



HAL
open science

Le modèle comme regard organisateur du réel

Giuseppe Longo, Nabil Zakhama

► **To cite this version:**

Giuseppe Longo, Nabil Zakhama. Le modèle comme regard organisateur du réel. Naturaliser le modèle, Oct 2013, Chambord, France. hal-01381806

HAL Id: hal-01381806

<https://hal.science/hal-01381806v1>

Submitted on 14 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Le modèle comme regard organisateur du réel¹

Giuseppe Longo

Centre Cavailles, CIRPHLES,
CNRS et École Normale Supérieure, Paris
<http://www.di.ens.fr/users/longo>

Nabil Zakhama

Ingénieur systèmes informatiques
et de télécommunications, Paris.

Résumé

Dans cet article nous montrons qu'un modèle, en tant qu'emploi d'un formalisme, propose un regard, organise et structure le monde, chaque modèle selon sa propre méthode, selon l'engagement technique et mathématique, voire métaphysique, qui lui est propre. Or, les modèles, par leur propre force expressive, contiennent tous une sorte d'écart, de manque irréductible dans l'expression de la "réalité" (dans tout sens que l'on veuille attribuer à ce mot), caractéristique de l'expression mathématique, scripturale, voire langagière, de manière générale. Cet écart peut se comprendre par la comparaison entre modèles, car chaque modèle se positionne d'un point de vue et force activement sa propre organisation sur le réel. Le jeu entre modèles continus et discrets est un des thèmes explorés dans cet article. On mettra en évidence, en particulier, le rôle de la modélisation du hasard dans le rapport entre modèles mathématiques et phénomènes.

1. Des différents usages du mot "modèle".

Quoique la littérature, ancienne et moderne, témoigne du problème de l'incommensurabilité à l'intérieur des constructions mathématiques (problème de la diagonale d'un carré, de la circonférence d'un cercle) ainsi que entre phénomènes et mathématiques (problème de l'intervalle incompressible de la mesure classique, de la mesure des variables conjuguées en microphysique), des approches mécanistes ou formalistes semblent ne pas considérer cette difficulté radicale, lors de la construction des modèles. En dépit du changement historique du paradigme épistémologique associé aux modèles (du modèle qui cherche à "imiter" son phénomène, on en parlera, jusqu'à celui qui se veut purement prédictif), on retrouve encore ces approches mécanistes ou celles qui présument une complétude des formalismes par rapport au réel dans tout secteur d'application de la modélisation mathématique, alors que pourtant divers théorèmes sur l'incomplétude ont montré les limites sémantiques des formalismes mathématiques et logiques, notamment aux interfaces des disciplines, (Longo, 2010). Clarifions toutefois et tout d'abord l'usage de ce terme si polysémique, "modèle".

Le terme modèle se trouve souvent utilisé dans le langage courant pour désigner ce qui est exemplaire ou ce qui est à imiter. Chez une personne perçue comme modèle, il s'agira de certains caractères par lesquels elle se distingue, telle qu'une bonne conduite, ou bien, de manière plus générale, tout ensemble de caractéristiques jugées typiques en elle, comme son appartenance à un groupe social, son

1 Exposé invité, aux actes du colloque **Naturaliser le modèle**, Chambord, octobre 2013.

statut, apparence, etc. Pour un étant naturel, matériel ou biologique, le modèle sera, selon le cas, un ensemble de propriétés que l'on considère essentielles à son intelligibilité. Elles seront alors vues et traitées comme formelles, structurelles, dynamiques, ou comportementales. Enfin, pour un artefact humain, le modèle représente un ensemble d'attributs, de ce qui est à construire/fabriquer ou ce qui est à étudier, sous forme d'un dessin, schéma, une formule mathématique, un programme informatique, etc. Dans tous les cas, on extrait ce que l'on voit ou, mieux, que l'on veut voir. Parfois, on n'y voit rien ou on voit tout faux ou, encore, on projette ses fantasmes sur la Nature. A la fin de cet article on en verra un exemple, gravissime.

La fonction du modèle, apparaît donc comme poïétique et épistémique. C'est ainsi, qu'un artiste ou écrivain se servira d'un modèle comme source d'inspiration, d'idée pour la réalisation de son œuvre. Mais, un scientifique physicien, biologiste, sociologue, économiste, etc. utilisera un modèle comme représentation de ce qu'il considère être la structure intelligible du phénomène qu'il étudie afin d'en prendre mesure, c'est-à-dire, construire une connaissance, et, parfois, il arrive à lui accorder une valeur explicative. Une fois validé en conformité des critères proposés, ou bien les exigences de construction/fabrication, le modèle peut servir comme substitut à la réalité lorsqu'elle est inaccessible ou lorsque le coût d'accès est élevé, soit parce que (cette réalité est) trop complexe (biologie, microphysique, sociologie), ou bien non encore disponible tel, par exemple, une future construction dont un modèle, plus que la simple maquette visuelle, permettra d'en étudier en amont les propriétés structurelles, fonctionnelles, comportementales et environnementales.

Ces différents usages correspondent bien à l'étymologie du terme modèle qui provient du mot latin 'modulus' qui signifie à la fois, *moule/forme* et *mesure* (Source TLF²). Dans sa fonction de forme, le modèle est considéré dans son usage poïétique en tant que *prototype*, ou type premier qui concentre le savoir sur l'objet à produire. Cette même fonction intervient aussi pour prédire le phénomène : en amont et en principe le modèle devrait permettre de produire autant que nécessaire d'estimations du phénomène pour les confronter à sa réalité en vue de la vérification et in fine de la validation ; en aval, il devrait servir à prédire le phénomène ou le comportement a priori, dudit phénomène, en en délivrant une détermination (quantitative ou stochastique) sans nul besoin de recourir à l'empirie. Donc, la fonction de moule sert à la mesure, deuxième fonction du modèle, ce qui veut dire que les usages (*épistémique et poïétique*) du modèle sont corrélés.

Ainsi, lorsque l'objet de la réalité sur lequel porte la connaissance, c'est-à-dire l'objet *premier* (ou archétypal) se caractérise par son opacité (cas de la science), ou bien fait (encore) défaut (cas de la production), le sujet connaissant se trouve amené à utiliser le modèle comme substitut de l'objet premier et l'instaure comme un *objet second*. Dans ce rôle de *médiation* au rapport du sujet connaissant à son objet d'étude empirique, le modèle substituant/substitut est un maillon de base dans une *méthode* pouvant répondre aux défis de l'ingénierie (conciliation de contraintes antagonistes, par exemple, le coût du système à développer eu égard son impact environnemental), ou bien d'intelligibilité en sciences de la nature, ainsi que l'illustre le formalisme mathématique en physique relativiste, et, plus tard, en mécanique quantique.

Le modèle devient donc objet conceptuel, sur la base, d'une part, d'une vision réaliste où il traduirait l'objet réel en tant que désignant la chose perçue devant soi : le terme 'objet' dérive du latin 'objectum' et désigne 'ce qui est placé devant' le sujet connaissant en vue d'être étudié, rendue intelligible,

2 TLF : le Trésor de la Langue Française: voir <http://atilf.atilf.fr/>

expliqué, produit. De l'autre, le modèle est décrit en référence à une attitude que l'on peut qualifier d'idéaliste au sens où il est considéré comme un construit conceptuel, pur, indépendant du monde, voire, à l'opposé, pré-existant au monde, comme dans les visions platoniciennes des mathématiques : les idées et structures des mathématiques façonneraient le monde comme le chocolat se façonne dans un moule). Nous soulignerons le regard *historique* et *construit* sur la Nature, point arbitraire, mais trop souvent implicite, résultat d'une *friction de connaissance* sur le réel, proposé par le modèle mathématique.

L'évolution historique du modèle répond à une nécessité épistémologique que ce soit en production ou en sciences. En effet, en sciences par exemple, la conception réaliste de l' 'ob-jet' prend tout son sens dans le cadre de la science classique (newtonienne) visant des étants directement discernables (par exemple, l'étude de corps solides en mouvement, en mécanique, ou des astres en évolution visible, en cosmologie). Cependant, pour expliquer des phénomènes associés à une réalité inaccessible, l'astronomie copernicienne (voir (Kuhn, 1973 ; p. 216)) s'appuyait déjà sur un fructueux stratagème consistant à substituer à l'objet primaire véhiculé par les astres apparents, un objet secondaire, le modèle héliocentrique, pour pouvoir étudier analytiquement leur phénomène, et le rendre intelligible. Ce modèle, en tant qu'objet second, nous le savons, même inexact, avait rempli, mieux que le modèle de Ptolémée, son double rôle d'expliquer³ et, bien plus tard, de prédire (par des calculs) certains phénomènes. En chimie, s'il était encore possible, au XVII^e siècle, de dériver certaines lois parcellaires du phénomène lié aux réactions chimiques en posant directement les substances chimiques, telles qu'elles, comme objets de l'étude⁴, le vrai essor de la chimie en tant que science exacte aux lois universelles et surtout générales n'a vraiment eu lieu, qu'à partir du moment où des savants ont eu l'idée d'opérer une *substitution objective* primaire/secondaire. C'est-à-dire de poser en lieu et place des réactifs chimiques habituels, une construction purement abstraite (et fictive) de leur réalité en termes, d'abord d'éléments simples, et ensuite d'atomes/molécules. C'était donc en suivant une telle démarche que les premiers chimistes, au XVIII^e siècle, avaient procédé à "modéliser" la composition des substances chimiques : il s'agissait au début, notamment, des travaux de Lavoisier, (voir "Tableau des substances simples" (Lavoisier, 1789 ; p. 135)), qui avait introduit la notion d'élément simple ; ensuite, et progressivement s'était mise en place une modélisation atomique des réactifs. Celle-ci avait abouti finalement à la classification périodique des éléments de Glenn Theodore Seaborg (début du XX^e), forme stabilisée et en bonne partie achevée du modèle du réel chimique que nous connaissons aujourd'hui.

Ce qui nous intéresse ici, c'est l'approche *methodologique* consistant, d'abord, à utiliser à la place de la réalité chimique microscopique, intangible (à l'époque), les instruments faisant défaut, un *modèle* représentatif de la substance chimique sous forme d'une combinaison d'éléments chimiques simples nommés par la suite 'atomes'. C'est donc, une *transposition* de la révolution copernicienne aux objets 'immenses', les astres, à des objets 'microscopiques', les 'atomes', aboutissant à une autre révolution dans la chimie. Dans les deux cas, face à une réalité inatteignable (du moins adéquatement) par les sens de l'homme, le scientifique n'a plus qu'à quitter son statut d'observateur privilégié et procéder par une approche heuristique qui à chaque fois pose une *hypothèse*, et essaye de prédire avec celle-ci, voire de donner un sens aux choses, en le dérivant de ces hypothèses. Il propose alors ce que nous

3 Sur une manière de nuancer entre les termes 'prédire', 'expliquer' et 'représenter', on peut se référer à (Duhem, 1906).

4 Formulation du type : *calcaire + eau = effervescence + chaleur*.

appelons de façon synthétique "un regard", dont le choix d'un système de repérage/référence et de mesure, d'un formalisme mathématique, ce qui confère aux objets d'étude leur qualification "objective". Après validation en conformité, ces hypothèses revêtent le statut de *modèle* (ou partie d'un modèle) de la réalité et peuvent en découler des *lois* du phénomène : un modèle est à la fois, par construction, hypothèse(s), et, par son usage, loi(s).

Cependant, du point de vue mathématique, ces lois ne seront que des invariants et des transformations qui les préservent. Et en physique contemporaine, on pourra remplacer ce terme vétuste, "lois", par l'analyse des symétries du système mathématique, car ces symétries ont le double statut mathématique d'invariants et de transformations, (Bailly, Longo, 2006 ; chapitre 4).

2. Théorie, modèles et symétries

Même en production, un *modèle* est un ensemble, éventuellement réduit à un seul élément, de loi-hypothèses – on garde ici ce terme de 'loi' – (ou hypothèse-loi après validation du phénomène ou du comportement), formant une *structure hypothétique* qui peut, après validation, représenter non seulement *l'architecture* mais aussi le *fonctionnement* de l'objet étudié dans sa dimension, respectivement, *architectonique* et *organique* comme *système*.

Cette évolution objective historique était suivie d'un autre mouvement où le modèle tend vers le non théorique au sens d'absence de thèse ou d'assomptions particulières sur la réalité et sa nature. Il suffisait désormais que le modèle prédise, aide à la construction, aide à la décision, etc. En effet, dans notre exemple, il persistait, en physique/chimie classique, une interprétation intuitive du modèle, c'est-à-dire un prétendu ancrage au réel, notamment parce qu'il était encore possible d'attribuer aux idéalités du modèle des 'étants' *positionnés* (au moins imaginativement) dans un système de repérage traditionnel de l'espace et du temps. L'apport de la mécanique Quantique à la chimie changera radicalement le regard sur ces étants, au niveau microphysique.

A partir de ces réflexions, nous soulignerons ici la "construction d'objectivité" voire des "objets" même de connaissance par ce geste constitutif qui est *l'abstraction amplifiante*, de type mathématique. Les mathématiques amplifient un regard, stabilisent le rôle d'un système de repérage/référence et de mesure, explicités par le sujet connaissant. Cette abstraction est à considérer comme *condition de possibilité* du passage du subjectif à l'objectif, dans le sens des sciences de la nature⁵. C'est dans ce sens que, pour la physique relativiste, l'espace construit ne laisse plus qu'un lien faible et lointain avec l'espace et le mouvement vécu, fort loin de la vitesse de la lumière. Par exemple, la relativité d'Einstein, selon Hermann Weyl, repose sur une construction de l'espace, sous forme de variété riemannienne avec ses tenseurs de courbure, posée comme un cadre d'objectivité en tant qu'invariance: c'est ainsi, dit-il, que l'on passe des "lois causales" (*causal lawfulness*) à l'organisation structurale de l'espace et du temps (*structural lawfulness*), voire des lois causales à la "légalité/normativité" des structures mathématiques (géométriques)⁶. L'indépendance du sujet est ainsi donnée en termes d'une invariance construite, par le sujet lui-même : le choix du système de repérage

5 Le sujet fait « un choix explicite et explicité d'un système de repérage, y compris par le choix de la mesure » et « il organise ainsi l'espace et le temps » ; c'est à dire, le sujet pose l'origine, la mesure, et structure mathématiquement l'espace et le temps en tant que continus, par exemple, à la Cantor-Dedekind, voir (Bailly Longo, 2006, p. 38).

et de mesure ainsi que le groupe des transformations (symétries de Lorentz-Poincaré) qui permettent de passer d'un système de repérage à un autre, tout en conservant les invariants de la physique. Les mathématiques relativistes permettent, alors, la structuration géométrique du monde, ainsi que la déduction logique et formelle, même très éloignées de toute signification intuitive. Loin de l'espace de l'action humaine, la construction de modèles assume alors son meilleur rôle, grâce à leur caractère *normatif* du réel, qu'ils organisent, tout en donnant un sens aux phénomènes, par leur unité, faite de corrélations, transformations relatives, invariances. Il persiste, toutefois, un certain encrage au réel du sens commun en tant que constitué partiellement classique, puisque les construits du sujet sont encore classiquement intuitifs eu égard la "détermination" des phénomènes réels : l'espace-temps relativiste reste, localement, proche de l'action humaine et intelligible ; il est aussi le lieu de dynamiques déterministes, dans un sens que l'on précisera plus bas par la différence avec les modèles mathématiques de la microphysique et par l'analyse des différentes formes de l'aléatoire.

A mesure que la pratique scientifique se donnait pour tâche d'expliquer des phénomènes sans cesse plus complexes, voire plus "fins" ou éloignés des pratiques immédiates des sens, car nécessitant la médiation d'instruments complexes de mesure, le regard scientifique sur le monde fait appel à des modèles sous-tendus par des ontologies non intuitives pour le rendre intelligible. C'est ainsi que, la physique quantique a recours à des interprétations du modèle mathématique qui se soucient peu de l'existence, car elles introduisent des étants, non seulement supposés microscopiques comme les atomes de la chimie, les électrons, les protons, etc., mais aussi, dont la conception même de leur *être*, en tant que pure virtualité, exclut toute espérance de pouvoir leur assigner 'a priori' un repère et une position/localisation dans un espace-temps. Par conséquent, il n'est plus possible d'effectuer une mesure directe portant sur eux, indépendante du sujet connaissant et de ses instruments de mesure. La mécanique quantique pousse à l'extrême ce que l'on disait de l'objectivité construite dans les systèmes relativistes, car le système de référence lui-même est *co-constitué* dans l'acte de la mesure. La méthode de *construction* de l'objet procède désormais par "découpage conceptuel" pour mettre en œuvre des idéalité-objets : les électrons, les muons, les fermions, le champ quantique, qui ne sont pas déjà là, puisqu'ils n'ont d'existence que conceptuelle, intentionnelle, ils sont le résultat d'une mesure *active*. Bref, les phénomènes eux-mêmes ne sont pas spontanés, des "pré-donnés", car ils sont le résultat d'une exploration active nécessitant la préparation d'une expérience et la mise en place des instruments de mesure, qui sont eux-mêmes l'aboutissement d'une théorie. Les "faits" qui en résultent, comme dit Goodman tout à fait en général, sont donc et particulièrement des "théories de petite taille". Le modèle/théorie mathématique est le résultat d'une exploration qui choisit, regarde, prépare, découpe, propose, saisi et, enfin, amplifie mathématiquement ce qui est vu, préparé, découpé, compris, c'est-à-dire construit. Mais il s'agit d'un constitué qui n'est point arbitraire, car l'action constructive de connaissance est le résultat d'une friction concrète, historique, de connaissance, sur un réel qui s'oppose à tout arbitraire, à tout insensé, un réel qui canalise l'application d'une méthode d'exploration et de connaissance. Voilà ce qui est le meilleur des modèles-objets avec, en plus, un remarquable pouvoir prédictif.

6 Nous résumons par ces mots la façon par laquelle Husserl, dans un échange épistolaire avec Weyl, saisit un point central de la physique relativiste, mis en évidence en particulier par le travail mathématique de Weyl, mais aussi par les réflexions de Becker, un philosophe de la physique élève de Husserl, voir (Bailly Longo, 2006, p. 27 et suivantes) pour plus de détails.

En quantique, et contrairement aux cadres classiques et relativistes, "ce que l'on mesure n'est pas ce que l'on calcule". Bref, la mesure donne un nombre réel, mais le calcul de la dynamique quantique s'effectue dans le corps des nombres complexes. Cette différence est très importante par rapport aux analyses classiques, car elle permet de décrire, par l'équation de Schrödinger, la dynamique d'une "densité de probabilité", non pas celle d'un quanton : la mesure des propriétés associées au quanton correspond alors à la projection de ce vecteur complexe sur un nombre réel. C'est là un changement radical de paradigme épistémologique associé au modèle mathématique, l'équation d'onde de Schrödinger, rendu nécessaire pour satisfaire à des objectifs scientifiques propres, par un regard original sur des phénomènes nouveaux où la détermination mathématique (l'équation) *intègre* l'indétermination de la mesure.

Pour résumer, dans l'histoire des sciences et des techniques, le modèle mathématique, partant d'une épistémologie liée à la mécanique classique, basée sur une représentation prétendument directe de l'objet réel sous forme d'une loi mathématique du phénomène, se présente comme une sorte de "*modèle réel*" avec une interprétation théorique ancrée dans ce réel, dans ce grand livre de la Nature qui serait écrit dans le langage de la géométrie d'Euclide (Galilée, 1623, p. 141 de 1979). Il s'est ensuite acheminé vers des *modèles abstraits* aux lois mathématiques mêlant déterminations quantitatives et déterminations probabilistes d'états virtuels du phénomène, le tout associé à une interprétation "déracinée"⁷ du réel avec, comme seuls points de contacts possibles, des points limités aux interfaces des phénomènes (interfaces du type symbolique, ou modèle/phénomène) qu'*actualisent* les dispositifs matériels expérimentaux (interfaces du type matériel, ou homme/mesure). D'un côté, l'interface (du type *symbolique*, ou modèle/phénomène, ou modèle/environnement) est un *sous-ensemble* de l'ontologie du modèle. Par exemple, certains symboles mathématiques pour un modèle formel, des instructions d'un langage informatique pour un modèle exécutable sur ordinateur, des composants électroniques pour un modèle électronique, des images ou dessins pour un modèle graphique etc. L'interface assure alors la traduction des valeurs des variables, d'entrée et en sortie du modèle, en des *mesures* du phénomène ou du comportement de la cible (l'objet à produire/construire). Ces deux ontologies, idéale et empirique, peuvent évoluer indépendamment et chacune s'enrichir de nouveaux états, avec toutefois une nécessaire "synchronisation ontologique", (Zakhama, 2012), pour maintenir la vérité empirique du modèle. Que l'on considère la confrontation des calculs théoriques, pour un phénomène astral, à la mesure angulaire aux solstices, ou bien, en chimie, à la mesure de la masse des réactifs avant et celle des produits après réaction ; en production, l'évaluation des interactions de la cible avec son futur environnement d'accueil. De l'autre côté, si nécessaire, l'interface (du type *matériel*, ou homme/phénomène) est un *moyen* matériel qui montre le phénomène.

Toutefois, les prémisses de ce regard sur la théorisation/modélisation était déjà dans l'audace des fondateurs de la physique modernes qui ont osé regarder le système solaire du "point de vue du Soleil", disions-nous, en dépassant le sens commun du perçu immédiat, ce "réel" du jugement perceptif, qui nous donne pour immobiles, entourés de planètes aux épicycles variés. Pour fonder la science moderne, il a fallu construire une objectivité nouvelle, manier des systèmes de référence fort contre-intuitifs, centrés sur le Soleil, proposer un nouveau regard, un point de vue hors du monde. Est-ce le modèle de Copernic "plus vrai" que celui de Ptolémée ? Nous ne posons pas la question en ces termes, mais dans les termes d'une "construction unitaire du sens".

7 Sur la notion de déracinement des modèles, voir (Varenne, 2010 ; p. 45).

En principe, le modèle planétaire de Ptolémée est "relativement vrai" : il est de la bonne science, si l'on prend la Terre comme origine du système de repérage. Et il y a de très fortes raisons de bon sens ainsi que métaphysiques pour faire ainsi : l'immobilité relative de la Terre et des objets, la localisation et l'unicité de l'Olympe, du Christ, du Pape Puis, par des épicycles, tous ad hoc, on décrit "assez bien" les mouvements planétaires. En fait, toute ellipse autour du Soleil peut être arbitrairement approchée par des épicycles au tour de la Terre : il est seulement question de sommes de séries. Aucune évidence empirique, qui nous donne inévitablement un nombre fini de positions planétaires, permet donc de refuser, a priori et mathématiquement, le système de Ptolémée : tout nombre fini de positions planétaires peut être interpolé par des épicycles centrés sur la Terre – travail techniquement difficile, mais au cœur de la géométrie avancée des épicycles, des énormes volumes au grand succès bibliométrique, même à l'époque de Galilée. Par ce travail soigné, pendant des siècles, les épicycles décrivent et prédisent à l'échelle de temps humaine, les mouvements planétaires un par un, sans faille, chacun par son jeu spécial de centres mouvant sur des cercles, qui sont centrés sur d'autres cercles Un fort joli modèle.

Voilà toutefois une première différence comparative : les lois de Kepler concernent toutes les orbites, elles sont parfaitement générales, si on les centre sur le Soleil. Plus tard, à partir des équations de Newton, on pourra *dérivée* les orbites kepleriennes au tour du Soleil, un succès remarquable. Plus encore, la méthode variationnelle de Hamilton (1805-65) permettra de dériver toute trajectoire d'un mouvement à l'équilibre énergétique comme une géodésique dans un bon espace de phases : les équations de Newton ne sont alors qu'un cas particulier d'une intelligibilité globale de tout mouvement à l'équilibre, stable ou instable, pourvu qu'il *conserve l'énergie*. Et ce n'est pas fini avec l'aventure de la physique moderne : les théorèmes de Noether, au XXème siècle, permettront de comprendre tout phénomène de conservation de l'énergie (mais aussi de conservation de l'impulsion et du moment angulaire) comme des *symétries* dans les équations du mouvement (voir (vanFraassen, 1989), (Bailly Longo, 2006)). Voilà donc une "construction unitaire du sens" paradigmatique, où, ce fondement de l'action humaine, ces gestalts organisatrices du monde, les symétries, deviennent une notion mathématique forte et rigoureuse. On les retrouve dans les équations et permettent une *intelligibilité unifiée* de toute dynamique, classique et relativiste, une intelligibilité riche de sens, pour nous, les hommes – ou, du moins, pour nous si imbibés de la culture grecque de l'ordre et de la géométrie, entièrement construite par des symétries, voire caractérisée par le groupe de ses automorphismes, encore des symétries, on dira avec Klein (1875). Les modèles mathématiques du monde, à partir de celui du système des planètes, en suivent.

3. Les engagements de la perception et du langage : l'écriture

Les phénoménologues affirment que la conscience est un flux, un continu donc. Il en est de même pour l'acte perceptif portant sur des objets du monde sensible, selon la Gestalt-théorie (Köhler, 1929), qui reprend partiellement ce même pari contre toute forme d'atomisme perceptif. Quoique de manière nuancée, en partie lacunaire, elle postule une réalité où se détachent des formes à partir d'un continu sensible. Mais ... est-ce le monde continu ou discret ? Nous ne plaçons pas notre discours au niveau métaphysique et nous ne souhaitons pas prendre ici un parti plutôt qu'un autre. Nous nous contenterons d'examiner le jeu entre continu et discret, si important dans les rapports, en sciences, en particulier, entre modélisation mathématique (par des équations dans le continu, typiquement) et computationnelle (basée, de différentes façons, sur des machines à états discrets). Bien évidemment, le

jeu entre les deux regards sur le monde qui en suivent est un grand enjeu pratique pour le calcul scientifique.

Essayons alors de saisir un parcours constitutif possible, voire un ancrage cognitif, de ce continu qui est la forme⁸ privilégiée, conceptuelle et mathématique, de l'intelligibilité d'un contour, d'une trajectoire, des lignes d'Euclide aux trajectoires d'Einstein. On le fera sur la base d'analyses récentes de la rétention et de la protension (voir (Longo Montévil, 2011)). Par la première on entend la mémoire, essentiellement préconsciente, d'un vécu, d'une action, d'un mouvement ; la deuxième est le geste qui précède toute action propre, chez tout vivant suffisamment complexe (même un monocellulaire comme la paramécie en montre, (Misslin, 2003)). La protension permet la capture d'une proie, d'un objet en mouvement : la saccade protensive en trace à l'avance le parcours et permet le geste, tout aussi protensif, qui en suit et anticipe la proie. Bref, le cerveau se prépare et anticipe un objet en mouvement, qui est suivi, retenu brièvement en mémoire, et puis précédé par une saccade, (Berthoz, 1997) ; la saccade suit et précède aussi un bord parcouru par le regard.

Or, la rétention de la trajectoire parcourue, du bord suivi par l'oeil, est "*recollée*" à la protension par l'unité même de l'activité cérébrale et cognitive globale (le système vestibulaire, par exemple, a sa propre rétention et inertie, (Berthoz, 1997)). Ce serait donc ce *recollement* - un concept mathématiquement solide (au cœur de la géométrie riemannienne) - qui engendre l'effet cognitif, voire qui *impose* la continuité d'une trajectoire : l'image de l'objet et de sa position passée est recollée à celle de l'objet et de sa position attendue. Bref, le continu n'est pas dans le monde, il est dans ce recollement, qui est un mouvement, un geste cognitif. Ensuite, pour que cette trajectoire puisse avoir lieu dans le monde, nous *proposons* un espace-temps continu, condition de toute d'intelligibilité physico-mathématique, car il serait "derrière" toute trajectoire. Mais ce même monde n'est ni discret ni continu : nous le rendons intelligible par ce *choix* fort que nous proposons, cette reconstruction ancienne et profonde d'un continu phénoménal, ce remplissage, voire même lissage préconscient des trajectoires et des bords. La géométrie d'Euclide lancera la danse mathématique, par le continu cohésif et compact de ses lignes, des bords de toute figure, qui ne sont pas faits de points, car les points (*semeia*) sont aux *extrêmes* d'un segment (définition gamma) où à l'intersection de lignes (théorème I, livre I). La lettre, elle-même, point-semeion, si importante aussi dans la culture grecque, on le verra, marque seulement une *position* sur le continu intrinsèque et irréductible de la ligne euclidienne. Et, sans un espace (ni plan) sous-jacent, car ce dernier n'est point traité par Euclide, la géométrie grecque nous propose la ligne sans épaisseur, le continu d'un flot qui n'existe pas, audace conceptuelle hors du monde, le premier modèle mathématique, un regard organisateur des phénomènes, à l'interface du monde.

D'autres outils nous proposent le monde comme discret : ils lui donnent un sens alors très différent, comme l'on dira. Même d'un point de vue naturaliste, on pourrait oser en effet imaginer qu'un animal dépourvu de fovéa (la partie de l'œil qui permet le suivi continu) et qui paraît prendre des instantanés espacés d'un objet en mouvement, n'aurait pas l'impression d'un continu, comme nous le "voyons". Un lézard ne voit probablement que des sauts, du discret, dans le mouvement d'un objet.

Pour notre objectif, bien au delà du continu possible de la perception, qui est une action sur le monde, nous remarquons maintenant qu'il n'y a de science, donc de modèle, qu'exprimé dans un langage. En

8 Nous substituons ici à la notion de forme a priori de la connaissance, telle que décrite par les catégories (Kant, 1787), un construit de fait de la pensée, le continu mathématique.

effet, en Grec à partir du V siècle, le mot 'logos' signifie à la fois raison et langage. Dans notre histoire, si grecque et si cartésienne, penser c'est simultanément parler (et réciproquement). En fait, il s'agit d'écrire, et, alors seulement, on *voit* ces invisibles que sont la pensée et le langage. Depuis, donc, quelque soit les modalités de la perception/cognition et le statut de la pensée, le modèle est exprimé dans un formalisme que ce soit la langue naturelle, les symboles mathématiques, ou même un langage machine de bas, moyen ou haut niveau. Il y a là une nécessité historique : car même à admettre qu'un modèle puisse exister à l'état non exprimé, sous forme, par exemple, de gestes voire d'idées, il sera, tant que dans cet état, exclu de la science telle que nous la connaissons, c'est-à-dire exotérique. Mais quelle différence entre, par exemple, un langage diagrammatique, comme celui de la Théorie des Catégories, régi par des symétries, et le jeu du discret arithmétisant ? Quelle différence entre *l'interprétation* continue d'un système d'équations, tout aussi exprimé par des lettres et des logogrammes, dans le discret de notre écriture, et son implantation (une interprétation, en fait) sur une machine digitale ?

Nous avons vu qu'un modèle, en tant qu'exprimé, est construit en vue d'un usage (poïétique ou épistémique). Il est donc en rapport avec le phénomène et le monde réel, au moins par les interfaces, et c'est la perception/action⁹ qui est la composante ultime de ce lien qui se manifeste au moment de la "synchronisation ontologique" entre concepts et phénomène : elle est à l'origine de la constitution du modèle (et du monde). En effet, il n'y a de modèle (ni de monde pour nous) que conçu et exprimé, voire *écrit* et interprété, voire implanté dans un ordinateur. Mais ... dans quelle écriture ?

En plus du choix d'organiser les formes et l'espace dans un continu (celui de la géométrie grecque et, puis, de l'espace-temps mathématique moderne), notre culture a fait, quant à l'écriture, il y a 5.000 ans, un choix tout aussi radical : l'invention de l'alphabet en Mésopotamie (Herrenschmidt, 1996 ; 2007). Loin de l'évocation du sens par l'image, dans le silence, propre à l'idéogramme, qui est aussi un geste, un tracé continu riche d'histoire, la lettre est une notation discrète musicale, sans sens ni histoire individuelle repérable. Rassemblées, les lettres rendent *visible*, dans le discret, cet invisible chanté, le langage, un autre continu d'ondes, vibrant, où les mots sont aussi collés entre eux que les syllabes. Le phonème reproduit, synthétise, le sens atomisé dans des lettres sans sens, par un chant continu. Première discrétisation du monde, fracturation atomique dans le discret de la description du réel, l'écriture alphabétique conduira Démocrite à noter par des lettres les atomes, ces entités insensibles et sans sens visible, dont la composition donnerait les objets visibles ; tout comme des lettres, individuellement dépourvues de sens, assemblées au fini, donnent un sens, reconstruisent le langage humain, par des suites discrètes, les mots, et par leur lecture à haute voix (on a lu exclusivement à haute voix jusqu'au IIIème siècle A.D.).

Ces mêmes Grecques donc, qui ont inventé la ligne continue et sans épaisseur, ont aussi "modélisé" la pensée par la discrétisation alphabétique, dite "complète"¹⁰. Et ensuite, ils ont transféré/ plaqué leur écriture alphabétique sur le monde ; ils l'ont organisé, en nous proposant le modèle de l'élémentaire et du simple, de l'indécomposable, des atomes, sorte d'alphabet constitutif du monde physique.

⁹ Nous postulons que la conscience est fondamentalement active et que l'acte perceptif en est le geste constitutif.

¹⁰ Ils ont ajouté suffisamment de voyelles pour réduire les ambiguïtés de la vocalisation phonétique basée sur les seules consonnes, comme dans les alphabets originaires de Mésopotamie (une incomplétude et des ambiguïtés qui requièrent toujours une interprétation, comme aussi en arabe et hébreu classiques), (Herrenschmidt, 2007).

Toute notre science, toutes nos formes de connaissances en ont été marquées. La décomposition du raisonnement par anneaux intelligibles et certains, indécomposables, comme les lettres de l'alphabet (élémentaires et simples) ainsi que la causalité locale, intelligible car bien séparable, de la science et des machines de Descartes et Galilée ont donné des rails puissants à la pensée. Et notre pensée scientifique nous a donné moins de la connaissance, quoique certainement forte et importante, que des machines extraordinaires, compositions compliquées de composantes élémentaires et simples, alphabétiques : des machines de guerre jusqu'aux ordinateurs, ce sont des machines alphabétiques au plus haut degrés. Les premières ont permis de conquérir le monde, les deuxièmes ... aussi, en imposant, au monde, plus que jamais une de nos langues occidentales, à écrire par nos claviers alphabétiques.

Un des éléments de force de la discrétisation alphabétique est bien de nous obliger à faire des choix précis. La pensée alphabétique refoule le flou, l'incertain ; elle enseigne à choisir une quantité limitée de détails/caractères sur le phénomène qui sont les seuls attributs pouvant être exprimés simultanément, à la manière de l'échantillonnage dans les calculateurs numériques, également appelés digital(s) par opposition aux systèmes électroniques dits analogiques. Tout langage oblige à ce caractère lacunaire, eu égard le phénomène sensible, qui peut être nommé "*abstraction négative*", également condition de l'objectivité (Zakhama, 2012). L'alphabet nous a enseigné d'abord à choisir et figer un son dans le chant continu du langage, un choix des plus ardues, ensuite à choisir et figer les anneaux élémentaires et simples de la composition du sens, des règles phonétiques jusqu'à la (re-)construction cartésienne du raisonnement (et du monde), par anneaux atomiques, disions-nous.

Toutefois, pour ce qui est d'une intelligibilité possible et très fine du continu, les mathématiques modernes ont su remplir tout saut et lacune, tout espace entre les atomes. Par la *reconstruction* à la Cantor du continu d'Euclide, on passe du discret au continu, mais au prix fort : il faut considérer une infinité non-dénombrable de limites infinies, les limites de toutes les suites convergentes. Cette double infinité va bien au delà de l'Arithmétique et de toute forme de discret et de dénombrable, elle passe à la limite. La reconstruction, donc, peut partir de l'alphabet, du discret arithmétique, mais elle en démontre en même temps l'incomplétude formelle, car elle s'en éloigne par un regard qui se place à l'horizon, à la limite actuelle, un des plus grands gestes des mathématiques, l'infini de la limite projective, bien au delà du discret et du fini itérés. On pourra décrire ce geste dans le langage, dont seulement l'évocation du sens permet de saisir le geste-limite. Enfin, ce remplissage ne peut concerner que la ligne sans épaisseur : au mathématicien ensuite de juxtaposer à nouveau une infinité non dénombrable de lignes pour modéliser le plan, voire l'espace. Le modèle fondamental du continu phénoménal, le continu mathématique, ne se réduit donc pas aux modèles discrets, arithmétiques, du monde : il en est atteint à la limite asymptotique, itérée une infinité continue (non-dénombrable) de fois.

Dans ce jeu entre discret et continu que l'on ne dise surtout pas que la Physique Quantique impose une organisation discrète du monde, de l'espace-temps. Ses fondements sont ancrés sur l'expérience du discret du *spectre de l'énergie*, qui donne la constante h de Planck, de la dimension "énergie x temps" - par contre, le spectre de l'électron libre est continu. On peut déduire de h et de la vitesse de la lumière, la longueur de Planck de l'espace et du temps (de l'ordre de 10^{-46}). Mais cela ne partage pas l'espace-temps en petits cubes bien discrets, topologiquement séparables, car on ne peut pas les séparer par aucune mesure d'observables physiques. Ces petits cubes ne contiennent aucune quantité mesurable et séparable : les phénomènes d'intrication ne permettent pas de séparer l'énergie, l'impulsion, le spin ... d'aucun quanton de celui de tous les autres. La mesure (Aspect et al, 1982), mille fois itérée, confirme

les calculs d'Einstein. Pour Einstein (Einstein et al., 1935), qui croyait dans la séparabilité du continu spatio-temporel, l'intrication des mesures, formellement dérivable, était une preuve de l'incomplétude de la Mécanique Quantique. Elle est, par contre, l'un de ses aspects originaux, qui mieux organisent la microphysique, tout comme le double statut, superposé, discret et continu, des quanta (onde et/ou particule, selon l'instrument de mesure). Une des grandes difficultés conceptuelles de la Physique Quantique est justement ce jeu permanent, cette superposition, entre discret et continu.

En conclusion, des remplissages cognitifs et, ensuite, mathématiques nous donnent, et imposent au monde, un possible continu organisateur de l'espace(-temps) phénoménal. En mathématiques, d'Euclide à Cantor, cela se fait au prix d'une abstraction basée sur les concepts de point sans dimension et de ligne sans épaisseur, des notions limites qui nient toute corporéité spatiale de ces objets premiers de l'intelligibilité. L'inertie galiléenne du point-masse sans dimension, mouvement sans friction sur une ligne sans épaisseur, lancera la physique moderne en posant, à la limite du monde, le lien entre les mathématiques grecques et la théorisation/modélisation des processus physiques. Elle le fait par ces invariants, ces symétries que l'on "découpe" du monde, que l'on *amplifie* ensuite jusqu'au mouvement inertiel limite, pour le replonger sur le réel et en proposer une intelligibilité forte, organisée. Le modèle inertiel du mouvement, en tant que limite infinie, rend tous les mouvements intelligibles, d'un seul coup, en se posant à la limite, à l'horizon, de tous les mouvements. On retrouve alors un croisement de pratiques avec la perspective dans la peinture de la renaissance italienne, cette modélisation qui donne une structure à l'espace, construite en positionnant le regard à l'horizon infini, le point de fuite, (Longo 2011). En fait, en mathématiques, on comprend le monde, on l'organise, on le modélise, en se posant presque toujours à la limite infinie du monde. Les mathématiques sont une science à la limite, qui traite des concepts limites, de la ligne sans épaisseur, au calcul infinitésimal, au continu de Cantor, à la delta de Dirac. Mais même la machine à état discret de Turing est "l'homme dans la pensée machinale limite", dans l'article fondateur de 1936, un homme qui agit parfaitement sans sens, un homme qui n'existe pas. Même cet objet, aujourd'hui si concret, l'ordinateur digital, a été conçu par un passage à la limite, comme modèle de l'homme qui suit la règle de calcul, exactement ; nous y reviendrons.

4. De l'abstraction négative à la reconstruction positive du sens

On a donné des exemples de l'abstraction négative, voire des constructions limites, au cœur de la construction scientifique. Ils nous disent que les 'propriétés', telles que nous les rendons par les mots dans l'intersubjectivité, ne sont pas en elles-mêmes *isomorphes* à des 'faits' déjà bien donnés ou qui se manifesteraient sous forme de structures linguistiques bien établies. Ainsi, s'explique le fait que le modèle n'est pas une traduction de l'impression réelle du phénomène dans un langage formel (mathématique) choisi. Pour prédire le phénomène empirique (ce qui diffère de l'interpréter, une activité qui fait partie de la métaphysique ou de la théorie), le sujet connaissant construit un modèle en utilisant les outils conceptuels, notamment l'abstraction qui devient positive, s'enrichit de sens, lors de l'explication, là où l'abstraction négative opère en arrière-plan, du simple fait de l'expression. L'ontologie du modèle peut avoir, pour certains phénomènes directement perceptibles et simples à interpréter, de nombreuses *références* (ou liens, ou correspondances) vers le phénomène empirique sous forme de propriétés (aspects, ou attributs) directes, jugées pertinentes du dit phénomène, et de son objet si apparent. Dans les cas les plus simples, il y aura une correspondance *injective* avec l'ontologie sur le phénomène, mais pas surjective, en raison de l'abstraction négative dont nous avons montré la nécessité. Dans d'autres cas, comme par exemple en microphysique, la correspondance est limitée aux

seuls étants de l'ontologie qui représentent des *interfaces*, seules prises sensorielles médiates : il n'y a que les instruments de mesure qui sont disponibles, soit comme accès au monde quantique soit pour assurer l'étape de la validation de la loi-hypothèse en hypothèse-loi.

Soulignons la différence du concept d'abstraction négative de ce que nous pouvons nommer la discrimination chez Goodman¹¹, ou encore, la notion du désir ou de l'intérêt¹². En effet, nous partons ici de (la pensée issue de) la perception comme *activité* cognitive exprimée dans le langage, depuis la construction d'un regard actif, jusqu'à la modélisation mathématique. Bergson souligne aussi l'incommensurabilité entre la pensée et le langage (Bergson, 1889 ; p.109)¹³. D'autres auteurs justifient la propriété de non adéquation de la perception (à son objet empirique) en partant du fait que, de par ses capacités limitées en tant que ne pouvant occuper qu'une seule place à un instant donné (\neq ubiquité) dans l'espace-temps associé à la réalité vécue, le sujet connaissant ne peut ni dans l'expérience sensible, ni imaginativement, percevoir simultanément clairement son objet dans la totalité de ses facettes. Il pourra le percevoir d'un seul point de vue, le point de vue sur lequel porte son attention, c'est-à-dire une seule facette/partie à la fois¹⁴. Nous avons résumé et étendu ce perspectivisme par la référence à l'enseignement épistémologique de la relativité einsteinienne, cette théorie des invariants par rapport au système de repérage, si bien mis en évidence par H. Weyl en partant du rôle du choix de ce système et de la mesure.

A ce perspectivisme, nous avons ajouté, d'une part, le regard sur le monde depuis la limite infinie, implicite dans les mathématiques grecques (le point, la ligne sans épaisseur) et dans le principe d'inertie galiléen, explicité dans la peinture italienne, jusqu'aux modèles du monde que nous donnent le calcul infinitésimal et les nombres réels à la Cantor. Ces choix, ces décisions de connaissance nous sortent du monde, nous posent à la limite de ce même monde, pour mieux le comprendre, à partir de son horizon, de façon synthétique et générale. D'autre part, l'abstraction discrète (ou négative) nous propose un échantillonnage rigoureux et puissant, sans flou, itérable sans ambiguïté ; elle permet les calculs sur des machines digitales, notre plus grande invention factuelle, la plus stable et fiable pour l'encodage discret du monde. Dans les deux cas, nous devons à chaque fois réinterpréter ce travail, qui

11 « Pour faire un monde à partir d'un autre, il faut souvent procéder à des coupes sévères et à des opérations de comblement – à l'extraction véritable de vieux matériaux et à leur remplacement par de nouveaux. Notre capacité à laisser échapper est virtuellement illimitée, et ce que nous appréhendons, ce sont habituellement des fragments significatifs et des repères qui nécessitent des compléments massifs... Que nous trouvions ce que nous sommes disposés à trouver (ce que nous cherchons ou ce qui offense énergiquement nos attentes), et que nous soyons comme aveugles à ce qui n'aide ni ne bloque nos recherches, voilà bien des lieux communs de la vie quotidienne, qui sont simplement attestés dans les laboratoires de psychologie » (Goodman, 1978 ; p.32-33)

12 Voir par exemple la conception de la perception en tant que guidée par le désir chez Aristote, (Aristote, 1994)

13 « ... ainsi, par cela seul que nous parlons, par cela seul que nous associons des idées les unes aux autres et que ces idées se juxtaposent au lieu de se pénétrer, nous échouons à traduire entièrement ce que notre âme ressent : la pensée demeure incommensurable avec le langage. »

14 C'est le *perspectivisme* depuis la Renaissance, jusqu'à l'examen phénoménologique moderne, voir contemporain, du cube par exemple.

part du sens, de notre être au monde, et s'en éloigne, en lui *donnant à nouveau un sens*, en faisant retomber sur Terre les constructions conceptuelles qui en dérivent.

5. Forces et limites des modèles computationnels

L'utilisation extensive des calculateurs (éventuellement mis en réseau) demande une analyse rapprochée du problème que pose la propriété de l'inadéquation langagière (au phénomène). Nous avons esquissé le rôle du remplissage du continu ainsi que la sélection dans le discret. Tout d'abord, ces analyses mettent en évidence la nécessité de l'abstraction négative, de échantillonnage du monde, tout particulièrement dans le cas de l'usage des méthodes du discret computationnel sur des machines digitales. Ces artefacts travaillent, par construction, par itération finie d'opérations élémentaires et simples. En plus, chaque opération s'exécute en une durée, serait-elle extrêmement petite, jamais nulle. Ces opérations se basent sur la théorie des architectures de von Neumann, ou les machines de Turing, de la première moitié du XX siècle, qui sont toutes des modèles de calculateurs discrets, c'est-à-dire opérant, par cycles élémentaires finis, sur des bases de données discrètes, aboutissement ultime de la discrétisation alphabétique, modulo un codage digital des lettres et des nombres. Turing en a proposé la première formalisation mathématique en tant que modèle-*imitation* de l'homme qui calcule, disions-nous, au sens plein y compris *réducteur* du terme imitation tel que nous l'avons expliqué, (Longo, 2009). En particulier, Turing, en 1936, entend modéliser "l'homme dans l'acte minimal du calcul arithmétique", un "human computer" agissant de la façon la plus dépourvue de sens possible, sur les carreaux d'un cahier d'enfant, obéissant, sans autonomie aucune, à des instructions écrites dans un alphabet fini (« in a desultory manner », (Turing, 1936))¹⁵. Il souligne le rôle de la finitude discrète de l'écriture alphabétique, qu'il oppose aux idéogrammes évocateurs de sens, et identifie le mécanisme avec cette écriture (Turing, 1950 ; Lassègue, Longo 2012). En fait, les machines digitales programmables sont des machines pour l'écriture et la ré-écriture alphabétique, selon des règles de transformation de suites de signes en suites de signes (et les systèmes formels pour le calcul, fondements et paradigmes des langages de programmation, sont tous des "terms re-writing systems", (Bezem et al. 2003)).

Comment transférer dans une telle machine nos connaissances d'un processus physique, voire biologique ? La mesure est la seule forme d'accès au monde que nous avons. En effet, la perception *utile* étant elle-même une évaluation quantitative, un acte de mesure, nous pouvons parler de "mesure perceptive" (Zakhama, 2012). Dans les cadres classiques, elle est approximative, par principe : elle est un intervalle. A une mesure on peut alors associer un nombre rationnel, comme codage des extrêmes d'un intervalle. Alors, la fluctuation/perturbation en dessous de la mesure, c'est à dire à l'intérieur de cet intervalle, nous échappe, la fluctuation thermique, par exemple. Depuis Poincaré (1892), nous savons que cela engendre *l'imprédictibilité* des dynamiques *déterministes*, dès que quelques interactions (entre trois corps gravitationnels, par exemple, son analyse) demandent une formalisation non-linéaire : les exposants (de Lyapounov, on dira plus tard) amplifient la fluctuation non mesurable, et font diverger de façon mesurable et imprédictible toute trajectoire à l'équilibre. "Et nous avons des phénomènes aléatoires", nous dira Poincaré, 1902¹⁶. Le continu des dynamiques classiques est essentiel à cette intelligibilité de l'imprédictibilité, car il nous permet de *concevoir* d'une part

15 « ... these machines are intended to carry out any operations which could be done by a human computer.

The human computer is supposed to be following fixed rules ; he has no authority to deviate from them in any detail » (Turing, 1950).

l'inaccessibilité de la fluctuation à l'intérieur de l'intervalle continu de la mesure, de l'autre, d'en saisir l'importance, car cette fluctuation inaccessible peut être la *cause* de phénomènes macroscopiques

Dans le cas quantique, la situation se complique. Non seulement il y a une borne intrinsèque à la mesure dans la théorie, la constante h de Planck (considérée comme valeur minimale de la mesure), mais elle s'applique à la non commutativité de la mesure d'observables et variables conjuguées (position *et* impulsion ou énergie *et* temps). Dans les deux cas, classique et quantique, il y a une limite à ce qui est "extrait" du monde, le résultat de la mesure, et, donc, à la structure informationnelle que l'on se donne et sur laquelle on travaille. Dans les deux cas, on reconnaît une inaccessibilité qui rend incomplète toute discrétisation du monde : les données discrétisées, dans une base de données discrète, sont parfaitement séparable et exactement accessible ; elles ne nous transmettent plus le sens de la limite de l'accessibilité au monde par la mesure, elles ne la modélisent pas (voir aussi la section 3). Et on n'apprécie plus la nuance continue, la secrète noirceur du lait.

On peut synthétiser tout cela en disant que la mesure par les estimations données par une loi (modèle-loi) est une tentative par le sujet connaissant de restituer le contenu pertinent du phénomène, par le moyen d'une abstraction positive (volontaire), sous forme d'un construit qui n'est autre qu'une vue *simplifiée*, c'est-à-dire une *vision* ou une *version*¹⁷ du phénomène, en sélectionnant/proposant l'information que le sujet juge pertinente à ses objectifs, à partir du choix de la mesure. L'abstraction volontaire/positive est "une réduction" (Varenne, 2010) qui se superpose à l'abstraction négative, elle même réduction, pour créer une vue abstraite mais signifiante du phénomène.

Cette version facilite en même temps la tâche heuristique du formalisme en ne considérant pour l'étude que certaines des caractéristiques observables de l'objet, typiquement celles jugées par le sujet connaissant comme pertinentes pour son *objectif* de connaissance. Dans le but, en particulier, du calcul effectif, sur une machine digitale, l'abstraction (négative et positive) agit comme un filtre qui *réduit* le phénomène (Varenne, 2010, p. 46) en une *structure* informationnelle (ensemble de relations) finie, de type alphabétique (voire digital, mais c'est exactement la même chose, modulo un codage-décodage des lettres par des nombres fort simple - cf. par exemple, la gödélisation présente dans tous nos ordinateurs). Rapportée à une mesure objective du temps¹⁸, la structure représente, à chaque instant, un état instantané de l'objet qui est associé au phénomène étudié. Si l'on dispose d'un modèle-objet (ou hypothèse-loi) sous forme d'une structure de relations hypothétiques du phénomène (et de son objet si perceptible), qui autorise de calculer sans recourir à l'expérience et en se fiant à la seule prédiction du

16 Il faut noter ici que c'est justement le traitement unifié des interactions planétaires, par les équation de Newton, qui permet à Poincaré de démontrer son "résultat négatif", comme il le définit. Avec des épicycles "ad hoc" on peut approcher, voire modéliser toute orbite, stable et instable, mais aucun théorème général, positif ou, encore moins, négatif, n'est possible. En fait, un bon modèle, une bonne théorisation, devrait permettre de produire des résultats négatifs, des limites de la connaissance proposés, (Longo, 2010).

17 De manière indépendante et suivant un chemin et un objectif épistémique différents, nous retrouvons la notion de version du monde des savants des sciences de la nature telle que décrit Goodman : « Les versions physique et perceptive du monde qu'on a mentionnées ne sont que deux parmi la grande variété qui existe dans les nombreuses sciences, les arts, la perception et le langage ordinaire. Les mondes sont faits en faisant ainsi des versions avec des mots, des nombres, des images, des sons, ou tous autres symboles de toutes sortes dans n'importe quel médium ; et l'étude comparative de ces versions et visions autant que de leur construction, est ce que j'appelle une critique de la construction du monde. » (Goodman, 1978) p. 134-135.

modèle, à chaque étape, ou pas d'une horloge objective, une valeur estimée de l'état de ce phénomène, alors nous avons une *simulation* dudit phénomène en tant que suite de ses états successifs sur la durée de la simulation. Le modèle peut ainsi proposer une prédiction du phénomène et/ou fabriquer des artefacts, conformément aux techniques de l'ingénierie. Est-ce la prédiction pertinente ? Comme nous le disions plus haut, dès qu'il y a une dynamique quelque peu non-linéaire (pour représenter des interactions, typiquement), les trajectoires discrètes et continues divergent rapidement. Le modèle digital reste fort utile, si on sait l'utiliser. Grâce à lui, on peut constater que même le changement de la 16ème décimale peut engendrer des dynamiques divergentes à court terme (voir les systèmes modélisés par la fonction logistique, la plus simple des dynamiques non-linéaires, (Gershenfeld, 1999)). Cette information sur la sensibilité aux conditions initiales est, en soi, très intéressante, surtout si les approximations discrètes doivent remplacer les solutions des équations dans le continu (par exemple, équations trop complexes pour être résolues de façon exacte). Qui plus est, la présence sur l'écran digital de régularités, d'attracteurs, points critiques, etc. donne aussi des informations *qualitatives* très importantes sur la dynamique étudiée, dans les cas où cela est possible (par exemple, les dynamiques hyperboliques auxquelles s'appliquent les Lemmes des Poursuites, (Pilyugin, 1999)).

Une fois considéré comme validé, selon des critères à analyser de près et sensibles à ces limites, est-il envisageable d'isoler le modèle de ses interfaces matérielles, c'est-à-dire de son environnement en productique, ou du phénomène en sciences expérimentales, et de prétendre, à un certain stade, qu'il est suffisamment perfectionné pour représenter assez fidèlement la réalité et pouvoir lui être substitué ? Autrement dit, d'un point de vue pratique, un modèle peut-il *déterminer* la réalité, le phénomène ?

La réponse à cette question est partiellement, mais doublement négative. D'une part, les notions limites des mathématiques perdent la corporéité du réel, physique, biologique, disions-nous. De l'autre, le modèle computationnel ne peut exprimer le phénomène que discrètement. Il est alors incapable de suivre une dynamique non-linéaire, voire sensible aux conditions initiales, tout en proposant des informations (à interpréter, qualitatives, par exemple) irremplaçables. Bref, il y a des systèmes physiques où le modèle ne peut formellement pas prédire le phénomène, pourtant de nature déterministe : les systèmes formels, les équations mêmes, montrent l'imprédictibilité de la dynamique examinée. Et la simulation, dont on parlait, change de statut, si on sait ce qu'on est en train de faire à la machine : en connaissant ses limites, on en apprécie la puissance. Est-ce que ces limites sont corrélés aux aléas du monde ?

6. Du point de vue du hasard

Nous essayerons maintenant, de façon fort informelle, d'esquisser le rôle de la représentation du hasard dans différentes théorisations/modélisations scientifiques. Cette analyse peut donner un critère de discrimination et de choix entre les formes du sens que les modèles nous proposent. Commençons par un survol, très rapide, de certains passages historiques.

Pascal, dans sa lettre à Fermat du 29 juillet 1654, propose une méthode d'estimation d'un jeu du hasard qui est plus générale que celle de son correspondant. Cette méthode est considérée comme le

18 Une mesure objective du temps est une représentation spatialisée de la durée vécue subjectivement, en vue de la quantifier, sous forme, par exemple, d'un phénomène physique d'oscillation d'un quartz, du mouvement d'un ressort, etc.

début de la "modélisation" du hasard par les probabilités modernes (voir (Pascal, 1995), œuvres mathématiques, La règle de partis, pp.73-90). Pascal utilise ce genre de raisonnement dans son projet apologétique. Il considère que les choses peuvent être connues soit du point de vue de l'existence seule, ou selon, à la fois, leur existence et leur nature. C'est ainsi que « Nous connaissons l'existence de l'infini et ignorons sa nature parce qu'il a étendu comme nous, mais non pas des bornes comme nous » (Pascal, 1995), Pensées, le Nœud, p. 1213). Nous inférons que pour Pascal le hasard associé à un phénomène fait partie de cette dernière catégorie, dont on saisit l'existence, mais on ne saurait connaître la nature : la nature du hasard est liée à un défaut de savoir (*imprédictibilité épistémique*, dirions-nous en termes modernes) par rapport à un entendement omniscient. Cette approche inaugure l'analyse du hasard en termes de pures probabilités, au cœur des travaux de Laplace. Un hasard qui serait dû à des phénomènes (des causes) inconnaissables, sauf par un "démon infini".

Spinoza saisit une forme possible d'aléatoire, comme imprédictibilité déterministe, dans la rencontre de chaînes causales indépendantes : son exemple très connu est celui d'une tuile qui se décroche, glisse, tombe sur la tête du passant au parcours, lui-aussi, bien déterminé. Il s'agit d'une réflexion audacieuse, pour l'époque, sur la nature du hasard, mais qui nous donne un aléatoire en tant qu'imprédictibilité épistémique faible : même si nul ne connaît simultanément les deux chaînes causales prétendument déterministes, aucun principe n'interdit de faire de deux systèmes (mathématiques) un seul, où la rencontre homme/tuile devient nécessaire (voire déterministe et prédictible). Le défi pourrait se poser si les systèmes de détermination qui se croisent sont non-homogènes, appartiennent à des cadres conceptuels et mathématiques différents. On y reviendra.

Laplace ne s'engagera point sur la nature du hasard. Il se contentera de le distinguer nettement de la détermination équationnelle : le premier sera à analyser par son calcul des probabilités, une pierre milliaire de la théorie moderne, la deuxième « doit permettre de prédire complètement tout fait de la mécanique » (tout système déterminé par des équations, dans son langage). Mais les probabilités ne donnent pas une notion de hasard, ne discutent pas sa nature, elles permettent de le mesurer. Qui plus est, cette partition laplacienne du monde (détermination/hasard) ne marche pas.

Poincaré en fait clarifiera la situation à partir justement de la mécanique classique. Par une analyse très fine des équations des dynamiques planétaires, disons-nous, en fait de deux planètes dans les champs gravitationnels réciproques et du Soleil (Théorème des Trois Corps, 1892), il démontra que les interactions déstabilisent de façon imprédictible un système à l'équilibre. Le hasard n'est donc que de la détermination imprédictible, dans les dynamiques classiques : la présence de bifurcations et de trajectoires à l'intersection de variétés stables et instables (homoclines) démontre que l'évolution de processus modélisés par ces équations non-linéaires peuvent dépendre de fluctuations ou perturbations, initiales ou au contour, en dessous de la mesure, mais amplifiées dans le temps. Dans ces systèmes déterministes, sensibles aux conditions initiales et au contour, l'aléatoire reste *épistémique*, car basé sur l'ignorance de la perturbation/fluctuation non mesurable, qui, par exemple, pourra briser une symétrie dans un sens ou un autre et de façon bien mesurable, lors du passage par une bifurcation, le long d'une trajectoire homocline. Toutefois, des principes physiques (classiques et relativistes) empêchent la mesure exacte (l'existence de fluctuations thermiques et gravitationnelles, par exemple). Et la différence avec l'aléatoire de Spinoza est nette. Ces systèmes sont analysés dans un continu, que l'on peut reconstruire à la Cantor : l'intervalle de base de la topologie (voire de la métrique) "naturelle" sur les nombres réels représente bien l'intervalle de la mesure physique (en fait, il en dérive). De façon indirecte, par un passage à la limite asymptotique, on peut aujourd'hui corrélérer cet aléatoire, qui est donc une imprédictibilité déterministe, à l'indécidabilité logique, voir (Longo, 2010).

La conjecture du premier auteur de cet article est que l'inconnaissabilité d'un phénomène (perturbation/fluctuation) en dessous de l'intervalle de la mesure puisse être bien modélisée par la "généricité" de la valeur possible dans l'intervalle (elle est un invariant de la mesure), ce qui permettrait de considérer cette valeur comme un nombre réel aléatoire (à la Chaitin-MartinLöf).

Nous avons déjà discuté aussi de l'approche quantique. Dans ce cas, la théorie intègre l'indétermination de la mesure et exprime la dynamique elle-même d'un quanton comme détermination d'une lois de probabilité (l'équation de Schrödinger). Il est fort raisonnable d'appeler cet aléatoire *intrinsèque*, voire non-épistémique, voire ontologique, chacun selon ses préférences métaphysiques.

Malheureusement, la majorité des biologistes en sont encore à Laplace, un autre grand pour son époque, et ils opposent encore détermination et hasard, comme Monod, 80 ans après Poincaré (Le hasard et la nécessité, 1971) – voire ils reviennent à Spinoza, (Luisi, 2006). Une fois oublié Poincaré et départagé le hasard de la détermination, toute détermination dévient prédictible ; par conséquent, puisque déterministe *et* prédictible est équivalent à programmable, certains, dont Monod et maints autres, en ont déduit la théorie du "programme génétique". Ecrit dans les quatre lettres de l'ADN, il serait même « le programme de l'ordinateur comportemental de tout individu » (Mayr, 1961) et, donc, le modèle ultime de l'ontogenèse. Du "bruit", certes important et à l'origine, par exemple, du bricolage évolutif (une belle notion de Jacob), dérange parfois l'embryogenèse, réglée sinon par un déterminisme programmable et constituée par un processus théoriquement bien distinct de l'évolution darwinienne – une catastrophe de la pensée scientifique. Fort heureusement, même au niveau moléculaire, l'aléatoire à la Poincaré et celui de la physique quantique offrent d'autres pistes de connaissance, (Buiatti, Longo 2013).

La définition et le traitement mathématique de l'aléatoire donnent donc un critère possible pour discriminer entre théories, voire entre modèles du monde : laplaciennes, voire antérieures à 1892 (date du Théorème des trois Corps de Poincaré), puis classique vs. quantique. Quid des modèles computationnels ? La machine séquentielle à états discrets ne contemple pas l'aléatoire : elle se base sur la prédiction (la programmation!) de ses calculs, « à partir des états initiaux et du signal de input... cela nous rappelle Laplace », observe déjà son inventeur Turing (1950, p. 440). L'accès aux données est exact, il est un nombre rationnel, le calcul est un système de *ré-écriture* déterministe et prédictible qui garantie la fiabilité du système : tout programme est supposé faire ce pour quoi il est programmé et être itérable à loisir, à l'identique. Bref, il est sensé être "correct", disent les informaticiens. Tout est fait pour que l'éventuelle fluctuation classique/quantique dans le matériel soit invisible dans l'interface homme/machine. Et ... ça marche.

Toutefois, les réseaux d'ordinateurs présentent des problèmes : l'espace-temps, que l'on comprend mieux par les mathématiques du continu, peut induire des problèmes typiques des dynamiques classiques non-linéaires dans les interactions entre machines (voire des effets relativistes, dans le temps). L'aléa du fonctionnement, même quantique, des nœuds du réseau est aussi à considérer. Mais nos collègues qui y travaillent sont si bons, que par des méthodes de "sémaphores", "interleaving", etc. arrivent à nous faire travailler de façon fiable, correcte, itérable même en réseau (Aceto et al., 2003). La machine à état discrets, née pour l'itération à l'identique d'un processus programmé, fonctionne de façon remarquable et, par ces propriétés, elle est en train de changer nos formes de connaissance.

On peut introduire de l'aléatoire dans l'ordinateur, même séquentiel, de façon artificielle mais intéressante (les générateurs pseudo-aléatoires sont moins que spinoziens, ils sont une – mauvaise - imitation du hasard : ils sont parfaitement itérables). Par contre, on peut changer à la main la 16ème

décimale dans les conditions initiales d'une dynamique simulée, pour voir ce que cela donne, voire la changer selon le nombre pair ou impair des utilisateurs de Skype (voilà un aléatoire profond). On peut aussi acheter à Genève une clé USB qui produit un 0 ou 1 selon le spin-up/spin-down d'un électron, autre forme importante de hasard, disions-nous. Dans tous ces cas, il est légitime de dire que l'on est dans l'imitation, à la Turing, non pas dans la modélisation du hasard dans un processus physique - une distinction fine que Turing fait entre son jeu de l'imitation d'une femme (1950), et la modélisation de la morphogenèse (1952), voir (Longo, 2009). Le modèle, pour Turing peut-être faux, mais il propose une intelligibilité de ce qui est modélisé, il s'engage par exemple dans l'explicitation d'une structure causale (son modèle des processus chimiques d'action/réaction/diffusion pour l'engendrement des formes (Turing, 1952)). L'imitation "fait semblant de ...", comme dans son jeu de la machine qui imite une femme de 1950 : rien n'y est dit sur la nature des femmes, elle ne les modélise pas. Bref, dans notre cas, on *imite* le hasard par un phénomène étranger à la théorie propre à la machine à états discrets qui, en soi, n'engendre pas de l'imprédictibilité, voire on l'imite par des outils externes et en principe indépendants des processus modélisés (la croissance d'une ville, par exemple). Cela est fort utile, mais il est bien de savoir ce que l'on fait.

Une piste fort intéressante pour comprendre ce nouvel univers computationnel qui est en train de changer le monde, est proposée par F. Varenne. Dans (Varenne, 2012) la notion de "simulat", néologisme pour cet agrégat résultant des computations non homogènes, des calculs avec temporalités et résolutions différentes, points de vue différents, fait entrevoir le nouveau rôle de ces machines à états discrets. En fait, les déterminations mathématiques, équationnelles en particulier, tout comme leurs imitations computationnelles, forcent une homogénéité qui est étrangère, par exemple, aux différents niveaux d'organisation propre à un organisme biologique. Or l'épaisseur (variété des niveaux et des techniques) des simulations intégratives permet de saisir les interactions inter-niveaux, inter-échelles si importante dans les dynamiques biologiques. Seulement la puissance des machines modernes permet ces croisements de techniques, qui peut donner, entre autre, une nouvelle forme d'aléatoire à la Spinoza, en sortant des limites de l'homogénéité forcée par les systèmes d'équations. Peut-être elles pourront aussi nous aider à saisir, voire à nous montrer sur les écrans, certains aspects de la bio-résonance proposée dans (Buiatti, Longo, 2013).

La déraison est du côté de ceux qui projettent sur le monde leurs modèles, de tout genre, qui les identifient avec le monde. La mode a été trop longtemps aux modèles computationnels comme structures du monde. Le cerveau Machine de Turing, l'ADN programme de l'ontogenèse, l'Univers grand ordinateur digital dont les lois de physique seraient le logiciel ... Certains de ces modes sont en train de passer, mais les dégâts persistent. Ailleurs, avec des biologistes, nous avons essayé de voir ce que cela a donné en biologie moléculaire, (Longo et al, 2012).

Donnons alors et brièvement un exemple important, à creuser ultérieurement. Il faudrait essayer de comprendre le détournement de l'attention scientifique, dû aux modèles computationnels, des conséquences des 80.000 nouvelles molécules produites au cours du XX siècle et introduites dans l'écosystème. Les modèles informationnels des activités bio-moléculaires excluaient un impact de ces nouvelles molécules sur le vivant. La théorie du "programme génétique" déterministe et prédictible avait étendu une idée de la fin du XIX siècle au sujet des enzymes, le modèle de la "clé-serrure" (la (stereo-)spécificité) pour les interactions macromoléculaires. Ce modèle assurait alors que les nouvelles molécules artificielles ne pouvaient pas interférer avec les cascades moléculaires actives dans un organisme, car elles ne pouvaient pas être la clé d'aucune serrure. Aujourd'hui, on admet que les affinités macromoléculaires sont largement stochastiques, à partir de l'expression génétique (Arjun,

2008) et que leurs probabilités dépendent du contexte (épigénétique, cellulaire, tissulaire, organismique ...). Aucune "clé-serrure" ne règle de façon déterministe et prédictible, voire programmable, ces interactions. Encore moins elle les règle de façon essentiellement unidirectionnelle, et causalement indépendante du contexte, de l'ADN à l'ARN aux protéines, voire jusqu'au phénotype, comme récitait le Dogme Central de la biologie moléculaire. Et, alors, les combinaisons finies de ces 80.000 molécules produisent, *en probabilité*, des perturbations de nos systèmes de production et régulation moléculaires. Un grand enjeu, en particulier, est constitué par les découvertes, de plus en plus fréquentes, parmi ces molécules artificielles, de perturbateurs endocriniens – origine possible de nombreuses pathologies, dont certains cancers, (Diamanti-Kandarakis, 2009), (Soto, Sonnenschein, 2010).

On comprend donc, et depuis quelque temps, toute l'importance pour l'intelligibilité du vivant, voire pour notre santé, de s'éloigner d'une vision computationnelle/informationnelle du vivant, une approche et des modèles de la biologie moléculaire trop longtemps dominants, où l'on a pris des imitations, voire des métaphores, pour des modèles. Au point que ces derniers ont "écrasé" le réel par leur cadre causal implicite, voire par leur biais métaphysique.

L'analyse et la modélisation du hasard, pensons-nous, peut fournir un des outils et un critère pour mieux saisir les (différences entre) les structures de la détermination existantes ou à proposer pour mieux rendre intelligible les phénomènes naturels. Une question donc à poser à tout modélisateur serait : comment est-il traité, dans ton modèle, le hasard ?

Références (Articles de Longo: téléchargeables de <http://www.di.ens.fr/users/longo/>)

L. Aceto, G. Longo, B. Victor (Editors), **The Difference between Concurrent and Sequential Computations**, *Special issue*, [Mathematical Structures in Computer Science](#), [Cambridge U. P.](#), vol.13, n.4 - 5, 2003.

Aristote. **Ethique à Nicomaque**, direction Jules Tricot, Vrin, pp. 540, 1994.

R. Arjun, R. van Oudenaarden, Stochastic gene expression and its consequences. **Cell**, 135(2): 216–226, 2008.

A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, Experimental Tests of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers. **Physical Review Letters** 49: 1804-1807, 1982.

F. Bailly, G. Longo, **Mathematics and the natural sciences; The Physical Singularity of Life**. Imperial College Press, 2011 (en français, Hermann, 2006).

H. Bergson. **Essai sur les données immédiates de la conscience (1889)**, in Œuvres, pp. 1-157, PUF, Mai, 1991.

M. Bezem, J. W. Klop, R.. Roelde Vrijer **Term Rewriting Systems**. Cambridge Univ. Press, 2003.

M. Buiatti, G. Longo, Randomness and Multi-level Interactions in Biology, *to appear*, **Theory of Biosciences**, 2013.

E. Diamanti-Kandarakis, Bourguignon JP, Giudice LC, Hauser R, Prins GS, Soto AM, Zoeller RT, Gore AC
Endocrine-disrupting chemicals: an Endocrine Society scientific statement. **Endocr Rev** 30:293-342, 2009.

P. Duhem. **La théorie Physique ! : son objet, sa structure (1906)**, ed. P. Brouzeng, Paris, Vrin, 2007.

- A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered complete ? **Phys. Rev.** **41**, P.777, 1935.
- B.C. van Fraassen. **Laws and symmetry**. Oxford University Press, USA, 1989.
- G. Galilée. **II Saggiatore (1623)**, trad. fr. C. Chauviré, L'essayeur, Les Belles Lettres, Paris, 1979.
- N. A. Gershenfeld. **The Nature of Mathematical Modeling**. Cambridge University Press, 1999.
- N. Goodman. **Manières de faire des mondes**, 1978, tr. fr. Marie-Dominique Popelard, folio essais, 2006.
- Cl. Herrenschmidt et al. (eds), **L'Orient et nous**, Albin-Michel, 1996.
- Cl. Herrenschmidt. **Les trois écritures**. Gallimard, 2007.
- E. Kant. **Critique de la raison pure** (1781, 2^{ème} ed. 1787), tr.fr A. Tremesaygues et B. Pacaud, Puf, 2008.
- W. Köhler, **La psychologie de la forme** (1929), Folio, Gallimard, 2000.
- T. S. Kuhn. **La révolution copernicienne**, tr. fr., Paris, Fayard, 1973.
- A. Lavoisier. **Traité élémentaire de chimie** (1789), dans Les Œuvres de Lavoisier
- J. Lassègue, G. Longo. **What is Turing's Comparison between Mechanism and Writing Worth? Invited lecture, "The Turing Centenary Conference (CiE 2012)"**, Cambridge, June 18 - 23, 2012; in **Computability in Europe, 2012**, LNCS 7318 (S.B. Cooper, A. Dawar, and B. Löwe, Eds.), pp. 451–462, Springer, 2012
- G. Longo. Critique of Computational Reason in the Natural Sciences, *In "Fundamental Concepts in Computer Science"* (E. Gelenbe and J.-P. Kahane, eds.), Imperial College Press, pp. 43-70, 2009
- G. Longo. Interfaces de l'incomplétude, *version française téléchargeable de <http://www.di.ens.fr/users/longo>* (original en italien, **La Matematica**, vol. 4, Einaudi, 2010).
- G. Longo. Mathematical Infinity "in prospettiva" and the Spaces of Possibilities. **Visible**, Semiotics J., 9, 2011.
- G. Longo and M. Montévil. Protention-retention in biological systems. **Theory in Biosci.**, 130:107–117, 2011.
- G. Longo, P. A. Miquel, C. Sonnenschein, A. Soto. **Is Information a proper observable for biological organization? Progress in Biophysics and Molecular Biology**, Vol. 109, Issue 3, pp. 108-114, August 2012.
- P. L. Luisi, **The emergence of life: from chemical origin to synthetic biology**, Cambridge Univ. Press, 2006.
- E. Mayr. Cause and Effect in Biology, **ature**, 10, 1961.
- R. Misslin. Une vie de cellule. Forme et espace. *Dans "Géométrie et Cognition"*, G. Longo (Editeur), numéro spécial de la [Revue de Synthèse, Editions de la rue d'Ulm](#), tome 124, 2003-4.
- B. Pascal. **Œuvres complètes**, Gallimard, fév. 1995.
- S. Yu. Pilyugin. **Shadowing in dynamical systems**, Springer, 1999.
- A. Soto, C. Sonnenschein. Environmental causes of cancer: endocrine disruptors as carcinogens. **Nat Rev Endocrinol.** 6:363-370, 2010.
- A. M. Turing, On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem", **Proc. London Math. Soc.** 42, 230-265, 1936.
- A. M. Turing, Computing Machines and Intelligence. **Mind**, LIX, 1950.
- F. Varenne. **Formaliser le vivant : Lois, Théorie, Modèles**, Hermann, 2010.
- F. Varenne. La construction phénoménologique par simulation : vers une épaisseur du simulat, *dans Formes, systèmes et milieux techniques*, (Parrochia et al.), Editions J. André, 2012.

N. Zakhama. Un modèle est-il objectif ? le cas des sciences de la nature. Mémoire, Master 2, Univ. Paris 10, 2012.