



**HAL**  
open science

## Probabilités - Préparation à l'agrégation interne

Djalil Chafaï, Pierre-André Zitt

► **To cite this version:**

Djalil Chafaï, Pierre-André Zitt. Probabilités - Préparation à l'agrégation interne. Amazon Kindle Direct Publishing (service d'auto-publication), pp.163, 2020, 979-8639308604. hal-01374158v3

**HAL Id: hal-01374158**

**<https://hal.science/hal-01374158v3>**

Submitted on 19 Apr 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

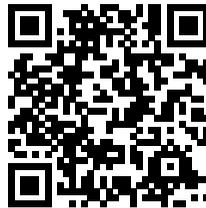


# Probabilités

## Préparation à l'agrégation interne

---

Djalil Chafaï et Pierre-André Zitt



Version PDF disponible gratuitement  
<http://djalil.chafai.net/>

Copyright © 2016, 2017, 2020



---

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>1 Modélisation d'une expérience</b>	<b>9</b>
1.1 Univers . . . . .	9
1.2 Événements, tribus . . . . .	10
<b>2 Mesures de probabilité</b>	<b>13</b>
2.1 Définitions et premières propriétés . . . . .	13
2.2 Équiprobabilité discrète et combinatoire . . . . .	14
2.3 Quelques exemples remarquables . . . . .	19
2.4 Expériences répétées . . . . .	20
2.5 Conditionnement . . . . .	23
2.6 Indépendance . . . . .	25
2.7 Équiprobabilité continue : mesure de Lebesgue . . . . .	29
<b>3 Variables aléatoires et intégration</b>	<b>33</b>
3.1 Variables aléatoires réelles . . . . .	33
3.2 Fonction de répartition et loi . . . . .	35
3.3 Espérance — définition et propriétés générales . . . . .	43
3.4 Espérance des variables aléatoires discrètes . . . . .	46
3.5 Espérance des variables aléatoires à densité . . . . .	48
3.6 Variance . . . . .	51
3.7 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev . . . . .	52
3.8 Fonction génératrice . . . . .	54
<b>4 Vecteurs aléatoires</b>	<b>61</b>
4.1 Définition, loi d'un vecteur aléatoire . . . . .	61
4.2 Indépendance de variables aléatoires . . . . .	63
4.3 Moyenne et matrice de covariance . . . . .	67
4.4 Loi normale multivariée, vecteurs gaussiens . . . . .	72
4.5 Fonctions génératrices et variables indépendantes . . . . .	73
4.6 Retour sur l'approximation binomiale/Poisson . . . . .	74
<b>5 Théorèmes limites</b>	<b>77</b>

5.1	Loi des grands nombres . . . . .	77
5.2	Théorème limite central . . . . .	83
5.3	Approximation de la loi binomiale par la loi normale . . . . .	89
<b>Appendices</b>		<b>93</b>
<b>A Biais par la taille</b>		<b>95</b>
A.1	Un cas simple . . . . .	95
A.2	Estimation dans une file d'attente . . . . .	95
<b>B Jeu de pile ou face</b>		<b>99</b>
B.1	Récapitulatif . . . . .	99
B.2	Temps d'attente des succès successifs . . . . .	99
B.3	Fluctuations non asymptotiques . . . . .	100
B.4	Lien avec la loi uniforme . . . . .	101
B.5	Algorithme de débiaisage de von Neumann . . . . .	101
<b>C Méthode de Monte-Carlo</b>		<b>103</b>
C.1	Simulation des fléchettes . . . . .	103
C.2	Comment approcher numériquement une intégrale? . . . . .	105
<b>D Collectionneur d'images</b>		<b>107</b>
D.1	Définition et formules exactes . . . . .	107
D.2	Une décomposition et ses conséquences . . . . .	108
D.3	Étude fine et fluctuations . . . . .	110
<b>E Marche aléatoire simple et ruine du joueur</b>		<b>113</b>
E.1	Ruine du joueur . . . . .	113
E.2	Premier retour en zéro de la marche aléatoire . . . . .	116
<b>F Lois exponentielles et durées de vie</b>		<b>121</b>
F.1	Définition, premières propriétés . . . . .	121
F.2	Modélisation des durées de vie . . . . .	125
<b>G Extrêmes</b>		<b>129</b>
G.1	Modélisation des phénomènes extrêmes . . . . .	129
G.2	Quatre exemples simples . . . . .	130
G.3	Un résultat général . . . . .	131
<b>H Familles sommables et intégrales de Riemann</b>		<b>135</b>
H.1	Familles sommables . . . . .	135
H.2	Intégration de Riemann . . . . .	136
H.3	Les deux théorèmes fondamentaux admis . . . . .	137
<b>I Convergence de suites de variables aléatoires</b>		<b>139</b>
I.1	Convergences de variables et de lois . . . . .	139
I.2	Relations entre les convergences. . . . .	142
I.3	Passer à la limite dans une espérance . . . . .	143
<b>J Fonctions caractéristiques et vecteurs gaussiens</b>		<b>147</b>

J.1	Fonction caractéristique . . . . .	147
J.2	Application aux vecteurs gaussiens . . . . .	149
J.3	Applications en statistiques . . . . .	151
<b>K</b>	<b>Combinatoire, loi de Poisson et partitions</b>	<b>155</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>157</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>158</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>158</b>
	<b>Index</b>	<b>159</b>



---

# Avant propos

Cette version électronique 2020 est une nouvelle version corrigée de la version 2016. Ces notes de cours couvrent les notions de probabilités au programme de l'agrégation interne de mathématiques. Elles ne constituent pas des modèles de leçons d'oral.

## Repères

L'ouvrage est divisé en deux parties :

- un cours, partant des notions de base sur les probabilités discrètes pour arriver aux deux théorèmes limites fondamentaux que sont la *loi des grands nombres* et le *théorème limite central*, illustré en particulier par quelques exemples récurrents.
- des compléments, qui illustrent les notions de cours ou les prolongent.

Les **nouveaux termes** sont composés en gras au moment de leur définition ; un index situé à la fin de l'ouvrage recense ces définitions. Certains passages particuliers du texte sont repérés graphiquement de différentes manières.

 Il est possible d'illustrer de très nombreuses notions du programme à partir d'exemples fondamentaux. Un des choix les plus courants est le *jeu de pile ou face*. Toutes les illustrations des notions du cours à partir de ce « fil rouge » seront indiqués par un liseré rouge (sur la version couleur).

 Un autre exemple reviendra souvent : celui du *sondage simple*, c'est-à-dire de l'échantillonnage sans remise dans une population. Les passages correspondants sont repérés par un liseré bleu (sur la version couleur).

 Enfin, les notions fondamentales dans le cas continu seront illustrées par un modèle de tir uniforme sur une cible ronde.



La théorie des probabilités regorge de pièges pour l'intuition. Les erreurs courantes sont indiquées par un panneau « virage dangereux » pour éviter les sorties de route !



Le programme de l'agrégation externe exclut (implicitement) la notion d'intégration de Lebesgue, et les preuves de plusieurs résultats sont hors programme. Nous en avons pourtant inclus quelques-unes pour les curieux ; elles sont indiquées par le panneau « haute tension ».

## Remerciements

De nombreux agrégatifs ont souffert pour la préparation de ce livre, en essayant de comprendre des passages cryptiques, voire en découvrant des erreurs pendant une présentation de leçon — qu'ils en soient remerciés ! Merci aussi aux autres repéreurs de coquilles : J.-B. Bardet, M. Berret, E. Etheve, F. Malrieu, S. Kacer, et R. Rhodes.

Cette version électronique 2020 est une nouvelle version corrigée de la version 2016.

Djalil Chafai et Pierre-André Zitt  
Paris-Dauphine et Marne-la-Vallée, printemps 2020



# Modélisation d'une expérience

## 1.1 Univers

On modélise une expérience aléatoire en introduisant l'ensemble  $\Omega$  qui code tous les résultats possibles de l'expérience, appelé **univers**. Les résultats possibles sont parfois appelés **épreuves** ou **événements élémentaires**. Voici quelques exemples concrets :

Expérience	Univers
un jet de dé à 6 faces	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
un jet de deux dés à 6 faces de $\neq$ couleurs	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
nombre d'étoiles observables la nuit	$\mathbb{N}$
cote de popularité de Nicolas	$[0, 100]$
durée de vie d'une ampoule	$\mathbb{R}_+$
temps de désintégration d'un noyau radioactif	$\mathbb{R}_+$
poids d'un être humain	$[0, 500]$
point d'impact au jeu de fléchettes	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
température Celcius de la soupe du soir	$[-273, +\infty]$
position du moustique	$\mathbb{R}^3$
état d'un jeu de $n$ cartes après battage	$\mathcal{S}_n$ (groupe symétrique)
cours d'une action en bourse sur la période $[0, T]$	$\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}_+)$

Le choix de  $\Omega$  est assez naturel pour les phénomènes discrets, faciles à coder, mais semble plus discutable pour les situations continues. Il règne là un arbitraire typique de l'étape de modélisation, qu'on ne peut pas évacuer complètement. On dit souvent à ce propos que *tous les modèles sont faux, mais que certains sont plus utiles que d'autres*. Cet arbitraire de la modélisation n'est pas spécifique aux probabilités. Il se trouve simplement que les modélisations liées à l'analyse (physique mathématique), à l'algèbre (cryptographie par exemple), ou à la géométrie (cartographie par exemple) ne figurent pas au programme. La mathématisation du réel est une question épineuse — les nombres réels sont-ils bien réels ? L'infini existe-t-il dans la nature ?

La « mise bout à bout » de deux expériences se traduit, en termes d'univers, par un produit cartésien, comme par exemple pour le jet de deux dés, et plus généralement quand on répète une même expérience plusieurs fois.

Mathématiques	Français
Ensembles	Événements
$\Omega$	Ensemble des cas possibles ; événement certain
$A$ sous-ensemble de $\Omega$	Événement
$\emptyset$	Événement impossible
$A \cap B$	$A$ et $B$ ont lieu
$A \cup B$	$A$ ou $B$ a lieu (au moins l'un des deux)
$A^c$ (aussi noté $\bar{A}$ ou $\Omega \setminus A$ )	$A$ n'a pas lieu
$A \cap B = \emptyset$ ( $A$ et $B$ disjoints)	$A$ et $B$ sont incompatibles
$A \subset B$	$A$ implique $B$

TABLE 1.1 – Vocabulaire ensembliste et probabilités.

**Pile ou face : univers.** On joue à pile ou face de façon répétée. On peut choisir comme univers les ensembles suivants :

- pour un lancer,  $\Omega = \{0, 1\}$  ;
- pour deux lancers consécutifs,  $\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{0, 1\}^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$  ;
- pour  $n$  lancers :  $\Omega = \{0, 1\}^n$  ;
- pour une infinité de lancers de pièce de monnaie consécutifs :  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .

Le dernier cas peut sembler peu naturel mais permet de traiter de façon unifiée des expériences dont la durée n'est pas fixée à l'avance (attente du premier pile, etc).

L'ensemble  $\Omega$  peut être fini, infini dénombrable, ou même infini non dénombrable.

## 1.2 Événements, tribus

Une fois  $\Omega$  choisi, on s'intéresse à l'éventuelle réalisation d'événements<sup>1</sup> : le dé est-il tombé sur 6 ? La soupe est-elle gelée ? La fléchette est-elle tombée sur la zone de score maximal ? Le moustique est-il dans ma tente ? Notons que pour l'instant on ne modélise que des questions *qualitatives*, dont la réponse est oui ou non.

Ces événements s'identifient naturellement à des *sous-ensembles* de l'univers  $\Omega$  : pour les deux premiers cas respectivement,  $\{6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $] -273, 0[ \subset ] -273, \infty[$ . L'événement *impossible* s'identifie à l'ensemble  $\emptyset$  tandis que l'événement *certain* s'identifie à l'ensemble  $\Omega$  tout entier. Deux événements sont **incompatibles** lorsqu'ils sont disjoints en tant qu'ensembles. Les opérations ensemblistes (union, intersection, complémentaire) ont une traduction sur les phrases décrivant les événements : ces liens sont rappelés dans le tableau 1.1. Rappelons à cette occasion que si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille d'événements et  $B$  un événement alors on a :

$$\text{Formules de De Morgan} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \\ \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c \end{array} \right. \quad \text{Distributivité} \quad \left\{ \begin{array}{l} B \cap \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) \\ B \cup \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i) \end{array} \right.$$

1. On peut écrire « événement » ou « évènement ».

Pour diverses raisons<sup>2</sup> on se restreint souvent à considérer seulement *certaines* des parties de  $\Omega$ . La collection de ces parties est donc un ensemble  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ . Il est naturel d'imposer à  $\mathcal{F}$  quelques propriétés de stabilité, qui en font une *tribu*. On dit parfois également  *$\sigma$ -algèbre*, en anglais  *$\sigma$ -field*, d'où l'usage de la lettre  $\mathcal{F}$ .

**Définition 1.1** (Tribu). *On dit qu'une collection  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  constitue une **tribu** lorsque*

- i )  $\Omega \in \mathcal{F}$  ;
- ii ) **stabilité par complémentaire** : pour tout  $A \in \mathcal{F}$  on a  $A^c \in \mathcal{F}$  ;
- iii ) **stabilité par union dénombrable** : pour toute suite  $(A_n)$  d'éléments de  $\mathcal{F}$  on a  $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$ .

On déduit de ces axiomes les propriétés suivantes.

**Théorème 1.2** (Propriétés des tribus). *Si  $\mathcal{F}$  est une tribu sur  $\Omega$  et  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{F}$  alors...*

- i ) **vide** :  $\emptyset \in \Omega$  ;
- ii ) **stabilité par intersection dénombrable** : l'intersection  $\cap_n A_n$  est dans  $\mathcal{F}$  ;
- iii ) **stabilité par limites inférieure et supérieure** : les deux sous-ensembles suivants appartiennent également à  $\mathcal{F}$  :

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_n \bigcap_{m \geq n} A_m = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } \omega \in A_n \text{ à partir d'un certain rang}\}$$

et

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_n \bigcup_{m \geq n} A_m = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } \omega \in A_n \text{ pour une infinité de valeurs de } n\}.$$

De plus

$$(\underline{\lim} A_n)^c = \overline{\lim} A_n^c \quad \text{et} \quad (\overline{\lim} A_n)^c = \underline{\lim} A_n^c.$$

- iv ) **Intersection de tribus** : Si  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  est une famille quelconque de tribus sur  $\Omega$  alors  $\cap_{i \in I} \mathcal{F}_i$  est une tribu sur  $\Omega$ .

**Exemple 1.3** (Exemples de tribus).

- **Tribu triviale.** c'est la famille  $\{\emptyset, \Omega\}$ .
- **Tribu grossière.** l'ensemble  $\mathcal{P}(\Omega)$  de (toutes) les parties de  $\Omega$  vérifie naturellement toutes les propriétés de stabilité. On parle de **tribu grossière**. Quand on étudie des phénomènes finis ou dénombrables (tirages de cartes, lancers de dés,...) on utilise systématiquement cette tribu.
- **Tribu engendrée.** si  $A \subset \Omega$  alors  $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$  est une tribu : c'est la plus petite tribu qui contient  $A$ . Plus généralement, si  $\mathcal{A}$  est une collection de parties, on peut définir (grâce à la propriété d'intersection vue au-dessus) la **tribu engendrée** par  $\mathcal{A}$  comme intersection de toutes les tribus contenant  $\mathcal{A}$  ; c'est la plus petite tribu qui contient tous les éléments de  $\mathcal{A}$ .
- **Tribu produit.** si  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$  et si  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont des tribus sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , on munit généralement  $\Omega$  de la **tribu produit**, notée  $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ , engendrée par les produits  $A_1 \times A_2$  où  $A_1 \in \mathcal{F}_1$  et  $A_2 \in \mathcal{F}_2$ .

---

2. La première raison est technique (et hors programme) : pour des univers  $\Omega$  non-dénombrables, on ne peut pas attribuer de manière cohérente une probabilité à tous les sous-ensembles de  $\Omega$ . La deuxième raison, plus satisfaisante et également hors-programme, est que les tribus permettent de représenter une information partielle sur l'expérience aléatoire.

**Pile ou face : tribus.** Pour un lancer à pile ou face,  $\Omega = \{0, 1\}$ , on choisit la tribu grossière  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}$ .

Pour  $n$  lancers,  $\Omega = \{0, 1\}^n = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ , on prend aussi la tribu grossière  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . C'est également la tribu produit des tribus grossières sur  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ .



Le programme se limite aux exemples de tribus pour  $\Omega$  au plus dénombrable, pour lesquels  $\mathcal{F}$  est presque toujours la tribu grossière. Si  $\Omega$  est indénombrable, la tribu grossière est en général trop grosse, comme on le verra dans le chapitre suivant. Les deux exemples suivants couvrent les cas qui apparaissent « en creux » dans le programme.

- **Tribu borélienne.** Pour le cas  $\Omega = \mathbb{R}^d$ , on choisit en général la **tribu borélienne**  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  qui est la tribu engendrée par les pavés de  $\mathbb{R}^d$  (i.e. par les intervalles lorsque  $d = 1$ ). On admet que la tribu borélienne sur  $\mathbb{R}^d$  est la tribu produit des tribus boréliennes.
- **Tribu cylindrique.** pour pile ou face avec une infinité de lancers,  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  n'est pas dénombrable (par l'argument diagonal de Cantor). On choisit usuellement la **tribu cylindrique** engendrée par les **cylindres**

$$A_0 \times A_1 \times A_2 \times \dots$$

où  $A_0, A_1, A_2, \dots \subset \{0, 1\}$  et  $A_n = \{0, 1\}$  à partir d'un certain rang sur  $n$ . Plus généralement, si  $\mathcal{F}'$  est une tribu sur un ensemble  $\Omega'$ , on munit  $\Omega = (\Omega')^{\mathbb{N}}$  de la tribu engendrée par les cylindres  $A_0 \times A_1 \times A_2 \times \dots$  où  $A_0, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}'$  et  $A_n = \Omega'$  à partir d'un certain rang sur  $n$ .

La *fonction indicatrice* d'un événement  $A \subset \Omega$  est la fonction booléenne

$$\mathbf{1}_A : \omega \in \Omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

Les fonctions indicatrices servent à compter : la somme  $\sum_n \mathbf{1}_{A_n}$  est par exemple égale au nombre d'événement  $A_n$  qui ont lieu, dans le sens où :

$$\sum_n \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = \#\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n\}.$$

Voici d'autres exemples :

**Théorème 1.4** (Indicatrices). *Si  $A, B \in \mathcal{F}$  et si les  $(A_n)_{n \geq 1}$  sont dans la tribu  $\mathcal{F}$  alors...*

1.  $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$  et  $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A \cap B}$  ;
2.  $\underline{\lim} A_n = \{\sum_n \mathbf{1}_{A_n^c} < \infty\}$  et  $\overline{\lim} A_n = \{\sum_n \mathbf{1}_{A_n} = \infty\}$  ;
3.  $\mathbf{1}_{\underline{\lim} A_n} = \underline{\lim} \mathbf{1}_{A_n}$  et  $\mathbf{1}_{\overline{\lim} A_n} = \overline{\lim} \mathbf{1}_{A_n}$ .

Notons que  $\mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A$  pour tout  $A \in \mathcal{F}$ . Les fonctions indicatrices vont jouer un rôle important après l'introduction des notions de probabilité  $\mathbb{P}$  et d'espérance  $\mathbb{E}$  car  $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{P}[A]$  pour tout  $A \in \mathcal{F}$ .

## Mesures de probabilité

### 2.1 Définitions et premières propriétés

Les mesures de probabilité permettent de comparer l'importance des événements. Donnons d'abord une définition formelle.

**Définition 2.1** (Probabilité). *Soit  $\mathcal{F}$  une tribu sur un univers  $\Omega$ . Une **mesure de probabilité** ou **loi de probabilité** sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  est une application  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  vérifiant les deux conditions suivantes :*

**i ) Normalisation :**  $\mathbb{P}[\Omega] = 1$  ;

**ii )  $\Sigma$ -additivité :** *si  $(A_n)_{n \geq 1}$  est une suite d'événements deux à deux disjoints<sup>1</sup> alors*

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_n A_n\right] = \sum_n \mathbb{P}[A_n].$$

*On dit que le triplet  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est un **espace probabilisé**. On réservera le terme d'**événements** aux parties de  $\Omega$  qui appartiennent à la tribu  $\mathcal{F}$  : ce sont les parties auxquelles on a attribué une probabilité<sup>2</sup>.*

La notion de mesure positive s'obtient en autorisant des valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  et en renonçant à la propriété de normalisation.

**Théorème 2.2** (Propriétés immédiates). *Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $A, B$  deux éléments de  $\mathcal{F}$ . Alors :*

1.  $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$  ;
2.  $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$  ;
3.  $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$  ;
4. *si  $A \subset B$  alors  $\mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A^c \cap B]$ , en particulier  $\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$  ;*
5.  $\mathbb{P}[A] \mathbb{P}[B] \leq \min(\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B])$  ;

---

1. Cela signifie que  $A_i \cap A_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ . À ne pas confondre avec  $\cap_n A_n = \emptyset$ .

2. Dans les cas discrets,  $\Omega$  est muni de la tribu grossière et toutes les parties de  $\Omega$  sont des événements. Si  $\Omega$  n'est pas dénombrable, on peut montrer qu'il n'est pas possible de construire une application  $\mathbb{P}$  normalisée et  $\Sigma$ -additive définie sur tout  $\mathcal{P}(\Omega)$  ; c'est la raison pour laquelle on se restreint à des tribus particulières (cylindriques, boréliennes, etc.). Certains sous-ensembles de  $\Omega$  n'ont alors pas de probabilité : les choix de tribus sont faits pour que tous les ensembles « raisonnables » en aient une.

6. **probabilités totales** : si  $(A_n)$  est une partition de  $\Omega$  alors  $\sum_n \mathbb{P}[A_n] = 1$ .

**Démonstration.** Toutes ces propriétés se montrent relativement aisément ; il ne faut pas manquer de vérifier que tous les ensembles introduits sont bien dans la tribu  $\mathcal{F}$ . Pour la troisième propriété par exemple, on utilise les partitions

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \quad \text{et} \quad A = (A \setminus B) \cup (A \cap B).$$

Tous les ensembles apparaissant dans ces partitions sont dans  $\mathcal{F}$ , et toutes les unions sont disjointes. Il suffit alors d'appliquer la  $\Sigma$ -additivité.  $\square$

Il est commode d'interpréter  $\mathbb{P}[A]$  comme la surface (ou le cardinal) du patatoïde  $A$  dessiné sur le plan (ou sur le réseau  $\mathbb{Z}^2$ ). La propriété 3 du théorème se généralise à une union finie : c'est la formule du **crible de Poincaré**, qui nous dit que la surface d'une union est égale à la somme des surfaces, moins la surface des intersections deux à deux, plus la surface des intersections trois à trois, etc, ce qui correspond à inclure et exclure alternativement.

**Théorème 2.3** (Formule du crible, principe d'inclusion-exclusion). *Pour toute famille d'événements  $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{F}$ ,*

$$\mathbb{P} \left[ \bigcup_{1 \leq i \leq r} A_i \right] = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} S_k \quad \text{où} \quad S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r} \mathbb{P}[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}].$$

Pour  $r = 2$ , on retrouve  $\mathbb{P}[A_1 \cup A_2] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2]$ , et pour  $r = 3$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup A_3] &= \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \mathbb{P}[A_3] && \text{(inclusion)} \\ &\quad - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] - \mathbb{P}[A_2 \cap A_3] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_3] && \text{(exclusion)} \\ &\quad + \mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3] && \text{(inclusion)}. \end{aligned}$$

Le principe d'inclusion-exclusion est rarement utilisé pour  $r > 2$ . Il l'est cependant dans l'étude de la fluctuation asymptotique du collectionneur de coupons (théorème D.8).

**Démonstration.** On procède par récurrence sur  $r$ , en observant que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \bigcup_{1 \leq i \leq r+1} A_i \right] &= \mathbb{P} \left[ \bigcup_{1 \leq i \leq r} A_i \right] + \mathbb{P}[A_{r+1}] - \mathbb{P} \left[ \left( \bigcup_{1 \leq i \leq r} A_i \right) \cap A_{r+1} \right] \\ &= \mathbb{P} \left[ \bigcup_{1 \leq i \leq r} A_i \right] + \mathbb{P}[A_{r+1}] - \mathbb{P} \left[ \bigcup_{1 \leq i \leq r} (A_i \cap A_{r+1}) \right] \end{aligned}$$

ce qui permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence (pour le premier et dernier terme).  $\square$

## 2.2 Équiprobabilité discrète et combinatoire

Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé sur un univers *fini*  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ . La propriété de  $\Sigma$ -additivité montre que, si l'on connaît les probabilités des atomes  $(\mathbb{P}[\{\omega_1\}], \mathbb{P}[\{\omega_2\}], \dots, \mathbb{P}[\{\omega_n\}])$ , l'application  $\mathbb{P}$  est entièrement connue : la probabilité de n'importe quel ensemble s'obtient en sommant les probabilités de ses atomes.

Le cas le plus simple correspond à donner à tous les atomes le même poids : on parle alors d'**équiprobabilité**. La normalisation impose alors :

$$\mathbb{P}[\{\omega\}] = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)} \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega,$$

et plus généralement, pour tout  $A \subset \Omega$ ,

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Il s'agit de la fameuse formule « nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles »<sup>3</sup>. Elle n'est **valable qu'en cas d'équiprobabilité**, ou comme le dit Laplace quand nous sommes « également indécis sur l'existence [des cas possibles] », et réduit le calcul des probabilités à du dénombrement. Un lancer de pile ou face avec une pièce équilibrée se modélise avec la mesure de probabilité uniforme sur  $\{0, 1\}$ , qui affecte la probabilité  $\frac{1}{2}$  aux 2 atomes  $\{0\}$  et  $\{1\}$ . Un jet de dé équilibré à six faces se modélise avec la mesure de probabilité sur  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  qui affecte la probabilité  $\frac{1}{6}$  aux 6 atomes  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ .



**Équiprobabilité sur les univers infinis.** Il ne peut pas y avoir d'équiprobabilité lorsque  $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  car la masse d'un atome serait nulle. Il n'y a donc pas de mesure de probabilité uniforme sur les ensembles infinis dénombrables. En revanche, si  $\Omega$  est un pavé de  $\mathbb{R}^d$  nous verrons plus loin que la mesure de Lebesgue normalisée joue le rôle de modèle d'équiprobabilité, à condition de remplacer le cardinal par le volume.

En pratique, les modèles équiprobables sont les plus naturels, et constituent le socle sur lequel beaucoup d'autres modèles sont construits. Certaines de ces constructions sont abordées dans la suite.

Les calculs de cardinaux dans les modèles d'équiprobabilité nécessitent bien souvent des formules combinatoires. Pour  $0 \leq r \leq n$ , on notera<sup>4</sup>  $\binom{n}{r}$  le coefficient binomial

$$\binom{n}{r} := \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r(r-1) \cdots 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Pour tous  $a$  et  $b$  dans un anneau commutatif, on a la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Les « briques de base » du dénombrement sont usuellement expliquées par des tirages de boules dans des urnes. On considère donc une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  (donc distinguables<sup>5</sup>) et on effectue le tirage de  $r$  boules dans l'urne. Le nombre de tirages possibles diffère selon que l'on remet ou non les boules dans l'urne, et que l'on s'intéresse ou non à l'ordre de tirage. Pour un tirage...

3. Dans les termes de Pierre-Simon de Laplace : « La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre, à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire, tels que nous soyons également indécis sur leur existence; et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité ». *Théorie analytique des probabilités*, 1814, p. iv.

4. Nous suivons ici l'usage anglo-saxon.

5. « distinguables » s'écrit avec un « u », au contraire de « navigable », « irrigable », et « infatigable ».

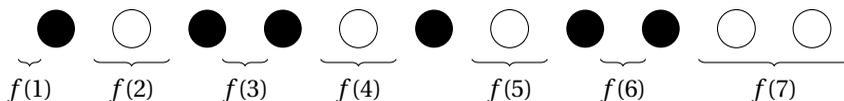


FIGURE 2.1 – Codage d'un multiensemble par une coloration.

Pour  $n=7$  et  $r=5$ , on aligne  $n+r-1=11$  boules et on en colore  $n-1=6$  en noir. Le nombre de boules blanches à gauche de la première noire donne  $f(1)$  (ici 0), le nombre de blanches entre les deux premières noires donne  $f(2)$  (ici 1), et ainsi de suite. Ici on a donc  $f(1)=0$ ,  $f(2)=1$ ,  $f(3)=0$ ,  $f(4)=1$ ,  $f(5)=1$  et  $f(6)=0$  et  $f(7)=2$ .

**sans remise et ordonné**, on parle d'**arrangement** ;  $r$  est nécessairement inférieur à  $n$ . Il y en a  $A_{n,r} := n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = r! \binom{n}{r}$ . Il s'agit du nombre de  $r$ -uplets  $(b_1, \dots, b_r)$  constitués d'éléments  $b_1, \dots, b_r$  de  $\{1, \dots, n\}$  deux à deux distincts, ou encore du nombre d'injections de  $\{1, \dots, r\}$  dans  $\{1, \dots, n\}$ .

Pour  $r=n$  on trouve le nombre de manières de permuter  $\{1, \dots, n\}$ , soit  $A_{n,n} = n!$ .  
*Exemple* : nombre de tiercés avec  $n$  chevaux au départ ( $r=3$ ).

**sans remise et non ordonné**, on parle de **combinaison** ou de sous-ensemble ; on a encore la condition  $r \leq n$ . Il y en a  $\binom{n}{r}$ . Il s'agit du nombre de sous-ensembles de cardinal  $r$  de  $\{1, \dots, n\}$ . *Exemple* : nombre de binômes possibles dans une classe de  $n$  élèves ( $r=2$ ).

**avec remise et ordonné**, on parle de  $r$ -uplets ; il y en a  $n^r$ . Il s'agit du nombre de  $r$ -uplets  $(b_1, \dots, b_r)$  constitués d'éléments  $b_1, \dots, b_r$  de  $\{1, \dots, n\}^r$ , c'est-à-dire le nombre d'applications de  $\{1, \dots, r\}$  dans  $\{1, \dots, n\}$ . Bien entendu,  $n^r \geq A_{n,r} \geq \binom{n}{r}$ .  
*Exemple* : nombre de mots de  $r$  lettres ( $n=26$ ).

**avec remise et non ordonnés** : on parle de multi-ensemble, ou de combinaison avec répétition. Ce cas pourtant naturel est moins souvent abordé. Il y a  $\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$  multi-ensembles à  $r$  éléments parmi  $n$ . Il s'agit également du nombre de manières de placer  $r$  boules indistinguables dans  $n$  urnes distinguables, ou encore du nombre d'applications  $f : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  vérifiant  $f(1) + \dots + f(r) = n$  (la quantité  $f(i)$  correspondant au nombre de fois où la boule  $i$  est tirée). Pour obtenir la formule, on aligne  $n+r-1$  objets (disons blancs) et on en colore  $n-1$  en noir : à chaque coloriage correspond une (et une seule) application  $f$  vérifiant  $\sum_i f(i) = n$  (voir la figure 2.1). Comme il y a  $\binom{n+r-1}{n-1}$  choix possibles pour le coloriage, c'est aussi le nombre de multi-ensembles. *Exemple* : nombre de possibilités au jeu des chiffres et des lettres ( $n=26$  et  $r=9$ ).

**Exemple 2.4** (Tirage avec remise). *Si on dispose d'une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  (donc distinguables), alors on modélise le tirage de  $r$  boules avec remise par la probabilité uniforme sur l'univers  $\Omega = \{1, \dots, n\}^r$ , dont le cardinal vaut  $n^r$ . En conséquence, lors d'un tirage avec remise de deux cartes dans un jeu de 32 cartes, la probabilité que les cartes soient de la même couleur<sup>6</sup> vaut  $(2 \times 16^2)/32^2 = 1/2$ , tandis que la probabilité d'obtenir 2 as vaut  $4^2/32^2 = 1/64$ .*

**Exemple 2.5** (Tirage sans remise). *Si on dispose d'une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  (donc distinguables), alors on modélise le tirage de  $r$  boules sans*

6. « couleur » signifie ici de manière non standard rouge ou noir et pas trèfle, pique, cœur, carreau.

remise par la probabilité uniforme sur l'univers  $\Omega = \{T \subset \{1, \dots, n\} : \text{card}(T) = r\}$ , dont le cardinal vaut  $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ . En conséquence, lors d'un tirage sans remise de deux cartes dans un jeu de 32 cartes, la probabilité de tirer deux cartes de même couleur vaut  $2 \binom{16}{2} / \binom{32}{2} = 15/31$ , tandis que la probabilité d'obtenir 2 as vaut  $\binom{4}{2} / \binom{32}{2} = 3/(32 \times 31)$ . Naturellement ces deux probabilités sont plus petites que celles avec remise.

**Sondage simple : deux modélisations, une probabilité.** On considère l'expérience suivante : dans une urne avec 2 boules vertes et 3 boules jaunes, on tire deux boules sans remise. On cherche la probabilité de l'événement « obtenir une boule verte et une jaune ». Athanase a lu les exemples précédents et décide de modéliser l'expérience par des combinaisons : il considère  $\Omega_A$  l'ensemble des combinaisons de 2 boules parmi 5 ( $\text{Card}(\Omega_A) = \binom{5}{2} = 10$ ), muni de l'équiprobabilité  $\mathbb{P}_A$ . Il y a  $\binom{2}{1} \binom{3}{1} = 6$  combinaisons favorables, donc

$$\mathbb{P}_A[E] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Bérénice opte pour l'univers  $\Omega_B$  des arrangements de deux boules parmi les 5 :  $\text{Card}(\Omega_B) = 20$ , muni de l'équiprobabilité  $\mathbb{P}_B$ . Il y a 6 arrangements du type (boule verte, boule jaune) et 6 du type (boule jaune, boule verte), donc :

$$\mathbb{P}_B[E] = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Athanase et Bérénice ont choisi des univers et des probabilités différentes, donc des codages différents de  $E$ , mais ils obtiennent la même probabilité.

**Pile ou face : nombre de piles.** Pour  $0 \leq k \leq n$ , quelle est la probabilité d'obtenir  $k$  fois pile en  $n$  parties de pile ou face avec une pièce de monnaie équilibrée ? L'univers est  $\Omega = \{(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n\}$  de cardinal  $2^n$ , où 0 code face et 1 code pile. L'événement d'intérêt est  $A = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 + \dots + a_n = k\}$ , de cardinal  $\binom{n}{k}$ . La pièce étant équilibrée, on choisit le modèle d'équiprobabilité, et donc  $\mathbb{P}[A] = \text{card}(A) / \text{card}(\Omega) = \binom{n}{k} 2^{-n}$ . Nous verrons qu'il s'agit d'un cas particulier de la loi binomiale (taille  $n$  et paramètre  $1/2$ ).

Il faut faire attention au choix des résultats possibles, qui doivent être équiprobables. Considérons par exemple le jet simultané de deux dés indistinguables. En ordonnant les résultats des deux dés, on peut considérer l'univers

$$\Omega_1 = \{(i, j) : 1 \leq i \leq j \leq 6\},$$

qui décrit bien tout les résultats possibles de l'expérience. Cependant la probabilité uniforme sur  $\Omega_1$  donne trop de poids aux « doubles ». Le bon modèle est la probabilité uniforme sur l'univers



$$\Omega_2 = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\},$$

qui force à distinguer les dés et à reformuler les événements où ils ne sont pas distingués. Si l'on cherche par exemple la probabilité d'avoir un double 1, le premier modèle donne  $1/21$ , le second  $1/36$  ; pour la probabilité d'obtenir un 1 et un 2, le premier modèle donne encore  $1/21$ , la bonne réponse étant  $2/36 = 1/18$ .

**Sondage simple : modèle.** Considérons une urne contenant  $N = N_1 + N_2$  boules dont  $N_1$  sont blanches et  $N_2$  rouges. On effectue un tirage sans remise de  $n \leq N$  boules dans l'urne. Il y a  $\binom{N}{n}$  tirages possibles. Adoptons le modèle de la probabilité uniforme sur l'ensemble de ces possibilités, c'est-à-dire sur l'univers  $\Omega$  des sous-ensembles de  $\{1, \dots, N\}$  à  $n$  éléments. Pour tout  $0 \leq k \leq n$ , le nombre de tirages avec  $k$  boules blanches est  $\binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}$ , et la probabilité de tirer  $k$  boules blanches vaut donc

$$\frac{\binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Cette formule définit la **loi hypergéométrique** sur les sous-populations de taille  $n$  d'une population de taille  $N$  à deux types (voir le théorème 3.13). Ceci montre au passage l'identité de Vandermonde :

$$\binom{N}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}.$$

Supposons par exemple que l'on tire une main de Poker (5 cartes parmi 52). Pour calculer la probabilité d'obtenir une paire d'As, on sépare les 52 cartes en  $N_1 = 4$  as et  $N_2 = 48$  autres cartes :

$$\mathbb{P}[\text{« une paire d'As »}] = \frac{\binom{4}{2} \binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}.$$

Ce modèle peut se généraliser à plus de « couleurs », on parle de loi hypergéométrique multitype. Sur l'exemple du Poker, si l'on cherche la probabilité d'obtenir une paire d'As et un paire de rois, on obtient, en séparant les cartes en  $N_1 = 4$  as,  $N_2 = 4$  rois et  $N_3 = 44$  autres cartes, l'expression :

$$\mathbb{P}[\text{« paire d'As et paire de rois »}] = \frac{\binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{44}{1}}{\binom{52}{5}}.$$

Autre exemple : dans une commode contenant  $N$  vêtements dont  $N_1$  pantalons,  $N_2$  chemises et  $N_3$  vestes, on tire uniformément 3 vêtements. Quelle est la probabilité d'obtenir un costume complet ?

**Remarque 2.6** (Équiprobabilité). *Même si l'équiprobabilité est le choix le plus courant quand  $\Omega$  est fini, il n'est naturellement pas le seul possible ! Ainsi, pour modéliser une pièce biaisée, qui tombe sur pile avec probabilité  $p$ , on choisit  $\Omega = \{0, 1\}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  et  $\mathbb{P}$  qui donne les poids  $p$  et  $1 - p$  aux atomes  $\{1\}$  et  $\{0\}$ .*

**Remarque 2.7** (Philosophie). *Que signifie au juste « la pièce a une chance sur deux de tomber sur pile » ? La mécanique classique affirme que le mouvement de la pièce est déterministe : si on connaît parfaitement les conditions du lancer il n'y a pas d'aléatoire. Les probabilités pallient donc ce manque d'information, et peuvent être interprétées de manières variées : classique, fréquentiste, logique, bayésienne, « propensionniste », etc. Même si nous connaissions les conditions du lancer avec une grande précision, la sensibilité aux erreurs des équations de la mécanique classique pourraient rendre le résultat du lancer imprévisible. Les probabilités pallient également cet excès de complexité.*

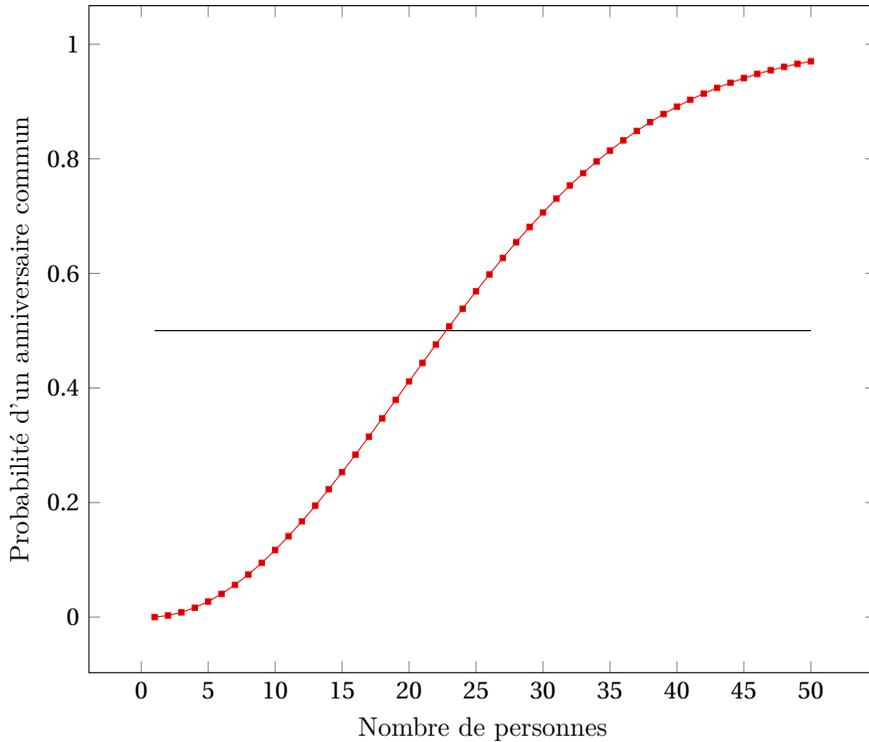


FIGURE 2.2 – Le problème des anniversaires

## 2.3 Quelques exemples remarquables

### Problème des anniversaires

Calculons la probabilité  $p_n$  pour que dans une classe de  $n$  élèves, au moins deux d'entre eux soient nés le même jour. On suppose pour simplifier que les naissances sont uniformes sur les jours de l'année, et on ne tient pas compte des années bissextiles. On modélise cette expérience par la probabilité uniforme sur l'univers  $\Omega = \{1, \dots, d\}^n$  où  $d = 365$ , dont le cardinal est  $d^n$ . Cela correspond à faire  $n$  tirages avec remise dans une urne contenant  $d$  boules numérotés de 1 à  $d$ . Si  $A$  est l'événement « deux élèves au moins sont nés le même jour » alors  $A^c$  correspond à  $n$  tirages sans remise ordonnés (arrangements !) et donc (pour  $n \leq d$  car  $p_n = 1$  sinon)

$$p_n = \mathbb{P}[A] = 1 - \mathbb{P}[A^c] = 1 - \frac{d(d-1)\cdots(d-n+1)}{d^n} = 1 - \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{d}\right).$$

La suite  $(p_n)_{n \geq 1}$  est représentée figure 2.2. Il suffit de 24 élèves pour que la probabilité d'avoir un anniversaire commun dépasse 1/2 ! L'aspect sigmoïde de la courbe s'explique par le fait que le nombre de couples d'élèves est quadratique en  $n$ . Si  $B$  est l'événement « un élève au moins est né le même jour que l'enseignant » alors on a

$$\mathbb{P}[B] = 1 - \mathbb{P}[B^c] = 1 - \left(\frac{d-1}{d}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{d}\right)^n,$$

formule qui ne fait pas apparaître de phénomène de seuil. Cette fois-ci, le nombre de couples (élève, enseignant) est linéaire en  $n$ .

### Problème du chevalier de Méré

Si l'on jette 4 fois un dé à six faces, la probabilité d'obtenir au moins un 6 vaut  $1 - (5/6)^4 \approx 0,52 > 1/2$ . Si l'on jette 24 fois deux dés à six faces, la probabilité d'obtenir au moins un double six vaut  $1 - (35/36)^{24} \approx 0,49 < 1/2$ . Le chevalier de Méré était un noble de la cour de Louis XIV, qui trouvait ces résultats contre-intuitifs<sup>7</sup>, pensant que les deux probabilités s'obtenaient en multipliant la probabilité sur un lancer par le nombre de lancers (il obtenait donc 2 chances sur 3 pour les deux cas) : on retrouve le problème de formalisation évoqué plus haut. La modélisation correcte dans le premier cas est l'équiprobabilité sur l'univers  $\{1, \dots, 6\}^4$  et dans le second cas, l'équiprobabilité sur l'univers  $(\{1, \dots, 6\}^2)^{24} = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}^{24}$ .

### Permutations aléatoires

L'ensemble  $\mathcal{S}_n$  des permutations de  $\{1, \dots, n\}$  muni de la composition  $\circ$  constitue ce qu'on appelle le *groupe symétrique*. Il s'agit d'un groupe fini non abélien de cardinal  $n!$ . La loi uniforme  $\mu$  sur  $\mathcal{S}_n$  affecte la probabilité  $1/n!$  à chaque atome de  $\mathcal{S}_n$  : elle modélise par exemple l'état d'un paquet de  $n$  cartes mélangées. La loi uniforme est la seule loi sur  $\mathcal{S}_n$  qui soit invariante par toute translation du groupe (à droite ou à gauche). La condition est évidemment nécessaire, et sa suffisance s'établit en observant que si  $\mu$  est invariante par toute translation (disons à gauche) alors pour tous  $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$ ,

$$\mu(\sigma \circ \sigma') = \mu(\sigma').$$

En posant  $\sigma^{-1} = \sigma'$ , il en découle que  $\mu$  affecte la même probabilité à tous les atomes de  $\mathcal{S}_n$ , il s'agit donc de la loi uniforme.

## 2.4 Expériences répétées

Nous avons vu plus haut que pour modéliser la réalisation consécutive de deux expériences indépendantes, représentées respectivement par  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$  et  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ , on pouvait introduire l'univers produit  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$  et le munir de la tribu produit  $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ . Si on dispose pour chacune expérience d'une loi de probabilité, on définit la :

**Définition 2.8** (Probabilité produit). *Si  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$  et  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$  sont deux espaces probabilisés, il existe une unique mesure de probabilité notée  $\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$  sur le produit  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$ , appelée (mesure de) **probabilité produit**, qui vérifie*

$$(\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2)(A_1 \times A_2) = \mathbb{P}_1(A_1)\mathbb{P}_2(A_2)$$

---

7. Blaise Pascal fait part de ce problème à Pierre de Fermat dans l'une de ses lettres. C'est à propos de ce même chevalier de Méré et de Pascal que Siméon Denis Poisson déclare, en introduction de son traité *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile* : « Un problème relatif aux jeux de hasard, proposé à un austère janséniste par un homme du monde, a été l'origine du calcul des probabilités ». Poisson fait ici allusion à un autre problème suggéré par Méré et discuté par Pascal et Fermat, le problème « des points », ou de la partie interrompue : comment répartir équitablement les mises dans un jeu de hasard si l'on doit s'arrêter avant la fin ?

pour tout événement produit  $A_1 \times A_2 \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ . De même, si  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est un espace probabilisé et que l'on munit  $\Omega^{\mathbb{N}}$  de la tribu des cylindres  $\mathcal{F}^{\otimes \infty}$ , il existe une unique mesure de probabilité  $\mathbb{P}^{\otimes \infty}$  sur  $(\Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}^{\otimes \infty})$  qui vérifie

$$\mathbb{P}^{\otimes \infty}(A_0 \times A_1 \times A_2 \times \dots) = \mathbb{P}[A_0] \mathbb{P}[A_1] \mathbb{P}[A_2] \dots$$

pour tout cylindre  $A_0 \times A_1 \times A_2 \dots \in \mathcal{F}^{\otimes \infty}$  (il s'agit à droite d'un produit fini car  $\mathbb{P}[A_n] = 1$  à partir d'un certain rang sur  $n$ ).

L'existence et l'unicité sont admises.

**Remarque 2.9** (Produit et équiprobabilité). Si  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$  et  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$  vérifient l'équiprobabilité alors  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2)$  vérifie aussi l'équiprobabilité. Cette propriété était déjà cachée dans les considérations sur les tirages ordonnés sans remise de  $r$  boules parmi  $n$  : l'ensemble des  $r$ -uplets est le produit  $\{1, 2, \dots, n\}^r$ . C'est également le cadre utilisé pour étudier le problème des anniversaires ou celui du chevalier de Méré (exemples de la section 2.3).

**Remarque 2.10** (Produit et indépendance). Plaçons-nous sur  $\Omega^{\mathbb{N}}$  muni de la tribu cylindrique et de la probabilité produit. Soit  $m$  et  $n$  deux entiers,  $A_1$  une partie de  $\Omega^m$  et  $B_1$  une partie de  $\Omega^n$ . Alors, pour

$$\begin{aligned} A &= A_1 \times \Omega^n \times \Omega \times \Omega \times \dots, \\ B &= \Omega^m \times B_1 \times \Omega \times \Omega \times \dots, \end{aligned}$$

on peut facilement montrer que  $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \mathbb{P}[B]$ . On réinterprétera cette égalité plus tard en disant que si  $A$  et  $B$  dépendent de lancers distincts, alors ils sont indépendants.

Si l'ensemble  $\Omega$  est infini, et en particulier dans le cas d'une expérience répétée indéfiniment, les propriétés suivantes sont utiles.

**Théorème 2.11** (Suites d'événements, « continuité » des probabilités). Pour toute suite  $(A_n)$  d'événements sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,

1. si  $(A_n)$  est croissante (pour l'inclusion) alors  $\mathbb{P}[A_n] \nearrow \mathbb{P}[\bigcup_n A_n]$  ;
2. si  $(A_n)$  est décroissante (pour l'inclusion) alors  $\mathbb{P}[A_n] \searrow \mathbb{P}[\bigcap_n A_n]$  ;
3.  $\mathbb{P}[\bigcup_n A_n] \leq \sum_n \mathbb{P}[A_n]$  ;
4. si  $\mathbb{P}[A_n] = 0$  pour tout  $n$  alors  $\mathbb{P}[\bigcup_n A_n] = 0$  ;
5. si  $\mathbb{P}[A_n] = 1$  pour tout  $n$  alors  $\mathbb{P}[\bigcap_n A_n] = 1$ .

Les deux premières propriétés traduisent une sorte de continuité de l'application  $\mathbb{P}$  vis-à-vis des convergences monotones.

**Démonstration.** La première propriété s'obtient en remarquant que les  $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$  sont deux à deux disjoints, d'où

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_n A_n\right] = \mathbb{P}\left[\bigcup_n B_n\right] = \sum_n \mathbb{P}[B_n] = \lim_n \sum_{m \leq n} \mathbb{P}[B_m] = \lim_n \mathbb{P}[A_n].$$

La deuxième propriété s'en déduit par passage au complémentaire. On vérifie la troisième propriété d'abord pour les unions finies, puis on passe à la limite en utilisant le premier point. Les deux dernières propriétés s'ensuivent.  $\square$

**Pile ou face : suites d'événements et limites.** Illustrons quelques-unes de ces propriétés dans le cas du jeu de pile ou face infini. On considère  $\Omega_0 = \{0, 1\}$  muni de la tribu grossière  $\mathcal{F}_0$  et de la loi de Bernoulli  $\mathbb{P}_0$  qui donne le poids  $1/2$  aux singletons  $\{0\}$  et  $\{1\}$ . On pose  $\Omega = \Omega_0^{\mathbb{N}}$  que l'on munit de la tribu cylindrique  $\mathcal{F}_0^{\otimes \mathbb{N}}$  et de la probabilité produit  $(\mathbb{P}_0)^{\otimes \mathbb{N}}$ . Si l'on définit pour tout  $n$  l'événement

$$A_n = \text{« les } n \text{ premiers lancers donnent pile »},$$

la suite  $A_n$  est décroissante pour l'inclusion. On en déduit que :

$$\mathbb{P} \left[ \bigcap_n A_n \right] = \mathbb{P} \left[ \text{« tous les lancers donnent pile »} \right] = \lim_n \mathbb{P} [A_n] = \lim_n (1/2^n) = 0.$$

Ainsi la mesure produit  $\mathbb{P}^{\otimes \mathbb{N}}$  donne un poids nul au singleton  $\{(1, 1, \dots, 1, \dots)\} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .

Plus généralement, fixons  $k$  et définissons pour tout  $n$  l'événement

$$B_n = \text{« il y a au plus } k \text{ faces sur les } n \text{ premiers lancers »}.$$

La suite  $B_n$  décroît pour l'inclusion. Si  $n$  est de la forme  $2km$ ,  $B_n$  est inclus dans l'intersection de  $m$  événements

$$\begin{aligned} & \text{« au plus } k \text{ faces sur les lancers } 1 \text{ à } 2k \text{ »} \\ & \cap \text{« au plus } k \text{ faces sur les lancers } (2k+1) \text{ à } 4k \text{ »} \\ & \dots \cap \text{« au moins } k \text{ faces sur les lancers } 2k(m-1)+1 \text{ à } 2km \text{ »}. \end{aligned}$$

Chacun des  $m$  événements a une probabilité  $1/2$  (par symétrie); remarque 2.10 donne

$$\mathbb{P} [B_{2km}] \leq 1/2^m.$$

Par monotonie on tire  $\mathbb{P} [B_n] \searrow 0$ . La propriété 2 du théorème implique alors :

$$\mathbb{P} \left[ \bigcap_n B_n \right] = \mathbb{P} \left[ \text{« il y a au plus } k \text{ faces en tout »} \right] = 0,$$

autrement dit

$$\mathbb{P} \left[ \text{« il y a au moins } k+1 \text{ faces »} \right] = 1.$$

Enfin, si l'on appelle ce dernier événement  $C_k$ , on déduit de la propriété 5 :

$$\mathbb{P} \left[ \text{« il y a une infinité de faces »} \right] = \mathbb{P} \left[ \bigcap_k C_k \right] = 1.$$

On verra plus loin une autre preuve de ces résultats.

**Remarque 2.12** (Presque sûrement). *On dit qu'un événement  $A$  est **presque sûr** (abrégé en *p.s.*) lorsque  $\mathbb{P}(A) = 1$ . Dans le cas d'un univers  $\Omega$  fini, cela implique que  $A = \Omega$ . Ce n'est plus le cas si l'univers est infini, comme le montre l'événement lié à une infinité de faces dans l'exemple précédent. De même un événement non vide peut très être de probabilité nulle si l'univers est infini.*

## 2.5 Conditionnement

Intuitivement, une mesure de probabilité permet de quantifier le manque d'information en affectant un poids aux issues possibles. Si l'on dispose d'information supplémentaire, les poids changent. Plaçons nous d'abord dans un modèle équiprobable fini  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ , par exemple le jet d'un dé équilibré. La probabilité (« inconditionnelle ») d'un événement  $A$  (par exemple « obtenir 4 ou plus ») est donnée par

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$

Si on dispose de l'information supplémentaire qu'un événement  $B$  a eu lieu (par exemple  $B =$  « le résultat est pair »  $= \{2, 4, 6\}$ ), les « cas possibles » changent ( $\Omega$  est « remplacé » par  $B$ ) et les cas favorables sont restreints (seuls restent les cas qui appartiennent à  $A$  et à  $B$ ). On obtient donc la **probabilité conditionnelle** :

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\text{Card } A \cap B}{\text{Card } B} = \frac{\text{Card}(A \cap B) / \text{Card } \Omega}{\text{Card } A / \text{Card } \Omega} = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}.$$

Cette dernière formule ne fait pas appel au choix spécifique de l'équiprobabilité ; on l'utilise comme définition générale.

**Définition 2.13** (Probabilité conditionnelle). *Si  $A, B \in \mathcal{F}$  avec  $\mathbb{P}[B] > 0$  alors la **probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$**  est la quantité (parfois notée  $\mathbb{P}_B(A)$ ) suivante :*

$$\mathbb{P}[A|B] := \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}.$$

**Théorème 2.14** (Propriétés importantes).

—  $\mathbb{P}[\cdot | B]$  est une **probabilité**. Si  $\mathbb{P}[B] > 0$  alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\cdot | B] : \mathcal{F} &\rightarrow [0, 1], \\ A &\mapsto \mathbb{P}[A | B] \end{aligned}$$

est une mesure de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  appelée **probabilité conditionnelle**. Elle vérifie donc toutes les propriétés des probabilités énoncées dans le théorème 2.2 ; en particulier

$$\mathbb{P}[\Omega | B] = 1, \quad \mathbb{P}[A^c | B] = 1 - \mathbb{P}[A | B],$$

et pour toute suite  $(A_n)$  d'événements disjoints,

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_n A_n \mid B\right] = \sum_n \mathbb{P}[A_n | B].$$

— **Probabilités totales, 2<sup>e</sup> version**. Si  $0 < \mathbb{P}[B] < 1$  alors

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A | B] \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A | B^c] \mathbb{P}[B^c]$$

Plus généralement, si  $\Omega = \bigcup_n B_n$  est une partition de  $\Omega$  avec  $\mathbb{P}[B_n] > 0$  alors

$$\mathbb{P}[A] = \sum_n \mathbb{P}[A | B_n] \mathbb{P}[B_n].$$

Si  $A \cap B = \emptyset$ ,  $\mathbb{P}[A|B] = 0$ . La probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}[\cdot|B]$  est donc en quelque sorte « portée par  $B$  ». Plus précisément, on peut montrer que  $\mathbb{P}[\cdot|B]$  est une mesure de probabilité sur  $(B, \mathcal{F}_B)$  où  $\mathcal{F}_B = \{C \cap B : B \in \mathcal{F}\}$  est la tribu trace de  $\mathcal{F}$  sur  $B$ . Notons que  $\mathbb{P}[\cdot|\Omega] = \mathbb{P}$ .



Si  $A$  est fixé, l'application  $\mathbb{P}[A|\cdot] : B \mapsto \mathbb{P}[A|B]$  n'est *pas* une probabilité. L'égalité  $\mathbb{P}[A|B^c] = 1 - \mathbb{P}[A|B]$  n'a par exemple aucune raison d'être vraie en général.

En pratique, le conditionnement est souvent utilisé quand l'expérience étudiée est en plusieurs étapes.

**Exemple 2.15** (Test de dépistage de maladie). *Des laboratoires pharmaceutiques ont mis au point un test médical pour dépister une maladie. Les experts pensent qu'une personne sur mille est malade dans la population. De plus, des expériences ont montré que le test déclare positifs 99% des malades qu'on lui soumet, et qu'il déclare malades 2% des personnes saines qu'on lui soumet. On choisit une personne au hasard (première étape : elle peut être saine ou malade), et on la soumet au test (deuxième étape : le test peut être positif ou négatif). Si on définit les événements*

$A =$  « le test médical est positif » et  $B =$  « la personne est malade »

alors les données se traduisent par  $\mathbb{P}[B] = 1/1000$ ,  $\mathbb{P}[A|B] = 99/100$  et  $\mathbb{P}[A|B^c] = 2/100$ . La probabilité (« totale ») de l'événement  $A$  se calcule alors en écrivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A] &= \mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A|B^c]\mathbb{P}[B^c] \\ &= (99/100)(1/1000) + (2/100)(999/1000) \\ &\approx 0.02. \end{aligned}$$

On a conditionné par le résultat de la première étape pour calculer la probabilité de l'événement complet.

Si l'on voit la première étape comme une « cause » et la seconde comme une « conséquence », on peut essayer de retrouver la cause en partant de la conséquence : c'est l'objet de la formule de Bayes, ou formule de « probabilités des causes », qui permet d'inverser l'ordre d'un conditionnement.

**Théorème 2.16** (Formule de Bayes). *Si  $\mathbb{P}[A] > 0$  et  $0 < \mathbb{P}[B] < 1$  alors*

$$\mathbb{P}[B|A] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap B^c]} = \frac{\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A|B^c]\mathbb{P}[B^c]}.$$

La formule de Bayes permet de calculer  $\mathbb{P}[B|A]$  à partir des données  $\mathbb{P}[A|B]$ ,  $\mathbb{P}[A|B^c]$  et  $\mathbb{P}[B]$ . Notons la formule suivante parfois utile en pratique pour les calculs numériques :

$$\mathbb{P}[B|A] = \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{P}[A|B^c]\mathbb{P}[B^c]}{\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B]}}.$$

**Exemple 2.17** (Test de dépistage, suite). *La question naturelle dans le cadre du test de dépistage modélisé ci-dessus est de connaître la probabilité d'être malade sachant que le test est positif. La formule donne :*

$$\mathbb{P}[B|A] = \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{P}[A|B^c]\mathbb{P}[B^c]}{\mathbb{P}[A|B]\mathbb{P}[B]}} = \frac{1}{1 + \frac{2 \times 999}{99}} \approx \frac{1}{20} = 0,05.$$

*Le test n'est vraiment pas efficace de ce point de vue ! Le paradoxe vient du fait que la maladie est si rare qu'il y a plus de « faux positifs » ( 2% des 99.9% de personnes saines, soit environ 2% de la population) que de vrais positifs (99% des 0.1% de personnes malades, soit environ 0.1% de la population). Cet exemple est l'occasion de rappeler que du point de vue statistique, un test comporte deux types d'erreur (faux positifs et faux négatifs) qui ne jouent pas un rôle symétrique du point de vue du risque modélisé.*

## 2.6 Indépendance

Intuitivement, deux expériences sont indépendantes lorsqu'elles ne sont pas reliées par une relation causale. Par exemple, le jet de deux dés à six faces équilibrés, est modélisé par l'univers  $\Omega \times \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . L'absence de relation causale entre les deux dés suggère de considérer la mesure de probabilité uniforme sur  $(\Omega \times \Omega, \mathcal{P}(\Omega \times \Omega))$ , qui se trouve être la mesure de probabilité produit des mesures de probabilités uniformes. En particulier, si  $A \times \Omega$  (respectivement  $\Omega \times B$ ) est un événement qui ne concerne que le résultat du premier (respectivement second) jet de dé, alors<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(A \times \Omega) \cap (\Omega \times B)] &= \frac{\text{Card}((A \times \Omega) \cap (\Omega \times B))}{\text{Card}(\Omega \times \Omega)} \\ &= \frac{\text{Card}(A)\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)\text{Card}(\Omega)} \\ &= \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B] \\ &= \mathbb{P}[A \times \Omega]\mathbb{P}[\Omega \times B] \end{aligned}$$

( $\mathbb{P}$  est utilisé à la fois pour la mesure de probabilité uniforme sur  $\Omega$  et sur  $\Omega \times \Omega$ ).

Plus généralement, en revenant à l'interprétation intuitive des probabilités conditionnelles, lorsque deux événements  $A$  et  $B$  ne sont pas reliés causalement, l'information «  $B$  s'est produit » ne devrait pas modifier notre estimation de la probabilité de  $A$ , et on devrait avoir :  $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ , ou encore

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B].$$

Cette formule remarquable conduit à la définition générale suivante de l'indépendance, bien au-delà du cas de l'équiprobabilité.

**Définition 2.18** (Indépendance de deux événements). *Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. On dit que les deux événements  $A, B \in \mathcal{F}$  sont **indépendants** lorsque*

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B].$$

**Exemple 2.19** (Espaces produits). *Remarquons une fois de plus que le choix de la probabilité produit pour représenter une suite d'expériences (remarque 2.10) est intrinsèquement lié à l'indépendance entre les expériences.*

**Exemple 2.20.** *Considérons le lancer d'un dé équilibré, modélisé par  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  muni de la tribu grossière et de la mesure de probabilité uniforme. Si  $A =$  « le résultat est  $\leq 4$  » et  $B =$  « le résultat est pair » alors  $A$  et  $B$  sont indépendants : en utilisant les cardinaux :  $\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{2}{6} = \frac{4}{6} \frac{3}{6} = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$ .*

8. Sur le plan cartésien  $\Omega \times \Omega$ , l'événement  $A \times \Omega$  est une bande verticale et  $\Omega \times B$  une bande horizontale.

**Remarque 2.21.** Si  $A$  et  $B$  sont indépendants alors  $A^c$  et  $B^c$  le sont car

$$\mathbb{P}[A^c \cap B^c] = 1 - \mathbb{P}[A \cup B] = 1 - \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A] \mathbb{P}[B] = (1 - \mathbb{P}[A])(1 - \mathbb{P}[B]).$$



L'indépendance n'est *pas transitive*! Si  $A$  est indépendant de  $B$ , et  $B$  est indépendant de  $C$ , alors  $A$  n'est pas nécessairement indépendant de  $C$ . Contre-exemple :  $C = A$  si  $\mathbb{P}[A] \in ]0, 1[$ , car si  $A$  est indépendant de lui-même, alors  $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \cap A] = \mathbb{P}[A]^2$ , donc  $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$ .

L'indépendance n'est *pas stable par union*! Si  $A$  et  $B$  sont indépendants de  $C$ ,  $A \cup B$  n'est pas nécessairement indépendant de  $C$ .

Contre-exemple : pour deux tirages de pile ou face on considère

- $A =$  « le premier lancer donne face » » =  $\{(0, 0), (0, 1)\}$
- $B =$  « le second lancer donne pile » » =  $\{(1, 1), (0, 1)\}$
- $C =$  « les deux premiers lancers donnent » » =  $\{(0, 0), (1, 1)\}$ .

Alors



$A \cap C = \{(0, 0)\}$ ,  $B \cap C = \{(1, 1)\}$ ,  $A \cup B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ ,  $(A \cup B) \cap C = \{(0, 0), (1, 1)\}$

et ainsi

$$\mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[B \cap C] = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \mathbb{P}[A] \mathbb{P}[C] = \mathbb{P}[B] \mathbb{P}[C],$$

donc  $A$  et  $B$  sont bien tous deux indépendants de  $C$ . En revanche

$$\mathbb{P}[(A \cup B) \cap C] = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{8} = \mathbb{P}[A \cup B] \mathbb{P}[C].$$

Pour obtenir l'indépendance de  $A \cup B$  et de  $C$  une notion plus forte est donc nécessaire.

**Définition 2.22** (Indépendance d'une famille d'événements). Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille d'événements, on dit qu'ils sont **indépendants** lorsque pour toute partie **finie**  $J \subset I$ ,

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j].$$

De même, si  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  est une **famille de tribus** sur  $\Omega$ , on dit qu'elles sont indépendantes lorsque  $(A_i)_{i \in I}$  sont indépendants dès que  $A_i \in \mathcal{F}_i$  pour tout  $i \in I$ .

Dans la définition on écrit souvent « mutuellement indépendants », mais à l'usage on omet « mutuellement » et on dit « indépendants » tout court en général.

**Remarque 2.23** (Lien avec l'indépendance deux à deux). L'indépendance d'une famille implique clairement l'indépendance des événements pris deux à deux. La réciproque est fautive en général. Les événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  de l'exemple précédent sont par exemple indépendants deux à deux, mais pas mutuellement indépendants.

**Théorème 2.24** (Propriétés de l'indépendance). Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille d'événements indépendants, alors :

1. les  $(A_i^c)_{i \in I}$  sont indépendants ;

2. si  $J$  et  $K$  sont deux sous-ensembles de  $I$  disjoints, et si l'on note  $\mathcal{F}_J$  (respectivement  $\mathcal{F}_K$ ) la tribu engendrée par les  $(A_i)_{i \in J}$  (respectivement les  $(A_i)_{i \in K}$ ), alors les tribus  $\mathcal{F}_J$  et  $\mathcal{F}_K$  sont indépendantes.

**Démonstration.** Pour la première propriété, on raisonne par récurrence à partir de

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A^c \cap B^c] &= 1 - \mathbb{P}[A \cup B] = 1 - \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A \cap B] \\ &= 1 - \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B] = (1 - \mathbb{P}[A])(1 - \mathbb{P}[B]) \\ &= \mathbb{P}[A^c]\mathbb{P}[B^c]. \end{aligned}$$

La preuve de la deuxième propriété est admise.  $\square$

**Pile ou face : indépendance.** La deuxième propriété écrite en termes de tribus peut sembler complexe. Sur l'exemple du jeu de pile ou face répété, elle permet de justifier des propriétés très intuitives. Pour  $A_i = \llcorner \text{le } i^{\text{e}} \text{ lancer donne pile} \llcorner$ , les  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sont indépendants. Si  $A$  est par exemple l'événement « les 10 lancers pairs tombent tous sur pile » et  $B$  est défini par « sur les lancers 1, 3 et 7, il y a au moins deux piles », alors  $A$  et  $B$  sont indépendants : en effet, en posant  $J$  (resp.  $K$ ) l'ensemble des entiers pairs (resp. impairs),  $A$  est dans  $\mathcal{F}_J$  et  $B$  dans  $\mathcal{F}_K$ .

De façon encore plus élémentaire, cette propriété implique que si  $A, B, C$  sont indépendants, alors  $A \cup B$  est indépendant de  $C$ .



Ne pas confondre «  $A$  et  $B$  incompatibles » avec «  $A$  et  $B$  indépendants ». La première notion est purement ensembliste et s'interprète comme «  $A$  et  $B$  ne peuvent pas arriver simultanément ». La seconde nécessite une mesure de probabilité, intuitivement elle signifie que « savoir si  $A$  a eu lieu ne donne aucune information sur  $B$  ». Si  $A$  et  $B$  sont à la fois indépendants et incompatibles alors  $\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[\emptyset] = 0$  et donc  $\mathbb{P}[A] = 0$  ou  $\mathbb{P}[B] = 0$ . Notons enfin que si  $A$  et  $B$  sont indépendants alors  $A^c$  et  $B^c$  le sont, tandis que si  $A$  et  $B$  sont incompatibles, alors  $A^c$  et  $B^c$  ne le sont que s'ils forment une partition de  $\Omega$ .

**Lemme 2.25** (Borel–Cantelli). Soit  $(A_n)$  une suite d'événements dans  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

1. Cantelli : si  $\sum_n \mathbb{P}[A_n] < \infty$  alors  $\mathbb{P}[\overline{\lim} A_n] = 0$  ;
2. Borel (loi du zéro–un) : si les  $(A_n)$  sont **indépendants** alors

$$\mathbb{P}[\overline{\lim} A_n] = \begin{cases} 0 & \text{ssi } \sum_n \mathbb{P}[A_n] < \infty \\ 1 & \text{ssi } \sum_n \mathbb{P}[A_n] = \infty. \end{cases}$$

La seconde partie du lemme contient une réciproque à la première partie.

**Démonstration.** Pour la partie Cantelli : la suite  $(B_n)$  définie par  $B_n = \cup_{m \geq n} A_m$  est décroissante. Par conséquent, si  $\sum_n \mathbb{P}[A_n] < \infty$  alors

$$\mathbb{P}[\overline{\lim} A_n] = \mathbb{P}[\cap_n B_n] = \lim_n \mathbb{P}[B_n] \leq \lim_n \sum_{m \geq n} \mathbb{P}[A_m] = 0.$$

Pour la partie Borel : la première partie réduit le problème à établir que si  $\sum_n \mathbb{P}[A_n] = \infty$  alors  $\mathbb{P}[\overline{\lim} A_n] = 1$ , c'est-à-dire  $\mathbb{P}[\underline{\lim} A_n^c] = 0$ . Soit  $B_n = \cap_{m \geq n} A_m^c$ . Alors  $(B_n)$  est croissante pour l'inclusion, d'où  $\mathbb{P}[\underline{\lim} A_n^c] = \lim_n \mathbb{P}[B_n]$  par le théorème 2.11. Or l'indépendance des  $(A_n^c)$ , l'inégalité  $1 - x \leq e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , et  $\sum_n \mathbb{P}[A_n] = \infty$ , donnent pour tout  $n$  :

$$0 \leq \mathbb{P}[B_n] = \prod_{m \geq n} \mathbb{P}[A_m^c] \leq \prod_{m \geq n} e^{-\mathbb{P}[A_m]} = \exp\left(-\sum_{m \geq n} \mathbb{P}[A_m]\right) = 0. \quad \square$$

Ce lemme s'avère utile pour obtenir des événements presque sûrs. La première partie permet par exemple d'établir une version forte de la loi des grands nombres (Théorème 5.5). Donnons dès à présent une illustration directe de la première partie du lemme.

**Exemple 2.26** (Application de la première partie du lemme de Borel–Cantelli). *On modélise l'évolution d'une population hermaphrodite. Pour simplifier, on suppose que les individus sont éternels. À l'instant 0, la population compte 2 individus. Pour tout  $n \geq 1$ , à l'instant  $n$ , la population compte  $n+2$  individus, et un couple d'individus choisi au hasard fait un enfant, ce qui augmente la population de 1 individu. Soit  $A_n$  l'événement « les deux premiers individus font un enfant à l'instant  $n$  ». On a  $\mathbb{P}[A_1] = 1$  mais  $\mathbb{P}[A_n] \sim c/n^2$  quand  $n \rightarrow \infty$ , et donc  $\sum_n \mathbb{P}[A_n] < \infty$ . Grâce à la première partie du lemme de Borel–Cantelli, presque sûrement, le couple formé par les deux premiers individus ne fait plus d'enfant à partir d'un certain temps.*

Pour illustrer la seconde partie du lemme 2.25, nous revenons au jeu de pile ou face.

**Pile ou face : singes dactylographes.** Pour illustrer la seconde partie du lemme, revenons à l'exemple du pile ou face infini. Si l'on définit  $A_n =$  « le  $n^e$  lancer donne face », les  $A_n$  sont indépendants, et

$$\sum \mathbb{P}[A_n] = \sum_n (1/2) = \infty,$$

donc la deuxième partie du lemme de Borel–Cantelli implique

$$\mathbb{P}[\overline{\lim} A_n] = 1.$$

Or  $\overline{\lim} A_n =$  « une infinité de  $A_n$  se réalisent », autrement dit

$$\mathbb{P}[\text{« il y a une infinité de faces »}] = 1.$$

Cet argument peut s'adapter pour montrer plus généralement que n'importe quelle séquence finie de symboles se répète une infinité de fois (et en particulier apparaît au moins une fois) : la suite de 0 et de 1 contient donc presque sûrement le codage en binaire des œuvres complètes de Shakespeare<sup>9</sup>.

9. Ce théorème est souvent expliqué en disant qu'un singe éternel qui taperait éternellement sur une machine à écrire finirait par reproduire les œuvres complètes de Shakespeare. L'image est parfois attribuée à Borel, qui l'utilise dans sa note *La mécanique statistique et l'irréversibilité* publiée au Journal de Physique en 1913. « On a souvent cherché à donner une idée de l'extrême rareté des cas exceptionnels, rareté qui dépasse tout ce que notre imagination peut concevoir ; voici une comparaison qui me paraît particulièrement frappante. Concevons qu'on ait dressé un million de singes à frapper au hasard sur les touches d'une machine à écrire et que, sous la surveillance de contremaitres illettrés,

**Exercice 2.27** (Pas de loi « uniforme » sur  $\mathbb{N}$ ). Soit  $\mathbb{P}$  une mesure de probabilité sur l'ensemble  $\mathbb{N}$ . On suppose que  $\mathbb{P}$  est « uniforme » dans le sens où pour tout  $n$ , la probabilité de tirer un multiple de  $n$  vaut  $1/n$  :  $\mathbb{P}[n\mathbb{N}] = 1/n$ . Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers. Pour  $p \in \mathcal{P}$  on note  $A_p$  l'événement « être un multiple de  $p$  ». Montrer que les événements  $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$  sont indépendants. En déduire par le lemme de Borel-Cantelli qu'un tirage suivant  $\mathbb{P}$  donne presque sûrement un nombre divisible par une infinité de nombres premiers. Qu'en conclure ?



La seconde partie du lemme affirme qu'un certain événement  $(\overline{\lim} A_n)$  ne peut être que de probabilité 0 ou 1. Ce théorème admet la généralisation suivante.

**Théorème 2.28** (loi du zéro-un de Kolmogorov). Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  une suite de tribus sur  $\Omega$ , incluses dans  $\mathcal{F}$  et **indépendantes**. Soit  $\mathcal{G}_n$  la tribu engendrée par  $\cup_{m \geq n} \mathcal{F}_m$ . Alors  $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$  pour tout  $A$  dans la **tribu terminale**  $\mathcal{G}_\infty = \cap_n \mathcal{G}_n$ .

En quelque sorte, on a  $\mathcal{G}_\infty = \overline{\lim} \mathcal{F}_n$ . Notons que si  $A_n \in \mathcal{F}_n$  pour tout  $n$  alors  $\underline{\lim}_n A_n$  et  $\overline{\lim}_n A_n$  sont dans la tribu terminale et donc sont de probabilité 0 ou 1, ce qui montre que le second lemme de Borel-Cantelli découle de la loi du zéro-un de Kolmogorov.

**Démonstration.** Les tribus  $\mathcal{F}_n$  et  $\mathcal{G}_{n+1}$  sont indépendantes, et donc la tribu engendrée par  $\cup_n \mathcal{F}_n$  est indépendante de la tribu  $\mathcal{G}_\infty$ . Comme  $\mathcal{G}_\infty \subset \cup_n \mathcal{F}_n$  on en déduit que tout événement de  $\mathcal{G}_\infty$  est indépendant de lui-même, et est donc de probabilité 0 ou 1.  $\square$

## 2.7 Équiprobabilité continue : mesure de Lebesgue



Toute cette section est *stricto sensu* hors programme ; elle permet cependant de mettre en perspective les notions de variables continues (qui elles sont au programme !).

Les axiomes définissant les mesures positives (positivité,  $\Sigma$ -additivité) paraissent convenir très bien pour parler de surface ou de volume : la surface d'un ensemble en deux morceaux devrait bien être la somme des surfaces des morceaux. Cette intuition peut être rendue rigoureuse et on a le résultat suivant.

*ces singes dactylographes travaillent avec ardeur dix heures par jour avec un million de machines à écrire de types variés. Les contremaîtres illettrés rassembleraient les feuilles noircies et les relieraient en volumes. Et, au bout d'un an, ces volumes se trouveraient renfermer la copie exacte des livres de toute nature et de toutes langues conservés dans les plus riches bibliothèques du monde. Telle est la probabilité pour qu'il se produise, pendant un instant très court, dans un espace de quelque étendue, un écart notable de ce que la Mécanique statistique considère comme le phénomène le plus probable. Supposer que cet écart ainsi produit subsistera pendant quelques secondes revient à admettre que, pendant plusieurs années, notre armée de singes dactylographes, travaillant toujours dans les mêmes conditions, fournira chaque jour la copie exacte de tous les imprimés, livres et journaux, qui paraîtront la semaine suivante sur toute la surface du globe. Il est plus simple de dire que ces écarts improbables sont purement impossibles.* » Borel ne cherche pas ici à illustrer le théorème, mais bien à souligner que dans son application pratique (ici à la mécanique statistique), si l'on se fixe un temps d'attente raisonnable, l'événement rare ne se produira pas !

**Théorème 2.29** (Mesure de Lebesgue). *Soit  $d$  un entier et  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  la tribu borélienne sur  $\mathbb{R}^d$ . Il existe une unique mesure positive  $\lambda$  sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , appelée mesure de Lebesgue, telle que, pour tout pavé  $E = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \cdots [a_d, b_d]$ ,*

$$\lambda(E) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i).$$

Si  $\Omega$  est un sous-ensemble raisonnable<sup>10</sup> de  $\mathbb{R}^d$ , la collection

$$\mathcal{F} = \left\{ A \cap \Omega; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \right\}$$

est une tribu<sup>11</sup> et l'application

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

$$A \mapsto \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$$

est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  : la normalisation est évidente et la  $\Sigma$ -additivité provient de celle de  $\lambda$ . Cette probabilité représente le choix d'un point uniformément dans l'ensemble  $\Omega$  ; la probabilité que ce point tombe dans une région  $A$  est *proportionnelle au volume de  $A$*  (en dimension 2, à l'aire de  $A$  ; en dimension 1 à sa longueur).

**Fléchettes : le modèle.** On joue aux fléchettes sur une cible ronde modélisée par le disque unité dans le plan :  $\Omega = D(0, 1) := \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

On suppose que le point d'impact est réparti uniformément sur la cible : la probabilité de tomber dans une région est proportionnelle à son aire.

Si on ne marque des points que quand la fléchette tombe à une distance 1/2 du centre, on a par exemple :

$$\mathbb{P} [\text{« marquer des points »}] = \frac{\lambda(D(0, 1/2))}{\lambda(D(0, 1))} = \frac{\pi(1/2)^2}{\pi 1^2} = \frac{1}{4}.$$

**Exemple 2.30** (Corrosion de carrosserie). *Pour étudier la corrosion d'une carrosserie, on peut chercher à modéliser le point d'impact d'une goutte de pluie. Ce point sera a priori uniforme sur la surface exposée.*

De la même manière que les calculs dans le cas uniforme discret se ramènent à du dénombrement, le cas uniforme continu se réduit à des calculs de longueurs, d'aires ou de volumes.

Dans l'exemple du jeu de fléchettes, cherchons la probabilité de toucher exactement le centre  $O = (0, 0)$ . Pour tout  $r > 0$ ,  $\{O\}$  est inclus dans le disque  $D(O, r)$ , donc  $\mathbb{P}[\{O\}] \leq r^2$ . Par conséquent la probabilité de toucher le centre est *nulle*. Ceci est valable pour n'importe quel autre point de la cible.

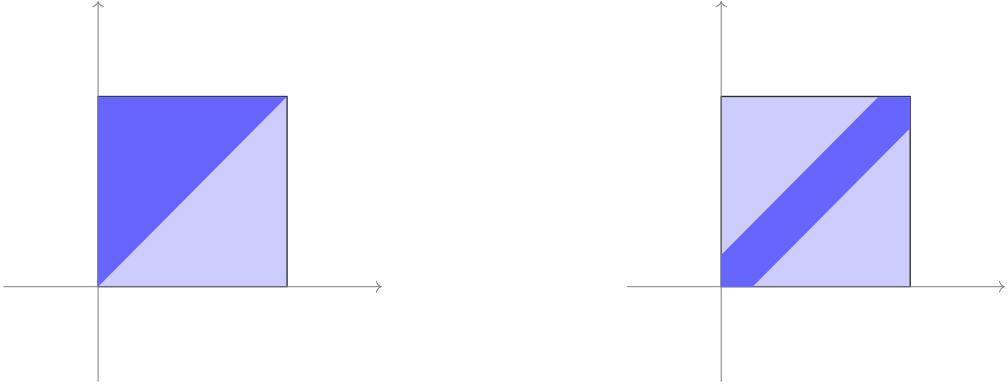


De façon encore plus surprenante, si  $A$  est une partie dénombrable de  $\Omega$  (par exemple l'ensemble des points du disque à coordonnées rationnelles), la  $\Sigma$ -additivité entraîne que

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{x \in A} \mathbb{P}[\{x\}] = 0.$$

10. C'est-à-dire que  $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  et  $\lambda(\Omega) > 0$ .

11. C'est la *tribu trace* déjà croisée plus haut à propos du conditionnement.



Le carré unité figuré en clair est l'ensemble  $\Omega$  ; les événements d'intérêt sont figurés en foncé. À gauche, l'événement « Athanase arrive avant Bérénice » est codé par le triangle  $x < y$  d'aire  $1/2$ . À droite, l'événement « A. et B. ne s'attendent pas plus de 10 min. », d'aire  $11/36$ . Comme l'aire totale du carré vaut 1, ce sont aussi les probabilités des événements correspondants.

FIGURE 2.3 – Rendez-vous d'Athanase et Bérénice

**Exemple 2.31** (Rendez-vous). *Athanase et Bérénice se donnent rendez-vous entre 12 et 13h. Le moment d'arrivée de chacun est uniforme sur cet intervalle de temps que l'on modélise par l'intervalle réel  $[0, 1]$ .*

*La probabilité qu'Athanase arrive avant Bérénice doit valoir  $1/2$  par symétrie ; vérifions ce fait. Le moment d'arrivée d'Athanase, comme celui de Bérénice, est modélisé par la probabilité uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ . De façon complètement similaire au cas discret, comme les arrivées des deux individus sont (supposées) indépendantes l'une de l'autre, l'expérience complète se modélise par la loi produit sur l'espace produit, qui n'est autre que la loi uniforme sur le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  : l'abscisse correspond au moment d'arrivée d'Athanase et l'ordonnée à celui de Bérénice. L'événement*

*« A. arrive avant B. »*

*est alors le triangle  $\{(x, y) \in [0, 1]^2, x < y\}$ , d'aire  $1/2$ . On retrouve bien le résultat annoncé. On peut répondre à des questions plus complexes. Calculons par exemple la probabilité que le temps passé par le premier arrivé à attendre son ami(e) ne dépasse pas 10 minutes. Cet événement correspond à la région du carré  $E = \{(x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \frac{1}{6}\}$  représentée à droite dans la figure 2.3. Son aire vaut  $11/36$ . C'est la probabilité cherchée.*



# Variabes aléatoires et intégration

## 3.1 Variables aléatoires réelles

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés *via* la notion d'événement à des conséquences *qualitatives* d'une expérience aléatoire : le dé a-t-il (oui ou non) donné un résultat pair ? la fléchette est-elle (oui ou non) dans la bonne zone ? Ma soupe du soir était-elle liquide ou congelée ? Pour étudier des conséquences *quantitatives*, il faut introduire la notion de **variable aléatoire**, qui fournira un outil pour poser des questions plus complexes : quel est le résultat du dé ? À quelle distance du centre la fléchette est-elle tombée ? Quelle est la température de ma soupe ?

**Définition 3.1** (Variable aléatoire réelle). *Si  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est un espace probabilisé, on appelle **variable aléatoire réelle** (abrégé v.a.r.) toute application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que*

$$\{X \in I\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} = X^{-1}(I) \in \mathcal{F}$$

pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . On dit que  $X$  est une v.a.r. **discrète** lorsque  $X(\Omega)$  est fini ou infini dénombrable, typiquement  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ .

**Pile ou face : variable aléatoire « nombre de piles ».** On joue  $n$  fois à pile ou face, ce qu'on modélise par l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  où  $\Omega = \{0, 1\}^n$ ,  $\mathcal{F}$  est la tribu grossière et  $\mathbb{P}$  l'équiprobabilité.

On s'intéresse au « nombre de piles » : cette quantité *aléatoire* qui *varie* en fonction de l'événement élémentaire qui se réalise est codée par la fonction  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $\omega = (a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$  par

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Cette fonction est bien une variable aléatoire, puisque  $X^{-1}(I)$  est une partie de  $\Omega$  et que  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Comme l'image directe  $X(\Omega)$  est l'ensemble fini  $\{0, 1, \dots, n\}$ ,  $X$  est discrète. On verra plus loin que  $X$  suit une loi binomiale.

Lorsque  $\mathcal{F}$  n'est pas la tribu grossière, il faut en principe vérifier la condition de mesurabilité, c'est-à-dire qu'il faut vérifier que  $\{X \in I\}$  appartient bien à  $\mathcal{F}$  (ensemble des parties de  $\Omega$  auxquelles  $\mathbb{P}$  attribue une mesure).

**Théorème 3.2** (Caractérisation). *Une application  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$  est une v.a.r. si et seulement si  $\{X \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{F}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .*

**Démonstration.** Découle des axiomes des tribus car tout intervalle de  $\mathbb{R}$  s'obtient en utilisant un nombre au plus dénombrable d'intervalles de la forme  $]-\infty, x]$  et symboles  $\cap, \cup, ^c$ . Par exemple  $]a, b[ = ]-\infty, b[ \cap ]-\infty, a]^c$  et  $[a, b] = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} ]a - 1/n, b]$ .  $\square$

**Fléchettes : abscisse.** On reprend l'exemple du tir de fléchettes sur la cible ronde :  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $\mathcal{F}$  est la tribu borélienne et  $\mathbb{P}$  la mesure de Lebesgue normalisée. L'abscisse du point d'impact est représentée par la fonction

$$X : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega = (x, y) & \mapsto x. \end{cases}$$

On peut vérifier la propriété de mesurabilité :  $X$  est bien une variable aléatoire.

**Exemple 3.3** (Variables aléatoires de Bernoulli). *Si  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est un espace de probabilité et  $A \in \mathcal{F}$  alors  $\mathbf{1}_A$  est une variable aléatoire discrète booléenne c'est-à-dire prenant les valeurs 0 ou 1. On dit qu'il s'agit d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre  $\mathbb{P}[\mathbf{1}_A = 1] = \mathbb{P}[A]$ . Ainsi, les variables aléatoires (quantitatives) permettent aussi de parler des événements (qualitatifs). Plus généralement, si  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  et  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  alors  $x_1 \mathbf{1}_{A_1} + \dots + x_n \mathbf{1}_{A_n}$  est une variable aléatoire réelle discrète.*

L'ensemble  $\mathbb{R}$  est muni de la tribu borélienne, engendrée par les intervalles. On dit que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est **borélienne** si pour tout intervalle  $I$ , l'image réciproque  $f^{-1}(I)$  appartient à la tribu borélienne  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . On admet que toute fonction continue est borélienne.

**Théorème 3.4** (Stabilité). *Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probablisé.*

*L'ensemble  $L_0(\Omega, \mathcal{F})$  des variables aléatoires sur  $\Omega$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre commutative : pour toutes variables  $X$  et  $Y$ , tous réels  $\lambda$  et  $\mu$ , les fonctions  $(\lambda X + \mu Y)$  et  $XY$  sont des variables aléatoires ; elles sont discrètes si  $X$  et  $Y$  le sont.*

*De plus, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est borélienne, alors  $f(X) := f \circ X : \omega \mapsto f(X(\omega))$  est une variable aléatoire réelle ; elle est discrète si  $X$  l'est.*

$$\begin{array}{ccc} (\Omega, \mathcal{F}) & \xrightarrow{X} & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ & \searrow f \circ X & \downarrow f \\ & & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \end{array}$$



La notion de fonction borélienne n'est pas explicitement au programme, mais le fait que  $f(X)$  est une variable aléatoire si  $f$  est raisonnable l'est.

**Remarque 3.5.** *Le produit ou la somme de variables non-discrètes peut être discret ; de même  $f(X)$  peut être discrète même si  $X$  ne l'est pas.*

Ce théorème est admis.

**Fléchettes : variable aléatoire.** Pour le jeu de fléchettes, la distance au centre  $R: \omega \mapsto \sqrt{X^2(\omega) + Y^2(\omega)}$  est une variable aléatoire. En effet  $X$  en est une, donc  $X^2$  aussi (la fonction  $x \mapsto x^2$  est continue donc borélienne). Par somme  $X^2 + Y^2$  est une variable aléatoire ; on conclut en composant par la fonction continue  $x \mapsto \sqrt{x}$ .

## 3.2 Fonction de répartition et loi

### Fonction de répartition

On a vu précédemment que la même expérience pouvait se modéliser par des univers  $\Omega$  différents, mais que deux modélisations différentes devaient donner la même probabilité aux événements d'intérêt. De même, ce qui importe pour l'étude de propriétés quantitatives n'est *pas* tant la *variable aléatoire en elle-même* mais bien les *probabilités que cette variable tombe dans telle ou telle région* de  $\mathbb{R}$ . Une première façon de coder mathématiquement ce comportement est la notion de **fonction de répartition**.

**Définition 3.6** (Fonction de répartition). *La fonction de répartition d'une v.a.r.  $X$  est la fonction  $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :*

$$F_X(x) := \mathbb{P}[X \leq x] = \mathbb{P}[\{\omega : X(\omega) \leq x\}].$$

**Théorème 3.7** (Propriété des fonction de répartition). *Si  $X$  est une v.a.r. alors*

1.  $F_X$  est croissante et continue à droite ;
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ .

**Démonstration.** La fonction  $F_X$  est croissante car si  $x \leq y$  alors  $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$ . Les propriétés suivantes s'obtiennent en utilisant le théorème 2.11, successivement avec...

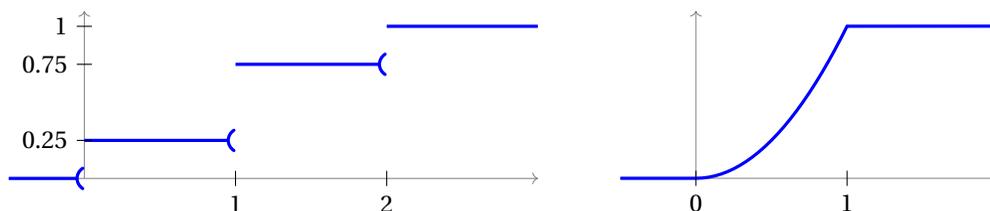
- l'intersection décroissante  $\bigcap_n \{X \leq x_n\} = \{X \leq x\}$  pour toute suite  $(x_n) \searrow x$  ;
- l'union croissante  $\bigcup_n \{X \leq x_n\} = \Omega$  pour toute suite  $(x_n) \nearrow \infty$  ;
- l'intersection décroissante  $\bigcap_n \{X \leq x_n\} = \emptyset$  pour toute suite  $(x_n) \searrow -\infty$ . □

**Remarque 3.8.** *On peut montrer que ces deux propriétés caractérisent les fonctions de répartition : si une fonction  $F$  vérifie ces propriétés, alors on peut construire un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et une v.a.r.  $X$  sur  $\Omega$  telle que  $F_X = F$ .*

**Fléchettes : fonction de répartition.** Soit  $R$  la distance au centre  $O$  pour une fléchette lancée uniformément sur le disque unité. Pour  $r < 0$ ,  $\mathbb{P}[R \leq r] = 0$  tandis que pour  $r \geq 1$ ,  $\mathbb{P}[R \leq r] = 1$ . La région intéressante est l'intervalle  $r \in [0, 1]$  : pour un tel  $r$ ,

$$\{R \leq r\} = \{\omega = (x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\} = D(O, r)$$

est d'aire  $\pi r^2$ , donc  $\mathbb{P}[R \leq r] = \frac{\pi r^2}{\pi 1^2} = r^2$ . Cette fonction est représentée dans la figure 3.1.



À gauche : la fonction de répartition du nombre de piles sur 2 lancers d'une pièce équilibrée. La médiane est unique et vaut 1 ; tous les réels dans  $]0,1[$  sont des quantiles d'ordre 0.25.  
 À droite : la fonction de répartition de la distance au centre d'une fléchette lancée uniformément sur le disque unité. Elle induit une bijection de  $]0,1[$  sur  $]0,1[$  : tous les quantiles sont uniques.

FIGURE 3.1 – Deux fonctions de répartition

**Théorème 3.9** (Fonction de répartition et intervalles). *Pour toute variable aléatoire réelle  $X$  et tous réels  $x < y$  :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[x < X \leq y] &= F_X(y) - F_X(x), \\ \mathbb{P}[X < x] &= F_X(x^-) := \lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z < x}} F_X(z), \\ \mathbb{P}[X = x] &= F(x) - F_X(x^-).\end{aligned}$$

**Démonstration.** Pour la première propriété, on décompose  $\{X \leq y\}$  en union disjointe  $\{X \leq x\} \cup \{x < X \leq y\}$ . Pour la seconde, on réutilise le théorème 2.11 avec l'union croissante  $\{X < x\} = \cup_n \{X \leq x_n\}$  pour toute suite  $(x_n) \nearrow x$  avec  $x_n < x$ .  $\square$

**Définition 3.10** (Médiane, quartiles, quantiles). *Soit  $X$  est une variable aléatoire réelle de fonction de répartition  $F_X$ . Pour tout réel  $\alpha \in ]0,1[$ , si  $F_X(x^-) \leq \alpha$  et  $F_X(x) \geq \alpha$  on dit que  $x$  est un **quantile d'ordre  $\alpha$**  de  $X$ . Ceci est vérifié en particulier si  $F_X(x) = \alpha$ . Pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  on parle de **médiane**. Les quantiles d'ordre  $1/4, 1/2, 3/4$  sont appelés **quartiles**, ceux d'ordre  $1/10, 2/10, \dots$ , **déciles**.*

La notion de quantile permet de décrire grossièrement la répartition des valeurs de la v.a.r.  $X$  ; en particulier la médiane est une valeur « centrale », et l'écart entre les quartiles donne une idée de l'« étalement » de la variable. En pratique on peut par exemple étudier le salaire médian, l'âge médian, etc. ; s'intéresser au salaire des 10% les plus riches revient à chercher le 9<sup>e</sup> décile. Le plus célèbre des quantiles est le quantile d'ordre  $1 - 0.05/2 = 0.975$  de la loi normale standard  $\mathcal{N}(0,1)$  ; il vaut environ 1.96. Ce quantile intervient dans l'expression des bornes de l'intervalle de confiance sur la moyenne obtenu avec le théorème limite central comme on le verra plus loin. L'équation  $F(x) = \alpha$  peut avoir 0, 1 ou une infinité de solutions. Dans le premier cas, le quantile d'ordre  $\alpha$  est unique, c'est graphiquement l'abscisse du point où le graphe de  $F$  « saute » le niveau  $\alpha$ . Dans le dernier cas le quantile n'est *a priori* pas unique, même si l'on fixe parfois une règle pour choisir une solution particulière. Pour une variable discrète,  $F$  est constante par morceaux et  $F(x) = \alpha$  a toujours 0 ou une infinité de solutions.

### Loi d'une variable aléatoire

Le « comportement » d'une variable aléatoire, que l'on a étudié au-dessus *via* la fonction de répartition, peut aussi être représenté par sa loi.

**Définition 3.11** (Loi). La **loi** d'une variable aléatoire réelle  $X$  est la mesure de probabilité  $\mathbb{P}_X$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  définie pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  par :

$$\mathbb{P}_X(I) = \mathbb{P}[X \in I] = \mathbb{P}[\{\omega, X(\omega) \in I\}].$$

Si  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$ , on note  $X \sim \mu$  et on dit que «  $X$  suit la loi  $\mu$  » lorsque la variable aléatoire réelle  $X$  a pour loi  $\mu$ . Le terme « loi » est synonyme de « mesure de probabilité ».

La loi de  $X$  et sa fonction de répartition contiennent les mêmes informations :

**Théorème 3.12** (Caractérisation de la loi par la fonction de répartition). Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a.r. alors  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$  si et seulement si  $F_X = F_Y$ .

**Démonstration.** Reprendre la preuve du théorème 3.2. □

**Sondage simple : deux modélisations, une loi.** Athanase et Bérénice reprennent leur expérience de tirage sans remise de deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes. On note  $X$  le nombre de boules vertes tirées. Athanase garde son choix d'univers et considère  $\Omega_A$  l'ensemble des combinaisons de deux boules parmi 5 ( $\text{Card}(\Omega_A) = 10$ ). Sa variable  $X = X_A$  est une fonction de  $\Omega_A$  dans  $\mathbb{R}$ . Il en déduit :

$x$	0	1	2
$\mathbb{P}[X_A = x]$	3/10	3/5	1/10

Bérénice opte pour l'univers  $\Omega_B$  des arrangements de deux boules parmi les 5. Elle a donc  $\text{Card}(\Omega_B) = 20$ . Pour sa variable  $X_B : \Omega_B \rightarrow \mathbb{R}$ , elle obtient :

$x$	0	1	2
$\mathbb{P}[X_B = x]$	6/20	6/20 + 6/20 = 3/5	2/20 = 1/10

Athanase et Bérénice obtiennent donc des variables aléatoires définies sur des espaces différents, mais ces deux variables ont *la même loi*.

**Théorème 3.13** (Lois discrètes). La loi d'une v.a.r. discrète, à valeurs dans un ensemble au plus dénombrable  $E$ , est caractérisée par la donnée de  $\mathbb{P}[X = x]$  pour tout  $x \in E$ , car pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  on a, en raison du fait que  $I \cap E$  est au plus dénombrable,

$$\mathbb{P}[X \in I] = \mathbb{P}[X \in I \cap E] = \sum_{x \in I \cap E} \mathbb{P}[X = x].$$

La fonction  $x \mapsto \mathbb{P}[X = x]$  n'a pas de nom classique en français ; l'appellation à la mode anglaise est **fonction de masse** (probability mass function).

**Pile ou face : quelques lois discrètes classiques.** Le jeu de pile ou face permet de définir plusieurs lois classiques. On fixe ici un  $p \in ]0, 1[$  et on considère des lancers répétés d'une pièce qui tombe sur pile avec probabilité  $p$ . On représente toujours pile par 1 et face par 0.

— **Loi de Bernoulli** : On note  $X$  le résultat du premier lancer. L'ensemble des

valeurs possibles est  $E = \{0, 1\}$  et

$$\mathbb{P}[X = 1] = 1 - \mathbb{P}[X = 0] = p.$$

- **Loi binomiale :** On note  $S$  la somme des résultats des  $n$  premiers lancers. On dit que  $S$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , et l'on note  $S \sim \text{Binom}(n, p)$ ;  $S$  prend ses valeurs dans  $E = \{0, 1, \dots, n\}$  et pour tout  $k \in E$  :

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- **Loi géométrique :** On note  $T$  le numéro du premier lancer qui donne pile. On dit que  $T$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ , et l'on note  $T \sim \text{Geom}(p)$ ;  $T$  prend ses valeurs dans  $E = \mathbb{N}^*$ , et pour tout  $k \geq 1$  :

$$\mathbb{P}[X = k] = (1-p)^{k-1} p.$$

On verra plus loin, la loi binomiale est parfois bien approchée par la **loi de Poisson**  $\text{Poi}(\lambda)$ , caractérisée pour un paramètre  $\lambda > 0$  par  $E = \mathbb{N}$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

**Sondage simple : loi hypergéométrique et approximation binomiale.** Nous avons déjà vu précédemment sous l'angle combinatoire la **loi hypergéométrique** : si dans une population de  $N = N_1 + N_2$  individus dont  $N_1$  sont de type 1 et  $N_2$  de type 2, on effectue un sondage sans remise sur  $n \leq N$  individus, alors le nombre  $X$  d'individus de type 1, parmi les  $n$  individus tirés, suit la loi hypergéométrique  $\text{HyperGeom}(N_1, N_2, n)$  sur  $E = \{0, 1, \dots, n\}$  donnée pour tout  $0 \leq k \leq n$  par

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Si la taille de la population tend vers l'infini mais que la proportion d'individus de type 1 converge vers  $p$ , la loi hypergéométrique converge vers une loi binomiale. Plus précisément, on considère deux suites  $N_1(m)$  et  $N_2(m)$  qui tendent vers l'infini et vérifiant

$$\frac{N_1(m)}{N_1(m) + N_2(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} p.$$

On fixe un entier  $n$ , et on considère  $X_m$  une variable de loi  $\text{HyperGeom}(N_1, N_2, n)$ . Alors, pour tout  $0 \leq k \leq n$ , la formule de Stirling<sup>1</sup> entraîne

$$\mathbb{P}[X_m = k] = \frac{\binom{N_1(m)}{k} \binom{N_2(m)}{n-k}}{\binom{N_1(m) + N_2(m)}{n}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Intuitivement, si la population est très grande devant le nombre de tirages, le tirage sans remise (hypergéométrique) est très proche du tirage avec remise (binomial). En quelque sorte, le résultat du lancer d'une pièce de monnaie correspond à un tirage dans

une grande population à deux types constituée par toutes les possibilités physiques du lancer. Cela permet de concevoir le jeu de pile ou face de paramètre  $p$  quelconque comme une approximation de tirages équiprobables dans une grande population à deux types. Plus généralement, les modèles non équiprobables peuvent toujours être réduits à des modèles équiprobables, intrinsèquement combinatoires, éventuellement via un passage à la limite sur des paramètres.

**Exemple 3.14** (Lois uniformes). On dit qu'une v.a.r.  $X$  suit la loi uniforme sur l'ensemble fini  $\{1, 2, \dots, n\}$  lorsque  $\mathbb{P}[X = k] = 1/n$  pour tout  $1 \leq k \leq n$ . Dans ce cas,  $F_X$  est constante sur les morceaux  $]-\infty, 0[$ ,  $[0, 1[$ ,  $[1, \dots, [n-1, n[$ ,  $[n, \infty[$  et y prend les valeurs  $0, 1/n, \dots, (n-1)/n, 1$ . On dit qu'une v.a.r.  $X$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$  lorsque  $\mathbb{P}_X(I) = |I \cap [0, 1]|$  pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . Dans ce cas, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

**Exercice 3.15** (Algorithme de simulation de Fisher-Yates ou de Knuth). Si  $U_1, \dots, U_n$  sont des v.a. indépendantes avec  $U_k$  de loi uniforme sur  $\{1, \dots, k\}$  pour tout  $1 \leq k \leq n$ , montrer que le produit de transpositions aléatoires  $\sigma_n = (1, U_1) \cdots (n, U_n)$  dans le groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  suit la loi uniforme sur  $\mathcal{S}_n$ . Indication : montrer, par récurrence, que  $\mathbb{P}[\sigma_n = \sigma]$  ne dépend pas de  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . Montrer qu'il en est de même du produit inversé  $(n, U_n) \cdots (1, U_1)$ . Préciser le lien avec le pseudo-code informatique suivant :

```
for k from length(v) downto 2 do swap(v[k], v[ceil(k*rand)])
```

**Définition 3.16** (Lois à densité). On dit qu'une fonction continue par morceaux  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une **densité** (de probabilité) lorsqu'elle vérifie

$$f \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

On dit que la loi d'une variable aléatoire réelle  $X$  admet la densité  $f$  lorsque pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}[X \in I] = \int_I f(x) dx.$$

On dit que  $X$  a une **loi à densité**, et  $F_X$  est la primitive de  $f$  valant 1 en  $+\infty$ .

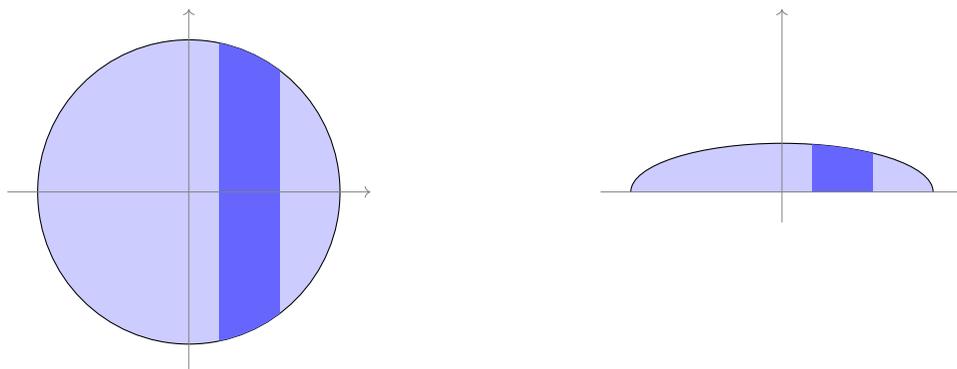
Nous renvoyons à l'annexe H pour quelques rappels sur les résultats de théorie de l'intégration au programme.

**Fléchettes : densités.** La distance au centre  $R$  dans le jeu de fléchettes est une variable à densité : la fonction

$$f_R : r \mapsto \begin{cases} 2r & \text{si } r \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

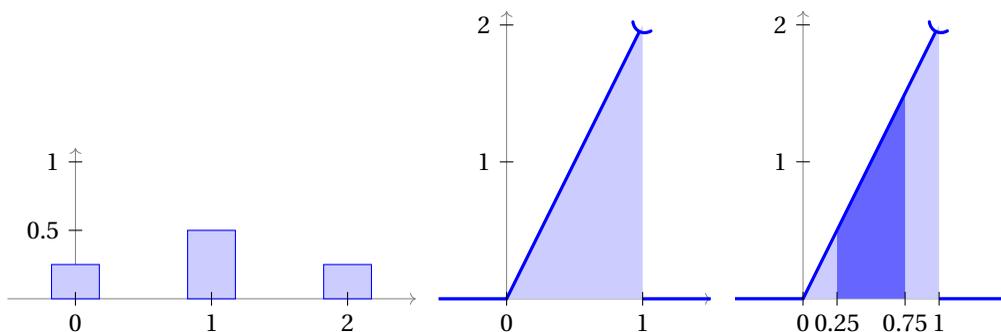
obtenue en dérivant  $F_R$  est une densité de  $R$ . La fonction  $g_R$  définie par  $g_R(r) = f_R(r)$  pour  $r \neq 1$  et  $g_R(1) = 0$  est également une densité pour  $R$  : il n'y a donc pas unicité.

1.  $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$  ou plus précisément  $n! = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n(1 + \mathcal{O}_{n \rightarrow \infty}(1/n))$ .



À gauche, la probabilité que  $X$  tombe entre  $a$  et  $b$  est le rapport entre l'aire foncée et l'aire du disque. Par symétrie, ce rapport est le même si on supprime la partie inférieure de la cible. On peut ensuite changer l'échelle en  $y$  pour obtenir une aire totale de 1, toujours sans changer les rapports d'aire. On obtient la courbe de droite, représentative de la fonction  $f_X : x \mapsto \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}$ , qui est donc une densité pour  $X$ .

FIGURE 3.2 – Fléchettes : loi de l'abscisse



À gauche, le diagramme en bâtons représentant la fonction de masse de la variable « nombre de piles sur deux lancers ». La probabilité d'obtenir chaque valeur est proportionnelle à la hauteur du bâton correspondant.

Au milieu, une densité de la variable  $R$ , distance au centre pour un jeu de fléchettes. L'aire sous la courbe vaut  $\int f(x)dx = 1$ .

À droite, pour la même variable  $R$ , la probabilité de tomber entre deux valeurs est égale à l'aire sous la courbe entre ces deux valeurs :  $\mathbb{P}[0.25 \leq R \leq 0.75] = \int_{0.25}^{0.75} 2rdr = 1/2$ .

FIGURE 3.3 – Diagrammes en bâtons et densités

Si l'on note  $X$  l'abscisse du point d'impact, le raisonnement indiqué sous la figure 3.2 montre que  $X$  admet la densité

$$f_X : x \mapsto \frac{2}{\pi} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \sqrt{1-x^2}.$$

On dit que  $X$  suit la **loi du demi-cercle** sur  $[-1,1]$ .

Voici quelques exemples de lois à densité.

- **Loi uniforme sur  $[a, b]$**  :  $f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$  avec  $a < b$  ; c'est l'analogie continu de l'équiprobabilité.
- **Loi exponentielle** :  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$  avec  $\lambda > 0$  ; elle apparaît pour modéliser des durées de vie, des temps d'attente (cf l'annexe F).
- **loi normale ou gaussienne** :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$  avec  $m \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ . Elle est fondamentale en raison de son apparition dans le théorème limite central ; nous lui consacrerons une section plus loin.
- **Loi de Cauchy** : pour  $a > 0$ ,  $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ . C'est un exemple simple de loi à queue lourde :  $f$  décroît lentement à l'infini, et  $X$  prend souvent de grandes valeurs. On verra plus loin que loi de Cauchy ne vérifie pas la loi des grands nombres.

De nombreux autres exemples apparaissent naturellement en statistiques : lois de Pareto, loi du chi-deux  $\chi^2$ , loi Beta, loi Gamma, etc. Un bon exercice consiste à calculer lorsque cela est possible la fonction de répartition.

### Simulation par la fonction de répartition

De nombreux problèmes en probabilités et statistiques sont trop complexes pour être traités analytiquement ; on a alors souvent recours à des simulations numériques. Pour les mener à bien il est utile de pouvoir simuler des tirages de variables aléatoires suivant des lois diverses. Supposons que l'on ait accès à un générateur de loi uniforme (fonction communément appelée `rand`). Nous allons voir que si l'on sait « inverser » la fonction de répartition d'une variable  $X$ , alors on sait simuler  $X$ .

Les fonctions de répartition ne sont en général pas bijectives (voir par exemple la figure 3.1). On peut toutefois « presque » les inverser.

**Définition 3.17** (Inverse généralisé). *Soit  $F$  une fonction croissante, continue à droite, de limites 0 et 1 en  $-\infty$  et  $+\infty$ . La fonction  $G$  définie par*

$$G: [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$y \mapsto G(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$$

est appelée **inverse généralisé** de  $F$ . Elle est croissante et vérifie

$$G([0, 1]) \subset \mathbb{R},$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \quad F(G(y)) \geq y \quad \text{et} \quad G(F(x)) \leq x,$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \quad (G(y) \leq x) \Leftrightarrow (y \leq F(x)).$$

**Démonstration.** La définition de  $G$  entraîne immédiatement sa croissance ; l'hypothèse sur les limites garantit que  $G([0, 1])$  est inclus dans  $\mathbb{R}$ . La définition entraîne également :

- si  $F(x) \geq y$ , alors  $G(y) \leq x$ ,
- si  $x > G(y)$ , il existe  $x' \in [G(y), x]$  tel que  $F(x') \geq y$ .

Le premier point appliqué à  $y = F(x)$  montre que  $G(F(x)) \leq x$ . Comme  $F$  est continue à droite, le deuxième point entraîne  $F(G(y)) \geq y$ .

Pour montrer le sens direct de l'équivalence, il suffit de composer  $G(y) \leq x$  par la fonction croissante  $F$  et d'utiliser  $y \leq F(G(y))$ . La réciproque vient de même en utilisant la croissance de  $G$ .  $\square$

**Théorème 3.18** (Méthode d'inversion). *Soit  $X$  une v.a.r. de fonction de répartition  $F_X$  et  $U$  une variable de loi uniforme sur  $]0,1[$ . Si l'on note  $G$  l'inverse généralisé de  $F_X$ , alors la variable  $X' = G(U)$  a même loi que  $X$ .*

*Si  $G$  est explicite on peut donc simuler  $X$  à partir de  $U$ .*

**Démonstration.** Soit  $x'$  un réel. L'équivalence à la fin de la définition de  $G$  donne :

$$\begin{aligned} \{\omega : X'(\omega) \leq x'\} &= \{\omega : G(U(\omega)) \leq x'\} \\ &= \{\omega : U(\omega) \leq F(x')\} \\ &= U^{-1}(]-\infty, F(x')]). \end{aligned}$$

Comme  $U$  est une variable aléatoire, cet ensemble est dans  $\mathcal{F}$ , et sa probabilité vaut

$$\mathbb{P}[X' \leq x'] = \mathbb{P}[U \leq F(x')] = F_U(F(x')).$$

La fonction de répartition de la loi uniforme  $U$  est connue ; en particulier  $F_U(y) = y$  pour  $y \in [0, 1]$ . Par conséquent

$$\mathbb{P}[X' \leq x'] = F(x')$$

et  $X'$  a la même fonction de répartition — et donc la même loi — que  $X$ .  $\square$

**Remarque 3.19** (Cas continu). *On peut vérifier que si  $F$  est continue et strictement croissante, elle établit une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]0,1[$  d'inverse (la restriction de)  $G$ .*

Voyons maintenant quelques applications de ce théorème.

**Exemple 3.20** (Simulation d'une loi discrète finie). *Soit  $U$  une v.a.r. uniforme sur  $[0, 1]$ . Pour tout  $p \in [0, 1]$ , la v.a.r.  $\mathbf{1}_{\{U \leq p\}}$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Plus généralement, soit  $p_1, \dots, p_n \in [0, 1]$  avec  $p_1 + \dots + p_n = 1$ . Posons  $a_0 = 0$  et  $a_i = p_1 + \dots + p_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . La v.a.r.  $X$  à valeurs dans  $\{1, \dots, n\}$  qui vaut par définition  $i$  sur l'événement  $\{U \in [a_{i-1}, a_i]\}$  vérifie forcément  $\mathbb{P}[X = i] = p_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .*

**Exemple 3.21** (Simulation de la loi uniforme sur  $[a, b]$ ). *Si  $U$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$  alors pour tout  $a < b$ , la v.a.r.  $(b - a)U + a$  suit la loi uniforme sur  $[a, b]$ .*

**Exemple 3.22** (Simulation de la loi exponentielle). *Si  $U$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$  alors  $-\ln(1 - U)/\lambda$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Comme  $1 - U$  et  $U$  ont même loi, on peut utiliser alternativement  $-\ln(U)/\lambda$ . Sur un ordinateur, la fonction  $\ln$  dilate la discrétisation de  $U$  près de 0 et la précision sera mauvaise dans cette zone. Cependant, cette dilatation est modérée (en  $\ln$ ), et la simulation reste correcte.*

**Exemple 3.23** (Simulation de la loi de Cauchy). *Si  $U$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$  alors  $\tan(\pi U - \pi/2) = -\frac{1}{\tan(\pi U)}$  suit la loi de Cauchy. Sur un ordinateur, la fonction  $1/\tan(\pi \cdot)$  dilate la discrétisation de  $U$  près de 0 et de 1. Cette dilatation est plus forte que dans l'exemple précédent (en  $1/x$  en 0). Les grandes valeurs de la loi de Cauchy seront mal simulées alors qu'elles ont une forte influence sur la moyenne.*

### 3.3 Espérance — définition et propriétés générales

#### Espérance dans le cas fini

**Définition 3.24** (Espérance). Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble  $E$  **fini**. L'**espérance** de la variable  $X$  est la quantité :

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in E} x \cdot \mathbb{P}[X = x].$$

Si  $X$  représente un gain,  $\mathbb{E}[X]$  est ce qu'on peut « raisonnablement espérer » gagner en une expérience; c'est la *moyenne* des valeurs de  $X$ , *pondérée* par les poids  $\mathbb{P}[X = x]$ .

On peut montrer (et c'est un bon exercice) que cette espérance est *linéaire* : si  $X$  et  $Y$  sont deux variables prenant un nombre fini de valeurs, si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux réels, alors  $\lambda X + \mu Y$  prend un nombre fini de valeurs et :

$$\mathbb{E}[\lambda X + \mu Y] = \lambda \mathbb{E}[X] + \mu \mathbb{E}[Y].$$

**Pile ou face : espérance de la loi binomiale.** On joue à pile ou face, la probabilité d'obtenir pile étant  $p \in ]0, 1[$ . Calculons l'espérance des variables  $X$  et  $S$  définies plus haut. La variable de Bernoulli  $X$  prend ses valeurs dans  $\{0, 1\}$ , son espérance vaut

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \{0, 1\}} x \mathbb{P}[X = x] = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

La variable binomiale  $S$  vaut  $k$  avec probabilité  $\binom{n}{k}(1 - p)^{n-k}p^k$ ; son espérance vaut

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} (1 - p)^{n-k} p^k.$$

Pour calculer cette somme on peut par exemple utiliser, pour  $k \geq 1$ , la formule<sup>2</sup> combinatoire  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$  et écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} (1 - p)^{n-k} p^k \\ &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (1 - p)^{(n-1)-(k-1)} p^{k-1} p \\ &= n p \sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'} (1 - p)^{(n-1)-k'} p^{k'} \\ &= n p (1 - p + p)^{n-1} \\ &= n p. \end{aligned}$$

où l'on a fait le changement d'indice  $k' = k - 1$  avant d'utiliser à l'avant-dernière ligne la formule du binôme.

Nous verrons plus loin d'autres façons de calculer cette espérance.

2. Pour justifier cette formule, on peut compter le nombre de façons de choisir parmi  $n$  personnes

### Définition générale

La bonne façon de généraliser la notion d'espérance à des variables aléatoires quelconques n'est *a priori* pas claire : si  $E$  est infini dénombrable il peut y avoir des problèmes de convergence, et pour  $E$  infini indénombrable la somme n'a plus de sens.

On peut alors chercher à étendre la notion en gardant la propriété de linéarité.

**Théorème 3.25** (Espérance des variables positives – Admis). *Soit  $L_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  l'ensemble des variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $[0, \infty]$ . Il existe une unique application*

$$\mathbb{E} : L_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mapsto [0, \infty]$$

avec les propriétés suivantes (convention  $0 \times \infty = 0$ ) :

1.  $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{P}[A]$  pour tout  $A \in \mathcal{F}$ , et en particulier  $\mathbb{E}[\mathbf{1}_\Omega] = 1$  ;
2.  $\mathbb{E}$  est linéaire :  $\mathbb{E}[\lambda X + \mu Y] = \lambda \mathbb{E}[X] + \mu \mathbb{E}[Y]$  pour tous  $X, Y \in L_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$  ;
3.  $\mathbb{E}[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n]$  pour toute suite  $(X_n)$  croissante de  $L_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

La troisième propriété est connue sous le nom de *convergence monotone*.

**Preuve du cas discret.** Si  $X$  prend un nombre fini de valeurs, elle peut s'écrire comme la somme finie d'indicatrices  $X = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{1}_{A_k}$  avec  $A_k = \{\omega : X(\omega) = x_k\} \in \mathcal{F}$ . Grâce aux deux premières propriétés on retrouve bien la formule  $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{P}[A_k]$ . Si  $X$  est une variable aléatoire discrète positive, alors il existe une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  croissante de v.a.r. du type précédent telles que  $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  d'où  $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}[X = x]$  par convergence monotone pour les séries. On admet le résultat au-delà des v.a.r. discrètes.  $\square$

**Exercice 3.26.** *Montrer que si  $X \geq 0$  et  $\mathbb{E}[X] < \infty$  alors  $\mathbb{P}[X < \infty] = 1$ .*

Généralisons maintenant la notion d'espérance à des variables de signe quelconque. Pour cela, si  $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$  est une v.a.r., on la décompose en différences de variables positives en posant  $X_+ = \max(X, 0)$  et  $X_- = \max(-X, 0)$  ; on a alors :

$$|X| = X_+ + X_- \quad \text{et} \quad X = X_+ - X_-.$$

**Définition 3.27** (Espérance des variables quelconques). *On dit qu'une v.a.r.  $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$  est **intégrable** lorsque*

$$\mathbb{E}|X| = \mathbb{E}[X_+] + \mathbb{E}[X_-] < \infty.$$

On définit alors l'**espérance** de  $X$  en posant

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_+] - \mathbb{E}[X_-].$$

On note  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  l'ensemble des v.a.r. intégrables, et plus généralement  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  l'ensemble des v.a.r.  $X$  telles que  $|X|^p$  est intégrable.

L'espérance possède les propriétés fondamentales et immédiates suivantes :

---

un groupe de  $k$  personnes et un chef de groupe. Pour cela on peut d'abord choisir le groupe  $\binom{n}{k}$  choix puis choisir un chef dans le groupe ( $k$  choix), ou on peut choisir d'abord le chef ( $n$  choix) puis compléter le groupe avec  $k-1$  autres personnes  $\binom{n-1}{k-1}$  choix.

i ) **linéarité** : si  $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  alors  $\lambda X + \mu Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et

$$\mathbb{E}[\lambda X + \mu Y] = \lambda \mathbb{E}[X] + \mu \mathbb{E}[Y] ;$$

ii ) **positivité** : si  $X \in L_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  alors  $\mathbb{E}[X] \geq 0$  ;

iii ) **croissance** : si  $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  avec  $X \leq Y$  alors  $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$ .

L'inégalité triangulaire donne  $|\mathbb{E}[X_+] - \mathbb{E}[X_-]| \leq \mathbb{E}[X_+] + \mathbb{E}[X_-]$ , donc

$$|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|].$$

Notons que  $\mathbb{E}$  est une forme linéaire sur l'espace vectoriel  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Si  $X$  est une v.a.r. constante et égale à un réel  $c$  alors  $X$  est intégrable et  $\mathbb{E}[X] = c$ .

**Définition 3.28** (Moments). Si  $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ , on dit que  $\mathbb{E}[X^p]$  est le **moment**<sup>3</sup> d'ordre  $p$  de  $X$ . En particulier,  $\mathbb{E}[X]$  est le « premier moment » de  $X$ .

Si  $X$  est bornée, c'est-à-dire  $\mathbb{P}[|X| \leq r] = 1$  pour un réel  $r \in \mathbb{R}_+$ , alors  $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  pour tout  $p \geq 1$  et  $X$  possède dans ce cas des moments de tout ordre.

**Exercice 3.29** (Espérance des indicatrices, inégalités de Boole-Bonferonni). En prenant l'espérance dans l'identité :

$$1 - \mathbf{1}_{\cup_{1 \leq i \leq r} A_i} = \prod_{1 \leq i \leq r} \mathbf{1}_{A_i^c} = \prod_{1 \leq i \leq r} (1 - \mathbf{1}_{A_i}) = \sum_{k=1}^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r} (-1)^k \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}$$

on retrouve le principe d'inclusion-exclusion (théorème 2.3)

$$\mathbb{P} \left[ \bigcup_{1 \leq i \leq r} A_i \right] = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} S_k \quad \text{où} \quad S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r} \mathbb{P}[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}].$$

Les inégalités de Boole-Bonferonni raffinent ce principe en donnant des signes :

$$\mathbb{P}[\cup_{1 \leq i \leq r} A_i] - \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} S_k \quad \text{est} \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{si } m \text{ impair} \\ \leq 0 & \text{si } m \text{ pair} \\ = 0 & \text{si } m = r \text{ (inclusion-exclusion !)} \end{cases}$$

En prenant  $m = 1$  à gauche et  $m = 2$  à droite on obtient le cas particulier (pour  $r \geq 2$ )

$$\underbrace{\mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_r]}_{S_1} \leq \mathbb{P}[\cup_{1 \leq i \leq r} A_i] \leq \underbrace{\mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_r]}_{S_1} - \underbrace{\sum_{i < j} \mathbb{P}[A_i \cap A_j]}_{S_2}.$$

Pour établir les inégalités de Boole-Bonferonni, on commence par observer que si les réels  $(x_k)_{k=0, \dots, r}$  vérifient pour un certain  $i$

$$x_0 \leq \dots \leq x_i \text{ et } x_i \geq x_{i+1} \geq \dots \geq x_r$$

3. Ce terme vient de la mécanique — le moment (appelé usuellement en français « quantité de mouvement ») d'un système étant une moyenne des vitesses de ses éléments, pondérée par leurs masses.

et l'égalité  $\sum_{k=0}^r (-1)^k x_k = 0$  alors  $\sum_{k=0}^m (-1)^k x_k \geq 0$  pour les  $m$  pairs et  $\leq 0$  pour les  $m$  impairs (ceci mérite une démonstration, qui est omise). Appliquée à la suite des coefficients binomiaux  $x_0 = \binom{r}{0}, \dots, x_r = \binom{r}{r}$ , cette observation donne

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{r}{k} \text{ est } \begin{cases} \geq 0 & \text{si } m \text{ impair} \\ \leq 0 & \text{si } m \text{ pair} \\ = 0 & \text{si } m = r \text{ (formule du binôme !).} \end{cases}$$

À présent, si  $r(\omega)$  désigne le nombre d'indices  $j \in \{1, \dots, r\}$  tels que  $\omega \in A_j$  alors

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r} \mathbf{1}_{A_{i_1}}(\omega) \cdots \mathbf{1}_{A_{i_k}}(\omega) = \binom{r(\omega)}{k}.$$

Le résultat désiré découle ensuite de la linéarité et de la positivité de l'espérance. On trouvera une application des inégalités de Boole-Bonferroni en fiabilité dans le livre de Delmas et Jourdain [6].

### 3.4 Espérance des variables aléatoires discrètes

L'écriture d'une variable discrète positive  $X$  comme limite monotone de sommes finies d'indicatrices montre que la formule de l'espérance des variables discrètes finies reste valable pour des variables discrètes positives :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \cdot \mathbb{P}[X = x].$$

L'annexe H propose des rappels sur le sens de la somme. Le théorème du transfert permet plus généralement de calculer l'espérance de fonctions de v.a.r. discrètes.

**Théorème 3.30** (Espérance et formule du transfert pour les v.a. discrètes). *Si  $X$  est une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble au plus dénombrable  $E$  alors  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  si et seulement si la somme  $\sum_{x \in E} |x| \mathbb{P}[X = x]$  est finie, et on a alors*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}[X = x].$$

Plus généralement, pour toute fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on a  $\varphi(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  si et seulement si la somme  $\sum_{x \in E} |\varphi(x)| \mathbb{P}[X = x]$  est finie, et on a alors la **formule du transfert**

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum_{x \in E} \varphi(x) \mathbb{P}[X = x].$$

**Remarque 3.31** (Terminologie). *Le terme de transfert vient du formalisme de théorie de la mesure : l'espérance d'une variable  $X : \Omega \rightarrow E$  s'y interprète comme une intégration sur l'espace de départ  $\Omega$ , par rapport à la mesure (de probabilité)  $\mathbb{P}$ . Le « transfert » consiste à calculer cette espérance comme une somme sur l'espace d'arrivée  $E$ .*

**Démonstration.** Quitte à numéroter les éléments de  $E$ , on peut supposer que  $E = \mathbb{N}$ . En écrivant  $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$  on se ramène au cas où  $\varphi \geq 0$ . On a par convergence monotone

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\varphi(X) \mathbf{1}_{\{X \leq n\}}]$$

et le résultat découle alors du fait que  $\mathbb{E}[\varphi(X) \mathbf{1}_{\{X \leq n\}}] = \sum_{k=0}^n \varphi(k) \mathbb{P}[X = k]$ . □

**Exercice 3.32** (Transfert). *Retrouver la formule du transfert pour les v.a. discrètes en partant de la formule  $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum_z z \mathbb{P}[\varphi(X) = z]$ . De même, retrouver la linéarité de l'espérance pour les v.a. discrètes en partant de la formule  $\mathbb{E}[X + Y] = \sum_z z \mathbb{P}[X + Y = z]$ .*

**Théorème 3.33.** *Si  $X$  est une v.a.r. à valeurs dans  $\mathbb{N}$  alors*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq n].$$

**Démonstration.** Partons de la formule de l'espérance :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}[X = k].$$

Écrivons  $k$  comme somme<sup>4</sup> de  $k$  fois l'entier 1 :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{j \leq k} \mathbb{P}[X = k].$$

Comme tous les termes sont positifs, on peut intervertir les sommes (c'est un cas particulier du théorème de Fubini–Tonelli) :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{j \leq k} \mathbb{P}[X = k] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq j]. \quad \square$$

**Pile ou face : espérance de la loi géométrique.** Pour trouver l'espérance du temps d'attente  $T$  du premier pile, on doit calculer la somme :

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p.$$

La méthode la plus courante est peut-être de factoriser par  $p$ , de voir la somme restante comme une fonction de  $p$  et d'en chercher une primitive en intégrant sous le signe somme. Le théorème précédent fournit une réponse rapide, puisqu'il n'y a qu'à sommer des séries géométriques : en posant  $q = 1 - p$ ,

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} q^{k-1}p = \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

Le nombre moyen de lancers à faire pour obtenir un 6 sur un dé équilibré est  $1/(1/6) = 6$ .

**Exercice 3.34** (Probabilités et convexité : inégalité de Jensen). *Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et  $X$  une v.a. discrète à valeurs dans  $I$  telle que  $X$  et  $\varphi(X)$  sont intégrables. Alors*

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)],$$

*et de plus, l'égalité est atteinte si  $\mathbb{P}[X = c] = 1$  pour une constante  $c$ , et c'est le seul cas d'égalité possible lorsque est  $\varphi$  strictement convexe. Indication : se ramener au cas où*

4. C'est donc une transformation d'Abel.

$X$  est discrète finie, utiliser le théorème du transfert et la définition de la convexité. Cas particuliers importants :  $\varphi(x) = |x|$ ,  $\varphi(x) = x^2$ ,  $\varphi(x) = |x|^p$  avec  $p \geq 2$ ,  $\varphi(x) = e^x$ ,  $\varphi(x) = x \ln(x)$  (si  $X \geq 0$ ).

**Exercice 3.35** (Application de l'inégalité de Jensen à l'entropie de Boltzmann–Shannon). L'entropie  $H(X)$  de la loi d'une v.a. discrète finie  $X$  prenant les valeurs  $x_1, \dots, x_n$  avec les probabilités  $p_1, \dots, p_n$  est

$$H(X) = - \sum_{k=1}^n p_k \ln(p_k),$$

avec la convention  $0 \ln(0) = 0$ . Calculée avec un logarithme en base 2, elle représente le nombre moyen de bits par symboles nécessaires au codage dans un canal parfait avec un alphabet de  $n$  symboles<sup>5</sup>. On définit de même l'entropie d'une v.a. discrète infinie, sous réserve que la série converge. En utilisant l'inégalité de Jensen, montrer que l'entropie relative définie pour toutes lois discrètes  $P$  et  $Q$  sur  $\mathbb{N}$  par

$$\text{Ent}(Q|P) = \sum_n \frac{Q_n}{P_n} \ln \frac{Q_n}{P_n} P_n = \sum_n Q_n \ln \frac{Q_n}{P_n}$$

vérifie  $\text{Ent}(Q|P) \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $P = Q$ . En déduire également que parmi les lois sur  $\mathbb{N}$  de même moyenne fixée, la loi géométrique est l'unique loi qui maximise l'entropie, et calculer la valeur du maximum. Montrer également que parmi les lois de même support fini, la loi uniforme est l'unique loi qui maximise l'entropie, et calculer la valeur du maximum.

### 3.5 Espérance des variables aléatoires à densité

Le théorème du transfert permet de calculer l'espérance de v.a.r. à densité et plus généralement l'espérance de fonctions de v.a.r. à densité. Il montre en particulier que  $\mathbb{E}[\varphi(X)]$  ne dépend que de la loi de  $X$  via sa densité. Attention : si  $X$  est à densité, alors  $\varphi(X)$  n'est pas forcément à densité.

**Théorème 3.36** (Espérance et formule du transfert pour les v.a.r. à densité — Admis). Si  $X$  est une variable aléatoire réelle de densité  $f$  alors  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  si et seulement si la fonction  $x \mapsto |x|f(x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On a alors

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Plus généralement, pour toute  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne, on a  $\varphi(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  si et seulement si la fonction  $x \mapsto |\varphi(x)|f(x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On a alors la formule du transfert :

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx.$$

**Éléments de démonstration.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et soit  $\varphi = \mathbf{1}_I$ . Par définition de  $\mathbb{E}$  et  $f$ ,

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_I(X)] = \mathbb{P}[X \in I] = \int_I f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx :$$

5. Le codage peut être réalisé par le code de Huffman, présent partout en informatique, y compris dans les images au format JPEG et dans les fichiers musicaux au format MP3.

la formule du transfert est donc valable pour les fonctions  $\varphi$  indicatrices d'intervalles.

On admet qu'elle reste valable lorsque  $I$  est un borélien de  $\mathbb{R}$ . Par linéarité, elle reste valable pour toute fonction  $\varphi$  étagée (i.e. constante sur un nombre fini de boréliens). Pour établir le résultat pour toute fonction  $\varphi$  borélienne, on se ramène tout d'abord au cas où  $\varphi \geq 0$  en utilisant la décomposition  $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ , puis on considère une suite croissante  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  de fonctions positives étagées (constantes sur un nombre fini de boréliens) convergeant vers  $\varphi$  (existence admise) et on obtient par convergence monotone  $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\varphi_n(X)]$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\varphi_n(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx$ .  $\square$

**Fléchettes : espérance.** La distance moyenne au centre vaut :

$$\mathbb{E}[R] = \int r f_R(r) dr = \int_0^1 r \cdot 2r dr = \frac{2}{3}.$$

Posons  $S = R^2$ . On peut calculer  $\mathbb{E}[S]$  de deux manières. La première est de trouver la loi de  $S$ , en cherchant sa fonction de répartition : pour  $s \in [0, 1]$ , on trouve facilement  $\mathbb{P}[S \leq s] = \mathbb{P}[R \leq \sqrt{s}] = s$ . Ainsi  $S$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ , d'espérance  $1/2$ .

La deuxième méthode est d'appliquer le théorème du transfert à  $\varphi : x \mapsto x^2$  :

$$\mathbb{E}[S] = \int_{\mathbb{R}} r^2 f_R(r) dr = \int_0^1 2r^3 dr = 1/2.$$

**Exercice 3.37** (Moyenne). *Avec le théorème du transfert, retrouver la moyenne de la loi uniforme, de la loi exponentielle, et de la loi normale. La loi de Cauchy possède-t-elle une moyenne ? Une médiane ? Idem pour la loi de Pareto et la loi de Student.*

**Remarque 3.38** (Queues lourdes). *Les lois sans espérance comme la loi de Cauchy ne sont pas des objets exotiques réservés aux contre-exemples : de nombreux phénomènes naturels donnent des échantillons répartis en lois de puissance comme la loi de Cauchy, de Pareto, de Student. Si par exemple  $X$  et  $Y$  sont deux v.a.r. indépendantes de même loi normale standard alors  $X/Y$  suit la loi de Cauchy, cf. 4.11. Notons que si une v.a.r.  $Z$  n'a pas de variance alors  $Z^2$  n'a pas d'espérance.*

**Exercice 3.39** (Calcul des moments). *En utilisant l'intégration par parties, montrer que les moments de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  sont donnés pour tout  $n \geq 1$  par*

$$m_n = \int_0^{\infty} x^n \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{n!}{\lambda^n}$$

(établir la formule  $m_{n+1} = \lambda^{-1}(n+1)m_n$ ). *Montrer que les moments d'ordre impairs de la loi normale standard  $\mathcal{N}(0, 1)$  sont nuls tandis que les moments pairs sont donnés par*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2n(2n-2)\cdots 2} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

*En déduire les moments de la loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Montrer que les moments d'ordre impairs de la loi du demi-cercle sur  $[-2, 2]$  définie par sa densité*

$$x \mapsto \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} \mathbf{1}_{[-2, 2]}(x)$$

sont nuls tandis que les moments d'ordre pair sont les nombres de Catalan  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . En déduire les moments de la loi du demi-cercle sur  $[-2\sigma, 2\sigma]$  définie par sa densité

$$x \mapsto \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{4\sigma^2 - x^2} \mathbf{1}_{[-2\sigma, 2\sigma]}(x).$$

**Exercice 3.40.** Soit  $X$  une v.a.r. positive et intégrable, de densité  $f$  et de fonction de répartition  $F$ . Montrer en utilisant le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \mathbb{P}[X > r] = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E}[r \mathbf{1}_{[r, \infty]}(X)] = 0.$$

En déduire par intégration par parties basée sur  $-(1-F)' = f$  sur un intervalle  $[0, r]$  l'analogie suivant du théorème 3.33 :

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r x f(x) dx = \int_0^\infty \mathbb{P}[X > x] dx.$$

Plus généralement, soit  $X$  une v.a.r. pas forcément positive, telle que  $|X|^p$  est intégrable pour un réel  $p \geq 1$ . Montrer au moyen du théorème de Fubini-Tonelli que

$$\mathbb{E}[|X|^p] = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}[|X| > t] dt.$$

Cette identité est importante : elle relie moments et queue de distribution. Nous reviendrons sur ce lien à propos des inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev.

**Remarque 3.41** (Inégalité de Jensen). L'inégalité de Jensen de l'exercice 3.34 reste valable au delà du cadre discret : si  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et si  $X$  est une variable aléatoire réelle à valeurs dans  $I$  et si  $X$  et  $\varphi(X)$  sont intégrables alors

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

De plus, l'égalité est atteinte si  $\mathbb{P}(X = c) = 1$  pour une constante  $c$ , et il s'agit de plus du seul cas d'égalité possible lorsque  $\varphi$  est strictement convexe. En particulier,

$$|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|], \quad \mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{E}[X^2], \quad e^{\mathbb{E}[X]} \leq \mathbb{E}[e^X], \dots$$

Une preuve élégante par la loi des grands nombres est donnée dans l'exemple 5.9.

**Exercice 3.42** (Inégalité de Jensen et entropie). On définit l'entropie de Boltzmann-Shannon d'une v.a.r.  $X$  de densité  $f$  par

$$H(X) = - \int f(x) \ln(f(x)) dx$$

lorsque l'intégrale existe. En théorie de l'information, cette quantité intervient dans le calcul de la capacité des canaux de communication, voire également l'exercice 3.35 sur l'analogie discret. En utilisant l'inégalité de Jensen, montrer que l'entropie relative, définie pour deux lois  $P$  et  $Q$  de densités  $f > 0$  et  $g > 0$  par

$$\text{Ent}(Q|P) = \int \frac{g(x)}{f(x)} \ln \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx = \int g(x) \ln \frac{g(x)}{f(x)} dx$$

vérifie  $\text{Ent}(Q|P) \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $P = Q$ . En déduire que parmi les lois à densité sur un intervalle  $[a, b]$  fixé (respectivement sur  $\mathbb{R}_+$  à moyenne fixée, respectivement sur  $\mathbb{R}$  centrée à variance fixée) la loi uniforme (respectivement la loi exponentielle, respectivement la loi gaussienne) est l'unique loi qui maximise l'entropie.

### 3.6 Variance

L'espérance d'une variable est un « indicateur de centralité », qui donne une idée de la grandeur de la variable. Des variables très différentes peuvent avoir même espérance<sup>6</sup>. On a vu précédemment que la notion de quantile permettait de caractériser l'« étalement » d'une variable ; malheureusement les quantiles ne sont pas toujours simples à manipuler<sup>7</sup>.

La **variance** d'une variable aléatoire réelle est une manière pratique de quantifier l'étalement. Elle est définie sur l'espace  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{E}[|X|^2] < \infty\}$  des variables aléatoires réelles de carré intégrable.

**Théorème 3.43** (Carré intégrable). *L'ensemble  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est un espace vectoriel et si  $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  alors  $XY \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . En particulier,  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .*

**Démonstration.** On a  $(X + Y)^2 \leq 2(X^2 + Y^2)$  et donc  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est un espace vectoriel. De plus,  $XY = \frac{1}{2}((X + Y)^2 - X^2 - Y^2)$  et donc  $XY \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  si  $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .  $\square$

Comme  $\mathbb{E}[X^2] \geq 0$ , l'application  $(X, Y) \mapsto \mathbb{E}[XY]$  est bilinéaire, symétrique et positive<sup>8</sup> sur  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et en particulier, on dispose de l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]}.$$

**Définition 3.44** (Variance). *La **variance** de  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est le nombre réel positif*

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

La variance de  $X$  représente la moyenne du carré des écarts à la moyenne. Pour obtenir un nombre de même dimension que  $X$ , on définit l'**écart-type** de  $X$  par

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}.$$

Comme  $\sigma^2(X) = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2]$ , on obtient la formule de König

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

On a  $\sigma^2(X) = 0$  si et seulement si  $\mathbb{P}[X = \mathbb{E}[X]] = 1$  (c'est-à-dire si  $X$  est p.s. constante).

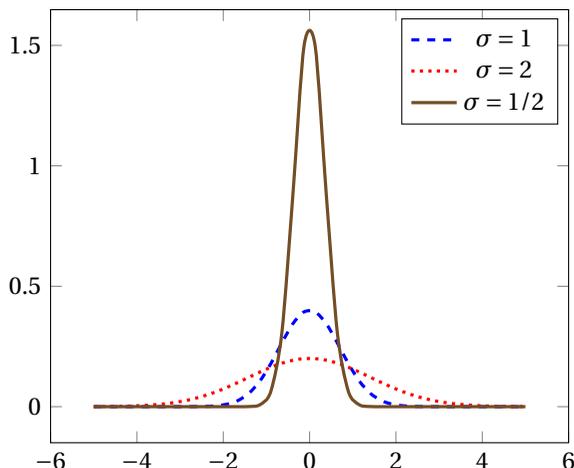
**Fléchettes : variance.** La distance au centre  $R$  pour le jeu de fléchettes est bornée par 1, elle est donc dans  $L^2$ . La variance vaut  $\sigma^2(R) = \mathbb{E}[R^2] - \mathbb{E}[R]^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$ .

**Pile ou face : variance.** La variance d'une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  vaut  $p(1-p)$ . Elle est maximale quand  $p = 1/2$  : dans ce cas, l'espérance vaut  $1/2$ , la variance  $1/4$  et l'écart-type  $1/2$ . On peut remarquer que dans ce cas très particulier l'écart entre  $X$  et sa moyenne vaut toujours exactement  $1/2$  : il est donc rassurant que ce soit également la valeur de l'écart-type... Si  $p$  est très proche de 0,  $\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p$  est proche de 1 donc  $X$  est souvent proche de sa moyenne ; la variance tend vers 0, on dit que la variable

6. D'un point de vue plus statistique, une note moyenne de 10 peut être obtenue en mettant 10 à tous les élèves, ou en mettant 20 à la moitié de la classe et 0 à l'autre ; on peut avoir une température moyenne agréable en mettant « les pieds dans la glace et la tête dans le four »...

7. Exemple : les trois quartiles de deux variables  $X$  et  $Y$  ne déterminent pas les quartiles de  $X + Y$ .

8. Cette application est « presque » un produit scalaire : si  $\mathbb{E}[X^2] = 0$ , alors  $X = 0$  avec probabilité 1 (c'est-à-dire qu'il existe  $A \in \mathcal{F}$  tel que  $\mathbb{P}[A] = 1$  et pour tout  $\omega \in A$ ,  $X(\omega) = 0$ ). Pour obtenir un véritable produit scalaire il faut identifier les variables aléatoires quand elles coïncident avec probabilité 1.



Ci-dessus, Les densités  $f_{\sigma}(x) = (2\pi\sigma)^{-1/2} \exp(-((x-m)/\sigma)^2)$  des lois normales  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , pour une moyenne  $m = 0$  et trois valeurs de l'écart-type  $\sigma$ . Plus  $\sigma$  est grand, plus la densité est étalée; plus  $\sigma$  est petit plus la loi se concentre, en terme de masse, autour de sa moyenne.

FIGURE 3.4 – Variance des lois normales

est très « concentrée » autour de sa moyenne.

**Exercice 3.45** (Représentation variationnelle de la variance par moindres carrés). Montrer que si  $X$  est une variable aléatoire réelle de carré intégrable alors

$$\sigma^2(X) = \min_{m \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[(X - m)^2],$$

le minimum étant atteint en  $m = \mathbb{E}[X]$ . Indication : développer en  $m$  et utiliser la linéarité de l'espérance. Ainsi  $\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$  est la distance des moindres carrés ou  $L^2$  du point  $X$  de  $L^2$  au sous-espace vectoriel de  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  formé par les variables aléatoires réelles constantes. En d'autres termes,  $\mathbb{E}[X]$  est la constante la plus proche de  $X$  au sens  $L^2$ , et la distance vaut  $\sigma(X)$ .

**Exercice 3.46** (Lois usuelles). Établir que la loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma)$  de densité  $f_{m, \sigma}(x) = (2\pi\sigma)^{-1/2} e^{-((x-m)/\sigma)^2}$  a pour moyenne  $m$  et pour écart-type  $\sigma$ . Plus généralement, retrouver la moyenne et la variance des lois usuelles (tables 3.1 et 3.2).

### 3.7 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Comme  $\mathbb{R}$  est réunion dénombrable de compacts, si  $X$  est une v.a.r. alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un compact  $K \subset \mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{P}[X \notin K] \leq \varepsilon$ , et on dit que la loi de  $X$  est *tendue*. Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev ci-dessous permettent de mieux quantifier la propriété de tension lorsque  $X$  possède des moments finis.

**Théorème 3.47** (Inégalité de Markov). Si  $X$  est une variable aléatoire réelle intégrable à valeurs positives, alors pour tout  $r > 0$ ,

$$\mathbb{P}[X \geq r] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{r}.$$

Cette inégalité n'a pas d'intérêt quand  $r \leq \mathbb{E}[X]$  : la borne est alors  $\geq 1$ . Elle affirme qu'une v.a.r.  $X \geq 0$  intégrable est toujours concentrée autour de 0 : si par exemple  $\mathbb{E}[X] = 1$ , alors  $X$  dépasse 100 avec une probabilité inférieure ou égale à 1%.

**Démonstration.** Découle de la croissance de l'espérance utilisée avec  $r \mathbf{1}_{\{X \geq r\}} \leq X$ . Notons que si  $X$  est à densité, la variable de gauche est discrète et celle de droite à densité, ce qui justifie de développer une théorie générale pour l'espérance.  $\square$

La seconde inégalité permet de traduire quantitativement l'interprétation de la variance comme indicateur de l'étalement d'une variable.

**Théorème 3.48** (Bienaymé-Tchebychev). *Si  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  alors pour tout  $r > 0$ ,*

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq r] \leq \frac{\sigma^2(X)}{r^2}.$$

La probabilité de faire un écart de  $r$  à la moyenne est donc d'autant plus petite que  $r$  est grand, et d'autant plus petite que la variance est petite.

On dit parfois que  $[\mathbb{E}[X] \pm r]$  est un **intervalle de fluctuation** pour  $X$ , de niveau  $1 - \frac{\sigma^2(X)}{r^2}$ . On parle plus souvent d'**inégalité de déviation**.

**Démonstration.** L'inégalité de Markov (théorème 3.47) appliquée à la variable aléatoire réelle positive et intégrable  $(X - \mathbb{E}[X])^2$  donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq r] &= \mathbb{P}[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq r^2] \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}{r^2} = \frac{\sigma^2(X)}{r^2}. \end{aligned} \quad \square$$

L'inégalité n'a pas d'intérêt lorsque  $r \leq \sigma(X)$  car la borne est alors plus grande que 1.

**Remarque 3.49** (Utilité de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev). *L'inégalité est générale et nécessite peu d'information sur la variable. Elle intervient dans la preuve de la loi des grands nombres comme on le verra plus loin. Sur des exemples concrets simples, par contraste, elle peut donner un résultat éloigné de la valeur optimale. Si  $X$  est par exemple le résultat d'un lancer de dé, alors  $\mathbb{E}[X] = 7/2$ ,  $\sigma^2(X) = 35/12$ , et le caractère discret de  $X$  et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donnent, pour tout  $r \in ]3/2, 5/2[$ ,*

$$\mathbb{P}[X \notin \{2, 3, 4, 5\}] = \mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq r] \leq \frac{35}{12r^2}.$$

La meilleure borne est obtenue en faisant tendre  $r$  vers  $5/2$ , d'où

$$\mathbb{P}[X \notin \{2, 3, 4, 5\}] \leq 7/15 \approx 0.46,$$

alors que la valeur exacte est  $1/3$ . Si l'on veut par la même méthode majorer  $\mathbb{P}[X \notin \{3, 4\}]$ , l'inégalité ne donne rien (le meilleur  $r = 3/2$  étant plus petit que l'écart-type).

Plus généralement, soit  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable et croissante telle que  $\varphi(r) > 0$  pour tout  $r > 0$ . Si  $\varphi(|X - \mathbb{E}[X]|)$  est intégrable alors pour tout  $r > 0$

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq r] \leq \frac{\mathbb{E}[\varphi(|X - \mathbb{E}[X]|)]}{\varphi(r)}.$$

Pour  $\varphi(r) = r^2$  on retrouve l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Ce résultat est le plus souvent appliqué avec  $\varphi(r) = r^p$  pour  $p \geq 1$ , ou avec  $\varphi(r) = \exp(r)$ . La « morale » est la suivante : plus  $X$  est intégrable, plus elle est concentrée autour de sa moyenne.

**Exercice 3.50** (Inégalité de Paley-Zygmund). Soit  $X$  une v.a.r. positive de carré intégrable. Montrer que pour tout réel  $\theta \in [0, 1]$ , on a l'inégalité de déviation :

$$\mathbb{P}[X > \theta \mathbb{E}[X]] \geq (1 - \theta)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]} = (1 - \theta)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X]^2 + \sigma^2(X)}.$$

Indication : utiliser  $X \leq \theta \mathbb{E}[X] + X \mathbf{1}_{\{X > \theta \mathbb{E}[X]\}}$  puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

### 3.8 Fonction génératrice

#### Définition et propriétés générales

Nous avons déjà vu trois façons de caractériser la loi d'une variable aléatoire :

- par sa fonction de masse (dans le cas discret) ou sa densité (dans le cas continu) ;
- par la définition, c'est-à-dire par la donnée pour tout intervalle  $I$  de la quantité

$$\mathbb{P}[X \in I] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_I(X)] ;$$

- par sa fonction de répartition, c'est-à-dire par la donnée pour tout  $x$  de la quantité

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{]-\infty, x]}(X) ;$$

Plus généralement, on peut caractériser la loi de  $X$  par la donnée des  $\{\mathbb{E}[f(X)] : f \in \mathfrak{F}\}$  dès lors que la classe de fonctions  $\mathfrak{F}$  est assez riche. Voici quelques choix classiques :

- indicatrices d'intervalles de la forme  $]-\infty, x]$  (fonction de répartition) ;
- fonctions continues bornées  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (permettent d'approcher les indicatrices) ;
- fonctions mesurables positives  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (contient les indicatrices d'intervalles !) ;
- fonctions trigonométriques  $x \mapsto e^{itx}$  avec  $t \in \mathbb{R}$  (transformée de Fourier<sup>9</sup>) ;
- fonctions de la forme  $x \mapsto s^x$  avec  $s \in [0, 1]$  (fonction génératrice, si  $X$  discrète) ;
- fonctions de la forme  $x \mapsto e^{-tx}$  avec  $t \geq 0$  (transformée de Laplace, si  $X \geq 0$ ).

Un de ces choix est explicitement au programme, celui de la *fonction génératrice*, utilisé pour traiter des variables *discrètes à valeurs dans*  $\mathbb{N}$ . Pour les variables aléatoires réelles et les lois continues, on utilise plutôt la transformée de Laplace ou la transformée de Fourier (hors programme).

**Définition 3.51 (Fonction génératrice).** Si  $P$  est une loi de probabilité sur  $\mathbb{N}$  alors sa *fonction génératrice*, notée  $g_P : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , est définie pour tout  $s \in ]-1, 1]$  par

$$g_P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(\{n\}).$$

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète de loi  $P$  sur  $\mathbb{N}$  alors on note  $g_X = g_P$  :

$$g_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}[X = n] = \mathbb{E}[s^X].$$

9. En théorie des probabilités, on parle plutôt de fonction caractéristique (de la loi).

**Remarque 3.52** (Ensemble de définition). *L'ensemble de définition de la fonction génératrice peut varier suivant les auteurs et le cadre. Comme  $g_X$  est une série entière et  $g_X(1) = 1 < \infty$ , on peut définir  $g_X$  sur le disque unité complexe fermé  $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ .*

**Remarque 3.53** (Liens avec transformées de Fourier et Laplace). *La transformée de Laplace se déduit de la fonction génératrice : pour  $t \geq 0$ ,*

$$\mathbb{E}[\exp(-tX)] = g_X(e^{-t}).$$

*Par la remarque précédente, on peut étudier la fonction génératrice sur le cercle unité de  $\mathbb{C}$  et retrouver la transformée de Fourier via  $g_X|_{\{z \in \mathbb{C}; |z|=1\}}$  :*

$$\theta \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{E}[\exp(i\theta X)] = g_X(e^{i\theta}).$$

**Théorème 3.54** (Propriétés des fonctions génératrices). *Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Sa fonction génératrice  $g_X$  vérifie les propriétés suivantes.*

- i ) **croissance** :  $g_X$  est croissante sur  $[0, 1]$ , avec  $g_X(0) = \mathbb{P}[X = 0]$  et  $g_X(1) = 1$  ;
- ii ) **fonction « génératrice »** :  $g_X$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$  et ses dérivées « engendrent les probabilités » :  $g_X^{(n)}(0) = (n!) \mathbb{P}[X = n]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;
- iii ) **caractérisation de la loi** : Si  $Y$  est une autre v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,  $X$  et  $Y$  ont même loi si et seulement si  $g_X = g_Y$  ;
- iv ) **moments** : si  $X(X-1)\cdots(X-k+1)$  est intégrable ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) alors

$$\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-k+1)] = \lim_{s \nearrow 1} g_X^{(k)}(s).$$

La quantité  $\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-k+1)]$  est le **moment factoriel** d'ordre  $k$  de  $X$ .

**Démonstration.** Le 1. est immédiat. Le 2. découle du fait que le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbb{P}[X = n]$  est supérieur ou égal à 1. Pour le 3., si  $g_X = g_Y$  alors

$$\mathbb{P}[X = n] = g_X^{(n)}(0) = g_Y^{(n)}(0) = \mathbb{P}[Y = n]$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et la réciproque est évidente. Le 4. s'obtient en calculant  $g_X^{(k)}(s)$  pour  $s \in ]0, 1[$  (dérivation sous le signe somme) puis en utilisant le théorème de convergence monotone (faire tendre  $s$  vers 1).  $\square$

L'un des principaux intérêts des fonctions génératrices sera mis en lumière plus loin dans la section 4.5, voyons-en déjà une utilisation calculatoire.

**Exemple 3.55** (Loi géométrique). *La loi géométrique  $\text{Geom}(p)$  de paramètre  $p$  est donnée pour tout  $k \geq 1$  par  $\mathbb{P}[T = k] = q^{k-1}p$ , où  $q := (1 - p)$ . Sa fonction génératrice s'obtient par une simple somme géométrique :*

$$g_T(s) = \sum_{k \geq 1} s^k q^{k-1} p = \frac{sp}{1 - sq}.$$

*On dérive cette fonction deux fois :*

$$g'_T(s) = \frac{p}{(1 - sq)^2} \quad \text{et} \quad g''_T(s) = \frac{2pq}{(1 - sq)^3}.$$

On en déduit  $\mathbb{E}[T] = g'_T(1) = \frac{1}{p}$  et  $\mathbb{E}[T(T-1)] = g''_T(1) = \frac{2q}{p^2}$ , d'où

$$\begin{aligned}\sigma^2(T) &= \mathbb{E}[T^2] - \mathbb{E}[T]^2 = \mathbb{E}[T(T-1)] + \mathbb{E}[T](1 - \mathbb{E}[T]) \\ &= \frac{2q}{p^2} - \frac{q}{p^2} = \frac{q}{p^2}.\end{aligned}$$

On peut ainsi calculer les moments de  $T$  par dérivations, sans calcul de sommes.

La fonction génératrice permet aussi d'étudier la convergence de suites de v.a. :

**Théorème 3.56** (Fonctions génératrices et convergence en loi). *Soit  $X$  une variable aléatoire et  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires, toutes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , de fonctions génératrices  $g$  et  $(g_n)_{n \geq 1}$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

— pour tout  $s \in ]0, 1[$ ,

$$g_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(s);$$

— pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}[X_n = k] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X = k].$$

On dit dans ce cas que  $(X_n)$  **converge en loi** vers  $X$ .

**Démonstration élémentaire.** La seconde propriété implique la première grâce aux propriétés des séries. Démontrons la réciproque. On peut procéder par récurrence sur  $k$ . Pour initialiser à  $k = 0$ , on prend  $s = 0$ . Notons  $a_{n,j} = \mathbb{P}[X_n = j]$  et  $a_j = \mathbb{P}[X = j]$ ; supposons que l'on a  $a_{n,j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_j$ , pour tout  $j \leq k-1$ . On décompose les deux sommes :

$$\begin{aligned}g_n(s) &= \sum_{j=0}^{k-1} a_{n,j} s^j + a_{n,k} s^k + s^k \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,k+j} s^j \\ g(s) &= \sum_{j=0}^{k-1} a_j s^j + a_k s^k + s^k \sum_{j=1}^{\infty} a_{k+j} s^j.\end{aligned}$$

En soustrayant la deuxième ligne de la première, on a pour tout  $s \in ]0, 1[$ ,

$$a_{n,k} - a_k = \frac{g_n(s) - g(s)}{s^k} - \frac{\sum_{j=0}^{k-1} (a_{n,j} - a_j) s^j}{s^k} - \sum_{j=1}^{\infty} (a_{n,k+j} - a_{k+j}) s^j.$$

On prend les valeurs absolues; dans le dernier terme on majore sauvagement  $|a_{n,k} - a_k|$  par 2 (ce sont des probabilités!) :

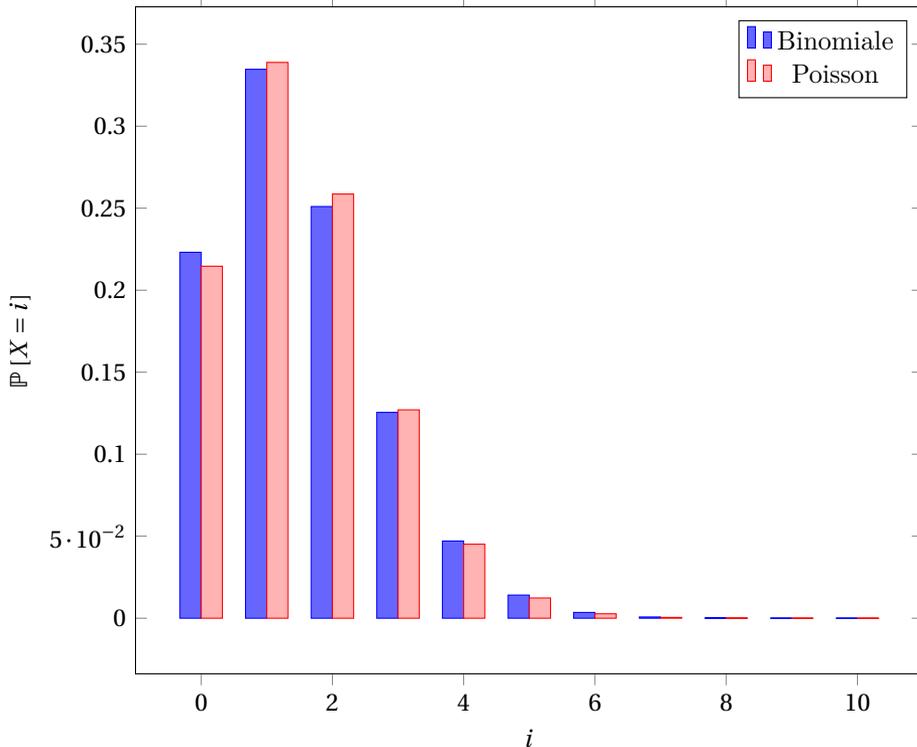
$$|a_{n,k} - a_k| \leq \left| \frac{g_n(s) - g(s)}{s^k} \right| + \left| \frac{\sum_{j=0}^{k-1} (a_{n,j} - a_j) s^j}{s^k} \right| + 2 \sum_{j=1}^{\infty} s^j.$$

Toujours à  $s$  fixé, on fait tendre  $n$  vers l'infini : à droite, le premier terme disparaît (c'est l'hypothèse) et le second aussi (par hypothèse de récurrence) :

$$\limsup_n |a_{n,k} - a_k| \leq \frac{2s}{1-s}.$$

Comme ceci est valable pour tout  $s \in ]0, 1[$ , il suffit de faire tendre  $s$  vers 0 pour obtenir :

$$\mathbb{P}[X_n = k] = a_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_k = \mathbb{P}[X = k]. \quad \square$$



Les diagrammes en bâtons de la loi binomiale  $\text{Binom}(n, p)$  et de la loi de Poisson  $\text{Poi}(np)$  pour  $p = 1/20$  et  $n = 30$ .

FIGURE 3.5 – Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.

### Application : l'approximation binomiale/Poisson

Le nombre de succès  $S_n$  lors de la répétition de  $n$  expériences indépendantes, qui réussissent chacune avec probabilité  $p$ , suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . L'espérance de  $S_n$  vaut  $np$ . Supposons que  $n$  soit grand,  $p$  petit mais que  $np$  soit « de l'ordre de 1 » : donnons quelques exemples.

- Le nombre de parties gagnées à la roulette sur une série de 100 en misant sur un chiffre :  $p = 1/38$ ,  $n = 100$  et  $np \approx 2.7$ .
- Pendant une pluie d'intensité modérée, il tombe  $6\text{mm}$  par heure et par mètre carré de surface, soit approximativement  $0.1L$  par minute par mètre carré. Il y a  $10^4$  centimètres carrés dans un mètre carré, et approximativement  $10^6$  gouttes d'eau dans un litre. En notant  $S_n$  le nombre de gouttes tombant en une minute sur une petite surface d'un centimètre carré pendant une minute de pluie,  $S_n$  suit une loi binomiale de paramètre  $n = 10^5$  et  $p = 10^{-4}$ , et  $np \approx 10$ .

Pour donner un sens mathématique précis on considère une limite où  $p = p_n$  dépend de  $n$ , et où  $np_n$  converge vers une limite finie.

**Théorème 3.57** (Approximation binomiale/Poisson). *Soit  $X$  une variable aléatoire de loi de Poisson  $\text{Poi}(\lambda)$ . Soit  $p_n$  une suite de réels tels que  $np_n \rightarrow \lambda$ , et pour tout  $n$ , soit*

$S_n$  une variable de loi binomiale  $\text{Binom}(n, p_n)$ . Alors pour tout entier  $k$ ,

$$\mathbb{P}[S_n = k] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}[X = k].$$

**Démonstration.** En écrivant le coefficient binomial comme

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} n(n-1) \cdots (n-k+1) \sim \frac{n^k}{k!},$$

et en raisonnant par équivalents on peut établir le résultat ; les détails sont laissés en exercice. Grâce au résultat établi plus haut sur les fonctions génératrices, on peut procéder autrement. La fonction génératrice de  $S_n$  a été calculée précédemment :

$$g_{S_n}(s) = (q_n + p_n s)^n = (1 - p_n(s-1))^n = \exp(n \ln(1 - p_n(s-1))).$$

Quand  $n$  tend vers l'infini,  $n \ln(1 - p_n(s-1)) \sim -\lambda(s-1)$ , donc pour tout  $s \in ]-1, 1[$ ,

$$g_{S_n}(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(-\lambda(1-s)) = g_X(s).$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 3.56. □

Loi	Support	Fonction de masse	Moyenne	Variance	Modèle
Bernoulli	$\{0, 1\}$	$\mathbb{P}[X = 1] = p$	$p$	$p(1 - p)$	Pile ou face
Rademacher	$\{-1, 1\}$	$\mathbb{P}[X = 1] = p$	$2p - 1$	$p(1 - p)$	Pile ou face
Binomiale	$\{0, 1, \dots, n\}$	$\mathbb{P}[X = k] = \binom{k}{n} p^k (1 - p)^{n-k}$	$np$	$np(1 - p)$	Nombre de succès sur $n$ lancers
Poisson	$\mathbb{N}$	$\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\lambda$	$\lambda$	Limite de lois binomiales
Hypergéométrique	$\{0, 1, \dots, n\}$	$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\binom{k}{N_1} \binom{n-k}{N_2}}{\binom{n}{N}}$	$\frac{N_1}{n}$	$\frac{nN_1N_2(N-n)}{N^2(N-1)}$	Sondage simple
Géométrique	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{P}[X = k] = (1 - p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{p}{(1 - p)^2}$	Temps d'attente d'un succès
Géométrique	$\mathbb{N}$	$\mathbb{P}[X = k] = (1 - p)^k p$	$\frac{1 - p}{p}$	$\frac{p}{(1 - p)^2}$	Nombre d'échecs avant le succès
Uniforme	$\{1, \dots, n\}$	$\mathbb{P}[X = k] = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2 - 1}{12}$	Équiprobabilité discrète

TABLE 3.1 – Lois discrètes classiques

Loi	Support	Densité	Moyenne	Variance	Modèle
Uniforme	$[a, b] \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	Équiprobabilité continue
Exponentielle	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	Temps d'attente (continu)
Normale	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}$	$m$	$\sigma^2$	Théorème limite central
Student	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(a+1))}{\sqrt{a\pi}\Gamma(\frac{1}{2}a)} \left(1 + \frac{x^2}{a}\right)^{-\frac{1}{2}(a+1)}$	$0$ ( $a > 1$ )	$\frac{a}{a-2}$ ( $a > 2$ )	Tests statistiques
$\chi^2$	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}$	$n$	$2n$	Tests statistiques
Cauchy	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$	indéfinie	indéfinie	Loi à queue lourde
Pareto	$[1, \infty[$	$x \mapsto \frac{n}{x^{n+1}} \mathbf{1}_{[1, \infty[}(x)$	$\frac{n}{n-1}$ ( $n > 1$ )	$\frac{n}{(n-1)^2(n-2)}$ ( $n > 2$ )	Distribution de richesses

La loi de Cauchy est une loi de Student avec  $a = 1$ . La loi exponentielle est une loi Gamma avec  $a = 1$ .

TABLE 3.2 – Loïs continues classiques

## Vecteurs aléatoires

### 4.1 Définition, loi d'un vecteur aléatoire

Athanase veut déguster une pizza. Il prend au hasard 4 couverts dans son tiroir, qui contient 2 fourchettes, 3 couteaux et 4 cuillères. Il note  $X$  le nombre de fourchettes et  $Y$  le nombre de couteaux.

S'il compte manger avec les mains, il n'a besoin de d'un couteau, et seule la variable  $Y$  l'intéresse : on a vu plus haut qu'elle suit une loi  $\text{HyperGeom}(2, 7; 4)$ . S'il veut jouer à catapulter des boulettes de pain à la fourchette, il n'étudiera que  $X$ , qui suit la loi  $\text{HyperGeom}(3, 6; 4)$ . Cependant, s'il veut mettre une belle table pour séduire Bérénice, il veut connaître la probabilité qu'il y ait deux fourchettes et deux couteaux : il doit donc étudier *simultanément*  $X$  et  $Y$ .

**Définition 4.1** (Vecteur aléatoire). *Un **vecteur aléatoire**  $X = (X_1, \dots, X_d)$  de  $\mathbb{R}^d$  est une suite  $X_1, \dots, X_d$  de variables aléatoires réelles définies sur un même espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . La loi de  $X$  est la mesure de probabilité  $\mathbb{P}_X$  sur  $\mathbb{R}^d$  définie pour tout produit d'intervalles  $I_1 \times \dots \times I_d$  par*

$$\mathbb{P}_X(I_1 \times \dots \times I_d) = \mathbb{P}[X_1 \in I_1, \dots, X_d \in I_d] = \mathbb{P}[X \in I_1 \times \dots \times I_d].$$

Les lois des v.a.r.  $X_1, \dots, X_d$  sont les lois marginales du vecteur aléatoire  $X$ .

Le vecteur aléatoire  $X$  de  $\mathbb{R}^d$  est discret lorsque  $X(\Omega)$  est au plus dénombrable, et sa loi est alors entièrement déterminée par la donnée pour tout  $(x_1, \dots, x_d) \in X(\Omega)$  de

$$\mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_d = x_d].$$

Les lois marginales sont des v.a.r. discrètes et leur loi s'obtient en sommant par rapport à toutes les autres variables. Par exemple, la loi de la v.a.r.  $X_1$  est donnée par

$$\mathbb{P}[X_1 = x_1] = \sum_{x_2 \in X_2(\Omega), \dots, x_d \in X_d(\Omega)} \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_d = x_d].$$

**Exemple 4.2** (Tableau de contingence). *Reprenons l'exemple des couverts d'Athanase. La loi jointe de  $X$  et  $Y$  peut être représentée par le tableau suivant (les probabilités sont exprimées en  $1/126^e$ ) :*

	Y	0	1	2	3	
X						loi de X
	0	1	12	18	4	35
	1	8	36	24	2	70
	2	6	12	3	0	21
	loi de Y	15	60	45	6	

À l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  on écrit (en  $1/126^e$ ) la probabilité  $\mathbb{P}[X = i, Y = j]$ . Sur les « marges » du tableau, la somme en ligne donne la fonction de masse de  $X$ , et la somme en colonne celle de  $Y$ .

**Exemple 4.3** (Loi hypergéométrique multitypes). *Le cas général de l'expérience des couverts d'Athanase est la loi hypergéométrique multitype. On fixe un nombre de couleurs  $d \geq 2$  et on considère une urne contenant  $N_1$  boules de la première couleurs,  $N_2$  de la deuxième, ...,  $N_d$  de la dernière couleur.*

*On tire  $n$  boules dans cette urne et on note  $X_i$  le nombre de boules de couleur  $i$  tirées. Pour tout  $n$ -uplet  $(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$  tel que  $\sum n_i = n$  et  $n_i \leq N_i$  pour tout  $i$ , on a*

$$\mathbb{P}[X_1 = n_1, \dots, X_d = n_d] = \frac{\binom{N_1}{n_1} \dots \binom{N_d}{n_d}}{\binom{N}{n}}.$$

Comme dans l'exemple des couverts, les marginales suivent des lois hypergéométriques classiques :  $X_i \sim \text{HyperGeom}(N_i, N - N_i, n)$ .

Lorsque les nombres  $N_1, \dots, N_d$  tendent vers l'infini de sorte que les proportions  $(N_1/N, \dots, N_d/N)$  convergent vers un vecteur  $(p_1, p_2, \dots, p_d)$ , la loi hypergéométrique converge vers la loi multinomiale de taille  $n$  et de paramètre  $(p_1, \dots, p_d)$ , généralisation de la binomiale, définie par :

$$\mathbb{P}[X_1 = n_1, \dots, X_d = n_d] = \frac{n!}{n_1! \dots n_d!} p_1^{n_1} \dots p_d^{n_d}.$$

On dit qu'une fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une densité de probabilité lorsque

$$f \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d = 1.$$

On dit que le vecteur aléatoire  $X$  admet pour densité  $f$  lorsque pour tout pavé  $I_1 \times \dots \times I_d$ ,

$$\mathbb{P}[X \in I_1 \times \dots \times I_d] = \int_{I_1} \dots \int_{I_d} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d.$$

Comme en dimension 1, la densité d'un vecteur n'est pas unique car on peut légèrement la modifier. Les lois marginales sont également à densité et leur densité s'obtient en intégrant  $f$  par rapport à toutes les autres variables (prendre  $I_j = \mathbb{R}$  pour  $j \neq i$ ). Par exemple, la densité de  $X_1$  est

$$x_1 \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_d) dx_2 \dots dx_d.$$

Le calcul peut être mené par intégrations successives grâce au théorème de Fubini-Tonelli.

Le théorème de Fubini-Tonelli est fondamental et simple : ne pas en avoir peur !

**Fléchettes : couple abscisse/ordonnée.** Notons  $X$  l'abscisse et  $Y$  l'ordonnée dans le jeu de fléchettes. Si  $I \times J$  est un pavé de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in I \times J] = \frac{\text{aire de } (I \times J) \cap \Omega}{\text{aire de } \Omega}.$$

L'aire de  $I \times J$  est égale à  $\iint \mathbf{1}_{I \times J}(x, y) dx dy$ ; on admet que l'analogie est vrai pour la région  $(I \times J) \cap \Omega$ , de sorte que

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in I \times J] = \frac{1}{\pi} \iint \mathbf{1}_{(I \times J) \cap \Omega}(x, y) dx dy = \iint_{I \times J} \mathbf{1}_{\Omega}(x, y) dx dy.$$

La fonction  $(x, y) \mapsto \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{\Omega}(x, y)$  est donc une densité pour le vecteur  $(X, Y)$ .

Retrouvons la loi du demi-cercle par intégration :  $X$  admet la densité

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{\Omega}(x, y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{x^2+y^2 \leq 1} dy = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{y^2 \leq 1-x^2} dy.$$

Si  $|x| > 1$  l'indicatrice est toujours nulle et  $f(x)$  vaut 0. Si  $|x| \leq 1$  on a

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}.$$

On retrouve bien la loi du demi-cercle.

**Théorème 4.4** (Théorème du transfert pour les vecteurs aléatoires – Admis). *Soit  $X = (X_1, \dots, X_d)$  un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^d$  et  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne.*

1. *Si  $X$  est discret et si la série  $\sum_{x \in X(\Omega)} |\varphi(x)| \mathbb{P}[X = x]$  converge alors*

$$\mathbb{E}[\varphi(X_1, \dots, X_d)] = \sum_{(x_1, \dots, x_d) \in \Omega(X)} \varphi(x_1, \dots, x_d) \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_d = x_d].$$

2. *Si  $X$  a pour densité  $f$  et si  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto |\varphi(x)|f(x)$  est intégrable alors*

$$\mathbb{E}[\varphi(X_1, \dots, X_d)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, \dots, x_d) f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d.$$

**Démonstration.** On procède comme pour les variables aléatoires. □

**Exercice 4.5** (Linéarité de l'espérance). *Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^2$  de densité  $f$ . En utilisant le théorème du transfert pour les vecteurs aléatoires, retrouver la propriété de linéarité de l'espérance :  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ .*

## 4.2 Indépendance de variables aléatoires

**Définition 4.6** (Indépendance). *Si  $X = (X_1, \dots, X_d)$  est un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^d$  alors on dit que les v.a.r.  $X_1, \dots, X_d$  sont indépendantes lorsque pour tous intervalles  $I_1, \dots, I_d$  de  $\mathbb{R}$  les événements  $\{X_1 \in I_1\}, \dots, \{X_d \in I_d\}$  sont indépendants.*

Si par exemple  $A$  et  $B$  sont deux événements alors les v.a.r. booléennes  $\mathbf{1}_A$  et  $\mathbf{1}_B$  sont indépendantes si et seulement si  $A$  et  $B$  sont indépendants. Une variable aléatoire constante est proportionnelle à  $\mathbf{1}_{\Omega}$  et est donc indépendante de toutes les autres v.a.r.

**Remarque 4.7** (Suite de variables aléatoires i.i.d.). *La modélisation d'une expérience répétée comme dans la section 2.4 conduit naturellement à considérer une suite infinie  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (c'est-à-dire de même loi). En abrégé : **i.i.d.** Une telle suite peut être vue comme un vecteur aléatoire de dimension infinie :  $(X_1, X_2, \dots)$ .*

**Exercice 4.8** (De la loi de Poisson à la loi binomiale). *Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda$  et  $\mu$ . On suppose que la somme vaut  $n$ , et on cherche la distribution de  $X$ . Plus précisément, on fixe  $n$  et pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  on cherche  $\mathbb{P}[X = k | X + Y = n]$ . En utilisant la définition de la probabilité conditionnelle, il vient*

$$\mathbb{P}[X = k | X + Y = n] = \frac{\mathbb{P}[X = k \text{ et } X + Y = n]}{\mathbb{P}[X + Y = n]}.$$

La somme  $X + Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda + \mu$ . Au numérateur, on écrit

$$\{X = k \text{ et } X + Y = n\} = \{X = k \text{ et } Y = n - k\}.$$

Comme les événements  $X = k$  et  $Y = n - k$  sont indépendants, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X = k | X + Y = n] &= \frac{\mathbb{P}[X = k] \mathbb{P}[Y = n - k]}{\mathbb{P}[X + Y = n]} \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^k / (k!) e^{-\mu} \mu^{n-k} / (n-k)!}{e^{-\lambda-\mu} (\lambda + \mu)^n / (n!)} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

où  $p = \lambda / (\lambda + \mu)$ . On retrouve l'expression d'une loi binomiale : on dit que pour tout  $n$ , la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $\{X + Y = n\}$  est la loi **Binom**( $n, p$ ).

**Théorème 4.9** (Espérance et indépendance – Admis). *Si  $X = (X_1, \dots, X_d)$  un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^d$  alors  $X_1, \dots, X_d$  sont indépendantes si et seulement si pour toutes fonctions boréliennes positives  $\varphi_1, \dots, \varphi_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \infty$ , on a, dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ,*

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^d \varphi_i(X_i) \right] = \prod_{i=1}^d \mathbb{E} [\varphi_i(X_i)].$$

De plus, si  $X_1, \dots, X_d$  sont indépendantes alors pour toutes fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  boréliennes vérifiant  $\varphi_1(X_1), \dots, \varphi_d(X_d) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , on a

$$\prod_{i=1}^d \varphi_i(X_i) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^d \varphi_i(X_i) \right] = \prod_{i=1}^d \mathbb{E} [\varphi_i(X_i)].$$

En particulier  $\mathbb{E}[X_1 \cdots X_d] = \mathbb{E}[X_1] \cdots \mathbb{E}[X_d]$  si  $X_1, \dots, X_d$  sont dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Démonstration.** Si la première propriété est vraie, alors son application à des fonctions de la forme  $\varphi_i = \mathbf{1}_{I_i}$  où  $I_i$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  fournit l'indépendance de  $X_1, \dots, X_d$ . Réciproquement, on procède par approximation, linéarité de l'espérance, et convergence monotone à partir de ces fonctions élémentaires. Pour établir la seconde propriété, on utilise la  $\varphi_i = (\varphi_i)_+ - (\varphi_i)_-$ , la linéarité de l'espérance, et la première propriété.  $\square$

**Théorème 4.10** (Indépendance et structure produit des densités – Admis).

1. Si les v.a.r.  $X_1, \dots, X_d$  sont indépendantes de densités  $f_1, \dots, f_d$  alors le vecteur  $X = (X_1, \dots, X_d)$  admet la densité  $x \mapsto (f_1 \otimes \dots \otimes f_d)(x) = f_1(x_1) \dots f_d(x_d)$
2. Les composantes  $X_1, \dots, X_d$  d'un vecteur aléatoire  $X$  de  $\mathbb{R}^d$  de densité  $f$  de marginales  $f_1, \dots, f_d$  sont indépendantes ssi  $X$  admet aussi  $f_1 \otimes \dots \otimes f_d$  comme densité.

**Démonstration.** Découle de l'indépendance et du théorème de Fubini-Tonelli.  $\square$

**Exemple 4.11** (Loi de Cauchy). Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires réelles indépendantes de loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On pose  $C = X/Y$ . Pour trouver la loi de  $C$ , on peut utiliser le théorème du transfert. Soit  $\varphi$  l'indicatrice d'un segment  $[a, b]$  : essayons de mettre  $\mathbb{E}[\varphi(C)]$  sous la forme  $\int_a^b f(u) du = \int f(u)\varphi(u) du$  pour une densité de probabilité  $f$  à déterminer. Comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, le couple  $(X, Y)$  admet la densité  $(1/(2\pi)) \exp(-(x^2 + y^2)/2)$ , donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(C)] &= \mathbb{E}[\varphi(X/Y)] = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x/y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi(x/y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \end{aligned}$$

où la dernière ligne s'obtient par la symétrie centrale  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ . Le changement de variables  $(u, v) = (x/y, y)$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R} \times ]0, \infty[$ , d'inverse  $(x, y) = (uv, v)$ , de matrice jacobienne  $\begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Par changement de variables on a donc :

$$\mathbb{E}[\varphi(C)] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi(u) e^{-\frac{v^2 u^2 + v^2}{2}} v du dv.$$

En intégrant sur  $v$  (toujours le théorème de Fubini), on obtient :

$$\mathbb{E}[\varphi(C)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+u^2} \varphi(u) du.$$

On a donc bien écrit  $\mathbb{P}[C \in [a, b]] = \mathbb{E}[\varphi(C)] = \int_a^b f(u) du$  où  $f(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)}$  est la densité d'une loi de Cauchy. Par conséquent  $C$  suit une loi de Cauchy. On en déduit que si  $C$  suit une loi de Cauchy, c'est également le cas pour  $1/C$ .

**Remarque 4.12** (Simulation de la loi normale). Pour simuler une loi normale, la méthode générale d'inversion vue dans le théorème 3.18 n'est pas commode car la fonction de répartition n'a pas d'expression explicite. Plusieurs algorithmes alternatifs existent, parmi lesquels l'algorithme polaire de Box-Muller. Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^2$  de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Alors les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  si et seulement si  $r$  et  $\theta$  sont indépendantes avec  $r^2 \sim \text{Exp}(1/2) = \text{Gamma}(1, 1/2) = \chi^2(2)$  et  $\theta \sim \text{Unif}([0, 2\pi])$ . En effet :

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = r e^{-\frac{r^2}{2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(r) \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{[0, 2\pi]}(\theta) dr d\theta.$$

On obtient d'emblée deux réalisations indépendantes de  $\mathcal{N}(0, 1)$  c'est-à-dire une réalisation de  $\mathcal{N}(0, I_2)$ . Pour des raisons de performance et de précision, certains logiciels utilisent plutôt une méthode de discrétisation-rejet (algorithme du Ziggurat de Marsaglia).

**Théorème 4.13** (Indépendance et convolution pour le cas à densité). *Si  $X, Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes de densités  $f$  et  $g$  alors  $X + Y$  admet la densité*

$$z \in \mathbb{R} \mapsto (f * g)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y) dy.$$

**Démonstration.** Comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, le couple  $(X, Y)$  admet pour densité la fonction produit  $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ . Le théorème du transfert pour le couple  $(X, Y)$  donne alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}[X + Y \leq t] = \iint \mathbf{1}_{\{(x,y):x+y \leq t\}} f(x)g(y) dx dy.$$

En effectuant le changement de variable  $(x, y) \mapsto (z, y)$  avec  $z = x + y$  il vient

$$\mathbb{P}[X + Y \leq t] = \iint \mathbf{1}_{\{z \leq t\}} f(z-y)g(y) dy dz.$$

Le théorème de Fubini-Tonelli donne à présent

$$\mathbb{P}[X + Y \leq t] = \int_{-\infty}^t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y) dy \right) dz. \quad \square$$

**Corollaire 4.14** (Pas d'égalité pour les couples denses). *Si  $(X_1, X_2)$  est un couple de variables aléatoires indépendantes à densité, alors  $\mathbb{P}[X_1 = X_2] = 0$  : avec probabilité 1, l'une des variables est strictement inférieure à l'autre. Plus généralement, si  $(X_1, \dots, X_n)$  est un vecteur de v.a. indépendantes à densité, alors avec probabilité 1, il existe une permutation  $\pi$  de  $\{1, \dots, n\}$  telle que  $X_{\pi(1)} < X_{\pi(2)} < \dots < X_{\pi(n)}$ .*

**Démonstration.** Les variables  $X_1$  et  $-X_2$  sont indépendantes et à densité, le théorème implique donc que  $X_1 - X_2$  est à densité. Par conséquent  $\mathbb{P}[X_1 - X_2 = 0] = 0$ . Pour la généralisation, on majore la probabilité que deux variables soient égales par la somme sur tous les couples  $(i, j)$  de  $\mathbb{P}[X_i = X_j]$ .  $\square$

**Exemple 4.15** (Somme de lois de Cauchy). *Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et suivent des loi de Cauchy de paramètres  $a$  et  $b$  (i.e.  $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+x^2}$ ),  $X + Y$  admet la densité*

$$f_{X+Y}(z) = \frac{ab}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2 + (z-y)^2} \cdot \frac{1}{b^2 + y^2} dy.$$

On peut montrer<sup>1</sup> que cette intégrale vaut

$$f_{X+Y}(z) = \frac{1}{\pi} \frac{(a+b)}{(a+b)^2 + z^2}.$$

Par conséquent,  $X + Y$  suit la loi de Cauchy de paramètre  $a + b$ .

**Remarque 4.16** (Statistique d'ordre et vecteur des rangs). *Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi admettant une densité. L'hypothèse*

1. On peut utiliser une décomposition en éléments simples. La méthode des résidus (hors-programme) fournit la réponse plus rapidement. La méthode la plus simple pour établir le résultat n'est pas de passer par la densité, mais d'utiliser les fonctions caractéristiques (hors-programme).

de densité entraîne via le corollaire 4.14 qu'avec probabilité 1, il existe une unique permutation (aléatoire)  $\pi_X$ , élément du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$ , telle que  $X_{\pi_X(1)} < \dots < X_{\pi_X(n)}$ . On parle de statistique d'ordre de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ . En particulier

$$X_{\pi_X(1)} = \min(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad X_{\pi_X(n)} = \max(X_1, \dots, X_n).$$

On dit que le vecteur  $(\pi_X^{-1}(1), \dots, \pi_X^{-1}(n))$  est le vecteur des rangs de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ . La loi du vecteur  $X$  est échangeable, c'est-à-dire que les vecteurs aléatoires  $X$  et  $X_\sigma = (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$  ont la même loi quelque soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , d'où

$$\mathbb{P}[\pi_X = \sigma] = \mathbb{P}[X_{\sigma(1)} < \dots < X_{\sigma(n)}] = \mathbb{P}[X_1 < \dots < X_n].$$

Le membre de droite ne dépend pas du choix de  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  et vaut donc  $1/\text{card}(\mathcal{S}_n) = 1/n!$ . Ainsi,  $\sigma$  suit la loi uniforme sur  $\mathcal{S}_n$ . Alternativement, il est également possible d'observer que  $\pi_{X_\sigma} = \pi_X \circ \sigma$  quelque soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , donc que la loi de  $\pi_X$  est invariante par toute translation, et donc que  $\pi_X$  suit la loi uniforme sur  $\mathcal{S}_n$  (exemple de la section 2.3). Il se trouve que  $\pi_X$  et la statistique d'ordre  $X_{\pi_X}$  sont indépendantes, car pour tout borélien  $A \subset \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < \dots < x_n\}$  et toute permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ,

$$\mathbb{P}[\pi_X = \sigma, X_{\pi_X} \in A] = \mathbb{P}[X_{\sigma(1)} < \dots < X_{\sigma(n)}, X_\sigma \in A] = \frac{1}{n!} \mathbb{P}[X \in \{A_{\sigma'} : \sigma' \in \mathcal{S}_n\}].$$

### 4.3 Moyenne et matrice de covariance

#### Couples de variables, covariance

Un vecteur aléatoire de taille 2 est appelé **couple** de variables aléatoires.

**Définition 4.17** (Covariance). La **covariance** de  $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est définie par

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Cette définition a bien un sens : l'inégalité de Cauchy–Schwarz montre que la v.a.r.  $(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])$  est intégrable et que l'on a

$$\mathbb{E}[|(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])|] \leq \sigma(X)\sigma(Y).$$

La covariance est symétrique :  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ . Elle est reliée à la variance par  $\text{Cov}(X, X) = \sigma^2(X)$ , et on a la formule bilinéaire

$$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

Si  $X, Y$  sont indépendantes alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  (on dit que  $X, Y$  sont non corrélées ou décorrélées) et

$$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y).$$

La réciproque est fautive :  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  n'implique pas que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes (on verra plus loin une réciproque dans un cas gaussien). Contre exemple :  $\text{Cov}(U, U^2) = \mathbb{E}[U^3] - \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[U^2] = 0$  si  $U$  est uniforme sur  $[-1, 1]$ .

Plus généralement, considérons une suite  $X_1, \dots, X_n$  de variables dans  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Par linéarité de l'espérance (*nul besoin d'indépendance*), on a

$$\mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n]$$

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  alors

$$\sigma^2(X_1 + \dots + X_n) = \sigma^2(X_1) + \dots + \sigma^2(X_n) + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \text{Cov}(X_k, X_l).$$

Si maintenant  $X_1, \dots, X_n$  sont *non-corrélées* (en particulier si elles sont *indépendantes*), les termes de covariance disparaissent et l'on a :

$$\sigma^2(X_1 + \dots + X_n) = \sigma^2(X_1) + \dots + \sigma^2(X_n).$$

Mais la variance est *quadratique*, et non pas linéaire :  $\sigma^2(aX + b) = a^2\sigma^2(X)$ . Voyons comment appliquer ces propriétés aux lois binomiale et hypergéométrique.

**Pile ou face : Calcul des moments.** Lorsque l'on tire  $n$  boules avec remise dans une urne contenant  $N_1$  boules ocre et  $N_2$  boules indigo, si l'on note  $X_k = \mathbf{1}_{\text{la } k^{\text{e}} \text{ boule est ocre}}$ , alors les  $(X_k)_{k=1, \dots, n}$  sont i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre  $p = N_1/(N_1 + N_2)$ . Le nombre  $S_n$  de boules ocre tirées suit la loi binomiale **Binom**( $n, p$ ). On retrouve l'espérance de la loi binomiale, calculée « à la main » précédemment :  $\mathbb{E}[S_n] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k] = np$ . Comme les  $(X_k)_{k=1, \dots, n}$  sont indépendantes,

$$\sigma^2(S_n) = \sum_{k=1}^n \sigma^2(X_k) = np(1-p).$$

**Sondage simple : Calcul des moments.** On reprend l'exemple ci-dessus en considérant des tirages *sans remise*. On retrouve le cadre du sondage simple. Avec les mêmes notations, les variables  $(X_k)_{k=1, \dots, n}$  sont toujours de loi de Bernoulli de paramètre  $p = N_1/(N_1 + N_2)$  mais elles ne sont plus indépendantes. Ceci ne change pas le calcul de l'espérance : on retrouve  $\mathbb{E}[S_n] = np$ . Pour la variance, on applique la formule

$$\sigma^2(S_n) = \sum_{k=1}^n \sigma^2(X_k) + 2 \sum_{k < l} \text{Cov}(X_k, X_l).$$

Pour  $k < l$ ,  $\text{Cov}(X_k, X_l) = \mathbb{E}[X_k X_l] - p^2$ . On voit ensuite que  $X_k X_l$  est une variable de Bernoulli. En revenant à l'interprétation combinatoire, il y a  $N!/(N-n)!$  arrangement possibles de  $n$  boules parmi  $N$ , d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_k X_l] &= \mathbb{P}[X_k X_l = 1] = \mathbb{P}[\text{les boules } k \text{ et } l \text{ sont ocre}] \\ &= \frac{N_1(N_1-1)(N-2)!}{(N-n)!} \\ &= \frac{N!}{(N-n)!} \\ &= \frac{N_1(N_1-1)}{N(N-1)}. \end{aligned}$$

On en déduit facilement  $\text{Cov}(X_k, X_l) = -p(1-p)\frac{1}{N-1}$ . Finalement

$$\sigma^2(S_n) = np(1-p) - 2\frac{n}{n-1}2\frac{p(1-p)}{N-1} = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}.$$

**Fléchettes : Décorrélation n'implique pas indépendance.** Dans le jeu de fléchettes notons  $X$  l'abscisse et  $Y$  l'ordonnée. Ces deux variables sont de moyenne nulle, donc  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY]$ . Cette espérance est donnée par la formule du transfert, et l'intégrale résultante peut se calculer en appliquant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \iint xy \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 x \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right) dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

Les deux variables  $X$  et  $Y$  sont donc décorrélées. En revanche, elle ne sont pas indépendantes. Intuitivement, connaître l'abscisse du point d'impact donne une information sur l'ordonnée ; en prenant par exemple  $I = J = [\sqrt{2}/2, 1]$ , on a

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in I \times J] = 0 \neq \mathbb{P}[X \in I] \mathbb{P}[Y \in J].$$

**Définition 4.18** (Coefficient de corrélation de Pearson). *Si  $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  avec  $\sigma^2(X) > 0$  et  $\sigma^2(Y) > 0$  alors on appelle **corrélation** de  $X$  et  $Y$  la quantité*

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\sigma^2(X)} \sqrt{\sigma^2(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Le coefficient de corrélation mesure la dépendance linéaire. En effet, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et ses cas d'égalité permet d'établir les propriétés suivantes :

1.  $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$  ;
2.  $\rho(X, Y) = 1$  si et seulement si  $\mathbb{P}[X = aY + b] = 1$  pour des réels  $a > 0$  et  $b$  ;
3.  $\rho(X, Y) = -1$  si et seulement si  $\mathbb{P}[X = aY + b] = 1$  pour des réels  $a < 0$  et  $b$ .

## Le cas vectoriel

**Définition 4.19** (Vecteur moyenne et matrice de covariance). *Soit  $X$  un vecteur colonne aléatoire de  $\mathbb{R}^d$ . Si ses composantes sont intégrables, alors son **vecteur moyenne** est*

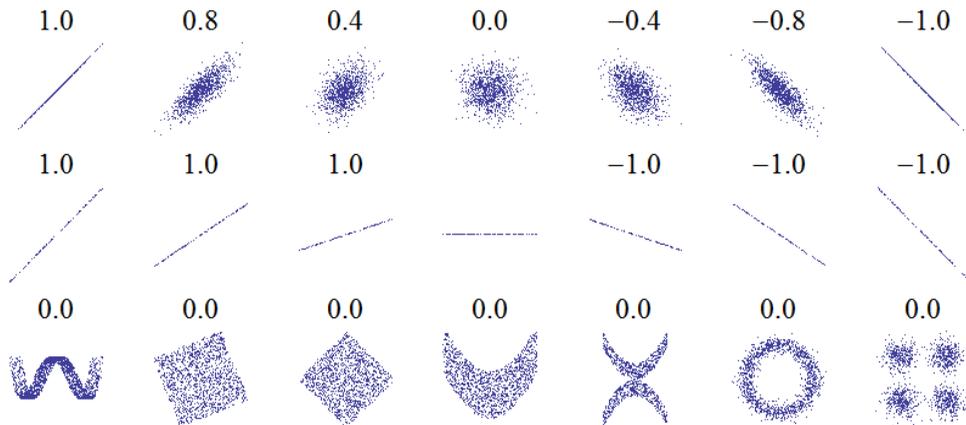
$$\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])^\top.$$

*Si les composantes  $X_1, \dots, X_n$  de  $X$  sont de carré intégrable, alors on appelle **matrice de covariance**  $\Sigma(X)$  la matrice symétrique  $d \times d$  donnée pour tous  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  par*

$$\Sigma(X)_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j).$$

On dit que  $X$  est **centré** si  $\mathbb{E}[X] = \mathbf{0}$  ; il est dit **réduit** si  $\Sigma(X)$  est la matrice identité  $I_d$ . La diagonale de  $\Sigma(X)$  est constituée des variances des composantes de  $X$ . Si les composantes de  $X$  sont indépendantes alors  $\Sigma(X)$  est diagonale. La réciproque est fautive en général, mais vraie pour les vecteurs gaussiens (section 4.4).

Les deux « résumés » que sont le vecteur moyenne et la matrice de covariance se comportent bien vis-à-vis des transformations affines.



Au dessus de chaque nuage de points, on a indiqué le coefficient de corrélation  $\rho$  correspondant.

- La première ligne est la situation « idéale » : la corrélation forte correspond à des droites, la corrélation nulle à un nuage étalé et la corrélation varie « continûment » avec le nuage.
- La deuxième ligne montre que le signe de la corrélation n'est pas toujours simple à interpréter, puisqu'il varie de  $-1$  à  $1$  alors que le nuage ne change presque pas.
- Enfin la troisième ligne met en garde contre l'utilisation de la corrélation comme seul indicateur de la dépendance : dans tous les nuages, la corrélation est nulle, pourtant l'abscisse et l'ordonnée dans chaque dessin sont reliées de manière non-linéaire.

FIGURE 4.1 – Corrélation et dépendance (source : Wikipédia).

**Théorème 4.20** (Transformations affines). *Soit  $X$  un vecteur (colonne) aléatoire de  $\mathbb{R}^d$  à composantes de carré intégrable. Si  $A$  est une matrice  $n \times d$  et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , alors le vecteur aléatoire  $AX + b$  de  $\mathbb{R}^n$  a pour moyenne et covariance :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[AX + b] &= A\mathbb{E}[X] + b \\ \Sigma(AX + b) &= A\Sigma(X)A^\top. \end{aligned}$$

La *linéarité* est essentielle : pour une transformation  $\varphi$  générale,  $\mathbb{E}[\varphi(X)] \neq \varphi(\mathbb{E}[X])$ .

**Démonstration.** Par linéarité de l'espérance, on a  $\mathbb{E}[AX + b] = A\mathbb{E}[X] + b$ . Pour la covariance, on se ramène au cas où  $b = 0$  et  $\mathbb{E}[X] = 0$  pour lequel on a

$$\Sigma(AX) = \mathbb{E}[(AX)(AX)^\top] = \mathbb{E}[AXX^\top A^\top] = A\mathbb{E}[XX^\top]A^\top = A\Sigma(X)A^\top. \quad \square$$

**Exercice 4.21** (Linéarité). *Montrer que si  $X$  est un vecteur (colonne) aléatoire de  $\mathbb{R}^d$  à composantes de carré intégrable, centrées, alors pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{E}(X^\top AX) = \text{Trace}(A\Sigma(X))$ .*

Rappelons qu'une matrice symétrique  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  est dite **semi-définie positive** si pour tout  $v \in \mathbb{R}^d$ ,  $v^\top Av \geq 0$ , et qu'elle est **définie positive** si l'inégalité est stricte pour les vecteurs non-nuls<sup>2</sup>.

2. On dit parfois simplement « positive » pour « semi-définie positive », au risque de confondre avec la condition  $a_{ij} \geq 0$ .

**Théorème 4.22** (Structure des matrices de covariance). *La matrice de covariance d'un vecteur aléatoire est toujours symétrique et semi-définie positive.*

**Démonstration.** Par le résultat précédent, les vecteurs  $X$  et  $(X - \mathbb{E}[X])$  ont même covariance et on peut supposer que  $X$  est centré : on a donc  $\Sigma(X) = \mathbb{E}[XX^\top]$ . Si  $v$  est un vecteur colonne de  $\mathbb{R}^d$ , alors la matrice  $vv^\top$  est symétrique, semi-définie positive, de rang 1. Ses valeurs propres sont 0 et  $v^\top v = \|v\|_2^2$ . Pour tout  $\omega$ , la matrice aléatoire  $(XX^\top)(\omega)$  est symétrique, semi-définie positive, de rang 1. Par conséquent, son espérance  $\Sigma$  est également symétrique. Le fait que  $\Sigma$  soit semi-définie positive découle de la linéarité de l'espérance, car si  $u$  est un vecteur colonne de  $\mathbb{R}^d$ ,

$$u^\top \Sigma u = u^\top \mathbb{E}[XX^\top] u = \mathbb{E}[u^\top XX^\top u] \geq 0.$$

En revanche,  $\Sigma$  peut être de rang quelconque entre 1 et  $d$ , bien que  $XX^\top$  soit de rang 1 (il faut concevoir l'espérance comme une combinaison convexe infinie).  $\square$

**Remarque 4.23** (Cône). *L'ensemble des matrices  $d \times d$  symétriques semi-définies positives est un cône convexe fermé : si  $A$  et  $B$  en sont deux éléments, alors pour tous réels  $\lambda, \mu \geq 0$ ,  $\lambda A + \mu B$  l'est également. La frontière de ce cône est constituée par les éléments du cône qui ne sont pas de plein rang. L'intérieur du cône est le cône convexe ouvert des matrices symétriques définies positives de dimension  $d \times d$ .*

Nous allons voir que le théorème précédent admet une réciproque. Pour cela nous avons besoin du résultat d'algèbre linéaire suivant.

**Théorème 4.24** (Racines carrées matricielles). *Toute matrice symétrique semi-définie positive  $\Sigma$  de dimension  $d \times d$  s'écrit  $\Sigma = AA^\top$  où  $A$  est une matrice de dimension  $d \times d$ . Une telle matrice  $A$ , appelée **racine carrée** de  $\Sigma$ , n'est pas unique en général.*

**Démonstration.** Le théorème spectral fournit une matrice diagonale  $D$  et une matrice orthogonale  $P$  telles que  $\Sigma = PDP^\top$ . De plus,  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$  où  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\} \subset \mathbb{R}_+^d$  est le spectre de  $\Sigma$ . Ainsi,  $\Sigma = AA^\top$  où  $A = P \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$ . Un autre choix possible est  $A = P \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d}) P^\top$ , qui fournit une racine carrée symétrique et semi-définie positive. Dans les deux cas, les matrices  $\Sigma$  et  $A$  ont le même rang. Alternativement, la décomposition de Cholesky fournit une matrice triangulaire inférieure  $A$  à diagonale positive ou nulle qui vérifie  $AA^\top = \Sigma$ . Une telle matrice se calcule par un algorithme récursif simple et explicite. En effet, l'équation  $AA^\top = \Sigma$  est équivalente au système d'équations suivant : pour tous  $1 \leq i \leq j \leq d$

$$A_{i,i} A_{j,i} = \Sigma_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} A_{i,k} A_{j,k}.$$

La diagonale de  $\Sigma$  est positive ou nulle, strictement positive lorsque  $\Sigma$  est inversible. Dans ce dernier cas, il existe une unique matrice  $A$  triangulaire inférieure à diagonale strictement positive telle que  $AA^\top = \Sigma$ , et la décomposition de Cholesky constitue alors un cas particulier de la décomposition LU des matrices inversibles.  $\square$

**Théorème 4.25** (Généricité des matrices de covariance). *Si  $\Sigma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  est symétrique semi-définie positive alors c'est la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^d$ .*

**Démonstration.** Soit  $A$  une racine carrée matricielle de  $\Sigma$  et  $X$  un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^d$  à composantes indépendantes centrées et réduites. La matrice de covariance de  $X$  est  $I_d$ . Le vecteur aléatoire  $AX$  est centré, de matrice de covariance  $AI_d A^\top = \Sigma$ .  $\square$

Le produit de Schur-Hadamard  $A \circ B$  de deux matrices  $A$  et  $B$  de dimension  $d \times d$  est le produit terme à terme :  $(A \circ B)_{i,j} = A_{i,j} B_{i,j}$  pour tout  $1 \leq i, j \leq d$ . Les considérations précédentes fournissent une preuve probabiliste du résultat d'algèbre linéaire suivant :

**Corollaire 4.26** (Schur). *Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices symétriques semi-définies positives de même dimension, alors  $A \circ B$  est symétrique semi-définie positive.*

**Démonstration.** Soient  $X$  et  $Y$  deux vecteurs aléatoires indépendants et centrés de  $\mathbb{R}^d$  tels que  $\Sigma(X) = A$  et  $\Sigma(Y) = B$ . Le vecteur aléatoire  $Z$  de  $\mathbb{R}^d$  défini par  $Z_i = X_i Y_i$  pour tout  $1 \leq i \leq d$  est centré, et sa matrice de covariance est donnée par  $A \circ B$  car  $X$  et  $Y$  sont indépendants et centrés. Ainsi, la matrice symétrique  $A \circ B$  est semi-définie positive en tant que matrice de covariance d'un vecteur aléatoire!  $\square$

#### 4.4 Loi normale multivariée, vecteurs gaussiens

La loi normale unidimensionnelle se généralise en dimension  $d$  de la manière suivante.

**Définition 4.27** (Loi normale ou loi de Gauss ou loi gaussienne). *Soit  $m \in \mathbb{R}^d$  et  $\Sigma$  une matrice symétrique  $d \times d$  définie positive. On dit que le vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_d)$  suit la **loi normale** de moyenne  $m$  et de matrice de covariance  $\Sigma$ , et on note  $X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$  lorsque  $X$  admet la densité*

$$x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \Sigma^{-1}(x - m), x - m \rangle\right).$$

On parle de **loi gaussienne standard** lorsque  $m = 0$  et  $\Sigma = I_d$ .

**Remarque 4.28.** *Si  $X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$ , le vecteur  $m$  est bien l'espérance de  $X$ , et la matrice  $\Sigma$  est la matrice de covariance  $\Sigma(X)$  définie à la section précédente :  $\Sigma_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j)$ .*



Dans le cas multidimensionnel, dans la notation  $\mathcal{N}(m, \Sigma)$  le  $\Sigma$  désigne toujours la matrice de covariance. Dans le cas univarié, le deuxième paramètre peut être soit la variance, soit l'écart-type, suivant les auteurs.

**Théorème 4.29** (Corrélation et indépendance dans le cas gaussien). *Si  $X_1, \dots, X_d$  sont des variables gaussiennes unidimensionnelles indépendantes, avec  $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$ , le vecteur  $(X_1, \dots, X_d)^\top$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(m, \text{Diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2))$ .*

*Réciproquement, si  $X = (X_1, \dots, X_d)$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(m, \Sigma)$  et si  $\Sigma$  est diagonale, alors la densité de  $X$  est produit, et les marginales  $(X_i)$  sont indépendantes.*

**Exercice 4.30** (Somme de gaussiennes indépendantes). *En utilisant le produit de convolution, montrer que si  $X_1$  et  $X_2$  sont deux v.a.r. indépendantes de loi normales  $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$  et  $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$  alors  $X + Y$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ .*

**Exercice 4.31** (Fonctions affines et lois normales). *Soit  $\Sigma$  une matrice  $d \times d$  symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positive. Soit  $A$  une matrice telle que  $\Sigma = AA^\top$  (obtenue par exemple via le théorème spectral ou via la décomposition de Cholesky). Établir au moyen du théorème du transfert et d'un changement de variable que si  $Z \sim \mathcal{N}(0, I_d)$  alors  $AZ + m \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$ . En déduire que si  $X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$  et  $v \in \mathbb{R}^d$  alors  $\langle X, v \rangle \sim \mathcal{N}(\langle m, v \rangle, \langle v, \Sigma v \rangle)$  et en particulier  $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \Sigma_{i,i})$  pour tout  $1 \leq i \leq d$ . Ainsi, les lois marginales d'un vecteur aléatoire de loi normale sont toutes de loi normale.*

**Exercice 4.32** (Vecteurs aléatoires à lois marginales gaussiennes et vecteurs gaussiens). *Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a.r. indépendantes avec  $X$  de loi de Rademacher de paramètre  $1/2$  et  $Y$  de loi normale  $\mathcal{N}(0,1)$  alors la v.a.r.  $XY$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0,1)$  tandis que la v.a.r.  $XY+Y$  ne suit pas la loi normale. En déduire que le vecteur aléatoire  $(XY, Y)$  de  $\mathbb{R}^2$  a des lois marginales normales mais ne suit pas une loi normale sur  $\mathbb{R}^2$ . Les fonctions caractéristiques (hors programme) permettent d'établir un résultat positif dans cet esprit en allant au delà des simples lois marginales : si  $Z$  est un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^d$  tel que  $v \cdot Z = v_1 Z_1 + \dots + v_d Z_d$  suit une loi normale sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^d$  alors  $Z$  est suit une loi normale sur  $\mathbb{R}^d$ .*

## 4.5 Fonctions génératrices et variables indépendantes

La puissance des fonctions génératrices (et de leurs analogues continus : transformée de Laplace et fonctions caractéristiques) tient entre autres au résultat suivant.

**Théorème 4.33** (Fonction génératrice et somme de variables indépendantes). *Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a.r. indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , de fonctions génératrices  $g_X$  et  $g_Y$ , alors pour tout  $s \in ]-1, 1]$ ,*

$$g_{X+Y}(s) = g_X(s)g_Y(s).$$

Ainsi l'opération « somme de deux variables indépendantes », qui se traduit sur les fonctions de masse ou les densités par une opération de *convolution* souvent difficile à calculer, s'exprime très simplement sur les fonctions génératrices par un *produit*.

**Pile ou face : retour sur les moments.** Si  $(X_1, \dots, X_n)$  sont des variables i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , la somme  $S_n = \sum X_i$  suit la loi binomiale  $\text{Binom}(n, p)$ . Comme la fonction génératrice de la loi de Bernoulli est  $g_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = q + ps$ , il vient

$$g_S(s) = (q + ps)^n.$$

On en déduit, pour  $n \geq 2$ ,

$$g'_S(s) = np(q + ps)^{n-1} \quad \text{et} \quad g''_S(s) = n(n-1)p^2(q + ps)^{n-2},$$

ce qui permet de retrouver

$$\mathbb{E}[S] = g'_S(1) = np \quad \text{et} \quad \sigma^2(X) = g''_S(1) + g'_S(1)(1 - g'_S(1)) = npq.$$

**Exemple 4.34.** *Soit  $X_1, X_2$  les résultats de deux dés équilibrés indépendants. La somme  $S$  a pour fonction génératrice :*

$$g_S(s) = g_{X_1}(s)g_{X_2}(s) = \frac{1}{36} \left( \sum_{k=1}^6 x^k \right)^2 = \frac{1}{36} \sum_{l=2}^{12} a_l x^l$$

où

$$a_l = \begin{cases} \mathbb{P}[S=l] = l-1 & \text{pour } l = 2, 3, \dots, 7, \\ 13-l & \text{pour } l = 8, 9, \dots, 12. \end{cases}$$

*La somme  $S$  ne suit donc pas une loi uniforme : obtenir 7 est par exemple plus probable qu'obtenir 2 ou 12.*

Peut-on truquer les deux dés de façon à obtenir une somme  $S$  uniforme ? Supposons que l'on puisse le faire : il existerait deux familles  $(a_k)$  et  $(b_k)$  telles que

$$\left( \sum_{k=1}^6 a_k x^k \right) \left( \sum_{k=1}^6 b_k x^k \right) = \sum_{l=2}^{12} x^l.$$

En simplifiant par  $x^2$  on obtient :

$$\left( \sum_{k=0}^5 a_{k+1} x^k \right) \left( \sum_{k=0}^5 b_{k+1} x^k \right) = \sum_{l=0}^{10} x^l.$$

Les racines du polynôme de droite sont les racines 11<sup>e</sup> non-triviales de l'unité :

$$\{\exp(2ik\pi/11); 1 \leq k \leq 10\}.$$

Aucune n'est réelle. À gauche, chacun des polynômes est de degré impair à coefficients réels et possède donc au moins une racine réelle : c'est contradictoire.

**Exemple 4.35** (Loi de Poisson). Si  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , sa fonction génératrice est donnée par :

$$g_X(s) = \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} s^k = \exp(-\lambda(1-s)).$$

On en déduit que la somme de deux variables de Poisson indépendantes de paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  est encore distribuée suivant une loi de Poisson, de paramètre  $\lambda + \mu$ .

## 4.6 Retour sur l'approximation binomiale/Poisson



Dans cette section, qu'on peut omettre en première lecture, on revient sur l'approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson lorsque  $n$  est grand et  $p$  petit, en montrant que l'on peut contrôler l'erreur explicitement.

Pour donner un sens précis aux approximations de lois, une approche est d'introduire des *distances entre lois de probabilité*. Dans le cas discret, on utilise souvent la distance en variation totale.

**Définition 4.36** (Distance en variation totale). Si  $X, X'$  sont des v.a. discrètes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , alors la distance  $l^1$  entre les suites  $(\mathbb{P}[X = k])$  et  $(\mathbb{P}[X' = k])$  est appelée **distance en variation totale**, notée :

$$\begin{aligned} d_V(X, X') &:= \sum_k |\mathbb{P}[X = k] - \mathbb{P}[X' = k]| \\ &= 2 - 2 \sum_k \min(\mathbb{P}[X = k], \mathbb{P}[X' = k]). \end{aligned}$$

La seconde expression provient de l'égalité  $|x - x'| = x + x' - 2 \min(x, x')$ .

Le théorème suivant donne un sens rigoureux à la fameuse phrase « convergence de la binomiale vers la loi de Poisson quand  $n$  est grand,  $p$  petit et  $np$  raisonnable ».

**Théorème 4.37** (Inégalité de poissonisation de Le Cam). *Soit  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  où  $X_1, \dots, X_n$  sont des v.a. indépendantes avec  $X_i$  de loi de Bernoulli de paramètre  $p_i = \mathbb{P}[X_i = 1] = 1 - \mathbb{P}[X_i = 0]$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Soit  $T_n$  une variable de loi de Poisson  $\text{Poi}(p_1 + \dots + p_n)$ . Alors  $\mathbb{E}[T_n] = \mathbb{E}[S_n]$  et*

$$d_V(S_n, T_n) \leq 2 \sum_{k=1}^n p_k^2.$$

En particulier, si tous les  $p_i$  sont égaux à  $p$ , alors  $S_n$  suit une loi binomiale et l'on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \mathbb{P}[S_n = k] - e^{-np} \frac{(np)^k}{k!} \right| \leq 2np^2.$$

Ainsi, si  $p = p_n$  dépend de  $n$  et vérifie  $np_n \rightarrow \lambda$  (par exemple  $p_n = \lambda/n$ ) alors l'erreur d'approximation entre binomiale et Poisson, quantifiée par la distance en variation totale, est majorée par  $2np_n^2 = \mathcal{O}(1/n)$ .

**Preuve du théorème 4.37.** Si  $X$  est une v.a. de Bernoulli de paramètre  $p$ , et  $T$  une v.a. de Poisson de paramètre  $p$ , la seconde expression de la variation totale donne

$$d_V(X, T) = 2 - 2\min(1 - p, e^{-p}) - 2\min(p, pe^{-p}) = 2 - 2(1 - p) - 2pe^{-p} = 2p(1 - e^{-p}) \leq 2p^2.$$

Le théorème s'en déduit en écrivant  $T_n$  comme somme de  $n$  variables de Poisson de paramètres  $p_k$ , et en appliquant le lemme suivant :

**Lemme 4.38.** *Soit  $(X, Y)$  et  $(X', Y')$  deux couples de variables indépendantes. Alors :*

$$d_V(X + Y, X' + Y') \leq d_V(X, X') + d_V(Y, Y').$$

Pour établir le lemme, on note  $a_j, b_j, a'_j$  et  $b'_j$  les probabilités d'être égal à  $j$  pour les variables aléatoires  $X, Y, X'$  et  $Y'$ . Ensuite, pour tout  $k$ , on écrit

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}[X + Y = k] - \mathbb{P}[X' + Y' = k]| &= \left| \sum_{(i,j); i+j=k} (a_i b_j - a'_i b'_j) \right| \\ &\leq \sum_{(i,j); i+j=k} (a_i |b_j - b'_j| + |a_i - a'_i| b'_j). \end{aligned}$$

En sommant sur  $k$ , on reconstruit tous les couples  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  :

$$\begin{aligned} \sum_k |\mathbb{P}[X + Y = k] - \mathbb{P}[X' + Y' = k]| &\leq \left( \sum_i a_i \right) \sum_j |b_j - b'_j| + \sum_i |a_i - a'_i| \sum_j b'_j \\ &\leq d_V(X, X') + d_V(Y, Y'). \end{aligned} \quad \square$$



## Théorèmes limites

### 5.1 Loi des grands nombres

La **loi des grands nombres** apparaît dans les travaux de (Jacob) Bernoulli pour des variables aléatoires du même nom. Elle a été améliorée et généralisée par de nombreux mathématiciens, dont Tchebychev, Markov, Borel, Cantelli, Kolmogorov, et Khintchine. Le terme « loi » dans l'expression « loi des grands nombres » doit être compris comme dans l'expression « loi de la nature ». L'expression est peut-être due à Poisson<sup>1</sup>.

**Pile ou face : point de vue statistique fréquentiste.** On dispose d'une pièce dont on ne sait pas si elle est équilibrée ou non ; elle tombe sur pile avec une probabilité  $p$  (inconnue). On lance ( $n$  fois ou une infinité de fois) la pièce, et on note  $X_k$  le résultat (dans  $\{0, 1\}$ ) du  $k^{\text{e}}$  lancer. L'univers et la tribu sont fixés, mais à chaque  $p \in [0, 1]$  on peut associer une probabilité  $\mathbb{P}_p$  décrivant l'expérience : sous  $\mathbb{P}_p$ , les variables  $X_k$  sont indépendantes, et  $\mathbb{P}_p[X_k = 1] = p$ . On cherche alors à *estimer* le paramètre inconnu  $p$  au vu d'une réalisation de l'expérience. L'idée naturelle est de choisir comme estimateur de  $p$  la fréquence empirique des piles :

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

Une première justification de ce choix est qu'en moyenne, il donne la bonne réponse<sup>2</sup> :

$$\mathbb{E}_p \left[ \frac{S_n}{n} \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p = p.$$

La loi des grands nombres donne une autre justification : la quantité aléatoire  $\frac{S_n}{n}$  approche bien  $p$  quand  $n$  grandit<sup>3</sup>. Comme  $\frac{S_n}{n}$  est formellement une fonction (de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ ), il faut préciser en quel sens cette convergence a lieu.

1. Voici les prénoms : Pafnouti Lvovitch, Andreï Andreïevitch, Félix Édouard Justin Émile, Francesco Paolo, Andreï Nikolaïevitch, Alexandre Iakovlevitch, Siméon-Denis.

2. On dit que l'estimateur  $S_n/n$  est *sans biais*.

3. On parle de *consistance* de l'estimateur.

**Théorème 5.1 (Loi faible des grands nombres).** Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  des variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi et intégrables ; on note  $m$  leur espérance commune. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right] = 0.$$

On dit aussi que la suite  $(n^{-1}(X_1 + \dots + X_n))_{n \geq 1}$  converge **en probabilité** vers  $m$ .

La loi faible doit son nom au type de la convergence, car la convergence en probabilité est plus faible que la convergence presque sûre fournie par la « loi forte ».

**Preuve partielle.** On se place sous l'hypothèse plus forte que les  $X_i$  sont de carré intégrable. L'inégalité de Bienaymé–Tchebychev (théorème 3.48) pour la v.a.r.  $S_n = X_1 + \dots + X_n - nm$ , et le fait que  $\sigma^2(S_n) = n\sigma^2(X_1)$  (grâce à l'indépendance) donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) &= \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \geq n\varepsilon) \\ &\leq \frac{\sigma^2(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{n\sigma^2(X_1)}{n^2} \varepsilon^2 = \mathcal{O}_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Le cas général est admis : l'idée de la preuve est d'approcher les  $X_i$  par des variables  $Y_i$  de carré intégrable, par exemple en tronquant à un niveau  $K$  :

$$Y_i = \begin{cases} X_i & \text{si } |X_i| \leq K, \\ -K & \text{si } X_i \leq -K, \\ K & \text{si } X_i \geq K. \end{cases}$$

Il faut ensuite montrer que la somme normalisée des  $Y_i$  est proche de celle des  $X_i$ .  $\square$

**Remarque 5.2** (Isotropie et hypothèses de la loi faible). La loi faible des grands nombres reste valable au delà du cas des variables aléatoires indépendantes de même loi. En effet, il suffit par exemple que  $\sigma^2(S_n) = o(n^2)$ , ce qui signifie que  $\frac{S_n}{n} \rightarrow 0$  dans  $L^2$  quand  $n \rightarrow \infty$ . C'est le cas par exemple lorsque le vecteur aléatoire  $(X_1, \dots, X_n)$  est isotrope, c'est-à-dire que sa matrice de covariance est  $I_n$ , c'est-à-dire que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont non-corrélées et de même variance :

$$\sigma^2(S_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \sigma^2(X_i) = \mathcal{O}(n) = o(n^2).$$

**Exemple 5.3** (Lois de Cauchy). Si la loi des  $X_n$  est à support compact alors elles possèdent des moments de tout ordre, et en particulier ces v.a.r. sont intégrables (ceci comprend le cas Bernoulli). A contrario, si  $X_1, \dots, X_n$  sont des v.a.r. indépendantes de loi de Cauchy de paramètre  $a$ , leur moyenne empirique  $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$  suit également la loi de Cauchy (il suffit d'utiliser le résultat de l'exemple 4.15 sur la somme de deux lois de Cauchy, de faire une récurrence, et de vérifier qu'un multiple d'une variable de Cauchy reste de Cauchy). La moyenne empirique reste aléatoire, et la convergence n'a pas lieu : la loi des grands nombres n'est pas vérifiée pour cette loi à queue lourde. Cette propriété concerne en fait toute une classe de lois, dont les lois de Pareto ou Student.

**Exemple 5.4** (Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass). *Un célèbre théorème de Weierstrass affirme que pour tout intervalle compact  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , la restriction des fonctions polynômes  $\mathbb{R}[X]$  à  $[a, b]$  est dense dans l'ensemble des fonctions continues  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , pour la topologie de la norme uniforme  $\|\cdot\|_\infty$ . On peut l'établir en utilisant la même idée que dans la preuve de la loi faible des grands nombres. On commence grâce à un argument de translation et dilatation par se ramener au cas où  $[a, b] = [0, 1]$ . Fixons  $f$  dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . On va montrer que les polynômes de Bernstein  $(P_n)_{n \geq 1}$  définis par*

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}$$

*convergent uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ . Fixons d'abord  $x \in [0, 1]$ , et donnons-nous une variable  $S_n^x = S_n$  une variable de loi binomiale  $\text{Binom}(n, x)$ . Par la formule du transfert appliquée à  $g : x \mapsto f(x/n)$ ,*

$$\mathbb{E} \left[ f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right] = \mathbb{E} [g(S_n)] = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[S_n = k] g(k) = P_n(x).$$

*Par conséquent, pour tout  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,*

$$f(x) - P_n(x) = \mathbb{E} \left[ f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right].$$

*Fixons un  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit. Comme  $f$  est continue sur l'intervalle compact  $[0, 1]$ , elle est uniformément continue d'après le théorème de Heine : il existe donc  $\eta > 0$  tel que  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  pour tous  $x, y \in [0, 1]$  tels que  $|x - y| \leq \eta$ . Considérons l'événement*

$$A_n = \left\{ \left| \frac{1}{n} S_n^x - x \right| \leq \eta \right\}.$$

*Comme  $\mathbb{E} \left[ \frac{1}{n} S_n^x \right] = x$  et  $\sigma^2 \left( \frac{1}{n} S_n^x \right) = \frac{1}{n} x(1-x)$ , on a par l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev :*

$$\mathbb{P}[A_n^c] \leq \frac{x(1-x)}{n\eta^2} \leq \frac{1}{4n\eta^2}.$$

*Il existe donc un entier  $N$ , dépendant de  $\varepsilon$  mais pas de  $x$ , tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $\mathbb{P}[A_n^c] \leq \varepsilon$ , d'où*

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(x)| &\leq \mathbb{E} \left[ \left| f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right| \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left| f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right| \mathbf{1}_{A_n} \right] + \mathbb{E} \left[ \left| f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right| \mathbf{1}_{A_n^c} \right] \\ &\leq \mathbb{E}(\varepsilon) + \mathbb{E}(2\|f\|_\infty \mathbf{1}_{A_n^c}) \\ &\leq (1 + 2\|f\|_\infty)\varepsilon. \end{aligned}$$

*Cette borne est uniforme en  $x \in [0, 1]$ , et le théorème est établi. Le théorème de Weierstrass permet d'établir, en utilisant la caractérisation de la loi par les fonctions tests continues et bornées, que si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a.r. bornées avec une suite de moments identique, c'est-à-dire que  $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n]$  pour tout  $n \geq 0$ , alors  $X$  et  $Y$  ont même loi.*

**Théorème 5.5 (Loi forte des grands nombres).** *Si  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi possédant une espérance  $m$  alors*

$$\mathbb{P} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = m \right] = 1.$$

On dit que la suite  $(n^{-1}(X_1 + \dots + X_n))_{n \geq 1}$  converge **presque sûrement** vers  $m$ .



La preuve de ce résultat est hors-programme. Toutefois, en plus de son intérêt intrinsèque, elle fournit une application naturelle du lemme de Borel–Cantelli.

La preuve comporte plusieurs étapes. Tout d’abord une troncature, pour se ramener à des variables de variance finie voire même bornées, et une inégalité de concentration (du type Bienaymé–Tchebychev) pour contrôler les écarts à la moyenne. Pour établir le résultat presque sûr, l’idée est de faire appel au lemme de Borel–Cantelli. La preuve complète se trouve par exemple dans le livre de Paul S. Toulouse [9] ou de Feller [7]. Nous donnons ci-dessous deux preuves rapides lorsque les variables sont bornées (par une constante ou dans  $L^4$ ) ce qui nous dispense de troncature. Il est également possible d’établir le résultat suivant dû à Kolmogorov : pour toute suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, la condition d’intégrabilité  $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$  (c’est-à-dire que  $X_1$  possède une espérance) est nécessaire et suffisante pour que la loi forte des grands nombres ait lieu.

**Exercice 5.6 (Mesurabilité).** *Montrer que l’ensemble  $\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = m \right\} \subset \Omega$  est bien un événement (un élément de  $\mathcal{F}$ ), en la réécrivant avec des unions et intersections dénombrables d’éléments de  $\mathcal{F}$ .*

Pour la preuve du théorème, quitte à remplacer les  $X_i$  par  $X_i - \mathbb{E}[X_i]$ , on peut supposer que  $m = 0$ . On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Pour montrer le théorème il suffit d’établir :

$$\mathbb{P} \left[ \overline{\lim}_n \{|S_n| > n\varepsilon\} \right] = 0.$$

En effet, ceci implique, pour une suite  $\varepsilon_k \searrow 0$  arbitraire, et pour tout  $k$ ,

$$\mathbb{P} \left[ \left( \overline{\lim}_n \frac{|S_n|}{n} \right) > \varepsilon_k \right] = \mathbb{P} \left[ \overline{\lim}_n \{|S_n| > n\varepsilon\} \right] = 0.$$

En prenant l’union dénombrable en  $k$ , le théorème 2.11 donne  $\mathbb{P} \left[ \overline{\lim}_n \frac{S_n}{n} > 0 \right] = 0$ , d’où l’on déduit  $\mathbb{P} [\lim S_n/n = 0] = 1$ .

**Preuve du théorème 5.5 pour des variables bornées.** Supposons qu’il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\mathbb{P}[|X_i| \leq C] = 1$  (ne dépend pas de  $i$  car les variables ont même loi). La première partie du lemme de Borel–Cantelli permet de se ramener à établir que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}[|S_n| \geq \varepsilon n] < \infty$$

pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé. Or pour tout  $r > 0$  et tout entier  $n \geq 1$ , l’inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}[S_n \geq n\varepsilon] \leq \mathbb{P}[e^{rS_n} \geq r n \varepsilon] \leq e^{-r n \varepsilon} \mathbb{E}[e^{rS_n}] = e^{r n \varepsilon} \mathbb{E}[e^{rX_1}]^n, \quad (5.1)$$

où l'égalité finale provient du fait que les variables  $(X_n)_{n \geq 1}$  sont indépendantes et de même loi. À présent, comme  $m = \mathbb{E}[X_1] = 0$  et  $\mathbb{P}[|X_1| \leq C] = 1$ , il vient, en utilisant l'inégalité élémentaire  $e^t - t \leq e^{2t^2}$  si  $t \in [0, 1/2]$  et  $e^t - t \leq e^t \leq e^{2t^2}$  si  $t \geq 1/2$ ,

$$\mathbb{E}[e^{rX_1}] \leq e^{rC} - rC \leq e^{2r^2C^2}.$$

Le meilleur choix pour le paramètre  $r$  est  $r = \varepsilon/(4C^2)$ ; en reportant dans (5.1) il vient :

$$\mathbb{P}[S_n \geq n\varepsilon] \leq e^{rn\varepsilon - 2nr^2C^2} \leq e^{-n\varepsilon^2/(8C^2)}.$$

En combinant ceci à la même inégalité pour les variables  $(-X_1)_{n \geq 1}$  on obtient enfin

$$\mathbb{P}[|S_n| \geq n\varepsilon] \leq 2e^{-n\varepsilon^2/(8C^2)}.$$

Le membre de droite est bien le terme général d'une série convergente, comme désiré.  $\square$

**Cas des variables bornées dans  $L^4$ .** On suppose que les variables  $(X_n)_{n \geq 1}$  sont bornées dans  $L^4$ , c'est à dire que  $\tau^4 = \mathbb{E}[X_1^4] < \infty$ . On a alors

$$\mathbb{E}[S_n^4] = n\tau^4 + 3n(n-1)\sigma^4 = \mathcal{O}(n^2).$$

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , par l'inégalité de Markov,

$$\sum_n \mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon) = \sum_n \mathbb{P}(|S_n|^4 > n^4\varepsilon^4) \leq \sum_n \frac{\mathbb{E}[S_n^4]}{n^4\varepsilon^4} < \infty$$

et le résultat découle à présent de la première partie du lemme de Borel–Cantelli. Notons que si  $\mathbb{P}[|X_1| \leq C] = 1$  alors la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  est bornée dans  $L^4$ , et la seconde preuve est donc plus puissante. D'autre part, elle reste valable même si les variables ne sont pas de même loi, pourvu qu'elles soient indépendantes et bornées dans  $L^4$ .  $\square$

**Exercice 5.7** (De la loi forte à la loi faible). *La loi faible (théorème 5.1) découle de la loi forte (théorème 5.5) car  $\mathbb{P}[n^{-1}|S_n| > \varepsilon] \leq \mathbb{P}[A_n]$  avec  $A_n = \{\sup_{k \geq n} k^{-1}|S_k| > \varepsilon\}$  et comme la suite  $(A_n)_{n \geq 1}$  est croissante, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}[\cap_n A_n] = 1$  quand  $m = 0$ .*

**Exemple 5.8** (Marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}$ ). *La marche aléatoire simple peut modéliser la position d'une particule dans un fluide, et sa version continue, le mouvement Brownien, a été introduite en physique par Einstein et Langevin, et en finance mathématique par Bachelier. Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi de Rademacher de paramètre  $p \in [0, 1]$ , c'est-à-dire que  $\mathbb{P}[X_n = 1] = 1 - \mathbb{P}[X_n = -1] = p$  pour tout  $n \geq 1$ , modélisant les incréments dus au choc avec les particules du fluide. La marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}$  est la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  où  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . La loi forte des grands nombres entraîne que si  $p \neq 1/2$  alors  $(S_n)_{n \geq 1}$  diverge vers  $\pm\infty$  avec probabilité 1 quand  $n \rightarrow \infty$ .*

**Exemple 5.9** (Inégalité de Jensen et loi des grands nombres). *Rappelons que si  $X$  est une v.a.r. intégrable et  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe telle que  $\varphi(X)$  est intégrable, l'inégalité de Jensen (remarque 3.41) dit que*

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

*Pour déduire cette inégalité de la loi des grands nombres, on introduit une suite  $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$  de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que  $X$ . Par définition de la convexité, on a l'inégalité*

$$\varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X_i).$$

Comme les  $X_i$  sont intégrables, indépendantes et de même loi, on peut leur appliquer la loi des grands nombres :  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  converge presque sûrement vers  $\mathbb{E}[X]$ . Comme  $\varphi$  est convexe, elle est continue, donc  $\varphi(\frac{1}{n} \sum X_i)$  converge presque sûrement vers  $\varphi(\mathbb{E}[X])$ . Par une nouvelle application de la loi des grands nombres, cette fois à la suite  $(\varphi(X_i))$ , le terme de droite tend presque sûrement vers  $\mathbb{E}[\varphi(X)]$ , ce qui achève la preuve.

**Remarque 5.10** (Convergence monotone ou théorème de Fubini-Tonelli). *Le lecteur familier avec l'intégrale de Lebesgue connaît bien le théorème de convergence monotone : si  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une suite croissante de v.a.r. à valeurs dans  $[0, \infty]$  alors*

$$\lim_n \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E} \left[ \lim_n X_n \right].$$

*D'autre part, si  $X$  est une v.a.r. sur  $[0, \infty]$  vérifiant  $\mathbb{E}[X] < \infty$  alors  $\mathbb{P}[X < \infty] = 1$ . La première partie du lemme de Borel-Cantelli en découle car*

$$\sum_n \mathbb{P}[A_n] = \sum_n \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_n}] = \mathbb{E} \left( \sum_n \mathbf{1}_{A_n} \right) = \mathbb{E} \left( \mathbf{1}_{\lim_n A} \right).$$

*On peut aussi voir ce résultat comme une conséquence du théorème de Fubini-Tonelli plutôt que comme une application du théorème de convergence monotone. Une autre conséquence de ces théorèmes est que*

$$\sum_n \mathbb{E}[|Y_n|] < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P} \left[ \lim_n Y_n = 0 \right] = 1.$$

*En effet, on a  $\mathbb{E}[\sum_n |Y_n|] = \sum_n \mathbb{E}[|Y_n|] < \infty$  et donc  $\sum_n |Y_n|$  est une v.a.r. sur  $[0, \infty]$  d'espérance finie, et donc finie avec probabilité 1, ce qui implique que  $|Y_n|$  tend vers 0 avec probabilité 1. Cette observation suggère une preuve alternative du théorème 5.5 :*

$$\mathbb{E} \left( \sum_n \left( \frac{S_n}{n} \right)^4 \right) = \sum_n \mathbb{E} \left( \left( \frac{S_n}{n} \right)^4 \right) < \infty \quad \text{d'où} \quad \mathbb{P} \left( \lim_n \frac{S_n}{n} = 0 \right) = 1.$$

**Remarque 5.11** (Suite). *Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a.r. indépendantes de carré intégrable. Si  $\sum_n \text{Var}(X_n) < \infty$  alors en vertu du théorème de convergence monotone ou du théorème de Fubini-Tonelli positif on a  $\mathbb{P}[\lim_n X_n - \mathbb{E}[X_n] = 0] = 1$ . En particulier, si  $(X_n)_{n \geq 1}$  sont des v.a.r. i.i.d. centrées de carré intégrable alors*

$$\mathbb{P} \left[ \lim_n n^{-1} X_n = 0 \right] = 1.$$

*Attention, il ne s'agit pas de la loi des grands nombres, qui concerne  $n^{-1}(X_1 + \dots + X_n)$ .*

**Exemple 5.12** (Covariance empirique). *Soit  $X$  un vecteur colonne aléatoire de  $\mathbb{R}^m$  centré et de matrice de covariance  $\Sigma$ . Soient  $X_1, \dots, X_n$  des vecteurs colonne aléatoires de  $\mathbb{R}^m$  de même loi que  $X$ . La matrice de covariance empirique  $\Sigma_n$  est définie par*

$$\Sigma_n = \frac{1}{n} (X_1 X_1^\top + \dots + X_n X_n^\top) = \frac{1}{n} \mathbb{X}^\top \mathbb{X}$$

*où  $\mathbb{X}$  est la matrice aléatoire  $m \times n$  dont les lignes sont  $X_1^\top, \dots, X_n^\top$ . La matrice aléatoire  $\Sigma_n$  est symétrique semi-définie positive car combinaison convexe de telles matrices. On a*

$$\mathbb{E}[\Sigma_n] = \Sigma$$

*et la loi forte des grands nombres indique que  $\Sigma_n$  converge entrée par entrée vers  $\Sigma$ , avec probabilité 1. Comme l'ensemble des matrices inversible est ouvert, si  $\Sigma$  est inversible, alors avec probabilité 1, la matrice  $\Sigma_n$  est inversible pour  $n$  assez grand.*

## 5.2 Théorème limite central

Le théorème limite central apparaît dans les travaux de Moivre. Il a été développé ensuite par Laplace, Tchebychev, et Lyapunov notamment. Pólya<sup>4</sup> publie pendant les années folles un article intitulé « Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem », où il qualifie ce « théorème limite » (Grenzwertsatz) de « zentral » (primordial, principal) en raison de son caractère universel. Si la traduction anglaise semble fixée (« central limit theorem » souvent abrégé en CLT), l'usage francophone, partant de la traduction littérale « théorème limite central » (TLC), attribue souvent la centralité à la limite en parlant de « théorème de la limite centrale », allant parfois même jusqu'à l'audacieux « théorème central limite » (TCL).

### Énoncé du théorème

On cherche à estimer l'espérance  $m$  d'une variable aléatoire  $X$  au vu d'un échantillon  $X_1, \dots, X_n$  de répétitions indépendantes de  $X$ . La loi des grands nombres montre que la moyenne empirique

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$$

est un estimateur consistant et sans biais de  $m$ . Ce résultat ne suffit pas en pratique : on a besoin de contrôler l'erreur faite en estimant  $m$  par  $\bar{X}_n$ .

Cette erreur  $E_n = \bar{X}_n - m$  est de moyenne nulle. On peut aisément calculer sa variance :

$$\sigma^2(E_n) = \frac{\sigma^2(X)}{n}.$$

L'écart-type de l'erreur est donc *proportionnel* à  $1/\sqrt{n}$ .

Pour étudier  $E_n$  plus finement, on normalise en divisant par l'écart-type et l'on pose

$$Z_n = \frac{E_n}{\sigma(E_n)} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma(X)} \left( \frac{S_n}{n} - m \right).$$

L'erreur normalisée  $Z_n$  est alors, par définition, « centrée » (de moyenne nulle) et « réduite » (d'écart-type 1). Si  $(X_n)$  est « raisonnable », cette erreur normalisée converge :

**Théorème 5.13 (Théorème limite central).** *Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi, de variance non nulle et finie  $\sigma^2$  et de moyenne  $m$ . Alors pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , l'erreur normalisée  $Z_n = (S_n/n - m)/(\sigma/\sqrt{n})$  vérifie*

$$\mathbb{P}[Z_n \in I] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z \in I] = \int_I \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

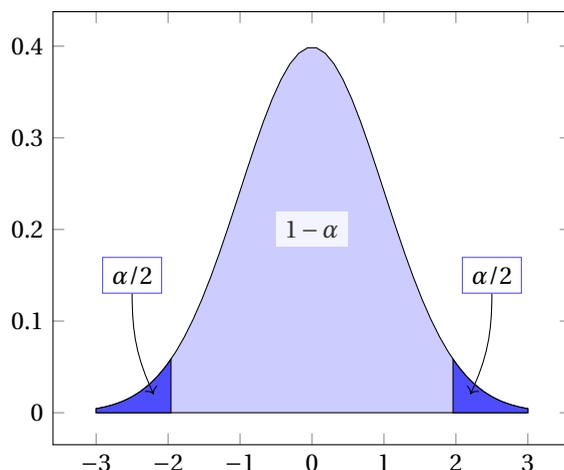
pour une v.a.r.  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  quelconque. On dit que  $Z_n$  **converge en loi** vers  $Z$ .

**Remarque 5.14 (Universalité).** *Ce résultat ne dépend de la loi des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots$ , qu'à travers leur moyenne et leur variance, qui déterminent la manière de normaliser l'erreur : la loi normale qui apparaît à la limite est universelle.*

**Remarque 5.15 (Point fixe).** *Si les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots$  suivent une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ , l'erreur normalisée  $Z_n$  suit exactement la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  — en ce sens, le théorème limite central ressemble à un théorème de point fixe.*

Nous donnons plus bas une preuve du théorème limite central (hors-programme).

4. Voici les prénoms : Abraham, Pierre-Simon, Pafnouti Lvovitch, Alexandre Mikhaïlovitch, Georg.



Densité de la loi normale centrée réduite. L'aire totale sous la courbe vaut 1. Pour obtenir une région centrée  $[-q_\alpha, q_\alpha]$  d'aire  $1 - \alpha$  il faut choisir  $q_\alpha$  comme le quantile d'ordre  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de la loi normale.

FIGURE 5.1 – Quantile et fluctuation de la loi normale standard

### Illustrations et applications

Soit  $\alpha \in ]0, 1/2[$  un réel —  $\alpha$  s'interprétera comme un risque d'erreur, les choix typiques étant  $\alpha = 0.05$  et  $\alpha = 0.01$ . Si  $Z$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ , et si l'on note  $q_\alpha$  le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi normale, alors

$$\mathbb{P}[-q_\alpha \leq Z \leq q_\alpha] = 1 - \alpha.$$

Il y a donc une probabilité  $1 - \alpha$  que la variable aléatoire  $Z$  tombe dans l'intervalle (déterministe)  $[\pm q_\alpha]$  — on dit parfois que  $I_F(\alpha) := [-q_\alpha, q_\alpha]$  est un **intervalle de fluctuation** au niveau  $1 - \alpha$  de la variable  $Z$ .

Le théorème limite central implique

$$\mathbb{P}[Z_n \in I_\alpha] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha.$$

**Pile ou face : fluctuations.** On jette  $n$  fois une pièce équilibrée et on note  $S_n$  le nombre de piles. La loi des grands nombres dit que si  $n$  tend vers l'infini,  $S_n/n$  tend vers  $1/2$ . Pour préciser cela utilisons le théorème limite central : si l'on admet que  $n$  est assez grand pour que  $\mathbb{P}[Z_n \in I]$  soit proche de sa limite, on a

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \mathbb{P}[Z \in I_\alpha] \approx \mathbb{P}[Z_n \in I_F(\alpha)] \\ &= \mathbb{P}\left[S_n \in \left[mn - q_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, mn + q_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right]. \end{aligned}$$

Comme  $m = 1/2$  et  $\sigma = 1/4$ , on trouve pour  $n = 1000$  et  $\alpha = 5\%$  :

$$\mathbb{P}[S_{1000} \in [500 \pm 15.49]] \approx 0.95.$$

Dans le cas précédent, on a supposé l'expérience parfaitement connue (on sait que la pièce est équilibrée) et on a cherché à calculer les probabilités de divers événements — c'est le point de vue *probabiliste*.

L'utilisation la plus courante du théorème correspond au point de vue *statistique*. Nous avons vu précédemment que la loi des grands nombres donnait une justification de l'utilisation de la moyenne empirique  $S_n/n$  comme estimateur de l'espérance (inconnue) d'une variable  $X$ . Le théorème limite central peut alors donner une idée de l'erreur d'estimation. Ce renversement de point de vue consiste à écrire

$$\begin{aligned} Z_n(\omega) \in I_F(\alpha) &\Leftrightarrow |Z_n(\omega)| \leq q_\alpha \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{S_n(\omega)/n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq q_\alpha \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{S_n(\omega)}{n} - m \right| \leq q_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow m \in \left[ \frac{S_n(\omega)}{n} \pm q_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]. \end{aligned}$$

La première ligne correspond à l'appartenance d'une quantité aléatoire à un intervalle déterministe ; dans la dernière on regarde l'appartenance du réel  $m$  (déterministe) à un intervalle aléatoire. Le théorème limite central se réinterprète alors ainsi.

**Théorème 5.16** (Intervalle de confiance pour l'estimation d'une moyenne). *En notant  $I_C(\alpha)$  l'intervalle aléatoire*

$$I_C(\alpha) = \left[ \bar{X}_n - \sigma \frac{q_\alpha}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \sigma \frac{q_\alpha}{\sqrt{n}} \right]$$

on a

$$\mathbb{P}[m \in I_C(\alpha)] = \mathbb{P}[Z_n \in I_F(\alpha)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 - \alpha.$$

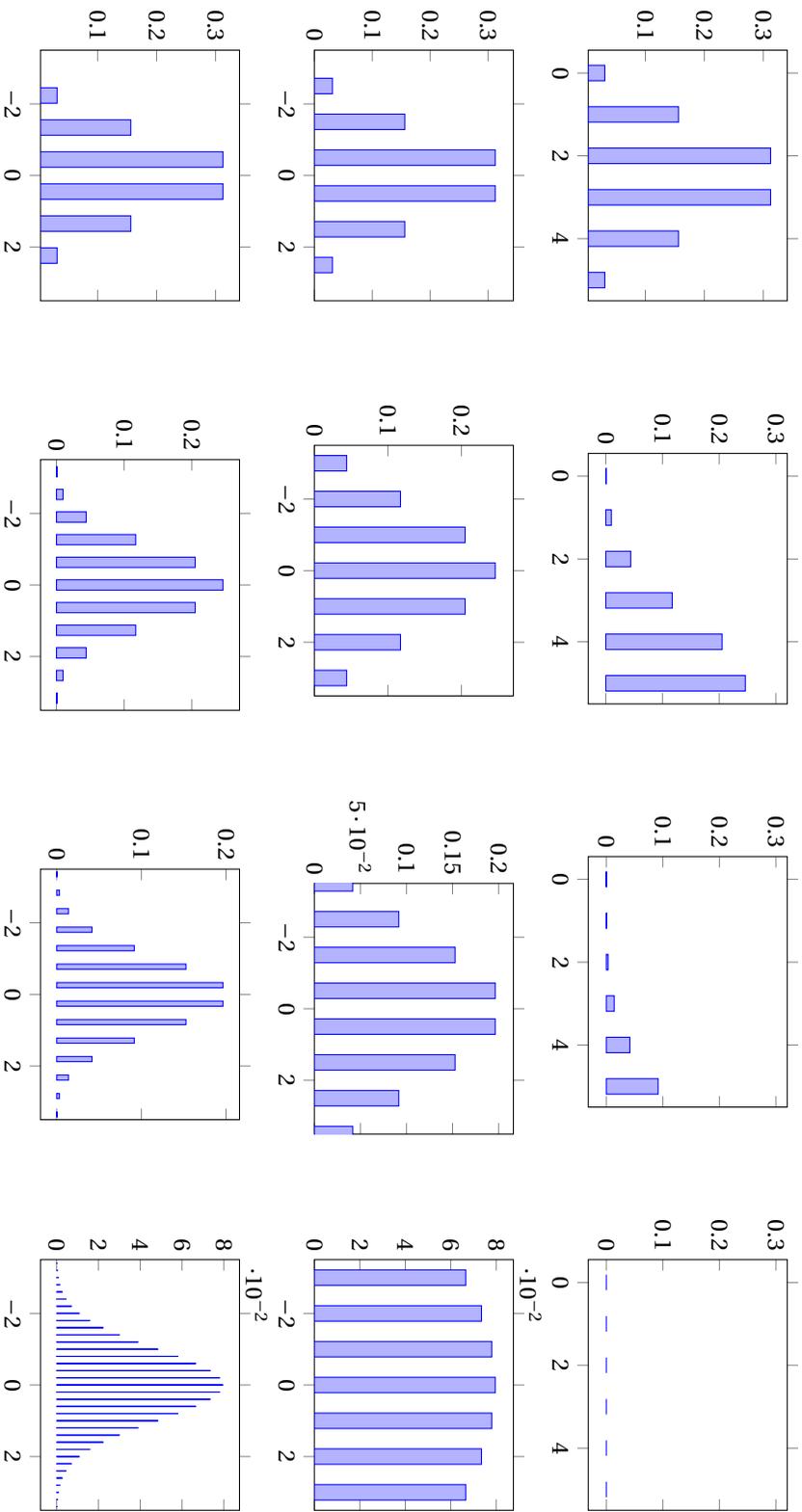
On dit que  $I_C(\alpha)$  est un **intervalle de confiance (asymptotique)** pour l'estimation de  $m$  au niveau  $1 - \alpha$ .

L'intervalle  $I_C(\alpha)$  est de largeur  $2\sigma q_\alpha n^{-1/2}$ . Cette largeur tend vers  $\infty$  si le risque  $\alpha$  tend vers  $0$  à  $n$  fixé, et vers  $0$  si  $\alpha$  est fixé et  $n$  tend vers l'infini.

Malheureusement, cet intervalle n'est calculable en pratique que si l'écart-type  $\sigma$  est connu ! On peut parfois contourner cette difficulté lorsqu'on dispose d'un majorant de  $\sigma$  : c'est le cas en particulier pour des variables bornées comme les variables de Bernoulli.

**Pile ou face : intervalle de confiance.** Les variables  $(X_i)$  suivent une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  inconnu, pour lequel on cherche un intervalle de confiance. L'écart-type  $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$  est inconnu, mais comme  $p \in [0, 1]$ ,  $\sigma \leq 1/2$ . Par conséquent,

$$I'_C(\alpha) := \left[ \bar{X}_n - \frac{q_\alpha}{2\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{q_\alpha}{2\sqrt{n}} \right] \supset I_C(\alpha),$$



Première ligne : les diagrammes en bâtons de la loi binomiale pour  $p = 1/2$  et  $n = \dots$  ; les échelles en  $x$  et  $y$  sont fixées. La masse s'échappe vers la droite.

Deuxième ligne : la loi de la variable centrée  $S_n - np$ , l'échelle en  $x$  est fixée. Le diagramme s'aplatit et on ne voit qu'une fraction de plus en plus petite de la masse.

Troisième ligne : la loi de la variable centrée et réduite  $(S_n - np) / \sqrt{np(1-p)}$ .

FIGURE 5.2 – Diagramme en bâtons de la binomiale

ce qui donne finalement

$$\mathbb{P} [m \in I'_C(\alpha)] \geq \mathbb{P} [m \in I_C(\alpha)] \approx 1 - \alpha.$$

Le fameux intervalle de confiance à « 95% » s'obtient avec  $\alpha = 0.05$  et  $q_{0.05} = 1.96$ .

Dans le cas plus général où  $\sigma$  est inconnu, une idée naturelle est de le remplacer dans la formule de  $I_C(\alpha)$  par un estimateur. Cette procédure est justifiée mathématiquement par le lemme de Slutsky, présenté plus loin dans les compléments, p. 141. Appliqué au cas des variables de Bernoulli, on « remplace » donc  $\sigma$  par son estimateur

$$\hat{\sigma}_n = \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}$$

pour obtenir l'intervalle dit de Wald :

$$I_C^{\text{Wald}}(\alpha) = \left[ \bar{X}_n \pm \hat{\sigma}_n \frac{q_\alpha}{\sqrt{n}} \right].$$

Cet intervalle est plus petit (et donc meilleur) que  $I'_C$ .

**Exercice 5.17** (Du théorème limite central à la loi faible des grands nombres). *Il est possible de déduire la loi faible des grands nombres du théorème limite central. Notons  $a_n = \sigma/\sqrt{n}$ . Le théorème limite central affirme que  $Z_n$  converge en loi vers  $Z$ , il s'agit d'en déduire que  $a_n Z_n$  converge en probabilité vers  $0$ . Pour cela on peut utiliser deux résultats rappelés dans l'annexe I.1. Comme  $a_n$  tend vers  $0$ , le lemme de Slutsky montre que  $a_n Z_n$  converge en loi vers  $0 \cdot Z = 0$ . Comme cette variable limite est constante, la convergence a en fait lieu en probabilité (cf. remarque I.5).*

Une application du théorème limite central au problème de la ruine du joueur figure dans l'annexe E.

## Preuve du théorème limite central



La preuve du théorème limite central est hors-programme.

La preuve basée sur les fonctions caractéristiques est rapide mais utilise des outils hors-programme; nous allons présenter une preuve utilisant une inégalité de couplage.

En reprenant les notations de l'énoncé du théorème limite central, il s'agit d'établir la convergence de  $\mathbb{P} [Z_n \in I]$  vers  $\mathbb{P} [Z \in I]$ , c'est-à-dire de montrer :

$$\text{Pour toute } f \text{ indicatrice d'intervalle, } \mathbb{E} [f(Z_n)] \rightarrow \mathbb{E} [f(Z)].$$

Nous utiliserons le résultat suivant :

**Lemme 5.18** (Inégalité de couplage de Lindeberg). *Soient  $X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n$  des v.a.r. indépendantes telles que  $\mathbb{E} [|X_k|^3] < \infty$  et  $Y_k \sim \mathcal{N}(\mathbb{E} [X_k], \sigma^2(X_k))$  pour tout  $1 \leq k \leq n$ . Alors pour toute  $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  avec  $f, f', f'', f'''$  bornées, en posant  $\tau_k^3 = \mathbb{E} [|X_k - \mathbb{E} [X_k]|^3]$ ,*

$$|\mathbb{E} [f(X_1 + \dots + X_n)] - \mathbb{E} [f(Y_1 + \dots + Y_n)]| \leq \frac{\tau_1^3 + \dots + \tau_n^3}{2} \|f'''\|_\infty.$$

**Démonstration.** Quitte à traduire  $f$  on peut se placer dans le cas où  $\mathbb{E}[X_k] = 0$  pour tout  $1 \leq k \leq n$ . Pour comparer  $\mathbb{E}[f(X_1 + \dots + X_n)]$  à  $\mathbb{E}[f(Y_1 + \dots + Y_n)]$ , l'idée est de remplacer, de proche en proche, les  $X_i$  par les  $Y_i$ . Fixons  $n \geq 1$  et posons, pour tout  $1 \leq k \leq n$  :

$$Z_k = X_1 + \dots + X_{k-1} + Y_{k+1} + \dots + Y_n.$$

Avec ces notations, on a la somme télescopique

$$f(X_1 + \dots + X_n) - f(Y_1 + \dots + Y_n) = \sum_{k=1}^n (f(Z_k + X_k) - f(Z_k + Y_k)).$$

La formule de Taylor-Lagrange appliquée à  $f$  à l'ordre 2 en  $Z_k$  donne

$$f(Z_k + X_k) = f(Z_k) + f'(Z_k)X_k + f''(Z_k)\frac{X_k^2}{2!} + f'''(A_k)\frac{X_k^3}{3!},$$

où  $A_k$  est un réel entre  $Z_k$  et  $Z_k + X_k$ . De même on a

$$f(Z_k + Y_k) = f(Z_k) + f'(Z_k)Y_k + f''(Z_k)\frac{Y_k^2}{2!} + f'''(B_k)\frac{Y_k^3}{3!}.$$

On prend l'espérance de la différence de ces expressions :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(Z_k + X_k) - f(Z_k + Y_k)] &= \mathbb{E}[f(Z_k)(X_k - Y_k)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[f''(Z_k)(X_k^2 - Y_k^2)] \\ &\quad + \frac{1}{3!}\mathbb{E}[f'''(A_k)X_k^3 + f'''(B_k)Y_k^3]. \end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que  $(X_k, Y_k)$  et  $Z_k$  sont *indépendantes*. Comme les deux premiers moments de  $X_k$  et  $Y_k$  coïncident, il vient

$$|\mathbb{E}[f(Z_k + X_k) - f(Z_k + Y_k)]| \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{3!} \mathbb{E}[|X_k|^3 + |Y_k|^3].$$

Comme  $Y_k = \sigma(X_k)G_k$  avec  $G_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et comme  $\mathbb{E}[|G_k|^3] = 4/\sqrt{2\pi} \leq 2$ , on obtient

$$\mathbb{E}[|Y_k|^3] = \mathbb{E}[|X_k|^2]^{3/2} \mathbb{E}[|G_k|^3] \leq 2\mathbb{E}[|X_k|^3].$$

Il ne reste plus qu'à sommer les majorations pour conclure. □

**Preuve du théorème limite central (théorème 5.13).** On supposera dans cette preuve que  $\mathbb{E}[|X_1 - m|^3] = \tau^3 < \infty$ , ce qui couvre le cas Bernoulli. On montre le résultat en deux temps.

*Convergence pour les fonctions régulières.* Posons  $X'_i = (X_i - m)/(\sigma\sqrt{n})$  : on a

$$\mathbb{E}[X'_i] = 0, \quad \sigma^2(X'_i) = 1/n, \quad \sum_{i=1}^n X'_i = Z_n.$$

Soit  $Y_i$  une suite de variables indépendantes de loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1/n)$ . Alors les  $(X'_i, Y_i)$  vérifient les hypothèses du lemme 5.18, avec pour tout  $i$ ,  $\tau_i^3 = \mathbb{E}[|X'_i|^3] = \frac{\tau^3}{\sigma^3 n^{3/2}}$ . Comme de plus  $Z = \sum Y_i$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ , on en déduit :

$$|\mathbb{E}[f(Z_n) - f(Z)]| \leq \frac{\tau^3}{\sigma^3} \|f'''\|_\infty \cdot \frac{1}{\sqrt{n}},$$

d'où la convergence de  $\mathbb{E}[f(Z_n)]$  vers  $\mathbb{E}[f(Z)]$  pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $f, f', f'', f'''$  sont bornées.

*Approximation des indicatrices.* Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ; on se limitera au cas  $I = ]-\infty, a]$ , les autres étant similaires. Pour tout  $\varepsilon$ , on peut classiquement construire des fonctions « plateau »  $f_\varepsilon$  et  $g_\varepsilon$  de classe  $\mathcal{C}^3$  telles que

$$\mathbf{1}_{]-\infty, a-\varepsilon]} \leq f_\varepsilon \leq \mathbf{1}_I \leq g_\varepsilon \leq \mathbf{1}_{]-\infty, a+\varepsilon]},$$

De plus, par compacité, les dérivées de  $f_\varepsilon$  et  $g_\varepsilon$  jusqu'à l'ordre 3 sont bornées. Concentrons-nous sur les inégalités de droite. En appliquant  $\mathbf{1}_I \leq g_\varepsilon$  à la variable  $Z_n$  et en prenant l'espérance on trouve

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_I(Z_n)] \leq \mathbb{E}[g_\varepsilon(Z_n)].$$

On prend la limite supérieure : le terme de droite converge grâce à la première étape.

$$\limsup \mathbb{E}[\mathbf{1}_I(Z_n)] \leq \mathbb{E}[g_\varepsilon(Z)] \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_{]-\infty, a+\varepsilon]}(Z)] \leq \mathbb{P}[Z \leq a + \varepsilon].$$

Le premier terme ne dépend pas de  $\varepsilon$ , et la fonction de répartition de la loi normale est continue, donc

$$\limsup \mathbb{E}[\mathbf{1}_I(Z_n)] \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_I(Z)].$$

Le même raisonnement fournit  $\mathbb{E}[\mathbf{1}_I(Z)] \leq \liminf \mathbb{E}[\mathbf{1}_I(Z_n)]$ . Finalement on a bien établi, pour tout intervalle  $I$ ,

$$\mathbb{P}[Z_n \in I] \rightarrow \mathbb{P}[Z \in I]. \quad \square$$

### 5.3 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi, de moyenne  $m$  et de variance non nulle et finie  $\sigma^2$ . On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  pour tout  $n \geq 1$ . Le théorème limite central (théorème 5.13) indique que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z_n \leq t] = \mathbb{P}[Z \leq t].$$

Le théorème de Berry-Esseen précise cette proximité : pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout  $n \geq 1$ ,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}[Z_n \leq t] - \mathbb{P}[Z \leq t]| \leq \frac{\tau^3}{\sqrt{n}\sigma^3}$$

où  $\tau^3 = \mathbb{E}[|X_1 - \mathbb{E}[X_1]|^3]$ . Lorsque  $(X_n)_{n \geq 1}$  sont de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ , on peut expliciter la borne de droite : pour  $q = 1 - p$ ,  $\sigma^2 = pq$  et  $\tau^3 = pq(1 - 2pq)$  ce qui donne

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}[S_n \leq np + t\sqrt{npq}] - \mathbb{P}[Z \leq t]| \leq \frac{1 - 2pq}{\sqrt{npq}}.$$

Cette approximation de la loi binomiale par la loi normale est bonne quand  $(1 - 2p(1 - p))/\sqrt{np(1 - p)}$  est petit. À  $n$  fixé, cette borne est minimale pour  $p = 1/2$  mais explose quand  $p$  se rapproche de 0 ou de 1. Une preuve du théorème de Berry-Esseen se trouve dans le livre de Feller [7]. Notons que l'on peut adapter<sup>5</sup> notre preuve du théorème limite central pour obtenir une borne en  $\mathcal{O}(n^{-1/8})$ .

5. Il s'agit de remarquer que  $f_\varepsilon$  peut être choisie de manière à ce que  $\|f_\varepsilon'''\|_\infty \leq \varepsilon^{-3}$ , puis de choisir  $\varepsilon$  dépendant de  $n$ , de façon que  $\varepsilon^4 = \mathcal{O}(n^{-1/2})$ .

Il est possible de quantifier la proximité de la loi binomiale à la loi normale en utilisant la *densité* plutôt que la fonction de répartition : c'est l'approche historique, illustrée par le théorème suivant.

**Théorème 5.19** (de Moivre et Laplace). *Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi de Bernoulli de moyenne  $p \in ]0, 1[$  et d'écart-type  $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$ . Alors pour tout  $n \geq 1$ , la variable  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , de loi **Binom** $(n, p)$  d'espérance  $m_n = np$  et d'écart-type  $\sigma_n = \sqrt{n}\sigma$  et sa fonction de masse, convenablement normalisée, converge vers la densité gaussienne  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Plus précisément, si  $n$  et  $k$  tendent simultanément vers l'infini de telle façon que  $\lim_{n, k \rightarrow \infty} (k - m_n)/\sigma_n = x$  alors*

$$\sigma_n \mathbb{P}[S_n = k] \xrightarrow[k, n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

**Démonstration.** Procédons par étapes.

*Échelles de convergence.* On pose  $q = 1 - p$  et  $l = n - k$ . La relation  $(k - m_n)/\sigma_n \rightarrow x$  entraîne en particulier les convergences suivantes :

$$\frac{k}{n} \xrightarrow[k, n \rightarrow +\infty]{} p, \quad \frac{l}{n} \xrightarrow[k, n \rightarrow +\infty]{} q, \quad \frac{l - nq}{\sigma_n} \xrightarrow[k, n \rightarrow +\infty]{} -x.$$

*Décomposition.* Par définition de la loi binomiale, puis en utilisant la formule de Stirling, on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \mathbb{P}[S_n = k] &= \sqrt{n} \binom{n}{k} p^k q^l = \sqrt{n} \frac{n!}{k!l!} p^k q^l \\ &\sim \sqrt{n} \frac{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n}{\sqrt{2\pi k} (k/e)^k \sqrt{2\pi l} (l/e)^l} p^k q^l \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n}{\sqrt{kl}} \left(\frac{pn}{k}\right)^k \left(\frac{qn}{l}\right)^l \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(k \ln\left(\frac{pn}{k}\right) + l \ln\left(\frac{qn}{l}\right)\right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les convergences de  $k/n$  vers  $p$  et  $l/n$  vers  $q$ .

*Terme exponentiel.* On cherche la limite du terme dans l'exponentielle. En posant  $u_k = \frac{k - np}{k}$ , le premier terme dans l'exponentielle devient :

$$k \ln\left(\frac{pn}{k}\right) = k \ln(1 - u_k).$$

Or la relation  $(k - m_n)/\sigma_n \rightarrow x$  entraîne  $u_k \sim \frac{k - m_n}{\sigma_n} \frac{\sigma_n}{k} \sim \frac{x\sigma_n}{k} \sim \frac{x\sigma}{p\sqrt{n}}$ , donc

$$\begin{aligned} k \ln\left(\frac{pn}{k}\right) &= k \left(-u_k - \frac{1}{2}u_k^2 + o(u_k^2)\right) \\ &= -ku_k - \frac{1}{2}ku_k^2 + o(ku_k^2). \end{aligned}$$

Comme  $ku_k^2 \sim \frac{x^2\sigma^2}{p^2} \frac{k}{n} \sim x^2q$ , il vient :

$$k \ln\left(\frac{pn}{k}\right) = np - k - q \frac{x^2}{2} + o(1).$$

De même

$$l \ln \left( \frac{nq}{l} \right) = nq - l - p \frac{x^2}{2} + o(1).$$

On somme ces deux expressions ; comme  $p+q=1$  et  $k+l=n$ , le terme dans l'exponentielle converge vers  $-x^2/2$ . Finalement on a bien :

$$(\sigma \sqrt{n}) \mathbb{P} [S_n = k] \xrightarrow[k, n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{x^2}{2} \right),$$

comme annoncé. □

Ici la convergence est obtenue « ponctuellement » en  $x$  ; en raffinant l'étude asymptotique via une amélioration de la formule de Stirling, on peut montrer le résultat plus fort suivant :

**Théorème 5.20** (de Moivre et Laplace, uniforme). *Si  $S_n \sim \text{Binom}(n, p)$  avec  $0 < p < 1$  et  $q = 1 - p$ , de moyenne  $m_n = np$  et d'écart-type  $\sigma_n = \sqrt{npq}$ , alors pour tous  $-\infty < a < b < +\infty$  on a la convergence uniforme suivante :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sup_{k \in I_n(a, b)} \left| \mathbb{P} [S_n = k] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left( -\frac{(k - m_n)^2}{2\sigma_n^2} \right) \right| = 0$$

où

$$I_n(a, b) = \left\{ 0 \leq k \leq n : \frac{k - m_n}{\sigma_n} \in [a, b] \right\}.$$

Nous renvoyons au livre de Dacunha-Castelle et Duflo [5] pour une preuve. Le théorème 5.20 fournit par intégration le TLC dans le cas Bernoulli :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{S_n - m_n}{\sigma_n} \in [a, b] \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$



# Compléments



## Biais par la taille

### A.1 Un cas simple

**Problème A.1** (Biais par la taille). *On cherche à tirer uniformément un foyer parmi les foyers français. Pour cela on prend un français au hasard dans la population et on choisit son foyer. La procédure est-elle correcte ?*

Pour clarifier la situation, supposons que l'on s'intéresse uniquement à la taille des foyers. Pour tout  $k \geq 1$ , soit  $p_k$  la fréquence des foyers de taille  $k$  dans la population française, de sorte que  $\sum_{k \geq 1} p_k = 1$ . Notons  $m := \sum_k k p_k$  la taille moyenne des foyers.

Prenons donc un français au hasard dans la population et notons  $T$  la taille du foyer auquel il appartient. Si la procédure d'échantillonnage proposée était correcte, on devrait avoir  $\mathbb{P}[T = k] = p_k$ . Nous allons voir qu'en réalité,  $\mathbb{P}[T = k] = \frac{k}{m} p_k$  : les grands foyers sont sur-représentés et les petits, sous-représentés. Ce phénomène est appelé *biais par la taille*<sup>1</sup>. Il s'agit sans doute du biais d'échantillonnage le plus connu. Ce biais est d'autant plus important que la taille du foyer diffère de la taille moyenne  $m$ .

**Solution.** Notons  $N_k$  le nombre de foyers de taille  $k$  dans la population française : il y a donc  $F = \sum_k N_k$  foyers et  $N = \sum_k k N_k$  individus en France, la proportion de foyers de taille  $k$  étant  $p_k = N_k/F$ . On vérifie de plus aisément l'égalité  $N = mF$ .

On modélise le choix d'un français au hasard par le tirage d'un entier selon la loi uniforme sur l'intervalle  $[[1, N]]$ . Il y a  $N_k$  foyers de taille  $k$  qui comptent au total  $k N_k$  individus. Par définition de la loi uniforme (formule « cas favorables sur cas totaux ») la probabilité que ce français appartiennent à un foyer de taille  $k$  est donc

$$\frac{k N_k}{N} = \frac{k p_k F}{N} = \frac{k}{m} p_k,$$

ce qui est la formule annoncée. □

### A.2 Estimation dans une file d'attente

**Problème A.2** (Temps d'attente à un guichet). *Le gestionnaire d'une administration décide d'évaluer le temps que les usagers passent au guichet. Supposons pour simplifier*

1. In English :  $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{m} p_k \delta_k$  is the size-biased law constructed from the initial law  $\sum_{k \geq 1} p_k \delta_k$ .

qu'il y a un unique guichet. Le gestionnaire vient à une heure fixée, attend que la personne actuellement au guichet ait fini son opération et lui demande combien de temps elle a attendu. Cette procédure donne-t-elle une bonne estimation du temps moyen d'attente des usagers ?

Comme précédemment, la procédure n'est pas correcte : le temps d'attente observé est biaisé, il y a plus de chances que le gestionnaire arrive pendant qu'une requête particulièrement longue est en train d'être traitée.

Modélisons la situation en temps discret. Le guichet ouvre le matin au temps  $n = 0$ . Les usagers arrivent ; le  $k^e$  usager reste au guichet pendant  $X_k$  secondes. Pour rester dans un cadre simple on suppose les choses suivantes :

- les temps de service  $X_k$  sont des variables aléatoires à valeurs entières ;
- les  $X_k$  sont indépendantes, de même loi :  $\mathbb{P}[X_k = i] = p_i$ , et d'espérance commune  $m = \sum k p_k < \infty$ .

On note  $V_k = 1$  si le temps  $k$  correspond au début du service d'un usager,  $V_k = 0$  sinon. Si par exemple  $X_1 = 2$ ,  $X_2 = 3$  et  $X_3 = 1$ , on aura  $V_0 = V_2 = V_5 = V_6 = 1$  et  $V_1 = V_3 = V_4 = 0$ .

Le gestionnaire arrive à un temps  $n$  que l'on va supposer grand. La suite  $S_k = \sum_{j=1}^k X_j$  est strictement croissante, il existe donc un unique  $K$  (aléatoire) tel que  $S_{K-1} \leq n < S_K$ . Ce que le gestionnaire observe est le temps de service du  $K^e$  usager, à savoir  $X_K$ .

Cherchons la loi de ce temps  $X_K$ . Pour tout  $i$ , on décompose l'événement  $X_K = i$  en une union disjointe suivant les valeurs de  $K$  :

$$\begin{aligned} \{X_K = i\} &= \bigcup_k \{X_K = i, K = k\} = \bigcup_k \left\{ X_k = i, \sum_{j=1}^{k-1} X_j \leq n < \sum_{j=1}^{k-1} X_j + X_k \right\} \\ &= \bigcup_k \left\{ X_k = i, \sum_{j=1}^{k-1} X_j \leq n < \sum_{j=1}^{k-1} X_j + i \right\}. \end{aligned}$$

On prend maintenant les probabilités des deux côtés ; à droite, on utilise le fait que l'union est disjointe et l'indépendance des  $X_k$  pour écrire :

$$\mathbb{P}[X_K = i] = \sum_k \mathbb{P}[X_k = i] \mathbb{P}[S_{k-1} \leq n < S_{k-1} + i] = p_i \sum_k \mathbb{P}[n - i < S_{k-1} \leq n].$$

Enfin, en écrivant la probabilité comme espérance d'indicatrice, on peut faire rentrer la somme dans l'espérance et écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_K = i] &= p_i \mathbb{E} \left[ \sum_k \mathbf{1}_{n-i < S_{k-1} \leq n} \right] \\ &= p_i \mathbb{E} [\text{« nombre de renouvellements entre } n - i + 1 \text{ et } n \text{ »}] \\ &= p_i \sum_{n-i+1}^n \mathbb{E}[V_j]. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Pour conclure, il nous faut calculer  $\mathbb{E}[V_j]$ , ou au moins donner sa limite quand  $n$  tend vers l'infini. Le résultat général (admis) est le suivant.

**Théorème A.3** (Renouvellement). *Si la distribution des  $X_k$  est « non-réticulée », c'est-à-dire si il n'existe aucun  $a \geq 2$  tel que  $X_k$  soit presque sûrement un multiple de  $a$ , alors  $\mathbb{E}[V_n] \rightarrow 1/m$ .*

**Corollaire A.4.** *Quand  $n$  tend vers l'infini, le temps observé par le gestionnaire converge en loi vers la loi de  $X_1$  biaisée par sa taille :*

$$\mathbb{P}[X_K = i] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{ip_i}{m}.$$

**Démonstration.** Le corollaire est une conséquence immédiate du théorème et de la formule (A.1) puisque la somme dans le terme de droite contient un nombre fini ( $i$ ) de termes, qui tendent tous vers  $1/m$ .

La preuve du théorème nous entraînerait trop loin. Notons tout de même que dans le cas particulier où la loi des  $X_i$  est géométrique de paramètre  $1/m$ , le résultat est simple. En effet, l'expérience consiste alors à lancer à chaque instant une pièce : si elle tombe sur pile le service s'arrête et on passe à l'utilisateur suivant, si elle tombe sur face le service continue. Les variables  $V_n$  sont donc dans ce cas indépendantes, et suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre  $1/m$ , d'espérance  $1/m$ .  $\square$

Ce biais par la taille apparaît dans de nombreuses situations pratiques. Pour citer un exemple, on s'intéresse en foresterie à l'estimation du nombre d'arbres dans une parcelle, à leur taille, leur rayon, etc. ; les méthodes pratiques de comptage (que ce soit par parcours au sol ou télédétection) induisent souvent un biais, qui dans les cas les plus simples est un biais par la taille ou par la surface.



## Jeu de pile ou face

### B.1 Récapitulatif

On modélise une infinité de lancers au jeu de pile ou face avec une pièce équilibrée par l'espace probabilisé produit  $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  où  $\mathcal{F}$  est la tribu engendrée par les cylindres et  $\mathbb{P}$  la mesure de probabilité produit associée à la mesure de probabilité uniforme sur  $\{0, 1\}$ . Ici pile est codé 1 et face est codé 0. Lorsque la pièce n'est pas équilibrée et donne face avec probabilité  $p \in [0, 1]$ , on munit  $\{0, 1\}$  de la loi qui affecte la probabilité  $p$  à 1 et  $1 - p$  à 0. La suite des coordonnées dans cet espace produit constitue une suite de v.a.r.  $(X_n)_{n \geq 1}$  indépendantes et de même loi de Bernoulli :

$$\mathbb{P}[X_n = 1] = 1 - \mathbb{P}[X_n = 0] = p \in [0, 1].$$

On a déjà illustré précédemment sur cet exemple de nombreuses notions :

- d'univers et de tribu, p. 9 et p. 11, et celle de variable aléatoire, p. 33 ;
- de suites d'événements p. 21 et p. 28
- d'indépendance, p. 27 ;
- de lois classiques (Bernoulli, binomiale, géométrique) p. 37, p. 47, p. 68, et p. 73 ;
- d'intervalle de confiance et de fluctuation, p. 84 et p. 85.

### B.2 Temps d'attente des succès successifs

Si on compte les piles comme des succès et les faces comme des échecs, rappelons que la loi du temps d'attente du premier succès est la loi géométrique  $\text{Geom}(p)$ , définie pour tout  $k \geq 1$  par  $\mathbb{P}[T = k] = (1 - p)^{k-1} p$ .

Pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ , le nombre de lancers  $T_r$  nécessaires pour obtenir  $r$  succès est défini par récurrence par  $T_1 = T$  et  $T_{r+1} = \inf\{n > T_r : X_n = 1\}$ . Les v.a.r.  $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$  sont indépendantes et de même loi géométrique  $\text{Geom}(p)$ . La loi de la variable aléatoire  $T_r$  est appelée **loi de Pascal** ou **loi binomiale-négative**<sup>1</sup>. Elle est donnée par le

1. Le coefficient binomial  $\binom{k-1}{r-1}$  peut se réécrire  $\frac{(k-1)(k-2)\dots r}{(k-r)!} = (-1)^r \frac{(-r)(-r-1)\dots(1-k)}{(k-r)!}$  ce qu'on note parfois  $\binom{-r}{k-r}$ . On obtient ainsi une formule très proche de celle de la loi binomiale, mais où apparaît le coefficient binomial généralisé  $\binom{-r}{k-r}$ , ce qui explique le nom de la loi.

produit de convolution  $(\text{Geo}_{\mathbb{N}^*}(p))^{*r}$ , qui se traduit par la formule suivante pour  $k \geq r$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_r = k] &= \sum_{\substack{k_1 \geq 1, \dots, k_r \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_r = k}} (1-p)^{k_1-1} p \cdots (1-p)^{k_r-1} p \\ &= (1-p)^{k-r} p^r \binom{k-1}{r-1} \end{aligned}$$

Les deux premiers moments se calculent facilement puisque  $T$  est somme de variables indépendantes de loi géométrique :

$$\mathbb{E}[T_r] = r\mathbb{E}[T] = \frac{r}{p} \quad \text{et} \quad \sigma^2(T_r) = r\sigma^2(T) = r \frac{1-p}{p^2}.$$

Le processus de Bernoulli  $(B_n)_{n \geq 0}$  est donné par  $B_n = B_0 + S_n$  où  $B_0$  est une variable aléatoire quelconque. Ses trajectoires sont constantes par morceaux, avec des sauts d'amplitude +1, et les temps de saut sont donnés par  $(T_r)_{r \geq 1}$  (temps inter-sauts indépendantes et de même loi géométrique). Le processus de Bernoulli est le processus de comptage de tops espacés par des durées indépendantes de même loi géométriques. De ce point de vue, il constitue un analogue à temps discret du processus de Poisson simple. C'est pour ce processus que l'on a pu montrer complètement le phénomène de biais par la taille dans l'annexe précédente.

### B.3 Fluctuations non asymptotiques

La loi forte des grands nombres et le théorème limite central s'écrivent ici

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_n}{n} \rightarrow p\right] = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \left(\frac{S_n}{n} - p\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1),$$

et que cela donne des intervalles de confiance asymptotiques pour  $p$  : l'intervalle dit de Wald, dont nous verrons plus bas (p. 141) la justification, et sa « simplification » vue page 85. Cet intervalle est assez mauvais en pratique : la convergence n'est pas très rapide et pour de petites valeurs de  $n$  ou pour des  $p$  proches de 0 ou 1, la « probabilité de couverture » (probabilité que le vrai paramètre  $p$  appartienne à l'intervalle de confiance) peut être bien inférieure à  $1 - \alpha$ .

De nombreuses alternatives sont disponibles dans ce cas. Une possibilité est de s'appuyer sur la correspondance beta-binomiale : si  $U_1, \dots, U_n$  sont des v.a. indépendantes et de loi uniforme sur  $[0,1]$  et si  $U_{(1)} \leq \dots \leq U_{(n)}$  est leur réordonnement alors  $U_{(k)} \sim \text{Beta}(k, n - k + 1)$  a pour densité  $t \in [0,1] \mapsto \left(\int_0^1 s^{k-1} (1-s)^{n-k} ds\right)^{-1} t^{k-1} (1-t)^{n-k}$ , et

$$\mathbb{P}[S_n \geq k] = \mathbb{P}[\mathbf{1}_{\{U_1 \leq p\}} + \dots + \mathbf{1}_{\{U_n \leq p\}} \geq k] = \mathbb{P}[U_{(k)} \leq p].$$

On peut grâce à cela définir un intervalle de confiance pour  $p$ . Pour le voir, fixons  $n$  et notons, pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,  $p_\alpha(k)$  le quantile d'ordre  $\alpha$  de la loi  $\text{Beta}(k, n - k + 1)$ . On voit facilement que  $k \mapsto p_\alpha(k)$  est croissante ; on la « complète » en posant  $p_\alpha(0) = 0$  et  $p_\alpha(n+1) = 1$ .

**Théorème B.1** (Intervalle de Clopper-Pearson). *On pose  $i_\alpha(k) = p_{\alpha/2}(k)$  et  $s_\alpha(k) = p_{1-\alpha/2}(k+1)$ . L'intervalle  $I_{CP}(S_n) = [i_\alpha(S_n), s_\alpha(S_n)]$  est un intervalle de confiance au niveau  $\alpha$  : si  $S_n$  suit la loi binomiale  $\text{Binom}(n, p)$ ,*

$$\mathbb{P}[p \in I_{CP}(S_n)] \geq 1 - \alpha.$$

**Démonstration.** S'il est différent de 1, ce que l'on peut supposer, le paramètre  $p$  est nécessairement dans un intervalle du type  $[i_\alpha(k-1), i_\alpha(k)[$  pour un  $k$  entre 1 et  $n+1$ . Pour cette valeur de  $k$  et pour tout entier  $l$ ,  $p \leq i_\alpha(l)$  ssi  $k \leq l$ . Par conséquent

$$\mathbb{P}[p \leq i_\alpha(S_n)] = \mathbb{P}[k \leq S_n].$$

Si  $k = n+1$  cette probabilité est nulle, sinon on utilise la correspondance Beta-binomiale et la définition de  $k$  pour écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[p \leq i_\alpha(S_n)] &= \mathbb{P}[U_{(k)} \leq p] \\ &\leq \mathbb{P}[U_{(k)} \leq i_\alpha(k)] \\ &= \alpha/2. \end{aligned}$$

On raisonne de même pour montrer  $\mathbb{P}[p \geq s_\alpha(S_n)] \leq \alpha/2$ , d'où le résultat. □

## B.4 Lien avec la loi uniforme

Chaque réalisation de la suite  $(X_n)$  permet de construire un nombre réel dans l'intervalle  $[0, 1]$  via son écriture en base 2. Cela correspond à la surjection  $\zeta : \{0, \dots, 1\}^{\mathbb{N}^*} \rightarrow [0, 1]$  définie pour tout  $x \in \{0, \dots, 2\}^{\mathbb{N}^*}$  par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n = \underbrace{0, x_1 \cdots x_n \cdots}_{\text{en base 2}}.$$

Lorsque  $p = 1/2$  alors la variable aléatoire  $U$  donnée par

$$U = \zeta(X) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$$

suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Si  $a = a_1 r^{-1} + \dots + a_n 2^{-n}$  est un nombre diadique, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[a < U < a + 2^{-n}] &= \mathbb{P}[X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = a_1] \cdots \mathbb{P}[X_n = a_n] = 2^{-n}. \end{aligned}$$

Réciproquement, ce calcul montre que les coefficients  $(X_n)$  de l'écriture en base 2 d'une variable aléatoire uniforme sur  $[0, 1]$  sont indépendants de loi de Bernoulli symétrique sur  $\{0, 1\}$ . Les nombres de  $[0, 1]$  dont l'écriture en base 2 est constante à partir d'un certain rang « ne comptent pas » en quelque sorte, et  $\zeta$  est presque sûrement une injection et donc presque sûrement une bijection. On peut donc en déduire une méthode pour générer d'un seul coup  $n$  réalisations indépendantes de loi de Bernoulli symétrique sur  $\{0, 1\}$  à partir d'une réalisation de précision  $n$  en base 2 d'une loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

## B.5 Algorithme de débiaisage de von Neumann

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de paramètre  $0 < p < 1$  inconnu. L'algorithme de von Neumann permet de fabriquer à partir de cette suite une nouvelle suite  $(Z_n)_{n \geq 1}$  constituée de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de paramètre  $1/2$ . On peut ainsi utiliser une source de bruit biaisée pour obtenir du bruit uniforme !

Pour ce faire, on fabrique tout d'abord une suite  $(Y_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes et de même loi sur  $\{0, 1, 2\}$  en groupant les  $X_n$  deux par deux :

$$\underbrace{X_1 X_2}_{Y_1} \underbrace{X_3 X_4}_{Y_2} \cdots \quad \text{où} \quad Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } (X_{2n-1}, X_{2n}) = (0, 1), \\ 1 & \text{si } (X_{2n-1}, X_{2n}) = (1, 0), \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les probabilités d'obtenir 0 et 1 sont bien égales (elles valent  $p(1-p)$ ), mais la suite contient des valeurs « parasites » 2. On fabrique alors la suite  $(Z_n)_{n \geq 1}$  à partir de  $(Y_n)_{n \geq 1}$  en effaçant les 2, ce qui correspond à poser pour tout  $n \geq 1$ ,

$$Z_n = Y_{T_n} \quad \text{où} \quad T_n = \inf\{k > T_{n-1} : Y_k \neq 2\}, \quad \text{avec} \quad T_0 = 0.$$

Montrons que la suite  $(Z_n)_{n \geq 1}$  obtenue ainsi est bien une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre 1/2. Fixons un vecteur  $(z_1, \dots, z_n) \in \{0, 1\}^n$  : on veut établir

$$\mathbb{P}[(Z_1, \dots, Z_n) = (z_1, \dots, z_n)] = \frac{1}{2^n}.$$

Pour cela on décompose suivant la façon dont les  $(Z_i)_{i=1, \dots, n}$  sont obtenus. Pour  $m \geq n$  et  $y = (y_1, \dots, y_m) \in \{0, 1, 2\}^m$ , notons  $|y| = m$ , et  $y_*$  le vecteur obtenu à partir de  $y$  en supprimant les 2. En posant  $r = 2p(1-p)$ , il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(Z_1, \dots, Z_n) = z] &= \sum_{m \geq n} \sum_{\substack{y: |y|=m \\ y_* = z}} \mathbb{P}[(Y_1, \dots, Y_m) = y] \\ &= \sum_{m \geq n} \binom{m}{n} \left(\frac{r}{2}\right)^n (1-r)^{m-n} \\ &= \frac{S(n)}{2^n}, \end{aligned}$$

où  $S(n) = \sum_{m \geq n} \binom{m}{n} r^n (1-r)^{m-n}$ . En sommant ces égalités sur les  $2^n$  valeurs de  $z$  on obtient  $S(n) = 1$ , ce qui conclut la preuve.

On peut ensuite s'intéresser au coût de la méthode. Comme  $(\mathbf{1}_{\{Y_n \neq 2\}})_{n \geq 1}$  est un jeu de pile ou face avec probabilité de succès  $r = 2p(1-p)$ , les variables aléatoires  $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$  sont indépendantes et de même loi géométrique de paramètre  $r$ . La production de chaque terme de la suite  $(Z_n)_{n \geq 1}$  nécessite un nombre aléatoire géométrique de termes de la suite  $(Y_n)_{n \geq 1}$ .

## Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo a été développée à Los Alamos notamment par von Neumann, Ulam, et Metropolis pour résoudre à l'aide d'un ordinateur des problèmes numériques liés aux armes atomiques. Elle généralise une idée déjà présente dans l'expérience de l'aiguille de Buffon. Avec le succès des ordinateurs, cette méthode universelle s'est imposée comme l'une des plus utiles des mathématiques appliquées.

### C.1 Simulation des fléchettes

Comme dans la section 3.2, on dispose d'un ordinateur qui peut simuler une suite de variables aléatoires indépendantes  $(U_1, \dots, U_n, \dots)$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

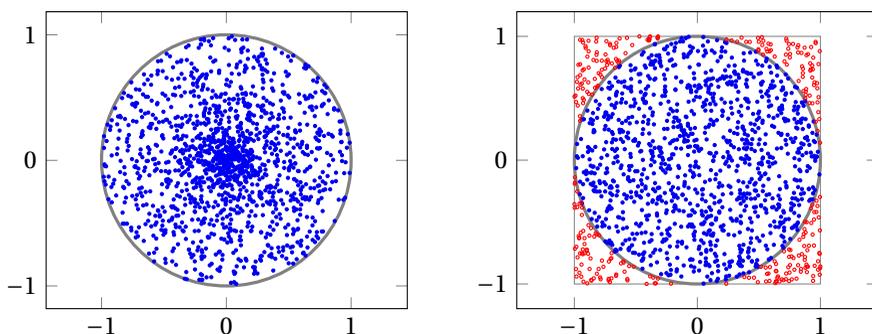
**Fléchettes : Simulation.** Comment simuler un tirage du point d'impact d'une fléchette sur la cible ronde modélisée par le disque unité  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  ?

Si l'on remplace la cible ronde par le carré unité  $[0, 1] \times [0, 1]$ , la réponse est claire : le point de coordonnées  $(U_1, U_2)$  est distribué uniformément dans  $[0, 1] \times [0, 1]$  (voir la section 2.7). Une idée naïve pour revenir à la cible ronde peut être d'appliquer une transformation géométrique pour passer du carré au cercle, en regardant par exemple le point de coordonnées  $(U_1 \cos(2\pi U_2), U_1 \sin(2\pi U_2))$ . Ceci donne bien un point aléatoire dans  $D$ , mais il n'est pas distribué uniformément ! Pour le voir on peut se rappeler (cf. p. 35) que la loi du rayon dans le jeu de fléchettes n'est pas uniforme, et/ou regarder la figure C.1.

**Exercice C.1** (Une bonne transformation). *En gardant l'idée de considérer  $\Theta = 2\pi U_2$  comme la coordonnée angulaire du point d'impact, trouver une fonction  $f$  telle que le point  $(f(U_1) \cos(\Theta), f(U_1) \sin(\Theta))$  soit distribué suivant la loi uniforme sur le disque.*

Une autre idée très féconde consiste à utiliser la **méthode de rejet**. Pour simplifier les notations, on considère maintenant sans perdre de généralité<sup>1</sup> que l'on dispose de deux suites de v.a.r. i.i.d.,  $(X_n)_{n \geq 1}$  et  $(Y_n)_{n \geq 1}$ , de loi uniforme sur  $[-1, 1]$ . Les points  $Z_n = (X_n, Y_n)$  sont alors de loi uniforme sur le grand carré  $C = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , qui inclut  $D$ . On voit alors  $Z_n$  comme une *proposition* pour la simulation d'un point dans le disque

1. Ces suites peuvent être obtenues à partir de  $(U_n)_{n \geq 1}$  en posant  $X_n = 2U_{2n+1} - 1$ ,  $Y_n = 2U_{2n+2} - 1$ .



À gauche, 1500 points tirés sur le disque suivant la méthode naïve où l'angle et le rayon sont uniformes. Cette méthode est biaisée, la région centrale étant visiblement sur-échantillonnée. À droite, une illustration de la méthode de rejet : on lance 1500 points dans le grand carré et on ne garde que ceux qui tombent dans le disque.

FIGURE C.1 – La méthode de Monte-Carlo pour le jeu de fléchettes

unité, qui est *acceptée* ou *rejetée* suivant que  $Z_n$  tombe ou non dans le disque. Si la simulation est rejetée, on recommence jusqu'à réussir.

Le point renvoyé par la procédure de simulation est alors  $Z_T$  où

$$T = \inf\{n \geq 1 : Z_n \in D\}.$$

**Théorème C.2** (Méthode de rejet). *Le point  $Z_T$  suit la loi uniforme sur  $D$ . Le nombre de tentatives  $T$  suit une loi géométrique de paramètre  $|D|/|C| = \pi/4$  où  $|D| = \pi$  et  $|C| = 4$  sont les aires de  $D$  et  $C$ . De plus les variables aléatoires  $T$  et  $Z_T$  sont indépendantes.*

L'algorithme de débiaisage du jeu de pile ou face de von Neumann évoqué dans la section B.5 est aussi un algorithme de rejet.

**Démonstration.** Notons  $A$  une région quelconque (mesurable comme indiqué dans la section 2.7) de  $D$ , d'aire  $|A|$ . Pour déterminer la loi jointe de  $T$  et de  $Z$ , il nous faut calculer  $\mathbb{P}[Z \in A, T = n]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et toute région  $A$ . Les deux points clés sont que, quand  $T = n$ ,  $Z = Z_n$ , et que l'événement  $T = n$  se réécrit en fonction des  $(Z_i)_{i=1, \dots, n}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z \in A, T = n] &= \mathbb{P}[Z_T \in A, T = n] = \mathbb{P}[Z_n \in A, T = n] \\ &= \mathbb{P}[Z_n \in A, Z_1 \notin D, Z_2 \notin D, \dots, Z_{n-1} \notin D]. \end{aligned}$$

On s'est ainsi ramené à des événements faisant intervenir les variables  $(Z_1, \dots, Z_n)$ , qui sont indépendantes et de même loi uniforme sur  $C$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z \in A, T = n] &= \mathbb{P}[Z_n \in A] \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}[Z_i \notin D] \\ &= \frac{|A|}{|C|} \left( \frac{|C| - |D|}{|C|} \right)^{n-1} \\ &= \frac{|A|}{|D|} \times \frac{|D|}{|C|} \left( 1 - \frac{|D|}{|C|} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

En sommant sur toutes les valeurs de  $n$ , on obtient  $\mathbb{P}[Z \in A] = |A|/|D|$ , ce qui signifie exactement que  $Z$  est uniforme sur le disque ; en prenant  $A = D$  on établit que  $T$  suit une loi géométrique de paramètre  $\frac{|D|}{|C|} = \pi/4$ . On constate alors que

$$\mathbb{P}[Z \in A, T = n] = \mathbb{P}[Z \in A] \mathbb{P}[T = n]$$

et les variables  $T$  et  $Z$  sont donc bien indépendantes.  $\square$

La suite  $(R_n)_{n \geq 1} = (\mathbf{1}_{Z_n \in D})_{n \geq 1}$  est un jeu de pile ou face de probabilité de succès  $p = \frac{|D|}{|C|}$ . D'autre part, en notant  $Z_T = (X', Y')$  les coordonnées du point  $Z_T$ , alors aussi bien l'abscisse  $X'$  que l'ordonnée  $Y'$  suivent la loi du demi-cercle sur  $[-1, 1]$ .

En répétant indéfiniment l'algorithme, la suite des points d'impact successifs dans  $D$  est donnée par  $(Z_{T_n})_{n \geq 1}$  où  $(T_n)_{n \geq 1}$  est définie par récurrence par  $T_n = \inf\{k > T_{n-1} : Z_k \in D\}$  avec  $T_0 = 0$ . En particulier  $T_1 = T$ . Si l'on pose  $Z_{T_n} = (X'_n, Y'_n)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , alors la suite des abscisses  $(X'_n)_{n \geq 1}$  et la suite des ordonnées  $(Y'_n)_{n \geq 1}$  sont toutes deux des suites de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi du demi-cercle sur  $[-1, 1]$ .

## C.2 Comment approcher numériquement une intégrale ?

### Une méthode naïve

Supposons que l'on cherche à approcher numériquement l'intégrale d'une fonction  $f$ . Commençons pour simplifier par le cas simple où l'on veut estimer

$$\iota = \int_0^1 f(x) dx,$$

pour une fonction  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . La quantité  $\iota$  est l'aire sous la courbe, qui est aussi la probabilité qu'un point de loi uniforme dans le carré  $[0, 1]^2$  tombe sous la courbe. En posant  $(X_n)_{n \geq 1}$  et  $(Y_n)_{n \geq 1}$  deux suites de v.a.r. i.i.d. de loi uniforme sur  $[0, 1]$ , on a

$$\mathbb{P}[Y_i \leq f(X_i)] = \int f(x) dx$$

pour tout  $i \geq 1$ , et l'intégrale cherchée n'est autre que le paramètre de la variable de Bernoulli  $\mathbf{1}_{Y_i \leq f(X_i)}$ . On peut donc l'estimer ponctuellement par

$$\hat{\iota}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{Y_i \leq f(X_i)}$$

au sens où  $\hat{\iota}_n$  converge presque-sûrement vers  $\int f(x) dx$  grâce à la loi des grandes nombres, et l'on peut donner des intervalles de confiance.

### La méthode de Monte-Carlo classique

On n'utilise qu'une seule suite,  $(X_n)_{n \geq 1}$ . Comme  $X_n$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ , on a par le théorème du transfert

$$\mathbb{E}[f(X_1)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

On peut alors approcher l'intégrale par

$$\hat{I}'_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i).$$

Comment comparer cette méthode à la précédente ? Une façon de procéder est de comparer les *variances* de  $\hat{I}_n$  et  $\hat{I}'_n$  ; plus petite est la variance, meilleure est l'estimation, puisque les fluctuations autour de la valeur exacte sont plus faibles...

Comme les variables  $(X_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont i.i.d. on a par le calcul classique (à la base de la preuve de la loi faible des grands nombres)

$$\sigma^2(\hat{I}_n) = \frac{1}{n} \sigma^2(\mathbf{1}_{Y_1 \leq f(X_1)}) \quad \text{et} \quad \sigma^2(\hat{I}'_n) = \frac{1}{n} \sigma^2(f(X_1)).$$

Le point fondamental est que la variance est de l'ordre de  $1/n$ , donc *l'écart-type est de l'ordre de  $1/\sqrt{n}$* . Autrement dit, pour gagner un chiffre significatif dans l'estimation, il multiplier le nombre d'expériences par 100 ! Dans les mots de Sokal<sup>2</sup>

*Monte-Carlo is an extremely bad method; it should only be used when all alternative methods are worse.*

En pratique, les cas où les autres méthodes d'intégration numérique sont pires sont extrêmement nombreux, en particulier dès que l'on se pose des problèmes en dimension grande. Dans ces cas, puisque le facteur  $\frac{1}{n}$  est structurel, on ne peut jouer que sur le terme de variance de l'estimateur, en essayant de le réduire au maximum. Dans nos deux méthodes par exemple, le calcul des variances donne :

$$\sigma^2(\hat{I}_n) = \frac{1}{n} \left( \int f(x) dx \right) \left( 1 - \int f(x) dx \right) \quad \text{et} \quad \sigma^2(\hat{I}'_n) = \frac{1}{n} \left( \int f^2(x) dx - \left( \int f(x) dx \right)^2 \right).$$

Comme  $f(x) \leq 1$ , on a  $\int f(x)^2 dx \leq \int f(x) dx$  et la deuxième méthode est toujours meilleure que la première. On parle plus généralement de technique de réduction de variance.

**Exercice C.3** (Généralisation). *Généraliser les deux méthodes pour estimer l'intégrale d'une fonction  $f$  continue de signe quelconque, sur un intervalle  $[a, b]$  lui aussi quelconque. Montrer que la deuxième méthode est toujours meilleure que la première.*

---

2. « La méthode de Monte-Carlo est extrêmement *mauvaise* ; elle ne devrait être utilisée que lorsque les alternatives sont pires. »

## Collectionneur d'images

### D.1 Définition et formules exactes

Un collectionneur cherche à réunir les  $r$  images différentes d'un album pour enfants. Pour cela on suppose qu'il achète les images une à une, et que chaque image achetée est tirée uniformément parmi les  $r$  possibles. Si l'on note  $T$  le nombre total (aléatoire) d'images à acheter pour avoir la collection complète, que peut-on dire de  $T$  ?

Ce problème, appelé en anglais *coupon collector problem*, est un modèle important à ranger dans la même boîte à outils que le jeu de pile ou face, auquel il est intimement relié. Un grand nombre de situations concrètes sont modélisables par le collectionneur d'images ou une de ses variantes. Nous nous limitons ici à la variante la plus simple.

Repérons l'image tirée la  $k^{\text{e}}$  fois par une variable aléatoire  $X_k$ , prenant ses valeurs dans  $\{1, 2, \dots, r\}$ . Par hypothèse les variables  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont indépendantes et de même loi uniforme sur  $\{1, 2, \dots, r\}$ . L'instant où la collection est complète est défini par

$$T = \min\{n \geq 1 : \{X_1, \dots, X_n\} = \{1, \dots, r\}\} = \min\{n \geq 1 : \text{Card}\{X_1, \dots, X_n\} = r\}.$$

**Théorème D.1** (Expression combinatoire de la loi). *On a  $T \geq r$  et pour tout  $n \geq r$ ,*

$$\mathbb{P}[T = n] = \frac{r!}{r^n} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ r-1 \end{matrix} \right\}$$

où la notation entre accolades est le nombre de Stirling de seconde espèce  $(n-1, r-1)$ , c'est-à-dire le nombre de partitions en  $r-1$  blocs d'un ensemble de  $n-1$  éléments.

**Démonstration.** On a  $X_T \notin \{X_1, \dots, X_{T-1}\}$  car l'image qui termine la collection n'a forcément jamais été vue auparavant. Fixons  $n \geq r$ . Il y a  $r^n$  choix possibles décrivant les  $n$  premiers tirages. Pour construire un choix favorable à l'événement  $\{T = n\}$ , il faut choisir la dernière image ( $r$  choix), répartir les  $n-1$  images restants sur les  $r-1$  types d'images restants  $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ r-1 \end{matrix} \right\}$  choix pour savoir quelles sont les images identiques, et  $(r-1)!$  ordres possibles sur les  $r-1$  types d'images restants). Le résultat désiré en découle.  $\square$

La queue de distribution peut elle aussi être calculée explicitement.

**Théorème D.2** (Queue de distribution). *Pour tout  $n \geq 1$ ,*

$$\mathbb{P}[T > n] = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^n.$$

**Démonstration.** Notons  $E_{n,i} = \{X_1 \neq i, \dots, X_n \neq i\}$  l'événement « l'image  $i$  n'est toujours pas dans la collection après le  $n^{\text{e}}$  tirage ». On a alors

$$\mathbb{P}[T > n] = \mathbb{P}[E_{n,1} \cup \dots \cup E_{n,r}].$$

Si  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, r\}$  sont distincts alors, avec  $R = \{1, \dots, r\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ ,

$$\mathbb{P}[E_{n,i_1} \cap \dots \cap E_{n,i_k}] = \mathbb{P}[X_1 \in R] \dots \mathbb{P}[X_n \in R] = \left(\frac{r-k}{r}\right)^n = \left(1 - \frac{k}{r}\right)^n.$$

Le résultat désiré découle alors du principe d'inclusion-exclusion (théorème 2.3).  $\square$

Le théorème D.1 est superbe mais difficile à exploiter : il est par exemple malaisé d'en déduire l'espérance de  $T$ . De même, le fait que les signes soit alternés dans la formule du théorème D.2 rend délicate l'étude directe du comportement de la queue de  $T$  en fonction de  $n$  et  $r$ .

## D.2 Une décomposition et ses conséquences

Le résultat suivant est intuitif et va fournir facilement les premiers résultats sur  $T$  ; il montre déjà que que  $\mathbb{P}[T < \infty] = 1$ .

**Lemme D.3** (Décomposition). *Il existe  $r$  variables aléatoires  $G_1, G_2, \dots, G_r$ , indépendantes, telles que :*

- $G_i$  suit la loi géométrique de paramètre  $\pi_i = \frac{r-i+1}{r}$ ,
- la variable  $T$  se décompose comme  $T = \sum G_i$ .

**Démonstration.** L'idée principale est de découper le temps  $T$  en  $r$  périodes, suivant le nombre d'images différentes collectées. La première image obtenue est automatiquement incluse dans la collection : on pose  $G_1 \equiv 1$  le temps d'attente de cette image. Pour obtenir une nouvelle image après cela, il faut attendre un temps  $G_2 = \min\{n \geq 1 : X_{G_1+n} \neq X_{G_1}\}$ . Plus généralement, pour tout  $1 < i \leq r$ , on pose

$$G_i = \min\{n \geq 1 : X_{G_{i-1}+n} \notin \{X_1, \dots, X_{G_{i-1}}\}\}$$

le temps nécessaire pour passer d'une collection de  $i-1$  images différentes à  $i$  images différentes. On a  $\text{Card}\{X_1, \dots, X_{G_i}\} = i$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ . La variable aléatoire  $G_i$  est le temps d'apparition du premier gain dans un jeu de pile ou face spécial, pour lequel la probabilité de gagner vaut  $(r-i+1)/r$  (puisque'il reste  $r-i+1$  images à collecter) :  $G_i$  suit donc la loi  $\text{Geom}_{\mathbb{N}^*}((r-i+1)/r)$ . Ceci témoigne du fait qu'il est de plus en plus difficile d'obtenir une image d'un nouveau type au fil de la collection.  $\square$

**Corollaire D.4** (Moments). *L'espérance de  $T$  est donnée par :*

$$\mathbb{E}[T] = r \sum_{i=1}^r \frac{1}{i} = rH_r$$

où  $H_r$  est le  $r^{\text{e}}$  nombre harmonique, compris entre  $\ln(r)$  et  $\ln(r)+1$ , et qui vérifie  $H_r = \ln(r) + \gamma + o_{r \rightarrow \infty}(1)$  où  $\gamma \approx 0.577$  est la constante d'Euler. La variance vaut

$$\sigma^2(T) = r \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r-i}{i^2} \leq \frac{\pi^2}{6} r^2.$$

**Démonstration.** La linéarité de l'espérance et le fait que  $G_i$  suit une loi géométrique de paramètre  $\pi_i = (r - i + 1)/r$  donne

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^r \mathbb{E}[G_i] = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\pi_i} = \sum_{i=1}^r \frac{r}{r - i + 1} = r \sum_{i=1}^r \frac{1}{i}$$

comme annoncé. Comme de plus les  $G_i$  sont indépendantes, de variances respectives  $\sigma^2(G_i) = (1 - \pi_i)/\pi_i^2 = r(i - 1)/(r - i + 1)^2$ , on en déduit la formule de la variance. Les propriétés de  $H_r$  sont classiques.  $\square$

**Application numérique.** Pour  $r = 150$ , il faut acheter en moyenne  $150(\ln(150) + \gamma) \approx 838$  images pour compléter la collection !

Ces simples contrôles de moments permettent d'établir la convergence suivante.

**Théorème D.5** (Convergence).

$$\frac{T}{r \ln(r)} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1.$$

**Démonstration.** Par l'inégalité de Markov et les formules pour les moments de  $T$ , il vient pour tout  $u > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \left| \frac{T}{r \ln(r)} - 1 \right| > u \right] &\leq \frac{\mathbb{E} [|T - r \ln(r)|^2]}{r^2 \ln(r)^2 u^2} \\ &= \frac{\sigma^2(T) + (\mathbb{E}[T] - r \ln(r))^2}{r^2 \ln(r)^2 u^2} \\ &\leq (\pi^2/6 + 1) \left( \frac{1}{u^2 \ln(r)^2} \right). \end{aligned}$$

Pour tout  $u$  fixé le terme de droite tend vers 0 quand  $r \rightarrow \infty$ , ce qui prouve la convergence annoncée.  $\square$

La borne logarithmique sur la vitesse de convergence en probabilité est trop faible pour en déduire une convergence presque sûre au moyen du lemme de Borel–Cantelli. En revanche, la majoration obtenue par l'inégalité de Markov fournit un premier intervalle de fluctuation pour  $T$  : pour tout  $t > 0$ , la borne précédente appliquée à  $u = t/\ln(r)$  donne

$$\mathbb{P}[T \in [r \ln(r) - rt, r \ln(r) + rt]] \geq 1 - (\pi^2/6 + 1) \frac{1}{t^2}.$$

À présent, pour  $\alpha$  et  $r$  fixés, il faut choisir  $t$  assez grand pour que le second membre soit égal à  $1 - \alpha$ . L'intervalle de fluctuation, de largeur  $2rt$ , se dégrade quand  $\alpha$  diminue (car  $t$  augmente).

**Application numérique.** Pour  $\alpha = 0.05$  et  $r = 150$  on trouve l'intervalle  $[-340, 1843]$ . La borne supérieure est très grande et la borne inférieure n'apporte rien ! À  $\alpha$  (et donc  $t$ ) fixé, elle ne devient intéressante que si  $r$  est assez grand pour garantir  $r \ln(r) - rt > r$ .

**Remarque D.6.** *En n'utilisant que des informations sur les deux premiers moments de  $T$  on a pu montrer un résultat limite et obtenir un intervalle de fluctuation. En pratique ce dernier n'est pas très bon pour des valeurs raisonnables de  $r$  ; pour avoir mieux il faut étudier plus précisément la loi de  $T$ .*

### D.3 Étude fine et fluctuations

Commençons par une première inégalité de déviation inspirée du théorème D.2.

**Théorème D.7** (Déviation). *Pour tout réel  $t > 0$ ,*

$$\mathbb{P}[T > r \ln(r) + rt] \leq \frac{r}{r-1} e^{-t}.$$

**Démonstration.** Soit  $n$  la partie entière de  $r \ln(r) + rt$ . On réécrit  $\{T > n\}$  comme union des  $E_{n,i}$ , comme dans la preuve du théorème D.2, et on utilise la sous-additivité :

$$\mathbb{P}[T > n] = \mathbb{P}[\cup_{i=1}^r E_{n,i}] \leq \sum_{i=1}^r \mathbb{P}[E_{n,i}].$$

Comme  $\mathbb{P}[E_{n,i}] = (1 - 1/r)^n$ , il vient

$$\mathbb{P}[T > r \ln(r) + rt] \leq \mathbb{P}[T > n] \leq r \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{r \ln(r) + rt - 1} \leq \frac{r^2}{r-1} \exp((r \ln(r) + rt) \ln(1 - 1/r)).$$

Le résultat suit en majorant  $\ln(1 - 1/r)$  par  $(-1/r)$ . □

Pour un  $\alpha$  et un  $r$  fixé, on peut en déduire un intervalle de fluctuation de  $T$ , en choisissant  $t_\alpha = \ln(r/(\alpha(r-1)))$ , pour lequel  $\mathbb{P}[T \in [r, r \ln(r) + t_\alpha r]] \geq 1 - \alpha$ .

**Application numérique.** S'il y a  $r = 150$  images à collectionner, alors, pour  $\alpha = 0.05$ , on trouve  $t_\alpha \approx 3.0$ , et il y a 95% de chances que  $T$  soit entre 150 et... 1201.

On peut enfin pousser l'analyse plus loin en prenant en compte le caractère alterné de la somme définissant la queue de la distribution de  $T$ . Le résultat fait intervenir la loi de Gumbel, loi continue sur  $\mathbb{R}$  de fonction de répartition  $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-e^{-t}}$ . Cette loi, qui intervient naturellement dans l'étude des phénomènes extrêmes, est étudiée plus en détail dans l'annexe G.

**Théorème D.8** (Fluctuations asymptotiques). *On a*

$$\frac{T - r \ln(r)}{r} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{\text{loi}} \text{Gumbel.}$$

**Démonstration.** Il suffit d'établir que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T > r \ln(r) + tr) = S(t) = 1 - e^{-e^{-t}}.$$

Fixons donc  $t \in \mathbb{R}$  et supposons que  $r$  est assez grand pour que  $r \ln(r) + tr > r$ . Soit  $n_{t,r}$  l'entier défini par  $n_{t,r} = r \ln(r) + tr$  si  $r \ln(r) + tr \in \mathbb{N}$  et  $n_{t,r} = \lfloor r \ln(r) + tr \rfloor + 1$  sinon. Le théorème D.2 donne

$$\mathbb{P}(T > r \ln(r) + tr) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{n_{t,r}}.$$

Comme  $\binom{r}{k} \leq r^k/k!$  et  $1 - u \leq e^{-u}$  pour tout  $u \geq 0$ , on a

$$\binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{n_{t,r}} \leq \frac{e^{-tk}}{k!}.$$

Enfin, par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{n_{t,r}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{-tk}}{k!} = S(t). \quad \square$$

Le théorème D.8 fournit un nouvel intervalle de fluctuation (asymptotique) pour  $T$  : pour tout réel  $t \geq 0$ ,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P}[T \in [r \ln(r) - rt, r \ln(r) + rt]] = e^{-e^{-t}} - e^{-e^t}.$$

**Application numérique.** Toujours pour  $r = 150$  et  $\alpha = 0.05$ , on résout numériquement  $e^{-e^{-t}} - e^{-e^t} = \alpha$  pour obtenir  $t_\alpha \approx 2.97$  et l'intervalle de fluctuation [306, 1198]. La borne supérieure est donc très proche de la précédente ; on a en revanche gagné une borne inférieure non-triviale.



# Marche aléatoire simple et ruine du joueur

## E.1 Ruine du joueur

Soit  $0 < p < 1$  un réel fixé et soit  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a. indépendantes et de même loi telles que  $\mathbb{P}[\varepsilon_n = 1] = 1 - \mathbb{P}[\varepsilon_n = -1] = p$  pour tout  $n \geq 1$ . Soit  $X_0$  une v.a. sur  $\mathbb{Z}$  indépendante de la suite  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ . La **marche aléatoire simple** sur  $\mathbb{Z}$ , de paramètre  $p$ , est la suite récurrente aléatoire  $(X_n)_{n \geq 0}$  sur  $\mathbb{Z}$  définie par relation récursive suivante :

$$X_{n+1} = X_n + \varepsilon_{n+1} = X_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n+1}$$

pour tout  $n \geq 0$ . Pour tout  $n \geq 1$ , la v.a.  $\beta_n = (\varepsilon_n + 1)/2$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  car on a  $\mathbb{P}[\beta_n = 1] = 1 - \mathbb{P}[\beta_n = 0] = p$ . Ainsi, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\frac{X_n - X_0 + n}{2} = \beta_1 + \dots + \beta_n \sim \text{Binom}(n, p).$$

Un joueur invétéré joue à la roulette de façon répétée en misant toujours 1 € : il gagne un euro à chaque « victoire » et en perd un à chaque « défaite ». On suppose que les parties sont indépendantes, et que la probabilité de victoire vaut  $p$ .

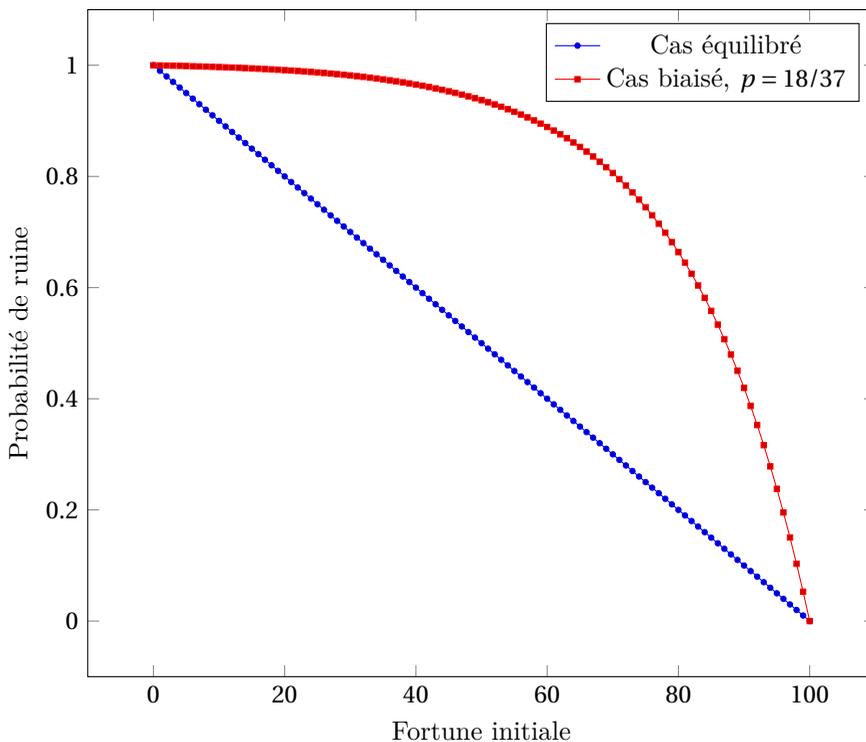
La fortune initiale du joueur est de  $x$  euros ; il quitte le jeu lorsqu'il atteint la fortune  $a < x$  euros (il est ruiné) ou  $b > x$  euros (son objectif). Dans la suite, on adopte les notations  $\mathbb{P}_x[\cdot] := \mathbb{P}[\cdot | X_0 = x]$  et  $\mathbb{E}_x[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot | X_0 = x]$ .

**Théorème E.1** (Sortie ou ruine). *Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$  avec  $a < b$ . Soit  $\tau_a, \tau_b$  et  $\tau$  les v.a. à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  définies par*

$$\tau_a = \inf\{n \geq 0 : X_n = a\}, \quad \tau_b = \inf\{n \geq 0 : X_n = b\}, \quad \text{et} \quad \tau = \min(\tau_a, \tau_b).$$

Alors pour tout  $a \leq x \leq b$  on a  $\mathbb{E}_x(\tau) < \infty$  et en posant  $\rho = \frac{1-p}{p}$  on a

$$\mathbb{P}_x(X_\tau = a) = \begin{cases} \frac{\rho^b - \rho^x}{\rho^b - \rho^a} & \text{si } p \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{b-x}{b-a} & \text{si } p = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_x(\tau) = \begin{cases} \frac{x-a}{1-2p} - \frac{(b-a)\rho^x - \rho^a}{1-2p} & \text{si } p \neq \frac{1}{2}, \\ (b-x)(x-a) & \text{si } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Un joueur part avec  $x \in \{1, \dots, 99\}$  euros, joue un euro à chaque partie et part s'il est ruiné ou s'il atteint son objectif de 100 euros. On représente la probabilité de ruine en fonction de la fortune initiale dans deux cas : pour un jeu équilibré (pile ou face non-biaisé) et pour un jeu très légèrement déséquilibré (un pari « rouge » à la roulette française, de probabilité de gain  $18/37 \approx 0.486$ ). Ce faible déséquilibre sur une partie conduit à une différence très nette dans les parties répétées : en partant de la somme moyenne  $x = 50$  euros, le joueur a une chance sur deux d'être ruiné en jouant à pile ou face, et environ 94% de chances d'être ruiné à la roulette...

FIGURE E.1 – Ruine du joueur

**Démonstration.** Montrons tout d'abord que  $\tau$  est d'espérance finie. Notons  $L = b - a$  la longueur de l'intervalle. Remarquons que si le joueur remporte ses  $L$  premières parties, alors  $\tau = \tau_a \leq L$ . Plus généralement, si le joueur remporte les parties  $n + 1, n + 2, \dots, n + L$ , alors  $\tau \leq n + L$  : soit la marche avait déjà atteint  $\{a, b\}$  avant le temps  $n$ , soit elle était encore entre  $a$  et  $b$  au temps  $n$  et les  $L$  gains successifs l'en font sortir.

Notons  $C_j$  l'événement « chanceux »  $C_j = \{\varepsilon_{jL+1} = \varepsilon_{jL+2} = \dots = \varepsilon_{jL} = 1\}$ . Le raisonnement précédent montre que

$$\mathbb{P}_x[\tau > kL] \leq \mathbb{P}_x \left[ \bigcap_{j=1}^k C_j^c \right].$$

Comme les pas  $(\varepsilon_i)$  sont supposés indépendants et que les  $C_j$  couvrent des périodes de

temps disjointes, les événements  $C_j$  sont indépendants, donc

$$\mathbb{P}_x[\tau > kL] \leq \prod_{j=1}^k \mathbb{P}_x[C_j^c] = (1 - p^L)^k.$$

Comme  $1 - p^L < 1$ , on en déduit à l'aide du théorème 3.33 que  $\mathbb{E}_x[\tau] < \infty$  (on peut en fait montrer que  $\tau$  a des moments de tous ordres). En particulier  $\mathbb{P}_x[\tau < \infty] = 1$ .

Calculons maintenant la probabilité de ruine  $r(x) = \mathbb{P}_x[X_\tau = a]$ . On conditionne par le résultat de la première partie pour obtenir :

$$\begin{aligned} r(x) &= \mathbb{P}_x[X_\tau = a | X_1 = x+1]p + \mathbb{P}_x[X_\tau = a | X_1 = x-1](1-p) \\ &= pr(x+1) + (1-p)r(x-1). \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette récurrence linéaire d'ordre deux est un espace vectoriel qui contient la solution constante 1. Si  $p \neq 1/2$  alors  $\rho^x$  est aussi solution, linéairement indépendante de 1, et donc les solutions sont de la forme  $A + B\rho^x$  avec  $A$  et  $B$  constantes. Les conditions aux bords  $r(a) = 1$ ,  $r(b) = 0$  fixent  $A$  et  $B$ , ce qui donne l'unique solution

$$r(x) = \frac{\rho^b - \rho^x}{\rho^b - \rho^a}.$$

Si  $p = 1/2$  alors  $\rho = 1$  et les deux solutions fondamentales précédentes sont confondues. Cependant, on observe que dans ce cas,  $x$  est également solution, linéairement indépendante de 1, et donc les solutions sont de la forme  $A + Bx$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes. Les conditions aux bords  $r(a) = 1$  et  $r(b) = 0$  fixent  $A$  et  $B$ , ce qui donne l'unique solution

$$r(x) = \frac{b-x}{b-a}.$$

Calculons  $R(x) = \mathbb{E}_x(\tau)$ . En conditionnant selon  $X_1$  on obtient<sup>1</sup> pour tout  $a < x < b$  la récurrence linéaire

$$R(x) = pR(x+1) + (1-p)R(x-1) + 1.$$

La présence du second membre 1 fait rechercher des solutions particulières. Si  $p \neq 1/2$  alors  $x/(1-2p)$  est solution particulière, et les solutions de l'équation sont de la forme  $R(x) = x/(1-2p) + A + B\rho^x$ . Les conditions aux bords  $R(a) = 0$  et  $R(b) = 0$  donnent enfin

$$R(x) = \frac{x-a}{1-2p} - \frac{(b-a)}{1-2p} \frac{\rho^b - \rho^x}{\rho^b - \rho^a}.$$

Si  $p = 1/2$  alors  $-x^2$  est solution particulière, et les solutions sont de la forme  $-x^2 + A + Bx$ . Les conditions aux bords  $R(a) = R(b) = 0$  donnent enfin

$$R(x) = (b-x)(x-a).$$

La même approche permet de calculer la fonction génératrice  $\mathbb{E}_x(s^\tau | X_\tau = a)$ . □

---

1. Cette méthode de conditionnement, déjà utilisée pour déterminer  $r(x)$ , est valable plus généralement pour toute chaîne de Markov.

**Remarque E.2.** Si  $p = 1/2$ , on a  $\mathbb{P}_x(\tau_a < \infty) = 1$  et  $\mathbb{P}_x(\tau_b < \infty) = 1$  pour tout  $a \leq x \leq b$ . Il est possible d'établir que si  $p = 1/2$  alors avec probabilité 1, la suite aléatoire  $(X_n)_{n \geq 0}$  visite presque sûrement chaque élément de  $\mathbb{Z}$  une infinité de fois. En revanche, si  $p \neq 1/2$  alors avec probabilité 1, la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  ne visite qu'un nombre fini de fois chaque élément de  $\mathbb{Z}$ . On le voit bien dans les formules du théorème E.1 en faisant tendre  $a$  ou  $b$  vers l'infini.

**Remarque E.3** (Les théorèmes limites à la rescousse). Voici un autre argument pour établir que  $\mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1$ . Posons  $m = 2p - 1$  et  $\sigma^2 = 4p(1 - p)$ . Si  $m \neq 0$  alors par la loi forte des grands nombres, p.s.  $(X_n)_{n \geq 1}$  tend vers  $+\infty$  si  $m > 0$  et vers  $-\infty$  si  $m < 0$ , et donc  $\mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1$ . Si  $m = 0$  alors pour tout  $n \geq 1$ , en posant  $I_n = \frac{1}{\sqrt{n}}]a, b[$ , on a

$$\mathbb{P}_x(\tau = \infty) \leq \mathbb{P}[a < X_n < b] = \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \in I_n\right).$$

Or  $(n^{-1/2}X_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  par le théorème limite central. Mais  $I_n$  dépend de  $n$ . Cependant, comme  $(I_n)_{n \geq 1}$  est décroissante,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \in I_n\right) \leq \inf_{m \geq 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{I_m} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 0.$$

## E.2 Premier retour en zéro de la marche aléatoire

La loi du premier temps où une marche aléatoire partant de  $0$  y revient est totalement explicite.

**Théorème E.4** (Premier retour en zéro et nombres de Catalan). Si  $\tau = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$  alors pour tout  $n \geq 0$ ,

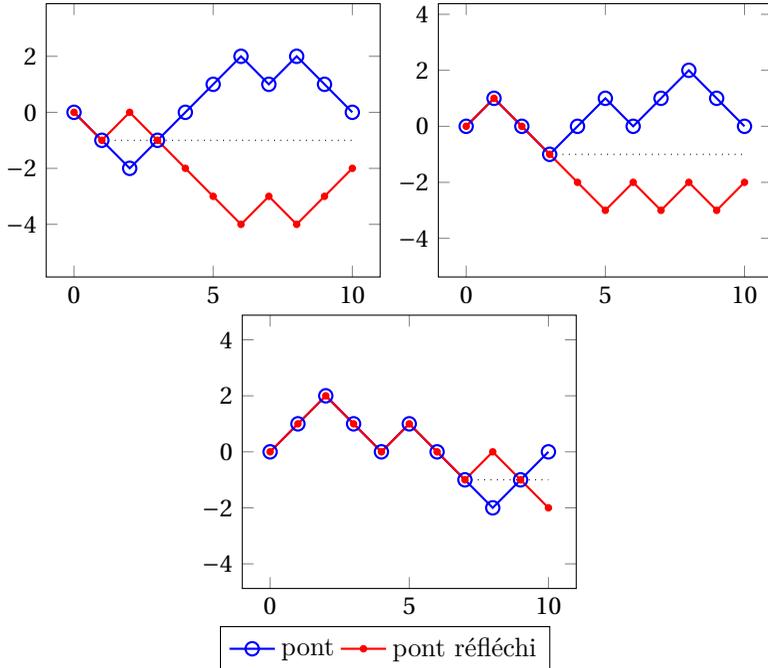
$$\mathbb{P}_0[\tau = 2n + 2] = \frac{2}{n + 1} \binom{2n}{n} p^{n+1} (1 - p)^{n+1}.$$

On reconnaît le  $n^e$  nombre de Catalan  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Ces nombres comptent, outre les chemins de la marche aléatoire simple, les mots de Dyck, les parenthésages, les triangulations d'un polygone, les partitions non croisées, les chemins sous-diagonaux dans le carré, les arbres planaires, etc. Les moments pairs de la loi du demi-cercle sont les nombres de Catalan. C'est l'occasion de souligner que la beauté de la combinatoire réside dans les bijections qu'elle révèle, entre des ensembles finis d'objets de natures *a priori* très différentes.

**Preuve du théorème E.4.** Sachant  $\{X_0 = 0\}$ , l'événement  $\{\tau = 2n + 2\}$  correspond à une trajectoire de longueur  $2n + 2$  partant de  $0$  et revenant à zéro en restant strictement positive ou strictement négative. Ces deux cas sont équiprobables, d'où le facteur 2 dans le résultat. Dans les deux cas, il y a eu forcément  $n + 1$  incréments  $+1$  et  $n + 1$  incréments  $-1$ , d'où

$$\mathbb{P}_0(\tau = 2n + 2) = 2C_n p^{n+1} (1 - p)^{n+1}.$$

où  $C_n$  est le nombre de chemins de longueur  $2n + 2$  partant de zéro et revenant à zéro, et restant strictement positifs. Le premier incrément est forcément  $+1$  et le dernier forcément  $-1$  et  $C_n$  est égal au nombre de chemins de longueur  $2n$  partant de zéro et revenant à zéro et restant positifs. Il y a  $n$  incréments  $+1$  et  $n$  incréments  $-1$ .



Pour compter les « ponts positifs » (chemins de longueur  $n$  commençant et finissant en 0 et restants positifs) on dénombre l'ensemble complémentaire des ponts qui prennent au moins une valeur négative. À chacun de ces ponts, on associe un « pont réfléchi » qui part de 0 et finit en  $-2$ . Le pont et son pont réfléchi coïncident jusqu'au premier  $-1$ , après quoi ils sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite  $y = -1$ . On obtient ainsi tous les ponts entre 0 et 2, ce qui permet de dénombrer les ponts positifs.

FIGURE E.2 – Compter les ponts

Considérons les chemins partant de zéro et revenant à zéro et contenant  $n$  incréments  $+1$  et  $n$  incréments  $-1$ . Il y en a  $\binom{2n}{n}$ . Si un chemin de ce type n'est pas positif juste après la première position négative, modifions tous les incréments en permutant le signe des  $+1$  et des  $-1$  — cette transformation est illustrée dans la figure E.2. On obtient de la sorte un chemin avec  $n-1$  incréments  $+1$  et  $n+1$  incréments  $-1$ , et il s'avère que tous les chemins partant de zéro avec  $n-1$  incréments  $+1$  et  $n+1$  incréments  $-1$  s'obtiennent de la sorte, et il y en a  $\binom{2n}{n-1}$ . Ainsi,  $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Cette astuce est attribuée au mathématicien français Désiré André (1840–1917).  $\square$

De cette expression combinatoire, on peut déduire les résultats suivants.

**Théorème E.5** (Récurrence et temps de retour pour la marche aléatoire). *Soit  $\tau$  le temps de premier retour en 0 d'une marche aléatoire de paramètre  $p$ .*

- Si  $p \neq 1/2$ , alors  $\mathbb{P}[\tau = \infty] > 0$  : avec probabilité positive, on ne revient jamais en zéro. On dit que la marche est transiente.
- Si  $p = 1/2$ , alors  $\mathbb{P}[\tau < \infty] = 1$  : on revient toujours en 0, la marche est dite récurrente. En revanche le temps moyen de retour est infini :  $\mathbb{E}[\tau] = \infty$ . On dit que la marche est récurrente nulle.

**Démonstration.** On procède par étapes.

*Une série entière.* Comme la loi de  $\tau$  est explicite, on peut mener à bien tous les calculs. Tout d'abord

$$\mathbb{P}[\tau < \infty] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[\tau = 2n+2] = 2pq \sum_{n=0}^{\infty} C_n (pq)^n = 2pqg(pq),$$

où  $g$  est la série entière<sup>2</sup>  $g(s) = \sum_{n \geq 0} C_n s^n$ . L'interprétation probabiliste ci-dessus montre que  $g(1/4)$  converge, donc le rayon de convergence de  $g$  est supérieur ou égal à  $1/4$ . Notons de plus que  $2sg(s)$  appartient nécessairement à  $[0, 1]$ , puisque c'est  $\mathbb{P}[\tau < \infty]$  pour  $p$  tel que  $pq = s$ .

*Une récurrence pour les nombres de Catalan.* Les nombres de Catalan vérifient la relation de récurrence

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}.$$

Ceci peut se voir sur l'interprétation combinatoire.  $C_{n+1}$  est le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{C}_{n+1}$  des chemins de longueur  $2n+2$  qui restent positifs. On partitionne  $\mathcal{C}_{n+1}$  :

$$\mathcal{C}_{n+1} = \bigcup_{k=0}^n \{\text{chemins dont le premier retour en zéro est en } 2k+2\}.$$

Un chemin de  $\mathcal{C}_{n+1}$  dont le premier zéro est en  $2k+2$  est la concaténation d'un chemin de longueur  $2k+2$  restant strictement positif, et d'un chemin de longueur  $2n-2k$  restant positif ; d'où la formule annoncée.

*Identification de  $g$ .* Pour  $s \geq 0$ , on en déduit

$$\begin{aligned} g(s) &= C_0 + s \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} s^n \\ &= 1 + s \sum_{0 \leq k \leq n} C_k s^k C_{n-k} s^{n-k} \\ &= 1 + s \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} C_k C_l s^k s^l \\ &= 1 + sg(s)^2, \end{aligned}$$

toutes les intersersions étant autorisées puisque les termes sont positifs (toujours le théorème de Fubini) Pour  $s \in ]0, 1/4]$ , on en déduit

$$g(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4s}}{2s}.$$

Comme  $2sg(s) \in [0, 1]$ , on a finalement  $2sg(s) = 1 - \sqrt{1-4s}$ . Par conséquent

$$\mathbb{P}[\tau < \infty] = 1 - \sqrt{1-4pq}.$$

Cette quantité vaut bien 1 pour  $p = 1/2$ , sinon elle est strictement inférieure à 1.

---

2. En combinatoire, on dit que  $g$  est la fonction génératrice de la suite  $C_n$ , d'où la notation.

*Espérance de  $\tau$ .* La variable  $\tau$  est à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Si  $p \neq 1/2$ ,  $\mathbb{P}[\tau = \infty] > 0$  et l'espérance est automatiquement infinie. Si  $p = 1/2$ ,  $\mathbb{P}[\tau = \infty] = 0$ , et

$$\mathbb{E}[\tau] = \sum_n (2n+2) \mathbb{P}[\tau = 2n+2] = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} 4^{-n}.$$

Par la formule de Stirling, le terme général de cette série est équivalent à  $1/\sqrt{\pi n}$ , donc la série diverge et l'espérance de  $\tau$  est infinie.  $\square$

Les nombres de Catalan sont les moments pairs de la loi du demi-cercle (ex. 3.39).



## Lois exponentielles et durées de vie

### F.1 Définition, premières propriétés

Rappelons que  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$  si sa fonction de répartition vaut :  $F(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(1 - e^{-\lambda x})$ , ; de façon équivalente :  $\mathbb{P}[X \geq x] = e^{-\lambda x}$  pour tout  $x \geq 0$ . La loi exponentielle admet la densité  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} \lambda e^{-\lambda x}$ .

Les lois exponentielles sont très importantes en modélisation stochastique. Cette importance peut s'expliquer par le fait qu'elles apparaissent naturellement comme analogue continu de la loi géométrique. La loi géométrique modélise l'attente d'un événement (premier succès dans un jeu de pile ou face répété) ; si on réalise les expériences de plus en plus vite, en diminuant la probabilité de succès, on obtient une loi exponentielle. Plus précisément on a le résultat suivant.

**Théorème F.1** (Lois exponentielles et géométriques).

- **Contraction de la loi géométrique.** Pour tout  $n \geq 1$  soit  $X_n \sim \text{Geom}(p_n)$  avec  $0 < p_n < 1$ . Si  $np_n$  converge vers  $\lambda > 0$ , et si  $X$  est une variable aléatoire réelle de loi  $\text{Exp}(\lambda)$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}\left[\frac{X_n}{n} \geq x\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda x} = \mathbb{P}[X \geq x].$$

- **Discrétisation de la loi exponentielle.** Si  $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$  et si  $\lfloor Y \rfloor$  désigne la partie entière de  $Y$ , alors  $\lfloor Y \rfloor$  et  $Y - \lfloor Y \rfloor$  sont indépendantes et  $1 + \lfloor Y \rfloor \sim \text{Geom}(e^{-\lambda})$ .

**Remarque F.2.** Le premier résultat établi, via le critère des fonctions de répartition, une convergence en loi — notion détaillée dans la définition I.2.

**Démonstration.** Pour la première partie on écrit, pour tout  $n \geq 1$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}[X_n \geq nx] = \mathbb{P}[X_n \geq \lfloor nx \rfloor] = (1 - p_n)^{\lfloor nx \rfloor} \rightarrow e^{-\lambda x}.$$

La seconde partie découle de la formule, pour tous  $s, t \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}[Y > t + s | Y > s] = \mathbb{P}[Y > t] = e^{-\lambda t},$$

que l'on reverra et qui correspond à l'absence de mémoire des lois exponentielles.  $\square$

La pièce de monnaie, comme les cartes ou le tirage du loto, n'a pas de mémoire : le fait qu'elle soit tombée 5 fois sur face de suite n'augmente pas la probabilité d'apparition d'un pile. Cette propriété se généralise aux lois exponentielles et les caractérise.

**Théorème F.3** (Caractérisation des lois exponentielles par absence de mémoire). *Pour toute v.a.r.  $X$  sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $\mathbb{P}[X > 0] = 1$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $\mathcal{L}(X)$  est une loi exponentielle ;
2. la variable  $X$  est « sans mémoire » : pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}_+$  tel que  $\mathbb{P}[X > t] \neq 0$ , et pour tout  $s \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}[X > t + s | X > t] = \mathbb{P}[X > s].$$

**Remarque F.4** (Hypothèses). *Le caractère « sans mémoire » s'écrit naturellement  $\mathbb{P}[X > t + s | X > t] = \mathbb{P}[X > s | X > 0]$ , qui vaut ici  $\mathbb{P}[X > s]$  puisqu'on a supposé  $\mathbb{P}[X > 0] = 1$ . Si on enlève cette hypothèse, on montre qu'une loi vérifiant  $\mathbb{P}[X > t + s | X > t] = \mathbb{P}[X > s | X > 0]$  est nécessairement un mélange d'un Dirac en 0 et d'une loi exponentielle : il existe  $p \in [0, 1]$  et  $\lambda > 0$  tel que*

$$\mathbb{P}[X = 0] = p; \quad \mathbb{P}[X > t] = (1 - p)e^{\lambda t}.$$

**Démonstration.** Si  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  alors  $X$  est bien sans mémoire : pour tout  $s, t \geq 0$ ,  $\mathbb{P}[X > t] = \exp(-\lambda t) > 0$  et

$$\mathbb{P}[X > t + s | X > t] = \frac{\mathbb{P}[X > t + s]}{\mathbb{P}[X > t]} = e^{-\lambda s}.$$

Pour montrer la réciproque, posons  $G(t) = \mathbb{P}[X > t] = 1 - F_X(t)$ . Comme la loi est sans mémoire et  $\{X > t + s\} \subset \{X > t\}$ , on obtient

$$G(t)G(s) = G(t + s)$$

pour tout  $t$  tel que  $G(t) > 0$ . La fonction de répartition est continue à droite, donc il en est de même pour  $G$ . Comme  $G(0) = 1$ ,  $G$  reste strictement positive à droite de zéro :  $G(\varepsilon) > 0$  pour un certain  $\varepsilon > 0$ . Par récurrence  $G(n\varepsilon) > 0$  pour tout  $n$ , donc  $G$  est strictement positive partout puisqu'elle est décroissante. L'équation  $G(t + s) = G(t)G(s)$  a donc lieu pour tout  $s, t \in \mathbb{R}_+$ .

Les solutions de cette équation fonctionnelle sont de la forme  $G(t) = G(1)^t$  (considérer les  $t \in \mathbb{Q}$  puis utiliser la décroissance de  $G$  lorsque  $t \in \mathbb{R}_+$ ). Comme  $G$  n'est pas identiquement nulle et tend vers 0 en l'infini,  $G(1) \in ]0, 1[$  donc  $\lambda = \ln(G(1)) \in ]0, \infty[$ ;  $X$  suit bien une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .  $\square$

Les variables exponentielles modélisent souvent des temps d'attente d'un « client » (usager à la poste, ordinateur personnel,...) qui souhaite utiliser un « serveur » (guichet ouvert, serveur d'un fournisseur d'accès,...). Si plusieurs serveurs fonctionnent en parallèle, le temps d'attente du client sera donné par le minimum d'un ensemble de variables. Si les temps sont exponentiels la situation est particulièrement simple.

**Théorème F.5** (Minimum – Horloges en compétition). *Si  $E_1, \dots, E_n$  sont des v.a.r. indépendantes de loi exponentielle de paramètres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  alors*

$$M = \min(E_1, \dots, E_n) \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

De plus, avec probabilité 1, le minimum  $M$  est atteint pour un unique entier aléatoire  $K$  indépendant de  $M$  et de loi donnée pour tout  $1 \leq k \leq n$  par

$$\mathbb{P}[K = k] = \mathbb{P}[M = E_k] = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}.$$

**Démonstration.** On a  $\mathbb{P}[M \geq x] = \mathbb{P}[E_1 \geq x] \dots \mathbb{P}[E_n \geq x] = e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x}$  pour tout  $x \geq 0$ , et cela montre que  $M$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ . Pour traiter  $K$ , nous allons déterminer directement la loi du couple<sup>1</sup>  $(M, K)$ , ce qui fournira à nouveau la loi de  $M$ . Comme les v.a.r. sont indépendantes et de loi à densité, avec probabilité 1, l'entier aléatoire  $K$  est bien défini sur  $\{1, \dots, n\}$  (voir le corollaire 4.14). Pour tout  $1 \leq k \leq n$  et  $t \geq 0$  on a

$$\{M \geq t \text{ et } K = k\} = \{E_k \geq t \text{ et } E_{k'} > E_k \text{ pour tout } k' \neq k\}.$$

Par hypothèse sur les variables aléatoires  $E_1, \dots, E_n$  il vient

$$\mathbb{P}[M \geq t \text{ et } K = k] = \int_t^\infty \lambda_k e^{-s\lambda_k} \prod_{k' \neq k} \mathbb{P}[E_{k'} > s] ds = \exp(-t(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)) \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}.$$

On en déduit que les variables aléatoires  $M$  et  $K$  sont indépendantes ; de plus les lois de  $M$  et  $K$  s'obtiennent respectivement en prenant  $t = 0$  et en sommant en  $k$ .  $\square$

Si  $E_1, \dots, E_n$  sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  alors pour tout réel  $t \geq 0$  la v.a.r. discrète  $\mathbf{1}_{\{E_1 > t\}} + \dots + \mathbf{1}_{\{E_n > t\}} = \text{Card}\{1 \leq k \leq n : E_k > t\}$ , c'est à dire le nombre de serveurs encore occupés au temps  $t$ , suit la loi binomiale  $\text{Binom}(n, e^{-\lambda t})$  car les indicatrices sont indépendantes de loi de Bernoulli. Symétriquement on peut s'intéresser au premier temps où toutes les horloges ont sonné :

**Théorème F.6** (Maximum). *Si  $E_1, \dots, E_n$  sont indépendantes de loi  $\text{Exp}(\lambda)$  alors*

$$\mathcal{L}(\max(E_1, \dots, E_n)) = \mathcal{L}(F_1 + \dots + F_n)$$

où  $F_1, \dots, F_n$  sont indépendantes avec  $F_k \sim \text{Exp}(k\lambda)$  pour tout  $1 \leq k \leq n$ .

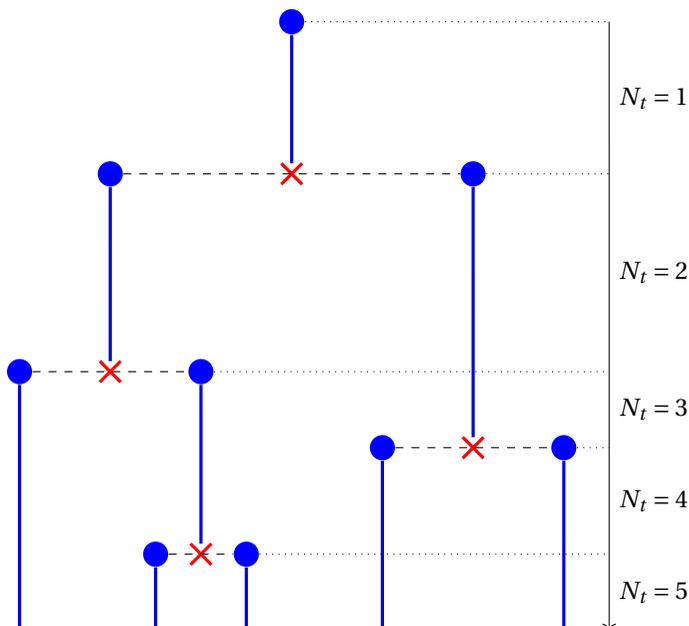
**Démonstration.** Cette décomposition en somme est très proche de celle qui apparaît dans le problème du collectionneur d'images (lemme D.3). Donnons d'abord une justification intuitive du résultat en ce sens. Soit  $F_n$  le temps où la première horloge sonne (exponentiel de paramètre  $n\lambda$  comme minimum de  $n$  variables exponentielles). Après ce temps, il faut attendre un temps  $F_{n-1}$  pour entendre une horloge sonner : il reste  $n-1$  horloges et, par absence de mémoire<sup>2</sup>, chacune suit une loi exponentielle, donc  $F_{n-1}$  suit bien la loi  $\text{Exp}(\lambda(n-1))$ . On procède de même jusqu'à  $F_1$ , temps d'attente entre l'avant-dernière sonnerie d'horloge et la dernière.

Proposons maintenant une preuve plus analytique. Posons  $S_n = F_1 + \dots + F_n$ . La densité de  $M_n = \max(E_1, \dots, E_n)$  est

$$f_n(x) = (\mathbb{P}[M_n \leq x])' = ((1 - e^{-\lambda x})^n \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x))' = n\lambda(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

1. Notons que ce couple, dont la première composante est à densité et la seconde est discrète, ne rentre pas dans le cadre du programme.

2. On admet ici que l'absence de mémoire peut s'appliquer après le temps aléatoire  $F_n$ .



À l'instant  $0$  (tout en haut) il n'y a qu'une seule particule. Elle vit un certain temps aléatoire de loi exponentielle (segment vertical) puis meurt (croix) en donnant naissance à deux particules filles (les segments horizontaux indiquent cette filiation, leur longueur est arbitraire). Chacune de ces deux particules évolue de la même manière.

FIGURE F.1 – Le processus de Yule

Montrons par récurrence sur  $n$  que  $S_n$  a pour densité  $f_n$ . C'est vrai pour  $n = 1$ . Si cela est vrai pour  $n$ , alors la densité de  $S_{n+1}$  est, en notant  $g_\lambda$  la densité de  $\text{Exp}(\lambda)$ ,

$$\begin{aligned}
 f_n * g_{(n+1)\lambda}(y) &= (n+1)\lambda \int_{-\infty}^y f_n(x) e^{-\lambda(n+1)(y-x)} dx \\
 &= \lambda(n+1)n\lambda e^{-\lambda(n+1)y} \int_0^y (e^{\lambda x} - 1)^{n-1} e^{\lambda x} dx \\
 &= \lambda(n+1)e^{-\lambda(n+1)y} (e^{\lambda y} - 1)^n \\
 &= \lambda(n+1)e^{-\lambda y} (1 - e^{-n\lambda y})^n = f_{n+1}(y). \quad \square
 \end{aligned}$$

Illustrons une autre conséquence de cette décomposition sur un modèle de population. Considérons un arbre binaire infini représentant la descendance d'une cellule mère (voir la figure F.1). Supposons que chaque bout de branche a une longueur aléatoire qui représente la durée de vie avant division. On suppose que toutes ces longueurs sont des v.a.r. indépendantes de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . À l'instant  $t \geq 0$ , l'arbre possède  $N_t$  branches, et  $N_0 = 1$ . Le processus  $(N_t)_{t \geq 0}$  est appelé processus de Yule de paramètre  $\lambda$ .

**Corollaire F.7** (Taille de la population du processus de Yule). *Pour tout  $t \geq 0$  la taille de la population  $N_t$  suit la loi géométrique  $\text{Geom}(e^{-\lambda t})$ . En particulier,*

$$\mathbb{E}[N_t] = e^{\lambda t} \quad \text{et} \quad \text{Var}(N_t) = (1 - e^{-\lambda t})e^{2\lambda t}.$$

**Démonstration.** Notons  $F_1$  le temps d'attente de la première division,  $F_2$  le temps à attendre après  $F_1$  pour observer la deuxième division, etc. Par définition  $N_t = \text{Card}\{n \geq 1 : S_n \leq t\}$  où  $S_n = F_1 + \dots + F_n$ . La propriété d'absence de mémoire des lois exponentielles implique que les  $(F_n)_{n \geq 1}$  sont indépendantes et que  $F_n \sim \text{Exp}(n\lambda)$  pour tout  $n \geq 1$  (puisque  $F_n$  peut être vu comme le minimum de  $n$  variables  $\text{Exp}(\lambda)$  indépendantes correspondant au temps de vie des  $n$  particules présentes au temps  $S_{n-1}$ ). D'après le théorème F.6, la v.a.r.  $S_n$  a même loi que  $\max(E_1, \dots, E_n)$  où  $E_1, \dots, E_n$  sont des v.a.r. indépendantes de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Par conséquent, on a pour tout  $n$  :

$$\mathbb{P}[N_t - 1 \geq n] = \mathbb{P}[S_n \leq t] = \mathbb{P}[E_1 \leq t] \cdots \mathbb{P}[E_n \leq t] = (1 - e^{-\lambda t})^n. \quad \square$$

Reprenons le vocabulaire « client-serveur » et supposons maintenant que les serveurs fonctionnent en série : le client doit passer un temps  $E_1$  avec le premier serveur,  $E_2$  avec le deuxième, etc. Le client enregistre sa progression (le nombre de serveurs vus) dans une variable  $N_t$ .

**Théorème F.8** (Horloges en série, comptage, processus de Poisson). *Soit  $(E_n)_{n \geq 1}$  des v.a.r. de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , et  $T_n = \sum_{i=1}^n E_i$ . Pour tout  $t \geq 0$ , soit  $N_t$  la v.a.r. de comptage*

$$N_t = \text{Card}\{n \geq 1 : T_n \leq t\}.$$

Alors :

1.  $(T_1, \dots, T_n)$  a pour densité  $(t_1, \dots, t_n) \mapsto \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbf{1}_{\{0 < t_1 < \dots < t_n\}}(t_1, \dots, t_n)$  ;
2.  $T_n$  suit la loi Gamma de densité  $t \mapsto \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \lambda^n e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$  ;
3.  $N_t$  suit la loi de Poisson  $\text{Poi}(\lambda t)$ .

**Démonstration.** Le point 1 s'obtient par changement de variable linéaire triangulaire

$$(s_1, s_2, \dots, s_n) \mapsto (s_1, s_1 + s_2, \dots, s_1 + \dots + s_n)$$

à partir de la loi de  $(T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1})$  de densité

$$(s_1, \dots, s_n) \mapsto \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda s_i} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(s_i) = \lambda^n e^{-\lambda(s_1 + \dots + s_n)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^n}(s_1, \dots, s_n).$$

Le point 2 s'obtient par récurrence sur  $n$ . Pour le point 3,  $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$ , d'où  $\mathbb{P}[N_t = n] = \mathbb{P}[T_n \leq t] - \mathbb{P}[T_{n+1} \leq t]$ , et on utilise la propriété 2.  $\square$

## F.2 Modélisation des durées de vie

Comme on l'a vu, les lois exponentielles sont utiles pour modéliser les durées dans les processus de renouvellement sans mémoire comme les files d'attente : caisse de supermarché, feu tricolore, etc. Elles sont également utilisées pour modéliser des phénomènes physiques comme la désintégration de particules radioactives. En revanche, la propriété d'absence de mémoire montre qu'elles sont inadaptées pour modéliser les durées de vie d'individus, de composants électriques, ... pour lesquels on observe un phénomène de vieillissement.

On modélise une durée de vie par une variable aléatoire réelle positive  $X$ . On peut penser à la durée de vie d'un organisme vivant, d'une entreprise, d'une situation donnée comme le chômage, etc. Supposons que  $X$  admet une densité  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$f(t) > 0$  pour tout  $t > 0$ . La loi de  $X$  est caractérisée par la donnée de la densité  $f$  ou encore par la donnée de la fonction de répartition  $F$  définie par

$$F(t) = \mathbb{P}[X \leq t] = \int_0^t f(s) ds$$

pour tout  $t \geq 0$ . La **fonction de survie** est donnée par  $S(t) = 1 - F(t) = \mathbb{P}[X > t]$  pour tout  $t \geq 0$ ; elle représente la probabilité de mourir après l'instant  $t$ , i.e. de survivre à la période  $[0, t]$ . Il est clair que la fonction de survie caractérise la loi de  $X$ , car il en va de même de la fonction de répartition  $F$ . La fonction de survie vérifie :

- $S$  prend ses valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$  ;
- $S$  est continue ;
- $S$  est décroissante ;
- $S(0) = 1$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$ .

**Remarque F.9.** *La première et la troisième propriété ainsi que la limite en  $\infty$  découlent immédiatement des propriétés correspondantes pour  $F$ . La continuité complète (et pas seulement à droite) et la valeur en 0 viennent de l'hypothèse que  $X$  est à densité sur  $\mathbb{R}^+$ .*

La **fonction de hasard**  $h$  est définie pour tout  $t \geq 0$  par

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)}.$$

La fonction de hasard est positive. Le terme *hasard* est un anglicisme qui signifie ici « danger » ou « risque ». En effet, la fonction de hasard s'interprète comme un taux de mortalité instantané, une probabilité de mort par unité de temps : pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}[X \in [t, t + s] | X > t] = h(t) \times s + o_{s \rightarrow 0}(s),$$

ou encore :

$$h(t) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\mathbb{P}[t < X < t + s | X > t]).$$

Pour le voir, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{F(t+s)}{S(t)} &= \frac{\mathbb{P}[X < t+s]}{\mathbb{P}[X > t]} = \frac{\mathbb{P}[X < t] + \mathbb{P}[t < X < t+s]}{\mathbb{P}[X > t]} \\ &= 1 + \frac{\mathbb{P}[t < X < t+s]}{\mathbb{P}[X > t]} = 1 + \mathbb{P}[t < X < t+s | X > t], \end{aligned}$$

puis l'on dérive en  $s$ .

La fonction de hasard caractérise la loi car on peut exprimer  $S$  en fonction de  $h$  par :

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t h(u) du\right).$$

On cherche souvent à modéliser les durées de vies via leur fonction de hasard  $h$  plutôt que via la densité  $f$ . Voici des exemples concrets de fonctions de hasard :

**Durée de vie humaine.** La fonction  $h$  part d'une valeur positive et décroît violemment (ce pic initial correspond à la mortalité infantile), puis a un plat muni de deux bosses vers 18–22 ans (accidents deux roues) et 40 ans (accidents cardiaques), puis remonte de manière convexe (vieillesse). Les pics de la fonctions de hasard correspondent à une diminution de la durée de vie.

**Durée du chômage.** la fonction  $h$  a l'allure de la fonction  $x \mapsto (1+x)\exp(-x)$ , le pic mou correspondant au chômage de longue durée.

**Durée de vie d'un composant.** On a coutume de dire que la fonction de hasard typique d'un composant a une forme de baignoire : rodage (décroissance), exploitation (long plateau), usure (croissance).

On peut encore définir d'autres points de vue pour étudier la durée de vie. Une idée est de s'intéresser aux quantités *conditionnelles*. Pour tout  $t \geq 0$ , la **fonction de survie conditionnelle** est la probabilité de survivre encore pendant un temps  $s$  sachant qu'on a déjà vécu un temps  $t$  :

$$S(s|t) = \mathbb{P}[X > t+s | X > t].$$

Ces fonctions peuvent s'exprimer directement en fonction de  $h$  : pour  $s, t > 0$ ,

$$S(s|t) = \frac{S(t+s)}{S(t)} = \exp\left(-\int_t^{t+s} h(u) du\right).$$

Fixons  $t$ . La fonction  $s \mapsto S(s|t)$  vérifie toutes les hypothèses d'une fonction de survie ; on peut donc lui associer une loi (appelée « loi conditionnelle de  $X-t$  sachant  $X > t$  »), de fonction de répartition  $F_{X-t|X>t} : s \mapsto 1 - S(s|t)$ .

Supposons  $X$  intégrable. La **durée de vie moyenne restante** est définie pour chaque  $t$  comme l'espérance de la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $X \geq t$ . Par le résultat indiqué dans l'exercice 3.40,

$$\begin{aligned} r(t) &= \mathbb{E}[X-t | X > t] = \mathbb{E}[X | X > t] - t \\ &:= \int_0^\infty S(s|t) ds. \end{aligned}$$

L'intégrale est finie puisqu'elle se réécrit

$$r(t) = \frac{1}{S(t)} \int_0^\infty S(s+t) ds = \frac{1}{S(t)} \int_t^\infty S(s) ds \leq \frac{1}{S(t)} \mathbb{E}[X] < \infty.$$

Si  $X$  est une durée de vie humaine mesurée en années,  $t+r(t)$  est l'*espérance de vie à  $t$  ans*.

La fonction  $r$  caractérise la loi de  $X$ . En effet,  $r$  est entièrement déterminée par la loi de  $X$ . Réciproquement, connaissant la fonction  $r$ , on a pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\frac{1}{r(t)} = \frac{S(t)}{\int_t^\infty S(s) ds}, \tag{F.1}$$

relation qu'il s'agit d'« inverser » pour trouver  $S$  en fonction de  $r$ . On reconnaît à droite (l'opposé de) la dérivée d'un logarithme : en intégrant entre 0 et  $t$ , on obtient

$$\int_0^t \frac{1}{r(s)} ds = \ln\left(\int_0^\infty S(s) ds\right) - \ln\left(\int_t^\infty S(s) ds\right).$$

L'intégrale  $\int_0^\infty S(s) ds$  vaut  $\mathbb{E}[X] = r(0)$ , donc

$$\int_t^\infty S(s) ds = r(0) \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{r(s)} ds\right).$$

En se rappelant de la formule (F.1), on en déduit l'expression de  $S$  en fonction de  $r$  :

$$S(t) = \frac{r(0)}{r(t)} \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{r(s)} ds\right).$$

Ainsi, la durée de vie moyenne restante caractérise bien la loi.

On dispose d'une caractérisation de l'indépendance temporelle qui découle de l'absence de mémoire des lois exponentielles : pour tout  $\lambda > 0$ , il y a équivalence entre :

- $X$  suit la loi exponentielle de moyenne  $1/\lambda$  ;
- $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  pour tout  $t \geq 0$  ;
- $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$  pour tout  $t \geq 0$  ;
- $S(t) = e^{-\lambda t}$  pour tout  $t \geq 0$  ;
- $h(t) = \lambda$  pour tout  $t \geq 0$  (constance de la fonction de hasard)
- $S(t|t_0) = e^{-\lambda t}$  pour tous  $t_0, t \geq 0$  (absence de mémoire)
- $S(t + t_0) = S(t)S(t_0)$  pour tous  $t_0, t \geq 0$  ;
- $r(t) = 1/\lambda$  pour tout  $t \geq 0$ .

**Remarque F.10** (Fiabilité des systèmes). *Les notions de fonction de survie et de fonction de hasard sont centrales dans l'étude quantitative de la fiabilité des systèmes. Pour un système simple, constitué de composants montés en série, la durée de vie du système est le minimum des durées de vie des composants ; si les composants sont en parallèle il faut considérer le maximum. Pour des systèmes plus complexes on doit définir de nouvelles notions : fonctions de structure, coupes minimales, arbres de défaillance, ...*

# Extrêmes

## G.1 Modélisation des phénomènes extrêmes

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi. Les résultats les plus classiques de la théorie des probabilités comme la loi des grands nombres et le TLC concernent la somme  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Le TLC peut en particulier s'interpréter comme une identification de la *bonne normalisation* de  $S_n$  : pour  $a_n = 1/(\sqrt{n}\sigma)$  et  $b_n = -\sqrt{n}\mu/\sigma$ ,  $a_n S_n + b_n$  converge en loi vers la loi centrée réduite  $\mathcal{N}(0,1)$ . Dans de nombreuses applications ce n'est pas la somme des  $X_i$  qui importe mais leur plus grande valeur :

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

Si  $X_i$  est une performance sportive,  $M_n$  est le record au temps  $n$ , si  $X_i$  est une hauteur d'eau, la valeur de  $M_n$  détermine si il y a ou non une crue... L'étude de ces grandes valeurs est appelée « théorie des valeurs extrêmes ».

Remarquons d'emblée que  $M_n$  est croissante<sup>1</sup>, par conséquent elle converge p.s. vers une variable  $M_\infty$  à valeurs dans  $]-\infty, \infty]$ . Cette valeur limite est en réalité déterministe.

**Théorème G.1** (Limite de  $M_n$ ). *On a toujours*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = x_F\right) = 1 \quad \text{où} \quad x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_{X_1}(x) < 1\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Le réel  $x_F$  est appelé « bord droit du support de  $X_1$  ».

**Démonstration.** Notons déjà que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}[M_n \leq x] = \mathbb{P}[X_1 \leq x] \cdots \mathbb{P}[X_n \leq x] = F_{X_1}^n(x).$$

Pour tout  $x < x_F$ , on a  $F_{X_1}(x) < 1$  et donc

$$\mathbb{P}[M_n \leq x] = F_{X_1}^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus, dans le cas où  $x_F < \infty$ , on a pour tout  $x \geq x_F$ ,  $F(x) = 1$ , et donc

$$\mathbb{P}[M_n \leq x] = F_{X_1}^n(x) \rightarrow 1.$$

Ainsi, la suite  $(M_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers  $x_F$ . Comme on a vu précédemment qu'elle convergeait p.s. (et donc en probabilité) vers  $M_\infty$ , on en déduit que  $M_\infty = x_F$ .  $\square$

1. Ceci signifie que pour tout  $\omega$ , la suite  $M_n(\omega)$  est croissante.

Dans la suite on va chercher à étudier le comportement de  $x_F - M_n$  (si  $x_F$  est fini) ou à voir à quelle vitesse  $M_n$  tend vers l'infini (si  $x_F = \infty$ ), ce qui reviendra à identifier de bons choix pour les suites  $a_n$  et  $b_n$ .

## G.2 Quatre exemples simples

Considérons d'abord le cas où les  $X_i$  sont des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre  $p$ . Dans ce cas la loi de  $M_n$  est elle-même une loi de Bernoulli, de paramètre  $1 - (1 - p)^n$ . Cette loi converge vers une masse de Dirac en 1. On peut vérifier qu'il n'y a pas d'autre normalisation intéressante. Ceci correspond au fait qu'il n'y a pas d'« approche » du maximum : soit on l'a exactement atteint, soit ce n'est pas le cas, la suite  $x_F - M_n$  est nulle à partir d'un certain rang. Ce phénomène se reproduit dès que  $\mathbb{P}[X_1 = x_F] > 0$  (on dit que la loi de  $X_1$  a un atome en  $x_F$ ).

Trois autres situations sont particulièrement simples à étudier :

- $X_1$  de loi uniforme (queue à droite nulle),
- $X_1$  de loi exponentielle (queue à droite à décroissance exponentielle),
- $X_1$  de loi de Cauchy (queue à droite à décroissance polynomiale).

Si  $X_1$  suit la loi uniforme sur  $[0, \theta]$ ,  $x_F = \theta$  est fini. Le résultat suivant montre qu'en en certain sens, l'écart  $(\theta - M_n)$  entre le maximum actuel et le maximum théorique se comporte comme  $\frac{\theta}{n}E$  où  $E$  suit une loi exponentielle.

**Théorème G.2** (Extrêmes de lois uniformes : loi de Weibull). *Si  $X_1$  suit la loi uniforme sur  $[0, \theta]$  avec  $\theta > 0$  alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n(\theta^{-1}M_n - 1)}(x) = e^x \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x) + \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . La limite est la fonction de répartition de  $-E$  où  $E$  suit une loi exponentielle (on dit parfois qu'il s'agit de la loi de Weibull des extrêmes, à ne pas confondre avec les lois de Weibull utilisées pour modéliser les durées de vie).

**Démonstration.** Pour tout  $x \leq 0$  on a  $n^{-1}x + 1 \leq 1$  et

$$\mathbb{P}[M_n \leq \theta(n^{-1}x + 1)] = (n^{-1}x + 1)^n \rightarrow e^x. \quad \square$$

**Remarque G.3** (Estimateur à fluctuations anormales). *Cela donne la vitesse et la loi de fluctuation (non gaussienne) de l'estimateur  $\hat{\theta}_n = \max\{U_1, \dots, U_n\}$  de  $\theta$  où  $U_1, \dots, U_n$  sont i.i.d. de loi uniforme sur  $[0, \theta]$  (il s'agit d'un modèle statistique non régulier). Le théorème (G.2) indique une fluctuation non normale pour l'estimateur  $M_n$  de  $\theta$ .*

Pour les lois exponentielles et de Cauchy,  $x_F = \infty$  et  $M_n$  tend donc presque sûrement vers l'infini ; la question est de savoir à quelle vitesse.

**Théorème G.4** (Extrême de lois exponentielles : loi de Gumbel). *Si  $X_1$  est exponentielle de moyenne  $1/\lambda$  alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\lambda M_n - \ln(n)}(x) = e^{-e^{-x}}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . La limite est la fonction de répartition d'une loi de Gumbel.

La loi de  $M_n$  est donc proche de celle de  $\frac{1}{\lambda}(\ln(n) + G)$  où  $G$  suit une loi de Gumbel.

Application : on peut approcher  $\mathbb{P}[M_n \leq x]$  par  $F(\lambda x - \ln(n))$  où  $F$  est la fonction de répartition de la loi de Gumbel. Par exemple pour  $\lambda = 1/10$ ,  $x = 50$ ,  $n = 100$ , on a

$$\mathbb{P}[M_{100} \geq 50] \approx e^{-e^{-(\lambda x - \ln(n))}} = 0,49023$$

tandis que le calcul exact donne

$$\mathbb{P}[M_{100} \geq 50] = 1 - (1 - e^{-\lambda x})^n = 0,49139.$$

**Démonstration.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $x + \ln(n) \geq 0$  (toujours vrai si  $n$  assez grand)

$$\mathbb{P}[\lambda M_n - \ln(n) \leq x] = (1 - n^{-1} e^{-x})^n \rightarrow e^{-e^{-x}}. \quad \square$$

Pour la loi de Cauchy, les grandes valeurs sont très probables, on s'attend donc à obtenir une vitesse plus rapide que  $\ln(n)$ .

**Théorème G.5** (Extrêmes de lois de Cauchy : loi de Fréchet). *Si  $X_1$  suit la loi de Cauchy alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\pi n^{-1} M_n}(x) = e^{-1/x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . La limite est la fonction de répartition de la loi de Fréchet.

**Démonstration.** Comme  $\arctan(x) = \pi/2 - 1/x + \mathcal{O}_{x \rightarrow \infty}(1/x^2)$ , pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(M_n \leq \frac{nx}{\pi}\right) = \left(\int_{-\infty}^{n x \pi^{-1}} \frac{dy}{\pi(1+y^2)}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{nx} + \mathcal{O}_{x \rightarrow \infty}(n^{-2})\right)^n \rightarrow e^{-1/x}. \quad \square$$

### G.3 Un résultat général

D'après la section précédente, lorsque  $X_1$  suit une loi de Bernoulli, une loi uniforme, une loi exponentielle ou une loi de Cauchy, il existe une suite déterministe  $(a_n, b_n)_{n \geq 1}$  avec  $a_n > 0$  ainsi qu'une loi  $L$  sur  $\mathbb{R}$  de fonction de répartition  $F$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{a_n M_n + b_n}(x) = F(x).$$

Le théorème suivant affirme que ces trois cas particuliers sont exhaustifs.

**Théorème G.6** (Extrêmes de Gnedenko-Fréchet-Fisher-Tippett). *S'il existe une suite  $(a_n, b_n)_{n \geq 1}$  et une loi  $L$  de fonction de répartition  $F$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{a_n M_n + b_n}(x) = F(x)$$

alors, à translation/dilatation près,  $L$  suit :

1. soit une loi de Dirac ;
2. soit une loi de Weibull<sup>2</sup> avec  $F(x) = e^{-(-x)^\alpha} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(x) + \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$  pour un paramètre  $\alpha > 0$  ;
3. soit une loi de Gumbel avec  $F(x) = e^{-e^{-x}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x)$  ;
4. soit une loi de Fréchet avec  $F(x) = e^{-x^{-\alpha}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$  pour un paramètre  $\alpha > 0$ .

---

2. Attention, la terminologie diffère de celle utilisée pour modéliser les durées de vie en fiabilité/survie.

**Remarque G.7.** *Il se peut qu'aucun choix de  $a_n, b_n$  ne permette d'obtenir une convergence vers une variable autre qu'un Dirac : on l'a vu pour la loi de Bernoulli, c'est également le cas si  $X_1$  suit une loi géométrique ou une loi de Poisson.*

La théorie des extrêmes fournit des conditions nécessaires et suffisantes sur  $F_{X_1}$  pour l'appartenance aux bassins d'attraction des trois lois des extrêmes. Ces conditions portent sur la queue à droite. La loi de Weibull apparaît pour les lois dont la queue à droite est nulle (loi uniforme), la loi de Gumbel apparaît pour les lois dont la queue à droite est exponentielle (lois exponentielle et normale), et la loi de Fréchet apparaît pour les lois dont la queue à droite est polynomiale (lois de Cauchy, de Student, de Pareto).

**Théorème G.8** (Lois des extrêmes). *Les trois lois limites non-triviales sont **max-stables** : si  $X_1$  suit une de ces lois, alors pour tout  $n \geq 1$ , il existe  $a_n$  et  $b_n$  tels que  $M_n$  a la même loi que  $a_n X_1 + b_n$ . Plus précisément,*

1. *si  $X$  suit la loi de Weibull de paramètre  $\alpha$  alors  $M_n$  a la même loi que  $n^{-1/\alpha} X_1$  ;*
2. *si  $X$  suit la loi de Gumbel alors  $M_n$  a la même loi que  $X_1 + \ln(n)$  ;*
3. *si  $X$  suit la loi de Fréchet de paramètre  $\alpha$  alors  $M_n$  a la même loi que  $n^{1/\alpha} X_1$ .*

*De plus, pour tout  $\alpha > 0$  et toute variable aléatoire  $X$ , il y a équivalence entre :*

1.  *$-X^{-1}$  suit une loi de Weibull de paramètre  $\alpha$  ;*
2.  *$\ln(X^\alpha)$  suit une loi de Gumbel ;*
3.  *$X$  suit une loi de Fréchet de paramètre  $\alpha$ .*

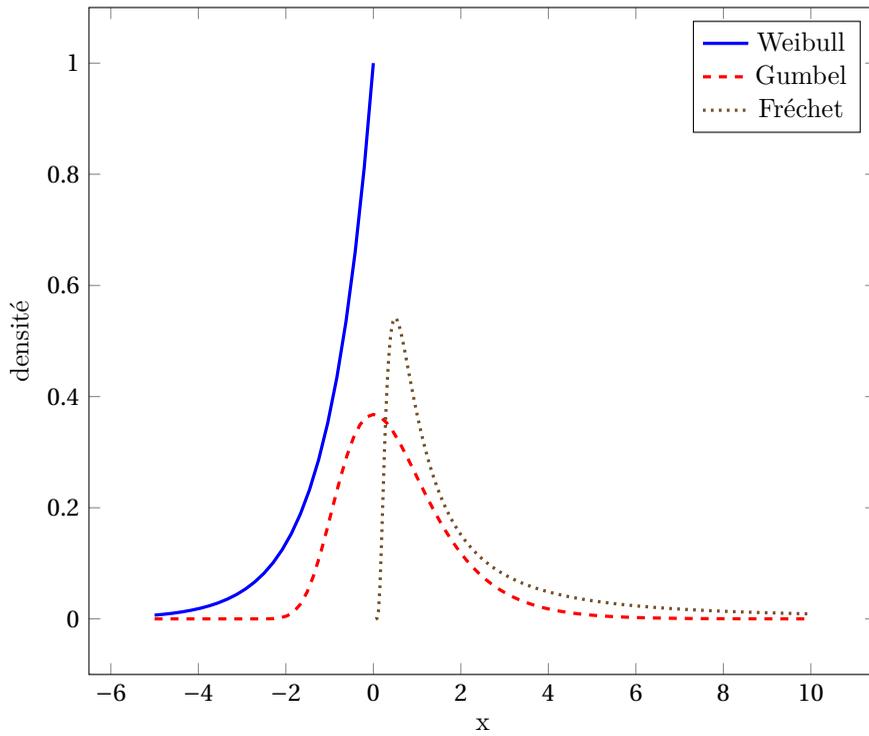


FIGURE G.1 – Densités des trois lois des extrêmes



# Familles sommables et intégrales de Riemann

Le calcul des probabilités fait appel à de nombreux endroits à des calculs de somme et des calculs d'intégrales. Dans le cadre fini, on sait bien que l'on peut manipuler les sommes aisément : en modifiant l'ordre de sommation, en intervertissant plusieurs indices de sommation... Pour généraliser la définition et les modes de calcul aux sommes infinies, on procède en *deux temps*.

1. On considère d'abord *le cas positif* : dans ce cadre, les sommes sont définies dans  $[0, \infty]$  (la valeur  $\infty$  est autorisée), et toutes les manipulations usuelles fonctionnent.
2. Pour une somme de termes *de signe quelconque*, on considère d'abord la somme des valeurs absolues. Si celle-ci a une valeur finie, on peut de nouveau faire les manipulations usuelles.

Ce même mode de définition en deux temps se retrouve pour la définition d'intégrale de Riemann de fonctions continues par morceaux ; nous l'avons également utilisée dans la définition 3.27 d'une variable aléatoire de signe quelconque. C'est, plus généralement, l'approche classique d'intégration en théorie de la mesure, qui regroupe et intègre tous ces résultats dans un même cadre théorique.

## H.1 Familles sommables

Rappelons que si  $a_n$  est une suite à termes positifs, on peut toujours définir  $S = \sum_n a_n = \lim_n (\sum_{k=1}^n a_k) \in [0, \infty]$ , et on peut effectuer la somme dans n'importe quel ordre : pour toute permutation  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$\sum_n a_n = \sum_n a_{\sigma(n)}.$$

De même, si la série  $\sum a_n$  est absolument convergente, c'est-à-dire si  $\sum_n |a_n| < \infty$ , alors elle converge et on peut effectuer la somme dans n'importe quel ordre :

$$\sum_n a_n = \sum_n a_{\sigma(n)}.$$

Si maintenant  $E$  est un ensemble dénombrable quelconque, et  $(a_k)_{k \in E}$  une famille indexée par  $E$ , les propriétés précédentes permettent de donner un sens à l'expression  $\sum_{k \in E} a_k$ . On se donne une énumération quelconque  $(k_0, k_1, \dots, k_n, \dots)$  de  $E$ , et on pose

1.  $\sum_{k \in E} a_k = \sum_n a_{k_n}$ , quand les  $a_k$  sont positifs, cette somme est dans  $[0, \infty]$  ;
2. quand  $\sum_E |a_k| < \infty$ , on pose  $\sum_E a_k = \sum_n a_{k_n}$ . Cette somme est dans  $]-\infty, \infty[$ .

Les propriétés précédentes garantissent que la somme ainsi définie ne dépend pas de l'énumération choisie.

On peut également suivre l'approche en deux temps évoquée plus haut pour définir  $\sum_{k \in E} a_k$  de la façon suivante :

1. Si les  $a_k$  sont positifs, on pose  $\sum_{k \in E} a_k = \sup \{ \sum_{k \in F} a_k ; F \subset E, F \text{ fini} \} \in [0, \infty]$ .
2. Si les  $a_k$  sont quelconques, et si  $\sum_{k \in E} |a_k| < \infty$ , on pose

$$a_k^+ = \max(a_k, 0) \quad \text{et} \quad a_k^- = \max(-a_k, 0).$$

Alors  $a^+$  et  $a^-$  sont positives, de sommes finies, et l'on pose

$$\sum_{k \in E} a_k = \sum_{k \in E} a_k^+ - \sum_{k \in E} a_k^-.$$

La « philosophie » présentée dans l'introduction se traduit par le résultat suivant :

**Théorème H.1** (Fubini-Tonelli discret). *Si  $(a_{kl})_{k \in E, l \in F}$  est une famille de réels positifs, alors*

$$\sum_{k,l} a_{kl} = \sum_k \sum_l a_{kl} = \sum_l \sum_k a_{kl}.$$

*Cette formule est valable pour des  $a_{kl}$  de signe quelconque, si l'on suppose de plus que  $\sum_{k,l} |a_{k,l}| < \infty$ .*

## H.2 Intégration de Riemann

La notion d'intégration au programme est l'intégrale de Riemann. Sur un segment  $[a, b]$ , une condition suffisante de Riemann-intégrabilité est la continuité par morceaux : il existe une subdivision  $(a_0, \dots, a_N)$  de  $[a, b]$  telle que  $f$  est continue sur  $]a_i, a_{i+1}[$  avec des limites à droite en  $a_i$  et à gauche en  $a_{i+1}$ . De même être  $C^k$  par morceaux signifie être  $C^k$  sur chacun des intervalles ouverts, et admettre, de même que ses  $k$  premières dérivées, des limites à gauche et à droite aux points  $a_i$ .

Ces notions s'étendent à un intervalle ouvert, borné ou non, en disant que  $f$  doit être continue par morceaux (respectivement  $C^k$  par morceaux) sur tout segment inclus dans  $I$ , ainsi  $f$  peut avoir un nombre dénombrable de points de discontinuité.

L'intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle  $I$  quelconque se définit alors de manière exactement similaire aux familles sommables, en suivant l'approche en deux temps :

1. Si  $f$  est positive,  $\int_I f$  est par définition la borne supérieure des intégrales sur les segments inclus dans  $I$ .
2. Si  $f$  est de signe quelconque, et si  $\int_I |f| < \infty$ , on décompose  $f$  en différence de fonctions positives  $f = f_+ - f_-$ , et on pose  $\int_I f = \int_I f_+ - \int_I f_-$ .

Rappelons que si  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , son intégrale coïncide avec la limite des intégrales  $\int_{-M}^M f(x) dx$ , quand  $M$  tend vers l'infini.

On dispose là aussi du théorème de Fubini :

**Théorème H.2** (Fubini, cas continu). *Si  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue à valeurs positives, alors*

$$\iint_{I \times J} f(x, y) dx dy = \int_I \left( \int_J f(x, y) dy \right) dx = \int_J \left( \int_I f(x, y) dx \right) dy.$$

*La même formule est valable pour une fonction de signe quelconque, si l'on suppose de plus que  $\iint |f(x, y)| dx dy < \infty$ .*

### H.3 Les deux théorèmes fondamentaux admis

Ces théorèmes sont faciles à établir et plus généraux quand on dispose de la théorie d'intégration de Lebesgue. On fixe un intervalle  $I$ .

**Théorème H.3** (Convergence monotone). *Soit  $f_n$  une suite croissante de fonctions continues par morceaux convergeant simplement vers  $f$  continue par morceaux. Alors  $f$  est intégrable si et seulement si  $\sup_n \int f_n < \infty$ , auquel cas l'intégrale de  $f$  est la limite des intégrales des  $f_n$ .*

**Théorème H.4** (Convergence dominée). *Soit  $f_n$  une suite de fonctions à valeurs complexes (continues par morceaux) convergeant simplement vers  $f$  continue par morceaux. Si  $\sup_n |f_n| \leq g$  avec  $g$  continue par morceaux intégrable, alors  $f$  est intégrable et  $\int f_n$  converge vers  $\int f$ .*

**Preuve partielle.** Pour  $f_n$  à valeurs réelles on pose  $g_n(x) = \inf_{m \geq n} f_m(x)$ . La suite  $g_n$  est bien définie (les  $f_m(x)$  sont minorés par  $-g(x)$ ), et est croissante. Elle converge simplement vers  $f$ . Comme  $g_n$  est majorée par  $g$ , la suite  $(\int g_n)$  est majorée donc par convergence monotone  $\int f = \lim \int g_n \leq \liminf \int f_n$ . On fait de même dans l'autre sens.  $\square$



# Convergences de suites de variables aléatoires

Dans toute cette section,  $(X_n)_{n \geq 1}$ ,  $(Y_n)_{n \geq 1}$ ,  $X$ ,  $Y$  sont des v.a.r. définies sur un même espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , de lois respectives  $\mu_n$ ,  $\nu_n$ ,  $\mu$  et  $\nu$ , et de fonction de répartitions respectives  $F_n$ ,  $G_n$ ,  $F$  et  $G$ .

## I.1 Convergences de variables et de lois

Une suite de variables aléatoires est — formellement — une suite de fonctions, sur un espace muni d'une mesure de probabilité  $\mathbb{P}$ . On peut définir plusieurs notions de convergence pour une telle suite.

**Définition I.1** (Convergences). *On dit que  $X_n$  converge **presque sûrement**, et on note  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} X$ , lorsque*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \right] &:= \mathbb{P} \left[ \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\} \right] \\ &= 1. \end{aligned}$$

*C'est la notion de convergence qui apparaît dans la loi forte des grands nombres.*

*On dit que la convergence a lieu **en probabilité**, et on note  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$ , quand*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [|X_n - X| \geq \varepsilon] = 0.$$

*C'est la notion de convergence qui apparaît dans la loi faible des grands nombres.*

*Enfin, on dit que  $X_n$  converge vers  $X$  **en moyenne** (en moyenne quadratique, en moyenne d'ordre  $p$ ), si pour  $p = 1$  ( $p = 2$ ,  $p$  quelconque dans  $[1, \infty]$ ) on a :*

$$X \in L^p \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [|X_n - X|^p] = 0,$$

*qui signifie que  $X_n \rightarrow X$  dans l'espace de Banach  $L^p$ . Les cas les plus utiles sont  $p = 1$  et  $p = 2$  (et  $p = \infty$  ?!).*

**Stabilités des convergences.** Les trois convergences sont stables par combinaisons linéaires finies. Les deux premières sont stables par composition avec une fonction continue : si  $X_n$  converge (p.s. ou en probabilité) vers  $X$  et  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors  $f(X_n)$  converge (p.s. ou en probabilité) vers  $f(X)$ .

**Extension aux vecteurs aléatoires.** Les trois types de convergence s'étendent naturellement aux vecteurs aléatoires. Pour la convergence en probabilité ou en moyenne, on peut choisir une distance ou une norme.

**Définition I.2** (Convergence en loi). *On dit que  $X_n$  converge en loi vers  $X$ , et on note  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} X$ , ou encore  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mu$  si, pour toute fonction  $f$  continue bornée,*

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)].$$

*C'est la notion de convergence qui apparaît dans le théorème limite central.*

*La convergence en loi est équivalente à la convergence de  $\mathbb{E}[f(X_n)]$  vers  $\mathbb{E}[f(X)]$  :*

1. *pour toute  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et à support compact ;*
2. *pour toute  $f$  de la forme  $f(\cdot) = e^{it}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (c'est la convergence des fonctions caractéristiques) ;*
3. *pour toute  $f$  de la forme  $\mathbf{1}_{]-\infty, x]}$ , où  $x$  est point de continuité de la fonction de répartition  $F_X$  de  $X$ .*

*Dans des cas particuliers on dispose d'autres caractérisations :*

- *(sur  $\mathbb{Z}$ ) on peut choisir les fonctions du type  $f = \mathbf{1}_{\{x\}}$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire vérifier la convergence des fonctions de masse ;*
- *(sur  $\mathbb{R}_+$ ) on peut utiliser la transformée de Laplace en prenant comme fonctions tests les  $f(\cdot) = e^{-t}$ ,  $t \geq 0$  ;*
- *(sur  $\mathbb{N}$ ) on peut utiliser les fonctions génératrices en prenant  $f$  du type  $f(\cdot) = s^\cdot = e^{\ln(s)\cdot}$ , pour  $s \in ]0, 1[$ .*

L'équivalence de toutes ces définitions est admise.

**Remarque I.3** (Des convergences différentes). *Comme son nom l'indique, la convergence en loi ne fait intervenir les variables ( $X_n$ ) et  $X$  qu'à travers leurs lois. En particulier, les  $X_n$  et  $X$  peuvent tous être définis sur des espaces différents et converger en loi. À l'inverse, la convergence en probabilité étudie la différence  $X_n - X$ , ce qui suppose que  $X_n$  et  $X$  soient définis sur le même espace.*

*Notons toutefois que si  $X$  est la variable constante  $c$ , on peut toujours donner un sens à  $X_n - X = X_n - c$ . Nous verrons dans la remarque I.5 que dans ce cas particulier, convergence en loi et en probabilité sont en fait équivalentes.*

**Stabilité.** La convergence en loi est stable par composition avec une fonction continue.

**Extension aux vecteurs.** On utilise un produit scalaire dans la transformée de Fourier (fonction caractéristique) :  $i t X$  devient  $i \langle t, X \rangle$ .

**Sommes de variables indépendantes.** Les transformées de Fourier, de Laplace, et les fonctions génératrices sont particulièrement utiles pour établir la convergence en loi de sommes de variables aléatoires indépendantes : l'exponentielle transforme somme en produit, puis l'indépendance transforme espérance de produit en produit d'espérances.

**Lemme I.4 (Slutsky).** Si  $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$  et  $Y_n \xrightarrow{\text{loi}} Y$  où  $Y$  est une constante, alors  $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\text{loi}} (X, Y)$ . En particulier,  $X_n Y_n \xrightarrow{\text{loi}} XY$  ;  $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{loi}} X + Y$  ;  $X_n / Y_n \xrightarrow{\text{loi}} X / Y$  si  $Y \neq 0$ .

**Démonstration.** On montre la convergence de la fonction caractéristique du couple  $(X_n, Y_n)$  vers celle de  $(X, Y)$ . Comme  $Y$  est constante, pour tous  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  et tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ e^{itX_n + isY_n} \right] - \mathbb{E} \left[ e^{itX + isY} \right] &= \mathbb{E} \left[ e^{itX_n + isY_n} \right] - \mathbb{E} \left[ e^{itX_n + isY} \right] + \mathbb{E} \left[ e^{itX_n + isY} \right] - \mathbb{E} \left[ e^{itX + isY} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ e^{itX_n} \right] (\exp isY_n - \exp isY) + \mathbb{E} [isY] (\exp itX_n - \exp itX). \end{aligned}$$

Le second terme converge vers 0 car  $X_n$  converge en loi vers  $X$ . On peut majorer le premier terme en module par  $\mathbb{E} [|e^{isY_n} - e^{isY}|]$ . On verra plus loin que comme  $Y$  est constante,  $Y_n$  converge en probabilité vers  $Y$  ; on conclut en invoquant l'uniforme continuité de  $x \mapsto e^{isx}$ .  $\square$

Le lemme de Slutsky permet notamment de remplacer une moyenne ou une variance par un estimateur empirique dans un théorème de convergence en loi du même type que le théorème limite central, lié par exemple à un estimateur, ce qui s'avère pratique pour fabriquer une région de confiance ou un test d'hypothèse statistique.

**Pile ou face : Lemme de Slutsky et intervalle de Wald.** Considérons  $X_n$  une suite de variables i.i.d. de Bernoulli de paramètre  $p$ ,  $S_n$  leur somme et  $Z_n$  la variable normalisée  $(S_n - np) / \sqrt{np(1-p)}$ . Par la loi faible des grands nombres,  $S_n/n$  converge en probabilité vers  $p$ , donc  $\sqrt{S_n/n(1-S_n/n)} / \sqrt{p(1-p)}$  converge en probabilité vers 1. Par le théorème limite central,  $Z_n$  converge vers la loi normale standard  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Le lemme de Slutsky assure alors la convergence du couple :

$$\left( Z_n, \frac{\sqrt{S_n/n(1-S_n/n)}}{\sqrt{p(1-p)}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} (Z, 1).$$

Posons

$$Z'_n = (S_n - np) / \sqrt{n(S_n/n)(1-S_n/n)}.$$

Comme  $Z'_n$  est le produit des deux variables du couple :

$$Z'_n = Z_n \times \frac{(S_n/n)(1-S_n/n)}{p(1-p)},$$

$Z'_n$  converge en loi vers la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Soit alors  $q_\alpha$  le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , et notons  $I_W$  l'intervalle

(aléatoire)  $[S_n/n \pm q_\alpha \sqrt{(S_n/n)(1-S_n/n)}/\sqrt{n}]$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[p \in I_W] &= \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq q_\alpha \sqrt{(S_n/n)(1-S_n/n)}/\sqrt{n}\right] \\ &= \mathbb{P}[|Z'_n| \leq q_\alpha] \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \alpha, \end{aligned}$$

et l'intervalle de Wald est bien un intervalle de confiance asymptotique au niveau  $1 - \alpha$ .

## I.2 Relations entre les convergences.

L'inégalité de Hölder permet d'établir que la convergence en moyenne d'ordre  $q \geq 1$  implique la convergence en moyenne d'ordre  $1 \leq p \leq q$  car en notant  $1/r = 1/p - 1/q$  :

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p]^{1/p} \leq \mathbb{E}[|X_n - X|^q]^{1/q} \mathbb{E}[1^r]^{1/r} = \mathbb{E}[|X_n - X|^q]^{1/q}.$$

L'inégalité de Markov permet d'établir que la convergence en moyenne d'ordre  $p \geq 1$  entraîne la convergence en probabilité :

$$\mathbb{P}[|X_n - X| \geq \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p}.$$

On passe de la convergence presque sûre à la convergence en probabilité en traduisant tout d'abord les quantificateurs  $\forall$  et  $\exists$  par  $\cap$  et  $\cup$  comme suit :

$$\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq m} \{|X_n - X| \leq 1/k\}.$$

L'union sur  $m$  étant croissante, on peut utiliser la propriété de continuité du théorème 2.11 pour écrire, pour tout  $k$  fixé,

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right] \\ &\leq \mathbb{P}\left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq m} \{|X_n - X| \leq 1/k\}\right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\bigcap_{n \geq m} \{|X_n - X| \leq 1/k\}\right]. \end{aligned}$$

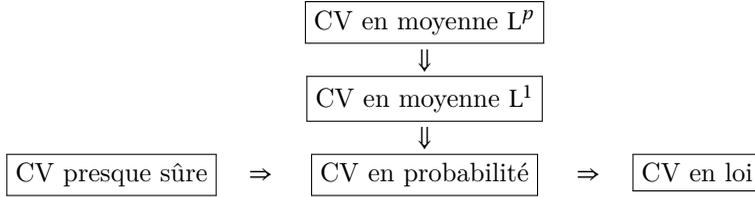
Comme  $\bigcap_{n \geq m} A_n \subset A_m$ , on obtient  $1 \leq \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|X_n - X| \leq 1/k]$ , d'où le résultat.

Si  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$  alors  $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$ . En effet, pour toute fonction  $f$  continue à support compact, la fonction  $f$  est uniformément continue par le théorème de Heine, donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  si  $|x - y| \leq \eta$ . En découpant, on a

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| &\leq \mathbb{E}[|f(X_n) - f(X)|] \\ &= \mathbb{E}[|f(X_n) - f(X)| \mathbf{1}_{|X_n - X| < \eta}] + \mathbb{E}[|f(X_n) - f(X)| \mathbf{1}_{|X_n - X| \geq \eta}] \\ &\leq \varepsilon + 2 \|f\|_{\infty} \mathbb{P}[|X_n - X| \geq \eta]. \end{aligned}$$

Comme  $X_n$  convergence en probabilité, on en déduit  $\limsup_n |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leq \varepsilon$ , ce qui conclut puisque  $\varepsilon$  est arbitraire.

On a finalement montré les relations suivantes entre les convergences.



**Remarque I.5** (Implications inverses). *On peut dans certains cas « remonter les flèches ». En particulier si  $X$  est constante (et égale à  $c$ ) alors la convergence en loi entraîne la convergence en probabilité : si  $f_{c,\varepsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est continue bornée avec  $f(c) = 1$  et  $\mathbf{1}_{|c-\varepsilon, c+\varepsilon[} \geq f_{c,\varepsilon}$  alors*

$$\mathbb{P}[|X_n - X| < \varepsilon] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{|c-\varepsilon, c+\varepsilon[}(X_n)] \geq \mathbb{E}[f_{c,\varepsilon}(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f_{c,\varepsilon}(c)] = 1.$$

*Remonter vers la convergence en moyenne revient souvent à intervertir des limites ; c'est l'objet de résultats fondamentaux de théorie de la mesure et de l'intégration que nous évoquons plus bas.*

**Contrexemples.**

1. *Suite convergeant en probabilité mais pas presque sûrement.* On peut considérer une suite « tournante » sur  $[0, 1]$ . Posons  $X_{m+k} = \mathbf{1}_{[k, k+1/m[}(U)$  pour  $0 \leq k < m$  et  $m \geq 1$ , où  $U$  est uniforme sur  $[0, 1]$ . On a alors  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$  mais  $(X_n)_{n \geq 1}$  ne converge pas p.s. car « tous les  $\omega$  voient passer des 0 et des 1 une infinité de fois ».
2. *Suite convergeant en loi mais pas en probabilité.* Soit  $X_n$  uniforme sur  $[0, 1]$  pour tout  $n \geq 1$ , et  $X$  uniforme sur  $[0, 1]$  et indépendante de  $(X_n)_{n \geq 1}$ . On a  $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$  car  $\mathcal{L}(X_n) = \mathcal{L}(X)$  pour tout  $n \geq 1$ . Mais si  $\varepsilon > 0$  alors  $\mathbb{P}[|X_n - X| \geq \varepsilon]$  est non nul et ne dépend pas de  $n$ , et donc  $(X_n)_{n \geq 1}$  ne converge pas en probabilité vers  $X$ .
3. *Suite convergeant en probabilité mais pas en moyenne.* On pose  $X_n = n\mathbf{1}_{[0, 1/n[}(U)$  où  $U$  est une v.a.r. uniforme sur  $[0, 1]$ . On a  $\mathbb{P}[|X_n - 0| \geq \varepsilon] = \mathbb{P}[U \leq 1/n] = 1/n \rightarrow 0$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , donc  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ . Cependant,  $\mathbb{E}[|X_n - 0|] = n \int_0^1 \mathbf{1}_{[0, 1/n[}(u) du = 1 \neq 0$  et donc  $(X_n)_{n \geq 1}$  ne converge pas en moyenne vers 0.

**I.3 Passer à la limite dans une espérance**

**Théorème I.6** (Convergence monotone). *Si  $(X_n)_{n \geq 1}$  est positive et croissante alors  $X_n$  converge presque sûrement dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ , et*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right].$$

*En particulier,  $\mathbb{E}[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n] < \infty$  ssi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) < \infty$ .*

On utilise souvent le cas particulier avec le fait suivant : si  $X \geq 0$  d'espérance finie, alors  $\mathbb{P}[X < \infty] = 1$ . On en déduit ainsi une preuve très sympathique de la première partie du lemme de Borel–Cantelli :

$$\sum_n \mathbb{P}[A_n] = \sum_n \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_n}] = \mathbb{E}\left[\sum_n \mathbf{1}_{A_n}\right] \quad \text{et} \quad \left\{\sum_n \mathbf{1}_{A_n} = \infty\right\} = \overline{\lim}_n A_n.$$

La même méthode permet de rétablir très rapidement une loi forte des grands nombres pour des variables aléatoires indépendantes et bornées dans  $L^4$  (pas forcément de même loi), comme celle vue dans la section 5.1, page 81. En effet, si  $S_n := (X_1 + \dots + X_n)$  et  $\sup_n \mathbb{E}[X_n^4] < \infty$  alors  $\mathbb{E}[S_n^4] = \mathcal{O}(n^2)$  (c'est le même développement de la puissance 4 que dans la preuve vue précédemment), d'où  $\mathbb{E}[\sum_n (S_n/n)^4] = \sum_n \mathbb{E}[S_n^4] < \infty$ . Par conséquent  $\sum_n (S_n/n)^4$  est presque sûrement finie, donc avec probabilité 1,  $|S_n(\omega)/n| \rightarrow 0$  comme (racine quatrième du) terme général d'une série convergente!

**Lemme I.7** (Lemme de Fatou). *Si  $(X_n)_{n \geq 1}$  est positive alors*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n).$$

Ce lemme est utile pour les suites qui sont ni monotones ni bornées. Pour se souvenir de du sens de l'inégalité, on peut retenir<sup>1</sup> que tout se passe comme si  $\liminf_n$  était concave.

**Théorème I.8** (Convergence dominée). *Si  $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$  et  $\sup_n |X_n| \leq Y$  pour une v.a.  $Y$  telle que  $\mathbb{E}[Y] < \infty$ , alors on peut « passer à la limite dans l'espérance » :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right] = \mathbb{E}[X].$$

**Remarque I.9** (Modes de convergence). *Si  $\sup_n |X_n|$  est intégrable alors la convergence presque sûre entraîne la convergence en moyenne :  $X$  est intégrable par le théorème de convergence dominée, et on peut réappliquer le théorème à  $X_n - X$ , dominée par  $Y + |X|$ , pour montrer la convergence en moyenne.*

*Ce théorème permet également de déduire la convergence en loi de la convergence presque sûre sans passer par la convergence en probabilité.*

Enfin, on peut « remonter » de la convergence en probabilité à la convergence en moyenne sous une hypothèse plus faible que celle du théorème de convergence dominée ; c'est l'objet de la définition suivante.

**Définition I.10** (Intégrabilité uniforme). *Pour toute famille de variables aléatoires  $(X_i)_{i \in I}$  finie ou infinie, dénombrable ou non, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{i \in I} \mathbb{E}(|X_i| \mathbf{1}_{\{|X_i| \geq R\}}) = 0$  ;
2. (**Critère epsilon-delta**)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A) \leq \delta \Rightarrow \sup_{i \in I} \mathbb{E}(|X_i| \mathbf{1}_A) \leq \varepsilon$  ;
3. (**Critère de La Vallée Poussin**<sup>2</sup>) *il existe une fonction  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  positive croissante et convexe telle que*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{i \in I} \mathbb{E}(\varphi(|X_i|)) < \infty.$$

*Une famille qui vérifie ces propriétés est dite **uniformément intégrable** (UI).*

Une famille UI ne peut être constituée que de v.a.r. intégrables. Une famille finie de v.a.r. est UI ssi les v.a.r. qui la constituent sont toutes intégrables. En vertu du troisième critère, une famille bornée dans  $L^p$  avec  $p > 1$  est toujours UI, car il suffit de prendre  $\varphi(x) = |x|^p$ . Enfin, une famille dominée dans  $L^1$  (au sens où  $\sup_{i \in I} |X_i| \leq Y$  avec  $\mathbb{E}[Y] < \infty$ ) est toujours UI.

---

1. Pour se rappeler du sens de l'inégalité de Jensen, penser à la valeur absolue ou au carré!  
 2. Charles-Jean Étienne Gustave Nicolas de La Vallée Poussin. Ceci n'est pas un canular.

Grâce au troisième critère, domination dans  $L^1$  entraîne bornitude dans «  $L^+$  » ! En particulier, si une v.a.r.  $X$  est intégrable alors  $\varphi(X)$  est intégrable pour une fonction  $\varphi$  sur-linéaire qui dépend toutefois de  $X$ . Pour comprendre ce phénomène, on peut penser aux séries de Riemann : si  $\sum_n (1/n^\alpha) < \infty$  alors  $\sum_n (1/n^{\alpha-\varepsilon}) < \infty$  pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, car la condition de convergence des séries de Riemann est « ouverte » plutôt que « fermée ».

L'uniforme intégrabilité est la condition la plus faible pour remonter de la convergence en probabilité à une convergence en moyenne, comme le montre le théorème suivant.

**Théorème I.11** (Uniforme intégrabilité et interversion limite/espérance). *Soit  $(X_n)$  une suite de variables intégrables, qui converge en probabilité vers une variable  $X$  intégrable. Alors  $X_n$  converge dans  $L^1$  vers  $X$  si et seulement si les  $X_n$  sont uniformément intégrables.*

**Démonstration.** En considérant  $Y_n = X_n - X$  on se ramène au cas où  $X$  est nulle. On note  $G(R) = \sup_n \mathbb{E} [|X_n| \mathbf{1}_{|X_n| \geq R}]$  : l'uniforme intégrabilité signifie que  $G(R)$  tend vers 0 en l'infini.

Si  $X_n$  converge dans  $L^1$  vers 0,  $\mathbb{E} [|X_n|]$  tend vers 0. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $I_\varepsilon$  fini tel que  $\mathbb{E} [|X_n|] \leq \varepsilon$  si  $n \notin I_\varepsilon$ , donc

$$G(R) \leq \max_{n \in I_\varepsilon} \mathbb{E} [|X_n| \mathbf{1}_{X_n > R}] + \varepsilon.$$

On prend la limite supérieure en  $R$  : à droite le max porte sur un ensemble fini et chaque terme tend vers 0 par le théorème de convergence dominée. Par conséquent

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} G(R) \leq \varepsilon,$$

pour tout  $\varepsilon$  positif, et finalement  $G(R)$  tend vers 0.

Réciproquement supposons que les  $X_n$  sont UI et montrons que  $\mathbb{E} [|X_n|]$  tend vers 0. L'idée est de faire un double découpage : les petites valeurs contribuent peu à l'espérance, les valeurs moyennes sont contrôlées par la convergence en probabilité, et les grandes valeurs par l'uniforme intégrabilité. Plus précisément pour tout couple  $(\varepsilon, R)$  on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|X_n|] &= \mathbb{E} [|X_n| \mathbf{1}_{[0, \varepsilon]}(|X_n|)] + \mathbb{E} [|X_n| \mathbf{1}_{[\varepsilon, R]}(|X_n|)] + \mathbb{E} [|X_n| \mathbf{1}_{[R, \infty]}(|X_n|)] \\ &\leq \varepsilon + R \mathbb{P} [|X_n| \geq \varepsilon] + G(R). \end{aligned}$$

On prend la limite supérieure en  $n$  — le deuxième terme disparaît puisque  $X_n$  converge en probabilité :

$$\limsup_n \mathbb{E} [|X_n|] \leq \varepsilon + G(R).$$

On fait tendre  $\varepsilon$  vers 0 et  $R$  vers l'infini pour conclure. □

Une famille est UI ssi elle est faiblement relativement compacte dans  $L^1$ .



# Fonctions caractéristiques et vecteurs gaussiens

## J.1 Fonction caractéristique

La loi des variables et vecteur aléatoires ainsi que leur indépendance peuvent être étudiées au moyen de transformées, chacune correspondant à une classe de fonctions test particulière (ces classes sont liées par changement de variable). Pour les variables et vecteurs discrets, c'est la fonction génératrice qu'on a coutume d'utiliser pour sa simplicité. Pour les variables aléatoires positives, c'est plutôt la transformée de Laplace qui est utilisée. Plus généralement, pour des vecteurs aléatoires quelconques, on utilise la fonction caractéristique, ou transformée de Fourier. La fonction caractéristique des vecteurs aléatoires gaussiens possède des propriétés remarquables. Soulignons que ces transformées sont avant tout liées aux lois, plutôt qu'aux variables ou vecteurs qui suivent ces lois.

**Définition J.1** (Fonction caractéristique ou transformée de Fourier). *La fonction caractéristique d'une v.a.r. est la fonction  $\Phi_X : \mathbb{R} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par  $\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ . Plus généralement, la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire  $X$  de  $\mathbb{R}^d$  est la fonction  $\Phi_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  définie pour tout  $t \in \mathbb{R}^d$  par*

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{i\langle t, X \rangle}\right].$$

La fonction caractéristique est liée à la fonction génératrice :  $g_X(e^{it}) = \Phi_X(t)$ . Si  $X$  est une v.a.r. telle que  $X^k$  est intégrable pour tout  $0 \leq k \leq n$  alors  $\Phi_X$  est  $n$  fois dérivable en  $0$  et  $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$  pour tout  $1 \leq k \leq n$ . La transformée de Laplace définie par

$$t \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{E}\left[e^{t \cdot X}\right] \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

n'a pas l'avantage d'être partout finie comme  $\Phi_X$ . Le calcul effectif de  $\Phi_X$  peut être mené grâce à la formule du transfert, en utilisant au besoin  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ .

**Théorème J.2** (Caractérisation de la loi – Admis). *Deux vecteurs aléatoires de  $\mathbb{R}^d$  ont même loi si et seulement si ils ont même fonction caractéristique.*

Si  $X$  est un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^d$  et si  $t \in \mathbb{R}$  et  $s \in \mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}$  alors  $t\langle s, X \rangle = \langle ts, X \rangle$  est une v.a.r. et  $\langle s, X \rangle s$  est la projection de  $X$  sur la droite  $\mathbb{R}s$ .

**Corollaire J.3** (Cramér-Wold – Caractérisation par projections). *La loi d'un vecteur aléatoire  $X$  de  $\mathbb{R}^d$  est caractérisée par les l'ensemble des lois de  $\langle s, X \rangle$  pour tout  $s \in \mathbb{S}^{d-1}$ .*

**Corollaire J.4** (Caractérisation de l'indépendance). *Deux vecteurs aléatoires  $X$  et  $Y$  de  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{R}^{d'}$  sont indépendants si et seulement si pour tous  $s \in \mathbb{R}^d$  et  $t \in \mathbb{R}^{d'}$*

$$\Phi_{(X,Y)}(s, t) = \Phi_X(s)\Phi_Y(t).$$

En particulier, si  $X$  et  $Y$  sont indépendants et  $d = d'$  alors pour tout  $t \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

Soit  $X$  une v.a.r. telle que  $X^n$  est intégrable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que la loi de  $X$  est caractérisée par ses moments lorsque pour toute v.a.r.  $Y$ , si on a  $\mathbb{E}[Y^n] = \mathbb{E}[X^n]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  alors la v.a.r.  $Y$  a la même loi que  $X$ . Le résultat suivant entraîne que la loi normale standard  $\mathcal{N}(0, 1)$  et la loi exponentielle sont caractérisées par leurs moments.

**Théorème J.5** (Théorème des moments de Stieltjes). *Soit  $X$  une v.a.r. avec  $X^n$  intégrable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $m_n = \mathbb{E}[X^n]$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\Phi_X$  est analytique sur un voisinage de 0 ;
2.  $\Phi_X$  est analytique sur  $\mathbb{R}$  ;
3.  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n!} |m_n|\right)^{\frac{1}{n}} < \infty$ .

Si ces conditions sont vérifiées alors la loi de  $X$  est caractérisée par ses moments. En particulier, une loi à support compact est caractérisée par ses moments.

La formule de Stirling donne  $(1/n!)^{1/n} = \mathcal{O}_{n \rightarrow \infty}(1/n)$ . Par conséquent, la condition  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |m_n|^{1/n} < \infty$  entraîne que la loi de  $X$  est caractérisée par ses moments.

**Démonstration.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$  et donc  $\Phi_X$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $\Phi_X^{(n)}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\Phi_X^{(n)}(t) = \mathbb{E} \left[ (iX)^n e^{itX} \right].$$

En particulier,  $\Phi_X^{(n)}(0) = i^n m_n$ , et la série de Taylor de  $\Phi_X$  en 0 est déterminée par la suite  $(m_n)_{n \geq 1}$ . Comme le rayon de convergence  $r$  d'une série entière  $\sum_n a_n z^n$  est donné par la formule de Hadamard  $r^{-1} = \overline{\lim}_n |a_n|^{\frac{1}{n}}$ , on obtient l'équivalence de 1 et 3 (prendre  $a_n = i^n m_n/n!$ ). D'autre part, comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tous  $s, t \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| e^{isx} \left( e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1!} - \dots - \frac{(itx)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right| \leq \frac{|tx|^n}{n!},$$

on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  pair et tous  $s, t \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \Phi_X(s+t) - \Phi_X(s) - \frac{t}{1!} \Phi_X'(s) - \dots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \Phi_X^{(n-1)}(s) \right| \leq m_n \frac{|t|^n}{n!},$$

qui montre que 3  $\Rightarrow$  2. Comme 2  $\Rightarrow$  1, on a bien équivalence de 1-2-3. Si  $X$  est bornée, alors  $\sup_n |m_n|^{\frac{1}{n}} < \infty$  et donc 3 a lieu en utilisant la formule de Stirling. Si 3 a lieu alors les arguments précédents donnent un  $r > 0$  tel que  $\Phi_X$  est développable en série entière en tout  $x \in \mathbb{R}$  avec un rayon de convergence  $\geq r$ . De proche en proche, on obtient que  $\Phi_X$  est caractérisée par ses dérivées en zéro.  $\square$

## J.2 Application aux vecteurs gaussiens

**Théorème J.6** (Vecteurs et lois gaussiennes). *Si  $X$  est un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^d$  de moyenne  $m$  et de matrice de covariance  $\Sigma$  alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Toute combinaison linéaire des composantes de  $X$  suit une loi normale sur  $\mathbb{R}$  ;*
2. *La fonction caractéristique de  $X$  est donnée pour tout  $t \in \mathbb{R}^d$  par*

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle t, X \rangle}\right) = \exp\left(i\langle t, m \rangle - \frac{1}{2}\langle t, \Sigma t \rangle\right);$$

3.  *$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(m + AZ)$ , où  $A$  est une matrice de dimension  $d \times d$  vérifiant  $AA^\top = \Sigma$  et  $Z$  est un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^d$  à composantes indépendantes et de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .*

On dit alors que  $X$  est un **vecteur gaussien**. Sa loi est caractérisée par son vecteur moyenne  $m$  et sa matrice de covariance  $\Sigma$ . Elle est notée  $\mathcal{N}(m, \Sigma)$ . On dit que c'est une **loi gaussienne** sur  $\mathbb{R}^d$ . La loi  $\mathcal{N}(0, I_d)$  de  $Z$  est appelée **loi gaussienne standard**.

**Démonstration.** Une combinaison linéaire des composantes de  $X$  s'écrit  $\langle u, X \rangle = u^\top X$  où  $u$  est un vecteur colonne déterministe de  $\mathbb{R}^d$ . L'équivalence 1)  $\Leftrightarrow$  2) découle donc de l'expression de la fonction caractéristique des lois gaussiennes sur  $\mathbb{R}$ , et du fait que la fonction caractéristique caractérise la loi. Cette dernière propriété montre également que la loi de  $X$  est caractérisée par  $m$  et  $\Sigma$ . L'équivalence 1)  $\Leftrightarrow$  3) provient du théorème 4.24 sur la racine carrée matricielle, associé au théorème 4.20 sur la transformation linéaire.  $\square$

**Exemple J.7** (Nécessaire mais pas suffisant). *Les composantes d'un vecteur gaussien sont gaussiennes, mais la réciproque est fautive. En effet, soit  $X = (Y, \varepsilon Y)$  un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^2$  où  $Y$  et  $\varepsilon$  sont indépendantes avec  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\varepsilon$  de loi de Rademacher symétrique :  $\mathbb{P}[\varepsilon = \pm 1] = 1/2$ . Les composantes  $Y$  et  $\varepsilon Y$  de  $X$  sont gaussiennes mais la combinaison linéaire  $Y + \varepsilon Y$  ne l'est pas car  $\mathbb{P}[Y + \varepsilon Y = 0] = \mathbb{P}[\varepsilon = -1] = 1/2$ . De plus,  $\text{Cov}(Y, \varepsilon Y) = \mathbb{E}[Y^2]\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$  mais  $Y$  et  $\varepsilon Y$  ne sont pas indépendantes.*

**Théorème J.8** (Existence de densité). *La loi gaussienne  $\mathcal{N}(m, \Sigma)$  sur  $\mathbb{R}^d$  admet une densité de probabilité si et seulement si  $\Sigma$  est inversible donnée dans ce cas par*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle (x - m), \Sigma^{-1}(x - m) \rangle\right).$$

**Démonstration.** Soit  $A$  une racine carrée matricielle de  $\Sigma$  de même rang  $p \leq d$  que  $\Sigma$ . Soit  $Z$  un vecteur gaussien standard  $Z$  de loi  $\mathcal{N}(0, I_d)$ , de sorte que  $m + AZ \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$ . La loi  $\mathcal{N}(m, \Sigma)$  est portée par le sous-espace affine  $E = \{Az + m \text{ avec } z \in \mathbb{R}^d\}$  de dimension  $p$ . Si  $p < d$ , alors  $E \neq \mathbb{R}^d$  et  $\mathcal{N}(m, \Sigma)$  n'a pas de densité. De plus,  $E = \mathbb{R}^d$  si et seulement si  $p = d$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\Sigma$  est inversible. On peut choisir les composantes de  $Z$  indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  sur  $\mathbb{R}$ . La loi de  $Z$  admet alors la densité de probabilité  $f_Z$  donnée, pour tout  $z \in \mathbb{R}^d$ , par

$$f_Z(z) = \prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z_k^2\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|z\|_2^2\right).$$

Si  $X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$ , alors pour toute indicatrice de pavé  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[h(AZ + m)] = \int_{\mathbb{R}^d} h(Az + m) f_Z(z) dz.$$

Si  $\Sigma$  est inversible, le changement de variable affine  $x = Az + m$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^d$  dans lui-même, de jacobien non nul égal à  $\det(A^{-1})$ . La décomposition  $\Sigma = AA^\top$  entraîne que  $|\det(A)| = \sqrt{\det(\Sigma)}$  et  $\Sigma^{-1} = (AA^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top A^{-1}$ . On en déduit que

$$\mathbb{E}[h(X)] = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det \Sigma}} \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^\top \Sigma^{-1}(x-m)\right) dx$$

d'où la formule annoncée pour la densité  $f$ . □

**Théorème J.9** (Indépendance des composantes). *Pour tout vecteur gaussien  $X$  de  $\mathbb{R}^d$ , les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. les composantes  $X_1, \dots, X_d$  sont mutuellement indépendantes ;
2. les composantes  $X_1, \dots, X_d$  sont deux à deux indépendantes ;
3. la matrice de covariance  $\Sigma$  de  $X$  est diagonale.

*En particulier, un vecteur aléatoire gaussien est gaussien standard si et seulement si ses composantes sont indépendantes et de même loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0,1)$  sur  $\mathbb{R}$ .*

**Démonstration.** Les implications 1)  $\Rightarrow$  2) et 2)  $\Rightarrow$  3) découlent des définitions. Vérifions que 3)  $\Rightarrow$  1). Si on a  $\Sigma = \text{Diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2)$ , alors pour tout  $t \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\Phi_X(t) = \exp\left(i\langle t, m \rangle - \frac{1}{2}\langle t, \Sigma t \rangle\right) = \prod_{k=1}^d \exp\left(it_k m_k - \frac{1}{2}\sigma_k^2 t_k^2\right) = \prod_{k=1}^d \Phi_{X_k}(t_k). \quad \square$$

Les lois gaussiennes sont stables par transformation affine. En effet, si  $X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$  et  $A \in \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$  et  $b \in \mathbb{R}^p$  alors  $AX + b \sim \mathcal{N}(Am + b, A\Sigma A^\top)$ . En particulier,  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_d)$  est invariante par rotation et symétries car si  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_d)$  et si  $A$  est  $d \times d$  orthogonale alors  $AX$  a la même loi que  $X$ . Le théorème de Cochran raffine l'étude de  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_d)$ .

**Théorème J.10** (Cochran). *Soit  $X$  un vecteur colonne aléatoire de  $\mathbb{R}^n$  de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$  et  $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$  une décomposition de  $\mathbb{R}^n$  en somme directe de  $p$  sous-espaces vectoriels orthogonaux de dimensions  $d_1, \dots, d_p$  avec  $d_1 + \dots + d_p = n$ . Soit  $\mathbf{P}_k$  la matrice du projecteur orthogonal sur  $E_k$  et  $Y_k = \mathbf{P}_k X$  la projection orthogonale de  $X$  sur  $E_k$ .*

1. Les projections  $(Y_1, \dots, Y_p)$  sont des vecteurs gaussiens indépendants et

$$Y_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{P}_k m, \sigma^2 \mathbf{P}_k).$$

2. Les variables aléatoires  $\|Y_1 - \mathbf{P}_1 m\|_2^2, \dots, \|Y_p - \mathbf{P}_p m\|_2^2$  sont indépendantes et

$$\sigma^{-2} \|Y_k - \mathbf{P}_k m\|_2^2 \sim \chi^2(d_k).$$

**Démonstration.** On se ramène d'abord au cas où  $m = 0$  par translation. Le vecteur aléatoire  $Y = (Y_1, \dots, Y_p)^\top$  de  $\mathbb{R}^{np}$  s'écrit  $Y = AX$  où  $A$  est la matrice de dimension  $np \times n$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_p \end{pmatrix}.$$

Il en découle que  $Y$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 AA^\top)$ . Pour tout  $1 \leq i \leq p$ , on a  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^\top = \mathbf{P}_i^2$ . De plus,  $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = 0$  si  $1 \leq i \neq j \leq p$  car  $E_i \perp E_j$ . Par conséquent,  $AA^\top = \text{Diag}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_p)$  est

diagonale par blocs. On peut déduire du théorème J.9 que  $Y_1, \dots, Y_p$  sont des vecteurs gaussiens indépendants avec  $Y_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{P}_k)$  pour tout  $1 \leq k \leq p$ . En particulier, les variables aléatoires  $\|Y_1\|_2^2, \dots, \|Y_p\|_2^2$  sont indépendantes. Il reste à déterminer leur loi. Pour tout  $1 \leq k \leq p$ , soit  $B_k = \{e_{k,1}, \dots, e_{k,d_k}\}$  une base orthonormée de  $E_k$ . La réunion  $B_1 \cup \dots \cup B_p$  constitue une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ . Le vecteur  $X$  s'écrit dans cette base  $X = Y_1 + \dots + Y_p$  avec  $Y_k = a_{k,1}e_{k,1} + \dots + a_{k,d_k}e_{k,d_k}$  où  $a_{k,i} = \langle X, e_{k,i} \rangle$ . L'invariance par transformation orthogonale de la loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$  implique que les variables aléatoires  $a_{k,i}$  sont indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Il en découle que pour tout  $1 \leq k \leq p$ ,

$$\sigma^{-2} \|Y_k\|^2 = \sigma^{-2} (a_{k,1}^2 + \dots + a_{k,d_k}^2) \sim \chi^2(d_k). \quad \square$$

### J.3 Applications en statistiques

Commençons par montrer une version multivariée du théorème limite central, en admettant le résultat suivant.

**Théorème J.11** (Paul Lévy – Admis). *Si  $(X_n)_{n \geq 1}$  et  $X$  sont des vecteurs aléatoires de  $\mathbb{R}^d$  et si  $X$  admet une densité continue alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$  pour toute fonction continue et bornée  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$  pour toute indicatrice  $f$  de pavé ou de boule ;
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{X_n}(t) = \Phi_X(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^d$ .

**Corollaire J.12** (Théorème limite central multivarié). *Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de vecteurs aléatoires de  $\mathbb{R}^d$  indépendants et de même loi, dont les composantes sont de carré intégrable. Alors, en notant  $m$  et  $\Sigma$  le vecteur moyenne et la matrice de covariance de  $X_1$ , on a, avec  $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ , pour tout pavé ou boule  $B$  de  $\mathbb{R}^d$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \sqrt{n} \left( \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m \right) \in B \right) = \mathbb{P}[X \in B].$$

**Démonstration.** Le théorème de Paul Lévy ramène le problème à la convergence ponctuelle des fonctions caractéristiques vers celle de la loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ . Quitte à remplacer les  $X_k$  par  $X_k - m$ , on peut supposer que  $m = 0$ . Comme  $X_1, \dots, X_n$  sont des vecteurs aléatoires indépendants et de même loi, on a pour tout  $t \in \mathbb{R}^d$

$$\Phi_{\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}}(t) = \mathbb{E} \left( \exp \left( i \langle \frac{t}{\sqrt{n}}, X_1 \rangle + \dots + i \langle \frac{t}{\sqrt{n}}, X_n \rangle \right) \right) = \left( \Phi_{X_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^n$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}^n$ , la v.a.r.  $\langle t, X_1 \rangle$  a pour moyenne 0 et pour variance  $\langle t, \Sigma t \rangle$ . Une formule de Taylor à l'ordre 2 en 0 pour  $\Phi_{\langle t, X_1 \rangle}$  donne  $\Phi_{X_1}(t) = 1 + \frac{1}{2} \langle t, \Sigma t \rangle + o_{t \rightarrow 0}(\|t\|_2^2)$  d'où

$$\Phi_{\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left( 1 + \frac{1}{2n} \langle t, \Sigma t \rangle + \|t\|_2^2 o_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right) \right)^n \rightarrow \exp \left( \frac{1}{2} \langle t, \Sigma t \rangle \right) = \Phi_{\mathcal{N}(0, \Sigma)}(t).$$

□

Le théorème de Cochran permet une étude fine des échantillons gaussiens ce qui justifie de nombreuses applications statistiques.

**Corollaire J.13** (Échantillons gaussiens). Soient  $X_1, \dots, X_n$  des v.a.r. de loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  avec  $\sigma^2 > 0$ , de moyenne empirique et variance empirique définies par

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2.$$

Alors les variables aléatoires  $\bar{X}_n$  et  $S_n^2$  sont indépendantes avec

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{(n-1)}{\sigma^2} S_n^2 \sim \chi^2(n-1).$$

De plus, la moyenne empirique studentisée  $T_n$  vérifie

$$T_n = \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n - m}{S_n} \right) \sim t(n-1).$$

**Démonstration.** Soit  $\mathbf{1}_n$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les coordonnées sont égales à 1. La matrice de la projection orthogonale sur  $E_1 = \mathbb{R}\mathbf{1}_n$  est donnée par

$$\mathbf{P}_1 = \frac{\mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top}{\|\mathbf{1}_n\|^2} = \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top.$$

Le sous-espace  $E_2 = E_1^\perp$  est de dimension  $n-1$  et la matrice de la projection orthogonale sur  $E_2$  est  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I}_n - \mathbf{P}_1$ . On a  $Y_1 = \mathbf{P}_1 X = \bar{X}_n \mathbf{1}_n$  et  $Y_2 = \mathbf{P}_2 X = (X_1 - \bar{X}_n, \dots, X_n - \bar{X}_n)^\top$ , ce qui entraîne  $\|Y_2\|^2 = (n-1)S_n^2$ . Le théorème de Cochran permet de conclure.  $\square$

Le théorème de Cochran permet également de justifier le célèbre test d'adéquation du  $\chi^2$ . Bien qu'il ne s'agisse pas d'une véritable distance, on appelle **distance du chi-deux**  $\chi^2$  entre deux lois de probabilité  $p$  et  $q$  sur un ensemble fini  $\{1, \dots, k\}$  le nombre réel positif

$$D(p, q) = \sum_{i=1}^k \frac{(p_i - q_i)^2}{p_i}.$$

Cette quantité asymétrique en  $p$  et  $q$  vaut  $+\infty$  si l'un des  $p_i$  est nul.

**Théorème J.14** (Test d'adéquation du  $\chi^2$ ). Soit  $p = (p_1, \dots, p_k)$  une loi sur  $\{1, \dots, k\}$  et  $X_1, \dots, X_n$  des v.a.r. sur  $\{1, \dots, k\}$  indépendantes et de loi  $q = (q_1, \dots, q_k)$ . On définit les effectifs théoriques  $n_1, \dots, n_k$ , empiriques  $N_1, \dots, N_k$ , et la loi  $\hat{p} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_k)$  par

$$n_i = np_i \quad \text{et} \quad N_i = \mathbf{1}_{\{X_1=i\}} + \dots + \mathbf{1}_{\{X_n=i\}} \quad \text{et} \quad \hat{p}_i = \frac{N_i}{n}$$

Supposons que  $p_1 > 0, \dots, p_k > 0$ . Considérons la distance du chi-deux normalisée

$$D_n = nD(p, \hat{p}) = n \sum_{i=1}^k \frac{(p_i - \hat{p}_i)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - N_i)^2}{n_i}.$$

Si  $p = q$  alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{D_n}(t) = F_{\chi^2(k-1)}(t)$$

Si  $p \neq q$  alors avec probabilité 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = +\infty.$$

**Démonstration.** Supposons que  $p \neq q$ . La loi forte des grands nombres (théorème 5.5) entraîne qu'avec probabilité 1, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} N_i/n \rightarrow q_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n} = \sum_{i=1}^k \frac{(p_i - q_i)^2}{p_i} = D(p, q)$$

et comme  $D(p, q) > 0$  car  $p \neq q$ , on obtient bien  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = +\infty$ . Supposons à présent au contraire que  $p = q$ . Pour  $1 \leq j \leq n$ , soit  $V_j$  le vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^k$  donné par

$$(V_j)_i = \frac{1}{\sqrt{p_i}} (\mathbf{1}_{\{X_j=i\}} - p_i).$$

Les vecteurs  $V_1, \dots, V_n$  sont indépendantes et de même loi, et cette loi est centrée et de matrice de covariance  $\Sigma = I_k - \sqrt{p} \sqrt{p}^\top$  avec  $\sqrt{p}^\top = (\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_k})$ . Le théorème limite central multivarié (théorème J.12) entraîne alors que pour tout pavé ou boule  $B$  de  $\mathbb{R}^k$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} (V_1 + \dots + V_n) \in B \right) = \mathbb{P} [Z \in B]$$

où  $Z \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ . Soit  $\text{Vect}(\sqrt{p})$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^k$  engendré par  $\sqrt{p}$  et soit  $H = \sqrt{p} \sqrt{p}^\top$  la matrice de projection orthogonale sur  $\text{Vect}(\sqrt{p})$ . La matrice de projection orthogonale sur  $\text{Vect}(\sqrt{p})^\perp$  est  $I_k - H = \Sigma$ . Cette matrice est de rang  $k-1$  car  $H$  est de rang 1, et le théorème J.10 de Cochran donne  $\|Z\|_2^2 \sim \chi^2(k-1)$ . Il ne reste plus qu'à observer que

$$D_n = \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} (V_1 + \dots + V_n) \right\|_2^2.$$

□

Dans la pratique, on connaît  $p$  mais pas  $q$ , et on souhaite décider au vu de  $X_1, \dots, X_n$  si  $p = q$  ou non. Cette décision est prise au moyen d'un test d'adéquation asymptotique. Plus précisément, on fixe un niveau de confiance  $\alpha \in (0, 1)$  comme par exemple  $\alpha = 0,05$ , puis on détermine le quantile  $a_\alpha$  d'ordre  $1 - \alpha$  de la loi du chi-deux  $\chi^2(k-1)$ , ce qui donne la région d'acceptation du test  $\mathcal{A}_\alpha = [0, a_\alpha]$ . La règle de décision est la suivante :

si  $D_n \in \mathcal{A}_\alpha$  alors on accepte l'hypothèse  $p = q$  et sinon on la rejette.

La probabilité de rejeter à tort tend vers  $\alpha$  quand  $n \rightarrow \infty$  (erreur de première espèce). La probabilité d'accepter à tort tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$  (erreur de seconde espèce). À  $X_1, \dots, X_n$  fixés, plus  $\alpha$  est petit, moins on rejette à tort mais plus on accepte à tort.



## Combinatoire, loi de Poisson et partitions

En combinatoire, le  $n^e$  nombre de Bell  $B_n$  compte le nombre de partitions d'un ensemble à  $n$  éléments. On a  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = 1$ ,  $B_2 = 2$ , et  $(B_n)_{n \geq 0}$  vérifie la récurrence

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

qui se démontre de la manière suivante : pour choisir une partition de  $\{1, \dots, n+1\}$  on choisit le nombre  $k$  d'éléments qui n'appartiennent pas au même bloc que 1, puis ces  $k$  éléments parmi  $n$ , puis on partitionne ces  $k$  éléments avec les  $B_k$  possibilités. La formule de récurrence se réécrit de la manière suivante :

$$\frac{B_{n+1}}{n!} = \sum_{k_1+k_2=n} \frac{1}{k_1!} \frac{B_{k_2}}{k_2!}$$

ce qui donne l'identité des séries entières suivante<sup>1</sup> :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n = \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!} z^{k_1} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{B_{k_2}}{k_2!} z^{k_2} = e^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n,$$

qui s'écrit  $G'(z) = e^z G(z)$  où  $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ , ce qui donne

$$G(z) = e^{e^z - 1}.$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre 1, prise au point  $e^z$ . Il en découle que  $B_n$  est le moment d'ordre  $n$  de la loi de Poisson de paramètre 1 :

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

---

1. Pour justifier la convergence, on peut établir la majoration  $B_n \leq n^n$  en remarquant que toute fonction de  $\{1, \dots, n\}$  dans lui-même induit une partition de l'ensemble de départ :  $\{1, \dots, n\} = \cup_i f^{-1}(\{i\})$ ; on en déduit une minoration du rayon de convergence par  $1/e > 0$ .

(formule de Dobinski). Notons par ailleurs que si  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  désigne le nombre de partitions à  $k$  blocs d'un ensemble à  $n$  éléments (nombre de Stirling de seconde espèce) alors

$$B_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}.$$

On dispose de la formule de récurrence

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} \quad \text{avec conditions au bord} \quad \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1 \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1$$

car pour choisir une partition de  $\{1, \dots, n+1\}$  ayant  $k$  blocs il faut et il suffit soit de choisir une partition de  $\{1, \dots, n\}$  ayant  $k-1$  blocs et de la compléter avec le bloc singleton  $\{n+1\}$ , soit d'ajouter l'élément  $n+1$  à l'un des  $k$  blocs d'une partition de  $\{1, \dots, n\}$  ayant  $k$  blocs. Si  $X$  est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  alors

$$\mathbb{E}[X^n] = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \lambda^k \quad \text{en particulier} \quad \mathbb{E}[X^n] = B_n \quad \text{si} \quad \lambda = 1.$$

On dispose également de la formule explicite suivante :

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

qui peut s'obtenir grâce au principe d'inclusion-exclusion en remarquant que le nombre de Stirling de seconde espèce est égal au nombre de surjections de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\{1, \dots, k\}$ .

Intéressons-nous à la simulation de la loi uniforme sur l'ensemble  $\Pi_n$  des partitions de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ , de cardinal  $B_n$ . Cette loi affecte le même poids  $1/B_n$  à chaque élément de  $\Pi_n$ .

**Théorème K.1** (Algorithme de Stam). *Soit  $K$  un entier aléatoire valant  $k$  avec probabilité  $k^n/(k!eB_n)$  pour tout  $k \geq 0$ . Sachant  $K$ , soient  $C_1, \dots, C_n$  des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur  $\{1, \dots, K\}$ . Soit  $P$  la partition aléatoire de  $\{1, \dots, n\}$  obtenue en décidant que  $i, j$  sont dans le même bloc si et seulement si  $C_i = C_j$ . Alors  $P$  suit la loi uniforme sur  $\Pi_n$ .*

La loi de  $K$  est bien définie grâce à la formule de Dobinski. Il est commode d'interpréter  $C_1, \dots, C_n$  comme des couleurs, les blocs de  $P$  regroupant donc les éléments par couleur.

**Démonstration.** On observe que pour tout  $p \in \Pi_n$ , en notant  $b$  son nombre de blocs,

$$\mathbb{P}(P = p) = \sum_{k=b}^{\infty} \mathbb{P}(P = p | K = k) \mathbb{P}(K = k) = \sum_{k=b}^{\infty} \frac{k(k-1) \cdots (k-b+1)}{k^n} \frac{k^n}{k!eB_n} = \frac{1}{B_n}. \quad \square$$

---

## Bibliographie

- [1] Philippe Barbe and Michel Ledoux. *Probabilité*. EDP Sciences, 2007.
- [2] Bernard Bercu and Djalil Chafaï. *Modélisation stochastique et simulation*. Dunod/SMAI, 2007.
- [3] Djalil Chafaï and Florent Malrieu. *Recueil de modèles aléatoires*, volume 78 of *Mathématiques & Applications*. Springer, 2016.
- [4] Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel, and Thierry Meyre. *Exercices de probabilités*. Cassini, 2011.
- [5] Didier Dacunha-Castelle and Marie Duflo. *Probabilités et statistique. Problèmes à temps fixe*. Masson, 1994.
- [6] Jean-François Delmas and Benjamin Jourdain. *Modèles aléatoires*. Mathématiques et Applications 57. Springer, 2007.
- [7] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. Wiley, 1968.
- [8] Dominique Foata, Jacques Franchi, and Aimé Fuchs. *Calcul des probabilités – Cours, exercices et problèmes corrigés*. Dunod, 2012.
- [9] Paul-S. Toulouse. *Thèmes de probabilité et statistique*. Dunod, 1999.

# Table des figures

2.1	Codage d'un multienemble par une coloration. . . . .	16
2.2	Le problème des anniversaires . . . . .	19
2.3	Rendez-vous d'Athanase et Bérénice . . . . .	31
3.1	Deux fonctions de répartition . . . . .	36
3.2	Fléchettes : loi de l'abscisse . . . . .	40
3.3	Diagrammes en bâtons et densités . . . . .	40
3.4	Variance des lois normales . . . . .	52
3.5	Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson. . . . .	57
4.1	Corrélation et dépendance (source : Wikipédia). . . . .	70
5.1	Quantile et fluctuation de la loi normale standard . . . . .	84
5.2	Diagramme en bâtons de la binomiale . . . . .	86
C.1	La méthode de Monte-Carlo pour le jeu de fléchettes . . . . .	104
E.1	Ruine du joueur . . . . .	114
E.2	Compter les ponts . . . . .	117
F.1	Le processus de Yule . . . . .	124
G.1	Densités des trois lois des extrêmes . . . . .	133

---

# Liste des tableaux

1.1	Vocabulaire ensembliste et probabilités. . . . .	10
3.1	Lois discrètes classiques . . . . .	59
3.2	Lois continues classiques . . . . .	60

---

## Index

- arrangement, 16
- borélienne, 34
- centré, 69
- combinaison, 16
- converge en loi, 83
- convergence en loi, 56, 87, 97, 116, 121, 129, 140, 141, 143, 144
- convergence presque sûre, 80, 82, 109, 129, 142–144
- corrélation, 69
- couple, 67
- covariance, 67
- crible de Poincaré, 14
- critère de La Vallée Poussin, 144
- critère epsilon-delta, 144
  
- densité, 39, 54
- discrète, 33
- distance du chi-deux, 152
- distance en variation totale, 74
- durée de vie moyenne restante, 127
- déciles, 36
- décomposition de Cholesky, 71
- décomposition LU, 71
- définie positive, 70
  
- en moyenne, 139
- en probabilité, 78, 139
- entropie, 50
- entropie de Boltzmann–Shannon, 48, 50
- espace probabilisé, 13
- espérance, 43, 44
  
- fonction caractéristique, 54, 66, 73, 87, 140, 141, 147, 149, 151
- fonction de hasard, 126
- fonction de masse, 37, 54
- fonction de répartition, 35–37, 41, 42, 49, 54, 65, 89, 90, 110, 121, 126, 127, 130, 131, 139, 140
- fonction de survie, 126
- fonction de survie conditionnelle, 127
- fonction génératrice, 54–56, 58, 73, 74, 115, 118, 147, 155
- fonctions caractéristiques, 73
- formule de Dobinski, 156
- formule du transfert, 46
  
- i.i.d. , 64
- incompatibles, 10
- indépendants, 25, 26
- intervalle de confiance (asymptotique), 85
- intervalle de fluctuation, 53, 84, 109, 110
- intervalle de Wald, 142
- intégrabilité uniforme, 144
- intégrable, 44
- inverse généralisé, 41
- inégalité de Bienaymé–Tchebychev, 53, 78, 79
- inégalité de Cauchy–Schwarz, 51, 54, 67, 69
- inégalité de concentration, 80
- inégalité de couplage, 87
- inégalité de couplage de Lindeberg, 87
- inégalité de déviation, 53, 54, 110
- inégalité de Hölder, 142

- inégalité de Jensen, 47, 48, 50, 81, 144  
inégalité de Le Cam, 75  
inégalité de Markov, 52, 53, 80, 81, 109, 142  
inégalité de Paley–Zygmund, 54
- lemme de Borel–Cantelli, 27–29, 80–82, 109, 143  
lemme de Fatou, 144  
lemme de Slutsky, 87, 141  
loi, 37  
loi normale, *voir* loi gaussienne  
loi Beta, 41  
loi binomiale, 17, 33, 38, 57, 58, 64, 73, 75, 100, 158  
loi binomiale–négative, 99  
loi de Bernoulli, 22, 37, 42, 51, 68, 73, 75  
loi de Cauchy, 41, 42, 49, 60, 65, 66, 131  
loi de Dirac, 131  
loi de Fréchet, 131, 132  
loi de Gumbel, 110, 130–132  
loi de Pareto, 49  
loi de Pascal, 99  
loi de Poisson, 38, 57, 64, 75, 155, 158  
loi de probabilité, 13  
loi de Rademacher, 149  
loi de Student, 49, 60  
loi de Weibull, 130–132  
loi des grands nombres, 5, 28, 41, 50, 53, 77, 78, 81–85, 129  
loi discrète finie, 42  
loi du chi-deux, 41, 153  
loi du demi-cercle, 40, 49, 50, 63  
loi du zéro–un de Borel, 27  
loi du zéro–un de Kolmogorov, 29  
loi exponentielle, 41, 42, 49, 50, 60  
loi faible des grands nombres, 78, 79, 87, 141  
loi forte des grands nombres, 80–82, 100, 153  
loi Gamma, 41, 60  
loi gaussienne, 41, 49, 50, 52, 65, 72, 89, 90, 149–152  
loi gaussienne standard, 36, 49, 72, 84, 141, 148, 149, 158  
loi géométrique, 38, 48, 55  
loi hypergéométrique, 18, 38, 62  
loi hypergéométrique multitype, 18, 62
- loi jointe, 61  
loi multinomiale, 62  
loi produit, 31  
loi uniforme, 20, 31, 39, 41, 42, 48–50, 67  
loi à densité, 39  
loi à queue lourde, 41, 60
- marche aléatoire simple, 113  
matrice de covariance, 69  
max-stables, 132  
maximum d’entropie, 48, 50  
mesure de probabilité, 13  
moment, 45  
moment factoriel, 55  
médiane, 36  
méthode de rejet, 103  
méthode de simulation par inversion, 42
- pile ou face  
  espérance de la loi binomiale, 43  
  espérance de la loi géométrique, 47  
  Calcul des moments, 68  
  fluctuations, 84  
  intervalle de confiance, 85  
  indépendance, 27  
  quelques lois discrètes classiques, 37  
  retour sur les moments, 73  
  nombre de piles, 17  
  singes dactylographes, 28  
  point de vue statistique fréquentiste, 77  
  suites d’événements et limites, 21  
  tribus, 11  
  univers, 9  
  variable aléatoire « nombre de piles », 33  
  variance, 51  
  Lemme de Slutsky et intervalle de Wald, 141
- polynômes de Bernstein, 79  
presque sûrement, 22, 28, 51, 78, 80, 82, 96, 101, 129, 130, 139, 143, 144  
probabilité conditionnelle, 23  
probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$ , 23  
probabilité produit, 20  
produit de Schur–Hadamard, 72  
quantile d’ordre  $\alpha$ , 36

---

quartiles, 36

racine carrée, 71

réduit, 69

semi-définie positive, 70

test du chi-deux, 152

théorème de convergence dominée, 50,  
111, 137, 144, 145

théorème de Fibini-Tonelli discret, 136

théorème de Heine, 142

théorème de Paul Lévy, 151

théorème de Weierstrass, 79

théorème limite central, 5, 36, 41, 60,  
83–85, 87–89, 91, 100, 116, 129,  
141

théorème limite central multivarié, 153

transformée de Fourier, 54, 55, 140, 147

transformée de Laplace, 54, 55, 73, 140,  
147

tribu, 11

tribu borélienne, 12, 34

tribu cylindrique, 12

tribu engendrée, 11

tribu grossière, 11

tribu terminale, 29

uniformément intégrable, 144

univers, 9

variable aléatoire, 33

variable aléatoire réelle, 33

variance, 51

vecteur aléatoire, 61

vecteur gaussien, 149

vecteur gaussien standard, 149

vecteur moyenne, 69

écart-type, 51

épreuves, 9

équiprobabilité, 15

événements, 13

événements élémentaires, 9