



**HAL**  
open science

## Définition du topos d'un espace connectif

Stéphane Dugowson

► **To cite this version:**

| Stéphane Dugowson. Définition du topos d'un espace connectif. 2016. hal-01381304v1

**HAL Id: hal-01381304**

**<https://hal.science/hal-01381304v1>**

Preprint submitted on 14 Oct 2016 (v1), last revised 21 Dec 2016 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Définition du topos d'un espace connectif

Stéphane DUGOWSON \*

14 octobre 2016

**Résumé.** Cette courte note définit le topos de Grothendieck associé à un espace connectif.

**Mots clés.** Topos de Grothendieck. Espaces connectifs.

**Abstract.** THE TOPOS OF A CONNECTIVITY SPACE — In this short note, a topos — called *the topos of the connectivity space* — is associated with every such space.

**Key words.** Grothendieck Topos. Connectivity spaces.

**MSC 2010 :** 18B25, 54A05.

L'objet de cette note est de définir le *topos associé à un espace connectif*. Pour les notations et les définitions, on se reportera à [1]. Soit  $X = (X, \mathcal{K})$  un espace connectif, que nous ne supposons pas nécessairement intègre.

L'ensemble ordonné  $(\mathcal{K}, \subset)$  s'identifie à une catégorie que nous noterons encore  $\mathcal{K}$ . Bien entendu, on peut considérer le topos des préfaisceaux sur cet ensemble ordonné, mais ce n'est pas celui-là (en général) que nous appellerons topos associé à  $\mathcal{K}$ . Pour tout connexe  $K \in \mathcal{K}$ , on note  $C(K)$  l'ensemble des cribles sur  $K$ . Tout crible sur  $K$  sera identifié à l'ensemble de parties connexes de  $K$  que sont les domaines des flèches du crible en question.

*Remarque 1.* Pour tout connexe  $A \in \mathcal{K}$ , la structure connective induite sur  $A$ , que nous noterons  $\mathcal{K}_{|A}$  et qui est donnée par

$$\mathcal{K}_{|A} = \mathcal{K} \cap \mathcal{P}A$$

constitue le crible maximal sur  $A$  :

$$c_{\max}(A) = \mathcal{K}_{|A}.$$

*Remarque 2.* Il y a deux cribles distincts sur la partie vide — toujours connexe — de  $X$  : le crible vide  $\emptyset$  sur  $K$ , et le crible  $\{\emptyset\}$  dont le seul élément est l'injection canonique de la partie vide de  $X$  dans  $K$ .

---

\*s.dugowson@gmail.com

Pour tout  $A \in \mathcal{K}$ , on pose

$$J(A) = \{c \in C(A), [c]_0 = \mathcal{K}_{|A}\},$$

où  $[c]_0$  désigne la structure connective<sup>1</sup> engendrée par l'ensemble  $c \subset \mathcal{K}$ . Anticipant l'annonce du théorème 2 ci-dessous, pour tout connexe  $A \in \mathcal{K}$ , les éléments de  $J(A)$  seront appelés les *cribles couvrants*  $A$  (ou les cribles qui recouvrent  $A$ ).

*Remarque 3.* Les points ne couvrent qu'eux-mêmes : les connexes non réduits à un point ne sont jamais engendrés par les singletons seuls.

La proposition suivante, dans laquelle  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$  désigne l'ensemble des connexes irréductibles, découle immédiatement des définitions.

**Proposition 1.** *Une partie connexe  $K \in \mathcal{K}$  de  $X$  est irréductible si et seulement si  $J(K)$  est un singleton, seul le crible maximal étant alors couvrant :*

$$(K \in \mathcal{I}_{\mathcal{K}}) \Leftrightarrow J(K) = \{c_{\max}(K)\}.$$

*Remarque 4.*  $c(\emptyset)$  a deux éléments — le crible maximal et le crible vide — et la partie vide  $\emptyset \subset X$  n'est donc pas irréductible.

**Théorème 2.**  *$J$  constitue une topologie de Grothendieck sur la catégorie  $\mathcal{K}$ .*

*Démonstration.* En effet,

- Pour tout  $A \in \mathcal{K}$ , le crible maximal  $c_{\max}(A)$  recouvre trivialement  $A$ ,
- La restriction à un connexe  $B \subset A$  d'un crible couvrant  $A$  est couvrante pour  $B$ , puisque  $\mathcal{K}_B$  est engendré par des éléments du crible, qui sont eux-mêmes nécessairement inclus dans  $B$ ,
- Toute couverture de chacun des connexes d'une famille couvrant  $K$  détermine une famille couvrante de  $K$  puisque la structure connective engendrée par celle-ci, contenant nécessairement ceux qui appartiennent à celle-là, contient également la structure que ces derniers engendrent.

□

**Définition 1.** Le *site* de  $\mathcal{K}$  est le site  $(\mathcal{K}, J)$ . Le topos  $\mathcal{T}_{(X, \mathcal{K})} = \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$  associé à un espace connectif  $(X, \mathcal{K})$  est le topos des faisceaux d'ensembles sur le site  $(\mathcal{K}, J_{\mathcal{K}})$ .

*Exemple 1.* On prend sur  $X = \{a, b, c, d, e\}$  la structure connective

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}.$$

Tous les  $J(K)$  sont réduits au crible maximal sur  $K$ , à l'exception du vide  $\emptyset$  et de  $\{a, b, c, d\}$  qui est déjà couvert par le crible  $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ .

*Exemple 2.* Soit  $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}$  la structure connective usuelle sur  $\mathbf{R}$ , c'est-à-dire l'ensemble des intervalles. Pour tout intervalle  $I$  et tout  $\epsilon > 0$ , l'ensemble des sous-intervalles de  $I$  de longueur  $< \epsilon$  est un crible couvrant.

**Conclusion** On pourra par la suite plonger la catégorie des structures connectives dans celle des topos.

---

1. Non nécessairement intègre.

## Références

- [1] Stéphane Dugowson. On connectivity spaces. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, LI(4) :282–315, 2010. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00446998/fr>.