle est ensuite détaillée. Elle est adaptée aux lois de contact unilatéral et de frottement de Coulomb et permet de prendre en compte proprement les éventuels chocs qui peuvent se produire dans les phases non linéaires. La méthode de tir pour un système subissant des vibrations auto-entretenues est ensuite formulée et l'approche énergétique présentée. Enfin des résultats pour deux cas différents mettant en avant des cycles de décollement/glissement (separation/slip) ou d'adhérence-

glissement (stick/slip) sont présentés sous forme de portrait de phase où les cycles limites obtenus par la méthode de tir sont comparés à ceux de l'intégration temporelle directe.

## 2 Formulation du problème

### 2.1 Présentation du système

On considère le système décrit par la Figure 1. Il est composé d'une masse  $m$  en contact frottant sur un plan rigide en mouvement rectiligne de vitesse constante  $V$ . La masse est maintenue par trois raideurs et contre le plan par un effort imposé  $F$ . Un amortissement iso-réparti est intégré au système comme le montre la Figure 1. La direction de la vitesse du frottement  $\vec{t}$  par rapport au repère du système est repérée par l'angle  $\theta$ .

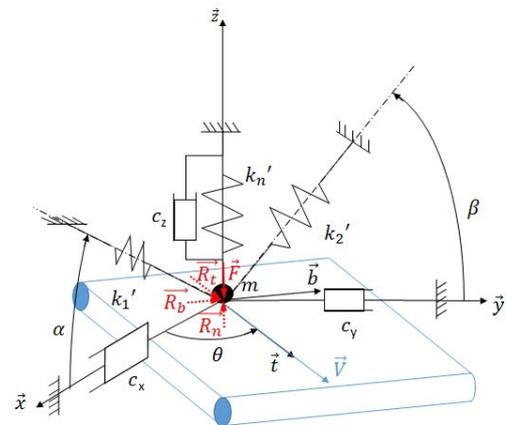


FIGURE 1 – Description du modèle

On s'intéresse à la dynamique de la masse régie par l'équation :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} + \mathbf{F} \quad (1)$$

où les composantes des vecteurs  $\mathbf{U} = (U_x \ U_y \ U_z)^T$  et  $\dot{\mathbf{U}}$  et  $\ddot{\mathbf{U}}$  sont respectivement, les déplacements, les vitesses et les accélérations dans les trois directions  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ . Le vecteur  $\mathbf{R}$  contient la réaction de contact et l'effort de frottement qui s'appliquent sur la masse. La matrice de masse  $\mathbf{M}$ , la matrice d'amortissement  $\mathbf{C}$ , la matrice de raideur  $\mathbf{K}$  et le vecteur  $\mathbf{F}$

représentant l'effort appliqué sur le système sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_1 \tan \alpha \\ 0 & k_2 & k_2 \tan \beta \\ k_1 \tan \alpha & k_2 \tan \beta & k_n \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} &= (0 \ 0 \ -F_n)^T \end{aligned} \quad (2)$$

avec  $k_1 = k'_1 \cos^2 \alpha$ ,  $k_2 = k'_2 \cos^2 \beta$  et  $k_n = k'_n + k_1 \tan^2 \alpha + k_2 \tan^2 \beta$ . Le couplage entre les degrés de liberté normal et tangentiels est effectué par le biais des angles  $\alpha$  et  $\beta$ . C'est une des conditions nécessaires à l'apparition d'instabilité par couplage de modes [4].

## 2.2 Hypothèses de contact et frottement

Afin d'écrire les relations de contact frottant, on exprime maintenant les composantes normale et tangentielle du déplacement et de la relation de contact dans le repère local  $(0, \vec{t}, \vec{b}, \vec{n})$ . Pour cela on introduit les matrices  $\mathbf{P}_t = [\cos \theta \ \sin \theta \ 0]$ ,  $\mathbf{P}_b = [-\sin \theta \ \cos \theta \ 0]$  et  $\mathbf{P}_n = [0 \ 0 \ 1]$  telles que :

$$\begin{aligned} U_t &= \mathbf{P}_t \mathbf{U} \\ U_b &= \mathbf{P}_b \mathbf{U} \\ U_n &= \mathbf{P}_n \mathbf{U} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{P}_t^T R_t + \mathbf{P}_b^T R_b + \mathbf{P}_n^T R_n \end{aligned} \quad (3)$$

Pour cette étude le contact est supposé unilatéral (ou contact de Signorini), ce qui traduit le fait qu'il ne peut pas y avoir interpénétration et que la masse ne subit que des contraintes de compression :

$$\begin{aligned} U_n &\geq 0 \\ R_n &\geq 0 \\ U_n R_n &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Seul le déplacement normal intervient dans cette formulation du contact.

Le modèle de frottement retenu est le frottement de Coulomb. Il exprime que la réaction de contact reste dans le cône de Coulomb. Quand la réaction est sur le cône, la vitesse de glissement s'oppose à la réaction tangentielle, quand elle est dans le cône la vitesse de glissement est alors nulle. La relation de Coulomb s'exprime alors :

$$\begin{aligned} \left\| \begin{Bmatrix} \dot{U}_t - V \\ \dot{U}_b \end{Bmatrix} \right\| = 0 &\Rightarrow \left\| \begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix} \right\| \leq \mu R_n \\ \left\| \begin{Bmatrix} \dot{U}_t - V \\ \dot{U}_b \end{Bmatrix} \right\| \neq 0 &\Rightarrow \begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix} = -\mu R_n \frac{\begin{Bmatrix} \dot{U}_t - V \\ \dot{U}_b \end{Bmatrix}}{\left\| \begin{Bmatrix} \dot{U}_t - V \\ \dot{U}_b \end{Bmatrix} \right\|} \end{aligned} \quad (5)$$

avec  $\mu$  le coefficient de frottement de Coulomb. Contrairement au contact de Signorini, le frottement de Coulomb est formulé en vitesse.

La Figure 2 illustre les lois de contact unilatéral et de frottement de Coulomb. On constate que les lois sont non seulement non-linéaires mais aussi non-différentiables et non univoques.

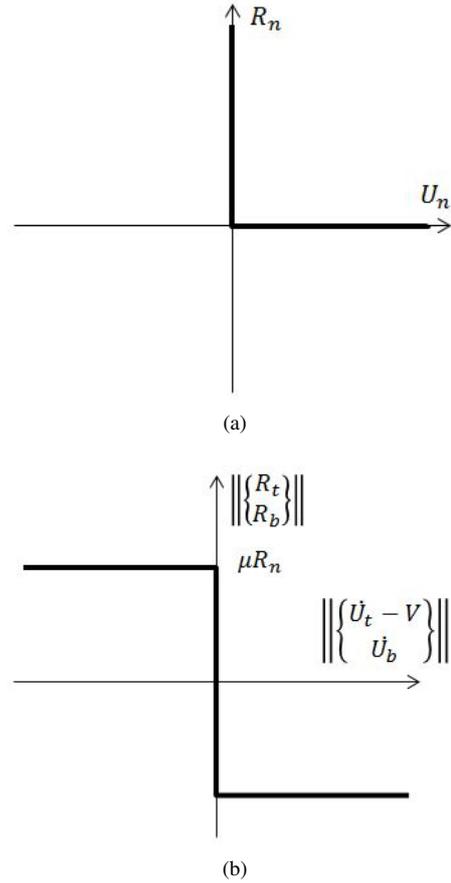


FIGURE 2 – Lois de contact unilatéral et de frottement de Coulomb

Une autre formulation équivalente, plus adaptée à la résolution numérique, est [5, 6] :

$$\begin{aligned} R_n &= \text{proj}_{\mathbb{R}^+}(R_n - \rho_n U_n) \\ \begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix} &= \text{proj}_{\mathcal{D}(\mu R_n)} \left( \begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix} - \rho_t \begin{Bmatrix} \dot{U}_t - V \\ \dot{U}_b \end{Bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

avec  $\rho_n > 0$ ,  $\rho_t > 0$  et où  $\mathcal{D}(\mu R_n)$  est la section du cône de Coulomb, de centre 0 et de rayon  $\mu R_n$ .

En dynamique, il faut compléter ces équations par une loi de choc qui spécifie la relation entre les vitesses avant et après une reprise de contact. Une loi inélastique prescrivant une vitesse normale nulle après le choc est incluse implicitement dans le processus de discrétisation temporelle détaillé dans la section suivante.

## 3 Résolution numérique temporelle

### 3.1 Intégrateur temporel

Dans le cas d'un problème avec contact frottant des chocs sont susceptibles d'exister et peuvent effectivement produire des discontinuités sur les vitesses. Les vitesses étant non régulières, l'accélération ne peut pas être utilisée lors de la discrétisation temporelle. On se limite donc à un schéma d'ordre 1. L'intégrateur choisi afin de résoudre ce type de problème est la  $\theta$ -méthode [5, 7, 3] dont on rappelle le principe ci-dessous.

On montre d'abord que l'équation (1) dans le cas non-

régulier en temps peut s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\dot{\mathbf{U}}(t) - \dot{\mathbf{U}}(0)) = \int_0^t (\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{U}(t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t)) d\tau \\ \quad + \int_{]0,t[} \mathbf{R} d\tau \\ \mathbf{U}(t) = \mathbf{U}(0) + \int_0^t \dot{\mathbf{U}}(t) d\tau \end{cases} \quad (7)$$

La solution approchée sur une période  $[0, T]$  est calculée en discrétisant la période en intervalles  $I = [t^i, t^{i+1}]$  de longueur  $h$ . En utilisant la  $\theta$ -méthode, les intégrales sont approchées de la manière suivante :

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \{f\} d\tau \approx h(\theta\{f\}^{i+1} + (1-\theta)\{f\}^i) \quad (8)$$

avec  $0 \leq \theta \leq 1$  tandis que les efforts de contact frottant discrétisés sont définis par :

$$\mathbf{R}^{i+1} = \frac{1}{h} \int_{]t^i, t^{i+1}[} \mathbf{R} d\tau \quad (9)$$

Si les forces de contact sont connues à l'instant  $t^{i+1}$  ainsi que les déplacements et vitesses à l'instant  $t^i$ , les vitesses à l'instant  $t^{i+1}$  sont calculées grâce à la relation suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{U}}^{i+1} &= \mathbf{E}(\mathbf{U}^i, \dot{\mathbf{U}}^i, \theta, h, \mathbf{F}^{i+1}, \mathbf{F}^i) + h\mathbf{R}^{i+1} \\ \mathbf{E} &= -h\mathbf{K}\mathbf{U}^i + (\mathbf{M} - h(1-\theta)(\mathbf{C} + h\theta\mathbf{K}))\dot{\mathbf{U}}^i \\ &\quad + h(\theta\mathbf{F}^{i+1} + (1-\theta)\mathbf{F}^i) \\ \hat{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} + h^2\theta^2\mathbf{K} + h\theta\mathbf{C} \end{aligned} \quad (10)$$

et les déplacements sont donnés par :

$$\mathbf{U}^{i+1} = \mathbf{U}^i + h(\theta\dot{\mathbf{U}}^{i+1} + (1-\theta)\dot{\mathbf{U}}^i) \quad (11)$$

Ce schéma inconditionnellement stable est par ailleurs conservatif pour  $\theta = 0.5$ , ce qui est particulièrement avantageux pour les problèmes de vibrations auto-entretenues.

### 3.2 Gestion du contact frottant

Le problème dynamique étant ainsi formulé en vitesse, il reste à exprimer les réactions de contact et de frottement (6) à chaque pas de temps en fonction de la vitesse au pas de temps. Pour la loi de frottement, cette opération est immédiate mais la loi contact étant formulée en déplacement, il est nécessaire d'utiliser la relation (11) entre déplacements et vitesses donnée par la  $\theta$ -méthode.

Cette option est malheureusement incompatible avec l'hypothèse de choc inélastique souhaitée. En effet, la relation (11) projetée sur la direction normale donne :

$$\dot{U}_n^{i+1} = \frac{1}{h\theta}(U_n^{i+1} - U_n^i) + \frac{\theta-1}{\theta}\dot{U}_n^i \quad (12)$$

Si l'on suppose qu'un choc a lieu à l'itération  $i$  on a alors  $U_n^i = 0$ ,  $U_n^{i+1} = 0$  et  $\dot{U}_n^i \neq 0$  ce qui conduit à :

$$\dot{U}_n^{i+1} = \frac{\theta-1}{\theta}\dot{U}_n^i \neq 0 \quad (13)$$

Lors d'un choc à l'itération  $i$  le déplacement reste donc constant entre les itérations  $i$  et  $i+1$  alors que la vitesse à l'itération  $i+1$  est non nulle. Pour régler ce problème, une première solution est de prendre  $\theta = 1$  : on obtient alors un schéma dit  $\theta$ -Euler [5, 7]. Cependant ce schéma n'est pas conservatif. Une autre solution proposée dans [7] afin de

préserver le caractère conservatif du schéma est d'évaluer le déplacement normal à un demi-intervalle de temps ultérieur noté  $\tilde{U}_n$  tel que :

$$\tilde{U}_n^{i+1} = U_n^{i+1} + h(1-\theta)\dot{U}_n^{i+1} \quad (14)$$

En utilisant la relation (11), on a alors :

$$\tilde{U}_n^{i+1} = \tilde{U}_n^i + h\dot{U}_n^{i+1} = U_n^i + h(\dot{U}_n^{i+1} + (1-\theta)\dot{U}_n^i) \quad (15)$$

Cette variante appelée  $\theta$ -méthode modifiée permet de vérifier le caractère inélastique d'un choc. En effet, si  $\tilde{U}_n^{i+1} = 0$  et  $\tilde{U}_n^i = 0$  alors  $\dot{U}_n^{i+1} = 0$  même si  $\dot{U}_n^i \neq 0$ . Par ailleurs l'équation (14) donne directement  $\tilde{U}_n^{i+1} = U_n^{i+1} = 0$ .

Au final, les formulations en vitesses des lois de contact et de frottement au pas de temps  $i+1$  sont données par :

$$\begin{aligned} R_n^{i+1} &= \text{proj}_{\mathbb{R}^+}(R_n^{i+1} - \rho_n h(\dot{U}_n^{i+1} + B_m^i)) \\ \begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix}^{i+1} &= \text{proj}_{\mathcal{D}(\mu R_n^{i+1})} \left( \begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix}^{i+1} - \rho_t \begin{Bmatrix} \dot{U}_t^{i+1} - V \\ \dot{U}_b^{i+1} \end{Bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

où  $B_m^i = (\frac{1}{h}U_n^i + (1-\theta)\dot{U}_n^i)$  dépend du pas de temps précédent.

Par la suite le schéma de la  $\theta$ -méthode modifiée sera utilisé avec  $\theta = 0.5$ . Un algorithme de point fixe, bien adapté aux relations (16), permet d'itérer rapidement sur les réactions et vitesses à chaque pas de temps avec des paramètres d'augmentation  $\rho_n$  et  $\rho_t$  bien choisis et les déplacements sont mis à jour grâce à la relation (11). Plus de détails sur l'algorithme peuvent être trouvés dans [3]. Une étude de convergence a été menée pour optimiser la tolérance de l'algorithme du point fixe et la durée du pas de temps.

## 4 Méthode de Tir

Dans cette section la méthode de tir appliquée à un système auto-entretenu est présentée. Une estimation de la solution est ensuite proposée afin d'initialiser la méthode de tir.

### 4.1 Introduction à la méthode de tir

La méthode de tir est présentée succinctement, plus de détails peuvent être trouvés dans [8]. Dans notre cas les instabilités liées au couplage de modes conduisent à des vibrations auto-entretenues. Ceci implique que la période du régime stationnaire dépend du système lui-même. La méthode de tir permet d'obtenir le cycle limite du système en itérant sur les conditions initiales et la période afin d'obtenir après intégration temporelle sur une période des conditions finales égales aux conditions initiales. Le problème est formulé en variables d'état. On note ainsi  $\mathbf{Z}$  le vecteur de variables d'états et  $\mathbf{G}$  la fonction intrinsèque au système tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \dot{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} \\ \dot{\mathbf{Z}} &= \mathbf{G}(\mathbf{Z}) \end{aligned} \quad (17)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{Z}) &= \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{E}_e - \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{Z}) \\ \mathbf{A}\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_e &= \left\{ \mathbf{0} \quad \mathbf{R} + \mathbf{F} \right\}^T \end{aligned} \quad (18)$$

On dénote  $\mathbf{Z}_0$  les conditions initiales et  $T$  la période supposée du système. On définit  $\mathbf{H}(\mathbf{Z}_0, T)$  la fonction de tir en fonction de  $\mathbf{Z}_0$  et  $T$  :

$$\mathbf{H}(\mathbf{Z}_0, T) = \mathbf{Z}(\mathbf{Z}_0, T) - \mathbf{Z}_0 \quad (19)$$

La condition de périodicité donne alors :

$$\mathbf{H}(\mathbf{Z}_0, T) = \mathbf{0} \quad (20)$$

La méthode de tir consiste à itérer sur les conditions initiales et la périodes afin de remplir la condition de périodicité. Pour alléger les notations on notera la fonction  $\mathbf{H}$  à l'itération  $i$  dépendant de  $\mathbf{Z}_0^i$  et  $T^i$  par  $\mathbf{H}^i$ . Les corrections à l'itération  $i$  à apporter sur les conditions initiales  $\Delta\mathbf{Z}_0^i$  et la période  $\Delta T^i$  sont déterminées à l'aide d'un schéma de Newton-Raphson en résolvant :

$$\mathbf{H}^i + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{Z}_0} \Big|_{\mathbf{Z}_0^i, T^i} \Delta\mathbf{Z}_0^i + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{Z}_0^i, T^i} \Delta T^i + HOT = 0 \quad (21)$$

avec  $HOT$  les termes d'ordre supérieurs. Les corrections apportées par la suite s'expriment alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_0^{i+1} &= \mathbf{Z}_0^i + \Delta\mathbf{Z}_0^i \\ T^{i+1} &= T^i + \Delta T^i \end{aligned} \quad (22)$$

La méthode de tir nécessite l'évaluation des dérivées partielles de  $\mathbf{H}$  données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{Z}_0^i, T^i} &= \frac{\partial \mathbf{Z}(\mathbf{Z}_0, t)}{\partial t} \Big|_{t=T} = \mathbf{G}(\mathbf{Z}(\mathbf{Z}_0, t)) \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{Z}_0} \Big|_{\mathbf{Z}_0^i, T^i} &= \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Z}_0} \Big|_{\mathbf{Z}_0^i, T^i} - \mathbf{I} \end{aligned} \quad (23)$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité. Le système étudié présentant des non-régularités, la solution retenue pour calculer la matrice jacobienne  $\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Z}_0} \Big|_{\mathbf{Z}_0^i, T^i}$  est le calcul par différences finies [8]. Le système (18) est résolu pour les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\mathbf{0})_k^+ &= \mathbf{Z}_0 + \delta \mathbf{e}_k \\ \mathbf{Z}(\mathbf{0})_k^- &= \mathbf{Z}_0 - \delta \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (24)$$

où  $\mathbf{e}_k$  est la  $k$ -ième colonne de la matrice identité. La  $k$ -ième colonne de la matrice jacobienne est alors calculée par :

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Z}_0} \Big|_{\mathbf{Z}_0^i, T^i}^k = \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{Z}_0 + \delta \mathbf{e}_k, T)_k^+ - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}_0 - \delta \mathbf{e}_k, T)_k^-}{2\delta} \quad (25)$$

Une fois la matrice  $\partial \mathbf{Z} / \partial \mathbf{Z}_0$  évaluée en  $(\mathbf{Z}_0^i, T^i)$ , l'équation (21) est un système constitué de  $n$  équations pour  $n + 1$  inconnues. Ce manque d'équations est dû au fait que la phase associée à la période d'un système autonome doit être déterminée de façon arbitraire [8]. Dans le même ouvrage plusieurs conditions sont explicitées afin de déterminer la phase. Celle retenue dans cette étude est la condition d'orthogonalité. Cette condition impose que les modifications apportées aux conditions initiales soient

orthogonales à la fonction  $\mathbf{G}$  intrinsèque. L'équation (21) devient alors :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{Z}_0} \Big|_{\mathbf{Z}_0^i, T^i} - \mathbf{I} & \mathbf{G}(\mathbf{Z}(\mathbf{Z}_0, t)) \\ \mathbf{G}^T(\mathbf{Z}(\mathbf{Z}_0, t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{Z}_0 \\ \Delta T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_0 - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}_0, T) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

L'algorithme est ensuite arrêté lorsque  $\mathbf{H}/\mathbf{Z}_0 < \epsilon_1$  et  $\delta T/T < \epsilon_2$ .

Cependant l'algorithme de Newton-Raphson est un algorithme local qui converge seulement si l'initialisation est proche de la solution finale. Ainsi une méthode énergétique a été mise au point afin d'initialiser la méthode de tir.

## 4.2 Estimations énergétiques

La méthode présentée dans cette section est inspirée de différents résultats obtenus sur des systèmes en vibrations auto-entretenues liées au frottement. L'analyse des vibrations transitoires menant des instabilités de l'équilibre glissant à des vibrations auto-entretenues de type décollement/glisement ou adhérence/glisement montre que la saturation des ces instabilités initiées à l'équilibre s'effectue en grande partie en raison de diminution de la part d'énergie injectée au contact frottant au fur et à mesure que l'amplitude de la solution croit tandis que la part d'énergie dissipée par amortissement dans la structure reste à peu près stable. Dès lors, si l'on cherche des solutions approchées sur la base de ces instabilités, en terme de déformées et de fréquence, il ne reste qu'à trouver l'amplitude de ces solutions en estimant la diminution de la part d'énergie liée au phénomènes de décollement ou d'adhérence dans le cycle.

On cherche donc un cycle périodique  $\mathbf{U}(t)$  basé sur la déformée et la fréquence d'un mode complexe instable issu de l'étude de stabilité c'est à dire du problème linéarisé autour de la position d'équilibre (cf. [4] pour le système étudié ici) :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t) &= q \Re \left( \Phi e^{i\Im(\lambda)t} \right) \\ \dot{\mathbf{U}}(t) &= q \Re \left( i\Im(\lambda) \Phi e^{i\Im(\lambda)t} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

avec  $\Phi$  le vecteur propre associé au mode instable,  $\lambda$  la valeur propre du mode instable et  $q$  son amplitude.

Pour estimer cette amplitude, le principe est donc d'équilibrer le bilan de puissance moyen sur le cycle lorsque le système est stationnaire. Le bilan de puissance instantané s'écrit :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P_C = P_R + P_F \quad (28)$$

avec  $\frac{\partial E}{\partial t}$  la variation d'énergie mécanique,  $P_C$  la puissance dissipée par amortissement,  $P_R$  la puissance des réactions de contact frottant et  $P_F$  la puissance injectée par l'effort imposé. En régime stationnaire, sur un cycle périodique de période  $T = \frac{2\pi}{\Im(\lambda)}$ , la variation d'énergie mécanique et la puissance injectée par les efforts statiques sont nulles en moyenne. Le bilan de puissance moyen sur le cycle, ramené à l'énergie mécanique moyenne, devient :

$$\bar{\tau}_C = \bar{\tau}_R \quad (29)$$

avec

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_C &= \frac{\bar{P}_C}{\bar{E}} \\ \bar{\tau}_R &= \frac{\bar{P}_R}{\bar{E}} \\ \bar{P}_C &= \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} dt \\ \bar{P}_R &= \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\mathbf{U}}^T (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) dt \\ \bar{E} &= \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \right) dt\end{aligned}\quad (30)$$

avec  $\mathbf{R}_0$  le vecteur des réactions statiques.

Le taux de puissance moyen dissipée par amortissement ne dépend que des déplacements et des vitesses et se calcule analytiquement :

$$\bar{\tau}_C = 2 \frac{\Phi^{*T} \tilde{\mathbf{C}} \Phi}{\|\lambda\|^2 \Phi^{*T} \tilde{\mathbf{M}} \Phi + \Phi^{*T} \tilde{\mathbf{K}} \Phi} \quad (31)$$

On constate qu'il est bien indépendant de l'amplitude  $q$ .

La puissance des efforts de contact frottant est en revanche calculée numériquement pour une amplitude  $q$  donnée en saturant les efforts correspondant au problème de contact glissant linéarisé. En notant qu'en contact glissant la partie dynamique de la réaction de contact est liée aux déplacements de façon linéaire par  $\mathbf{P}_n \mathbf{K} \mathbf{U}$  pour le système étudié, une estimation approchée des réactions saturées est donnée par :

$$\begin{aligned}R_n &= \text{proj}_{\mathbb{R}^+} (R_{n0} + (\mathbf{P}_n \mathbf{K} \mathbf{U})) \\ \begin{Bmatrix} R_t \\ R_b \end{Bmatrix} &= -\mu R_n \begin{Bmatrix} \dot{U}_t - V \\ \dot{U}_b \end{Bmatrix} \text{ si } \begin{pmatrix} V - \dot{U}_t \\ -\dot{U}_b \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}, \mathbf{0} \text{ sinon}\end{aligned}\quad (32)$$

On détermine l'amplitude  $q = q_0$  permettant de vérifier le bilan moyen (29) comme le montre la figure (3) et la méthode de tir est initialisée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_0^0 &= \begin{Bmatrix} q_0 \mathcal{X}(\Phi) + \mathbf{U}_0 \\ q_0 \mathcal{X}(i\mathcal{Y}(\lambda)\Phi) \end{Bmatrix} \\ T^0 &= 2\pi/\mathcal{Y}(\lambda)\end{aligned}\quad (33)$$

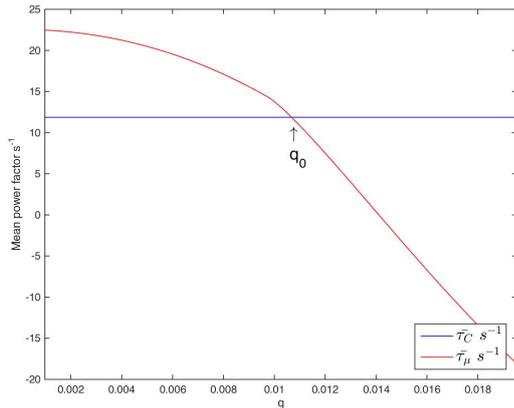
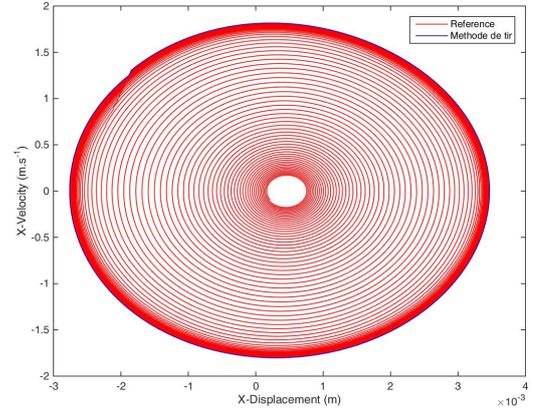


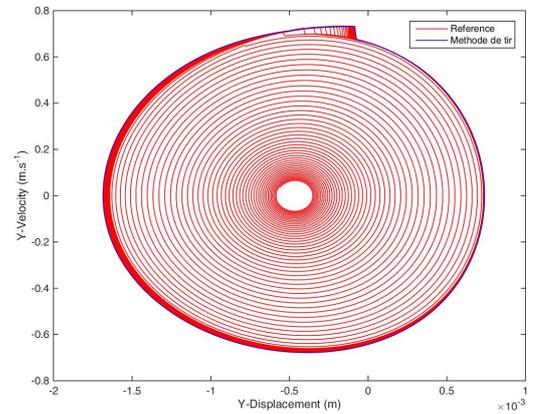
FIGURE 3 – Évolution des facteurs moyens de puissance injectée par le frottement ( $\bar{\tau}_\mu$ ) et de puissance dissipée par amortissement ( $\bar{\tau}_C$ ) en fonction de l'amplitude du mode instable

## 5 Résultats

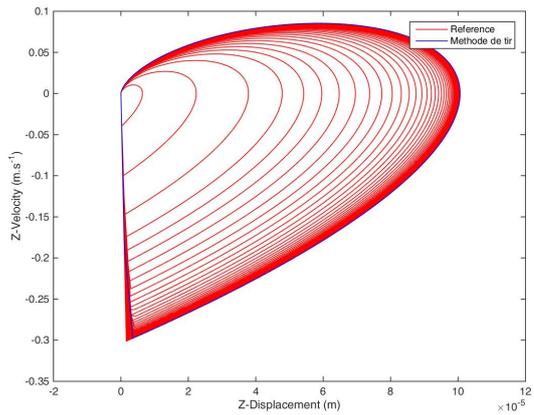
Dans cette section, des résultats sont présentés pour deux cas différents correspondant respectivement à des cycles



(a)



(b)

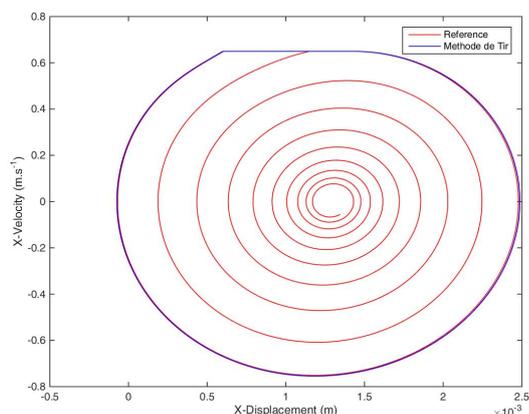


(c)

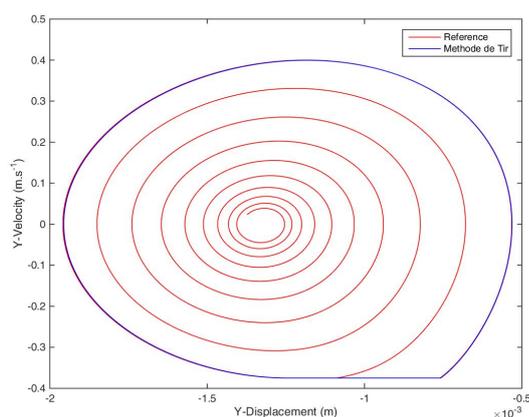
FIGURE 4 – Comparaison entre le cycle limite de décollement/glissement obtenu par la méthode de tir et l'intégration temporelle directe

de décollement/glisement et d'adhérence/glisement. Dans les deux cas le jeu de paramètres retenu est  $m = 0.01$  kg,  $f_1 = 100$  Hz,  $f_2 = 75$  Hz,  $k_i = m \times f_i$  N/m,  $\eta = 0.02$ ,  $c = m \times \eta f_1$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\theta = -30^\circ$ ,  $F_n = 10$  N. Dans le cas du décollement la vitesse de glissement est égale à  $3 \text{ m.s}^{-1}$ , dans le cas de l'adhérence à  $0.75 \text{ m.s}^{-1}$ . Le coefficient de frottement  $\mu$  est égal à  $1.1\mu_c$ , avec  $\mu_c$  le coefficient de frottement critique pour lequel des instabilités auto-entretenues apparaissent dans le cas du décollement. Pour celui de l'adhérence le coefficient de frottement  $\mu$  est égale à  $0.75$ .

Les cycles de référence sont obtenus après une intégration temporelle d'une durée de 3 secondes à partir de conditions initiales correspondant au mode instable mais à faible amplitude, c'est à dire avant que les premiers événements non linéaires apparaissent. Une amplitude égale à 90% de celle produisant le premier décollement ou la première adhérence a été fixée. On compare ces résultats à ceux obtenus avec la méthode de tir initialisée par l'estimation énergétique. Les résultats de la méthode de tir sont intégrés une fois afin d'être certain d'obtenir le bon cycle limite.



(a)



(b)

FIGURE 5 – Comparaison entre le cycle limite d'adhérence/glisement obtenu par la méthode de tir et l'intégration temporelle directe

## 5.1 Décollement

Les portraits de phase sur les trois directions sont maintenant illustrés sur la Figure 4. On constate que la méthode de tir initialisée avec l'estimation énergétique permet d'obtenir le régime stationnaire sans calculer le régime transitoire ce qui est un gain en coût de calcul. En effet le temps de calcul de l'estimation et du régime stationnaire est de 1.7 secondes avec un processeur i7-4810MQ avec une fréquence de calcul de  $2.80 \text{ GHz}$ . La méthode de tir converge en trois itérations en prenant  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1e^{-3}$ .

## 5.2 Adhérence

Les portraits de phase sur les directions tangentielles sont maintenant illustrés sur la Figure 5. Comme pour le décollement, les résultats obtenus par la méthode de tir sont satisfaisants. La méthode de tir converge en 3 itérations avec  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1e^{-3}$ . Le temps de calcul est de 1.7 secondes sur le même processeur.

## 6 Conclusion

Un système simple à trois degrés de liberté et permettant de mettre en évidence un régime auto-entretenu a été présenté. Le choix du modèle de contact frottant de Signorini-Coulomb nécessite l'utilisation d'une méthode d'intégration temporelle afin de simuler proprement les éventuels chocs. Cette méthode d'intégration a permis de calculer l'évolution du système sur 3 secondes et pour deux jeux de paramètres ce qui constitue les références pour cette étude. Le premier jeu de paramètres met en évidence des cycles limites de décollement/glisement alors que le second correspond à un comportement de type adhérence/glisement.

Afin de calculer le régime stationnaire sans calculer le régime transitoire, une formulation de la méthode de tir pour un système auto-entretenu a été présentée. Cette méthode utilise un algorithme de Newton-Raphson qui est un algorithme local. Une estimation énergétique des niveaux vibratoires est alors présentée afin de pouvoir initialiser correctement la méthode de tir. Cette estimation consiste à déterminer l'amplitude d'une solution stationnaire basée sur la déformée et la période d'une mode instable. Cette amplitude est calculée de manière à ce que la saturation non linéaire des réactions de contact ajuste la puissance moyenne injectée au contact à la puissance dissipée par amortissement.

Les résultats de la méthode de tir initialisée avec l'estimation énergétique sont satisfaisants. Les cycles limites obtenus dans le cas du décollement ou de l'adhérence correspondent parfaitement à ceux des références obtenues par intégration temporelle. Les résultats ont été obtenus pour des couples de paramètres  $(\mu, \theta)$  fixés. Ces paramètres déterminent la stabilité du système. La méthode va être utilisée dans un premier temps pour réaliser une cartographie des amplitudes des cycles pour chaque coordonnée  $(\mu, \theta)$ . Dans un second temps, elle sera appliquée à un modèle de structure plus complexe.

## Remerciements

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre d'une thèse financée par le LabEx CeLyA (Centre Lyonnais d'Acoustique) de l'Université de Lyon. Les auteurs remercient le LabEx pour ce soutien.

## Références

- [1] N. Coudeyras, S. Nacivet, and J-J. Sinou. Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 328 :520–540, 2009.
- [2] A. Loyer. *Étude numérique et expérimentale du crissement des systèmes de freinage ferroviaires*. PhD thesis, École Centrale Lyon, 2012.
- [3] X. Lorang. *Instabilité vibratoire des structures en contact frottant : Application au crissement des freins de TGV*. PhD thesis, École Polytechnique, 2004.
- [4] L. Charroyer, O. Chiello, and J-J. Sinou. Instabilités par couplage de modes d'un système masse ressort en contact frottant : comparaison entre le frottement plan et le frottement rectiligne. *22 ème Congrès Français de Mécanique*, 2015.
- [5] M. Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 177 :235–257, 1999.
- [6] H. B. Khenous. *Problèmes de contact unilatéra avec frottement de coulomb en élastostatique et élastodynamique, étude mathématique et résolution numérique*. PhD thesis, INSAT, 2005.
- [7] D. Vola, E. Pratt, M. Jean, and M. Raous. Consistent time discretization for a dynamical frictional contact problem and complementarity techniques. *Revue européenne des éléments finis*, (7) :149–162, 1998.
- [8] Ali H. Nayfeh and B. Balachandram. *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational, and Experimental Methods*. Wiley-VCH, 2004.