



**HAL**  
open science

# Représentation unitaire dans les algèbres de Clifford

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

| Jean Louis Jonot. Représentation unitaire dans les algèbres de Clifford. 2016. hal-01371415v1

**HAL Id: hal-01371415**

**<https://hal.science/hal-01371415v1>**

Preprint submitted on 25 Sep 2016 (v1), last revised 6 Dec 2016 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Représentation unitaire dans les algèbres de Clifford

Jonot Jean Louis

ABSTRACT. Dans cet article, on donne une représentation unitaire de l'équation relativiste de Dirac et l'équation relativiste d'Einstein à partir d'une section de Dirac sur les champs réels. En complexifiant les sections d'endomorphismes de Dirac et en faisant l'hypothèse que ces endomorphismes sont dans l'algèbre de Clifford  $Cl_{1,3}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ , on en déduit des conditions suffisantes pour que l'opérateur de Dirac de rang 2 soit un opérateur de Ricci ce qui permet d'écrire l'équation relativiste d'Einstein en termes d'opérateurs

$$H_2 = \left( \frac{1}{2}R - \Lambda \right) G + \kappa T.$$

L'équation relativiste de Dirac est décrite par le complexifié, non standard, de l'opérateur de Dirac réel de rang 1 sous la forme

$$\overline{H}_1(Z) = \eta Z.$$

## 1. Introduction au principe d'unification

On se fixe une section de Dirac réelle sur le fibré tangent  $\xi_{\mathbf{W}}$ , c'est-à-dire, un morphisme de fibré de  $\xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \xi_{\mathbf{W}}$  dans  $\xi_{\mathbf{W}}$ . A chaque événement  $w$  de l'univers  $\mathbf{W}$ , on définit un morphisme bilinéaire

$$\gamma(w) : T_w^*(\mathbf{W}) \otimes T_w(\mathbf{W}) \rightarrow T_w(\mathbf{W}).$$

Soit  $(W, \phi)$  une carte de trivialisatation, on note  $\{\partial_\nu\}$  le local frame défini sur  $W$  et  $\{d^\mu\}$  le local frame dual. Les sections d'endomorphismes de Dirac  $\gamma^\mu$  s'écrivent

$$\gamma^\mu(w) : T_w(\mathbf{W}) \rightarrow T_w(\mathbf{W}), \gamma^\mu(w)(u) = \gamma(w)(d^\mu(w) \otimes u), \forall u \in T_w(\mathbf{W})$$

et si  $X$  est un champ local sur  $W$ , on a

$$\gamma^\mu(X) = \gamma(d^\mu \otimes X).$$

On définit le tenseur  $\gamma^{\mu\nu} = \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$ , ce tenseur est un tenseur symétrique. Si ce tenseur est un tenseur métrique, on définit la métrique sur  $W$  par

$$g(\partial_\mu, \partial_\nu) = g_{\mu\nu}, \text{ où } g^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \gamma^{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

par la suite on fait l'hypothèse que la métrique  $g$  est Lorentzienne de signature  $(-, +, +, +)$ . Soit  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita associée à la métrique  $g$ ,  $Q$  est la

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* 81T10,81T45,83C45,83C05,83C45,55R10.

*Key words and phrases.* Algèbre de Clifford, connexion de Levi-Civita, fibré de Clifford, matrice de Dirac, opérateur de Dirac de rang 1 et 2.

section des formes quadratiques associées. L'opérateur de Dirac de rang 2 s'écrit

$$H_2 = \gamma_2 \otimes R^\nabla,$$

qui est une section d'opérateurs sur chaque fibre, on peut consulter [4]. Cet opérateur a pour matrice dans le local frame

$$h_\rho^\tau = \frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu]_j^\tau R_{\mu\nu\rho}^j,$$

où  $R_{\mu\nu\rho}^j$  est le tenseur de courbure, on lui associe le tenseur

$$h_{\tau\rho} = \frac{1}{2} [\gamma^\nu, \gamma^\mu]_{\tau j} R_{\mu\nu\rho}^j$$

par abaissement de l'indice  $\tau$ . Si  $h_{\tau\rho}$  s'identifie au tenseur de Ricci  $R_{\tau\rho}$ , on dit que  $H_2$  est un opérateur de Ricci. Sous cette hypothèse, l'équation relativiste d'Einstein s'écrit

$$h_{\tau\rho} = \lambda g_{\tau\rho} + \kappa T_{\tau\rho}$$

où  $T_{\tau\rho}$  est le tenseur énergie-impulsion,  $\lambda = \frac{1}{2}R - \Lambda$ ,  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ ,  $R$  est la courbure scalaire et  $\Lambda$  est la constante cosmologique. Sous l'hypothèse

$$[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{H}^{\nu\mu}, \quad (\mathcal{H}^{\nu\mu})_j^\sigma = g^{\sigma\mu} \delta_j^\nu - g^{\sigma\nu} \delta_j^\mu,$$

l'opérateur  $H_2$  est un opérateur de Ricci. Si le tenseur de Ricci est inversible alors le tenseur  $h_{\tau\rho}$  s'identifie au tenseur d'Einstein  $R_{\sigma\rho} + \lambda g_{\sigma\rho}$  lorsque

$$[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda)$$

où

$$(\mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda))_j^\sigma = (g^{\sigma\mu} + \lambda \varepsilon^{\sigma\mu}) \delta_j^\nu - (g^{\sigma\nu} + \lambda \varepsilon^{\sigma\nu}) \delta_j^\mu,$$

l'équation d'Einstein s'écrit

$$h_{\tau\rho} = \kappa T_{\tau\rho}, \quad \lambda = -\frac{1}{2}R + \Lambda \text{ avec } \varepsilon^{\sigma\nu} R_{\nu\tau} = \delta_\tau^\sigma.$$

Comment décrire l'équation relativiste de Dirac à partir d'une section de Dirac réelle métrisable? L'idée est de complexifier la section de Dirac et la connexion  $\nabla$ . On complexifie  $\nabla$  en posant

$$\bar{\nabla} = \nabla \oplus i\nabla,$$

la dérivée covariante s'écrit

$$\nabla_{X+iY}(S+iT) = \nabla_X S - \nabla_Y T + i(\nabla_Y S + \nabla_X T),$$

pour complexifier la section de Dirac réelle, on prend une base locale de champs  $Q$ -orthogonale réduite sur  $W$ , notée  $\{e_\nu\}$ ,

$$g(e_\nu, e_\mu) = \pm \delta_{\nu\mu} \text{ avec } \delta_{00} = -1, \delta_{\mu\mu} = 1, \mu = 1, 2, 3$$

et  $\{e^\mu\}$  sa base duale telle que

$$e^\mu \otimes e_\nu = \delta_\nu^\mu, \quad (e^\mu \otimes e_\nu)(w) = e^\mu(w)(e_\nu(w)) = 1 \text{ et } w \in W. \quad (1.2)$$

Si  $e_\rho = p_\rho^\nu \partial_\nu$ , on pose  $P = (p_\rho^\nu)$  et  ${}^\mu\gamma = \gamma^{e^\nu}$ , la section des endomorphismes de Dirac associée à  $e^\nu$  vérifie

$$\text{Trace}({}^\mu\gamma^\nu\gamma) = \pm \delta_{\nu\mu},$$

en effet si  $e^\mu = q_\tau^\mu d^\tau$  alors la condition 1.2 implique

$$q_\nu^\mu p_\rho^\nu = \delta_\rho^\mu$$

donc  $Q = (q_\nu^\mu) = P^{-1}$  et

$${}^\mu\gamma = q_\tau^\mu \gamma^\tau$$

on en déduit le calcul de la Trace  $({}^\mu\gamma^\nu\gamma)$ ,

$${}^{\mu\nu}\gamma = \text{Trace}({}^\mu\gamma^\nu\gamma) = q_\tau^\mu q_\sigma^\nu \text{Trace}(\gamma^\tau\gamma^\sigma) = q_\tau^\mu q_\sigma^\nu \gamma^{\tau\sigma},$$

sous forme matricielle

$$({}^{\mu\nu}\gamma) = Q (\gamma^{\tau\sigma})^{\text{Tr}} Q \text{ et } \frac{1}{4} ({}^{\mu\nu}\gamma)^{-1} = {}^{\text{Tr}} P (g_{\mu\nu}) P = (\pm\delta_{\nu\mu}),$$

les calculs sont faits sur des matrices à coefficients réels. Pour complexifier  $\gamma$ , on pose

$${}^\mu\bar{\gamma} = i ({}^\mu\gamma) \text{ si } \text{Trace}({}^\mu\gamma^2) = -1 \text{ et } {}^\mu\bar{\gamma} = {}^\mu\gamma \text{ si } \text{Trace}({}^\mu\gamma^2) = +1,$$

les  ${}^\mu\bar{\gamma}$  sont des sections d'opérateurs de  $\text{End}(\xi_{\mathbf{W}} \otimes \mathbb{C})$  en posant

$$\begin{aligned} {}^0\bar{\gamma}(Z) &= -({}^0\gamma)(Y) + i({}^0\gamma)(X) \text{ et} \\ {}^\mu\bar{\gamma}(Z) &= ({}^\mu\gamma)(X) + i({}^\mu\gamma)(Y) \text{ si } Z = X + iY \text{ et } \mu = 1, 2 \text{ et } 3 \end{aligned}$$

la section de Dirac complexifiée est définie par

$$\bar{\gamma}(d \otimes Z) = d_\nu ({}^\nu\bar{\gamma}(Z)), \quad d = d_\nu e^\nu$$

on peut définir l'opérateur de Dirac de rang 1 par

$$\bar{H}_1 = \bar{\gamma} \otimes \bar{\nabla},$$

c'est une section d'opérateurs définie sur les champs complexes sur  $W$ , l'équation relativiste de Dirac s'écrit

$$\bar{H}_1(Z) = \eta Z$$

où  $\eta$  est une fonction propre locale de l'opérateur  $\bar{H}_1$  définie sur  $W$ . Pour donner une représentation unifiée locale des équations relativistes d'Einstein et de Dirac, on se fixe une section de Dirac réelle  $\gamma$  métrisable, d'endomorphismes de Dirac  $\gamma^\nu$  associées au local frame de la carte. Sous l'hypothèse

$$\mathcal{M}^{\nu\mu} = \mathcal{H}^{\nu\mu} \tag{1.3}$$

où  $\mathcal{M}^{\nu\mu}$  est la matrice de  $[\gamma^\nu, \gamma^\mu]$  dans le local frame, l'opérateur de Dirac  $H_2$  est un opérateur de Ricci et si

$$\mathcal{M}^{\nu\mu} = \mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda), \tag{1.4}$$

$H_2$  est un opérateur d'Einstein. Pour construire l'opérateur complexifié  $H_1$ , noté  $\bar{H}_1$ , on détermine quatre endomorphismes  ${}^\nu\bar{\gamma}$  dans l'algèbre de Clifford

$${}^\nu\bar{\gamma}^\mu\bar{\gamma} = \delta_{\nu\mu} \mathbf{I}_4, \tag{1.5}$$

et on reconstruit les sections d'endomorphismes de Dirac en posant

$$\gamma^\mu = p_\tau^\mu ({}^\tau\gamma),$$

on choisit  ${}^\tau\gamma$  pour que les équations 1.3 ou 1.4 soient vérifiées.

*REMARK 1. On a complexifié les sections d'endomorphismes de Dirac de cette façon, pour que les matrices des sections d'endomorphismes complexifiés soient sur chaque fibre, dans l'algèbre de Clifford engendrée par les matrices de Dirac.*

## 2. Les relations métriques associées aux endomorphismes de Dirac

La construction de la métrique peut varier suivant le choix de la section de Dirac. On se fixe une section de Dirac  $\gamma$  sur un fibré vectoriel réel ou complexe  $\zeta$  de base  $\mathbf{W}$ . Avec les notations précédentes, on pose

$$g^{\mu\nu} = \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu).$$

On peut définir d'autres tenseurs, par exemple, si  $\zeta$  est fibré réel

$$h^{\mu\nu} = \text{Trace}(\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu),$$

dans le cas d'un fibré complexe

$$k^{\mu\nu} = \text{Trace}(\overline{\gamma^\mu} \gamma^\nu) \text{ et } l^{\mu\nu} = \text{Trace}(\text{Tr} \overline{\gamma^\mu} \gamma^\nu)$$

si le tenseur  $k^{\mu\nu}$  ou  $l^{\mu\nu}$  est un tenseur hermitien,  $\gamma$  est une section de Dirac hermitienne complexe. Dans le cas réel, si  $g^{\mu\nu}$  ou le tenseur  $h^{\mu\nu}$  sont métriques, on dit que la section de Dirac est hermitienne réelle. On dira simplement que  $\gamma$  est hermitienne. On peut donc définir localement sur la carte  $W$ , une métrique qui est une métrique pseudo-riemannienne dans le cas des fibrés réels et une métrique hermitienne dans le cas des fibrés complexes. La métrique pseudo-riemannienne, notée  $g$ , induit sur chaque fibre  $T_w \mathbf{W}$ , un "produit scalaire"  $g(w)$  pour tout  $w \in W$ . Dans le cas complexe, la métrique hermitienne, notée  $h$ , induit sur chaque  $T_w \mathbf{W} \otimes \mathbb{C}$ , un "produit scalaire hermitien"  $h(w)$  pour tout  $w \in W$ . Si le fibré  $\zeta$  est le fibré tangent

$$\xi_{\mathbf{W}} = (T\mathbf{W}, \pi, \mathbf{W}, \mathbb{R}^4) \text{ ou } \xi_{\mathbf{W}} \otimes \mathbb{C}$$

son complexifié, toute section de Dirac hermitienne  $\gamma$  sur  $\xi_{\mathbf{W}}$  ou  $\xi_{\mathbf{W}} \otimes \mathbb{C}$  permet de définir les opérateurs de Dirac de rang un et deux, notés respectivement,

$$H_1 = \gamma \otimes \nabla \text{ et } H_2 = \gamma_2 \otimes R^\nabla$$

où  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique induite par  $\gamma$ . Le calcul de ces opérateurs est développé dans [3], [4], [5].

**DEFINITION 1.** *La complexification du tenseur énergie-impulsion est  $\mathbf{h}_{\mu\nu}$  avec  $\mathbf{h}_{\mu\nu} = g_{\mu\tau} \mathbf{h}_\nu^\tau$ ,  $(\mathbf{h}_\nu^\tau)$  est la matrice de l'endomorphisme  $H_2$  dans le local frame.*

On peut décrire l'équation relativiste d'Einstein dans le cas complexe sous la forme

$$R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = \mathbf{h}_{\mu\nu},$$

$R_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci et

$$\lambda = \frac{1}{2}R - \Lambda, \text{ } R \text{ est la courbure et } \Lambda \text{ est la constante cosmologique,}$$

l'équation relativiste de Dirac s'écrit

$$H_1 Z = \eta Z$$

où  $Z$  est un champ complexe local et  $\eta$  est une fonction de densité de masse propre de l'opérateur  $H_1$ . On discrétise ainsi, les densités de masse des champs complexes.

**CLAIM 1.** *Que peut-on dire sur la densité de masse des champs en corde définis dans [6] ?*

### 3. Le fibré de Clifford d'un fibré avec groupe de structure

On se fixe un fibré vectoriel réel ou complexe de dimension  $n$

$$\zeta = (E, \pi, \mathbf{W}, \mathcal{V}),$$

de fibre l'espace vectoriel  $\mathcal{V}$  muni d'une forme quadratique  $Q$  de forme polaire  $g$ . On note  $Q(w)$  la forme quadratique induite sur chaque fibre et  $g(w)$  sa forme polaire telle que pour toutes sections locales  $s$  et  $t$  de  $\zeta$ , l'application

$$w \rightarrow g(w)(s(w), t(w)) = \langle s(w), t(w) \rangle_w \text{ est } C^\infty. \quad (3.1)$$

Si  $W_1$  et  $W_2$  sont deux cartes de trivialisations en  $w \in W_1 \cap W_2$  et

$$\phi_j : E_{W_j}(\zeta) \rightarrow W_j \times \mathcal{V}$$

les isomorphismes de trivialisations, alors

$$\begin{aligned} g_2(w)(u, v) &= g(\phi_2(w)(u), \phi_2(w)(v)) \\ &= g(\phi_2(w) \circ \phi_1^{-1}(w)(\phi_1(w)(u)), \phi_2(w) \circ \phi_1^{-1}(w)(\phi_1(w)(v))) \\ &= g(\phi_1(w)(u), \phi_1(w)(v)) = g_1(w)(u, v), \end{aligned}$$

si  $\phi_2(w) \circ \phi_1^{-1}(w) : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  est une isométrie, c'est-à-dire, si on suppose que le fibré  $\zeta$  est un fibré avec groupe de structure

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{O}(\mathcal{V}, Q).$$

Sous cette hypothèse la pseudo-métrie induite sur chaque fibre  $E_w(\zeta)$  est indépendante du choix de l'isomorphisme de trivialisations choisi. A partir d'un fibré  $\zeta$  de base  $\mathbf{W}$ , de fibre  $\mathcal{V}$  muni d'une forme quadratique  $Q$  et de groupe de structure  $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}(\mathcal{V}, Q)$ , on construit un fibré  $\varsigma$  où l'espace total est

$$E(\varsigma) = \sqcup_{w \in \mathbf{W}} \text{Cl}(E_w(\zeta), Q(w))$$

si les fibres  $\text{Cl}(E_w(\zeta), Q(w))$  et  $\text{Cl}(\mathcal{V}, Q)$  sont les algèbres de Clifford des espaces  $(E_w(\zeta), Q(w))$  et  $(\mathcal{V}, Q)$  [7] [8], de projection  $\pi$  où  $\pi|_{\text{Cl}(E_w(\zeta), Q(w))}(u) = w$ .

**THEOREM 1.** *Si  $\zeta$  est fibré avec groupe de structure  $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}(\mathcal{V}, Q)$  alors*

$$\varsigma = (E(\varsigma), \pi, \mathbf{W}, \text{Cl}(\mathcal{V}, Q))$$

*est un fibré.*

**NOTATION 1.**  $\varsigma$  est le fibré de Clifford de  $\zeta$ , on le note  $\varsigma = \text{Cl}(\zeta, Q)$ .

**PROOF.** Prenons une carte  $W$  de trivialisations du fibré  $\zeta$  et  $\phi$  l'isomorphisme de trivialisations de la forme

$$\phi : W \times \mathcal{V} \rightarrow E_W(\zeta) = \sqcup_{w \in W} E_w(\zeta)$$

si les applications de transition du fibré  $\zeta$  sont dans  $\mathcal{G}$  alors pour chaque  $w \in W$ , la forme quadratique  $Q(w)$  induite de  $Q$  par

$$\phi(w) : \{w\} \times \mathcal{V} \rightarrow E_w(\zeta)$$

est indépendante du choix de  $\phi$ . On définit l'inclusion naturelle

$$in : E_W(\zeta) \rightarrow \sqcup_{w \in W} \text{Cl}(E_w(\zeta), Q(w)),$$

et soit  $in(w)$  la restriction de  $in$  à  $E_w(\zeta)$  à valeurs dans  $\text{Cl}(E_w(\zeta), Q(w))$ , il existe une application bijective

$$\varphi : W \times \text{Cl}(\mathcal{V}, Q) \rightarrow \sqcup_{w \in W} \text{Cl}(E_w(\zeta), Q(w))$$

telle que l'application

$$\varphi(w) : \{w\} \times \text{Cl}(\mathcal{V}, Q) \rightarrow \text{Cl}(E_w(\zeta), Q(w)),$$

pour tout  $w \in W$  soit une extension de  $\text{in}(w) \circ \phi(w)$ . Pour construire cette extension, on prend une base de sections locales  $\{e_i\}$  de  $\zeta$  sur  $W$ , la famille  $\{\mathbf{1}_{\text{Cl}(\mathcal{V}, Q)}, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}\}$  avec  $1 < i_1 < \cdots < i_k \leq n$  est une base de  $\text{Cl}(\mathcal{V}, Q)$  [1] et  $\varphi(w)$  est définie par

$$\begin{aligned} \varphi(w) (\mathbf{1}_{\text{Cl}(\mathcal{V}, Q)}) &= \mathbf{1}_{\text{Cl}(E_w(\zeta), Q(w))} \text{ et} \\ \varphi(w) ((w, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k})) &= \phi(w)(e_{i_1}) \phi(w)(e_{i_2}) \cdots \phi(w)(e_{i_k}), \end{aligned}$$

on a identifié  $E_w(\zeta)$  à son image dans  $\text{Cl}(E_w(\zeta), Q(w))$ . Le morphisme  $\varphi(w)$  est un isomorphisme d'algèbres de Clifford. L'espace  $E(\zeta)$  peut être muni d'une structure de variété différentielle qui rende les applications  $\varphi$  de classe  $C^\infty$  pour tous les morphismes de trivialisations  $\phi$  de  $\zeta$ . Ainsi  $E(\zeta)$  est une variété de dimension

$$\dim E(\zeta) = \dim \mathbf{W} + 2^{\dim E(\zeta)}$$

et

$$\zeta = (E(\zeta), \pi, \mathbf{W}, \text{Cl}(\mathcal{V}, Q))$$

est un fibré de fibre  $\text{Cl}(\mathcal{V}, Q)$ . □

#### 4. Représentation modulaire d'un fibré

Tous les fibrés considérés sont vectoriels de dimension finie et de base l'univers  $\mathbf{W}$ . Une action de  $\zeta$  sur un fibré  $\zeta$  est un morphisme de fibré vectoriel  $\tau$

$$\tau : \zeta \rightarrow \text{End}(\zeta), \tau(w) : E_w(\zeta) \rightarrow E_w(\zeta).$$

Le morphisme  $\tau$  est une représentation modulaire du fibré  $\zeta$  dans  $\zeta$ . L'action est fidèle si pour tout  $w \in \mathbf{W}$ ,  $\tau(w)$  est injective, sous cette hypothèse le fibré  $\zeta$  s'identifie à un sous-fibré de  $\text{End}(\zeta)$ . Par exemple une section de Dirac  $\gamma$  sur  $\zeta$ , est une action de  $\xi_{\mathbf{W}}^*$  sur  $\zeta$  où  $\zeta$  est un fibré réel ou complexe de dimension finie et  $\xi_{\mathbf{W}}^*$  est le fibré dual du fibré tangent  $\xi_{\mathbf{W}}$  de  $\mathbf{W}$ . On dit que la section de Dirac est fidèle si cette action est fidèle. On peut munir le fibré  $\xi_{\mathbf{W}}^*$  d'un produit hermitien, de la façon suivante. Le fibré  $\text{End}(\zeta)$  a une structure naturelle de fibré hermitien, on définit la section hermitienne par

$$(e | f)_w = \text{Trace}(e^* \circ f) \text{ si } e, f \in \text{End}(E_w(\zeta)) \quad (4.1)$$

avec  $e^* = {}^{\text{Tr}} e$  si  $\zeta$  est un fibré réel et  $e^* = {}^{\text{Tr}} \bar{e}$  si le fibré est complexe.  $\text{End}(\zeta)$  muni de cette section hermitienne est un fibré hermitien. Si  $\zeta$  a une représentation fidèle dans  $\zeta$ , on peut définir une structure de fibré hermitien en posant

$$(u | v)_w = (\tau(w)(u) | \tau(w)(v))_w$$

où  $\tau$  est une représentation modulaire fidèle de  $\zeta$  dans  $\zeta$ .

REMARK 2. Pour toutes sections locales  $s$  et  $t$  de  $\text{End}(\zeta)$ , l'application

$$w \rightarrow (s(w) | t(w))_w \text{ est } C^\infty. \quad (4.2)$$

On rappelle que le fibré  $\text{End}(\zeta)$  est le fibré des endomorphismes de  $\zeta$ , de fibre  $\text{End}(\mathcal{V})$ . Si  $W$  est une carte de trivialisations de  $\zeta$ , l'isomorphisme de trivialisations

$$\phi : E_W(\zeta) \rightarrow W \times \mathcal{V}, \phi(u) = (w, \phi(w)(u)), u \in E_w(\zeta)$$

s'étend en un isomorphisme de trivialisations

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : E_W(\text{End}(\zeta)) &\rightarrow W \times \text{End}(\mathcal{V}), \quad \tilde{\phi}(l) = \left( w, \tilde{\phi}(w)(l) \right), \\ l \in E_w(\text{End}(\zeta)) &= \text{End}(E_w(\zeta)) \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\phi}(w)(l) = \phi(w) \circ l \circ \phi(w)^{-1}.$$

REMARK 3. Les applications de transition sont définies par

$$h_{\alpha,\beta} : W_\alpha \cap W_\beta \rightarrow \text{GL}(\text{End}(\mathcal{V})),$$

$$h_{\alpha,\beta}(w)(l) = k_{\alpha,\beta}(w) \circ l \circ k_{\alpha,\beta}(w)^{-1}, \quad l \in \text{End}(\mathcal{V}) \quad (4.3)$$

où  $k_{\alpha,\beta}(w)$  sont les applications de transition du fibré  $\zeta$ . On a

$$h_{\alpha,\beta}(w)(l_1 \circ l_2) = h_{\alpha,\beta}(w)(l_1) \circ h_{\alpha,\beta}(w)(l_2).$$

DEFINITION 2. On note  $Q_{\text{End}}$  la forme quadratique sur  $\mathcal{V}$ , de forme polaire

$$g_{\text{End}}(l_1, l_2) = \text{Trace}(l_1^* \circ l_2)$$

avec  $l_1^*$  est l'endomorphisme adjoint  $l_1$  pour la forme quadratique  $Q$ .

LEMMA 1. Si  $\zeta$  est un fibré avec groupe de structure  $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}(\mathcal{V}, Q)$  alors  $\text{End}(\zeta)$  est un fibré avec groupe de structure  $\mathcal{H} \subset \mathcal{O}(\text{End}(\mathcal{V}), Q_{\text{End}})$ .

REMARK 4. On rappelle que l'adjoint de  $l \in \text{End}(\mathcal{V})$  est l'unique opérateur  $l^* \in \text{End}(\mathcal{V})$  vérifiant

$$g(l(u), v) = g(u, l^*(v)) \quad \text{pour tout } u, v \in \mathcal{V},$$

où  $g$  est la forme polaire de  $Q$ .

PROOF. Il suffit de vérifier que les applications de transition  $h_{\alpha,\beta}(w)$  définie en 4.3 sont dans  $\mathcal{O}(\text{End}(\mathcal{V}), Q_{\text{End}})$ . On a par 4.3

$$\begin{aligned} h_{\alpha,\beta}(w)(l_1)^* \circ h_{\alpha,\beta}(w)(l_2) &= \left( k_{\alpha,\beta}(w) \circ l_1 \circ k_{\alpha,\beta}(w)^{-1} \right)^* \circ k_{\alpha,\beta}(w) \circ l_2 \circ k_{\alpha,\beta}(w)^{-1} \\ &= \left( k_{\alpha,\beta}(w)^{-1} \right)^* \circ l_1^* \circ k_{\alpha,\beta}(w)^* \circ k_{\alpha,\beta}(w) \circ l_2 \circ k_{\alpha,\beta}(w)^{-1} \\ &= k_{\alpha,\beta}(w) \circ l_1^* \circ k_{\alpha,\beta}(w)^{-1} \circ k_{\alpha,\beta}(w) \circ l_2 \circ k_{\alpha,\beta}(w)^{-1} \\ &= k_{\alpha,\beta}(w) \circ l_1^* \circ l_2 \circ k_{\alpha,\beta}(w)^{-1} \end{aligned}$$

car  $k_{\alpha,\beta}(w) \in \mathcal{O}(\mathcal{V}, Q)$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \text{Trace}(h_{\alpha,\beta}(w)(l_1)^* \circ h_{\alpha,\beta}(w)(l_2)) &= \text{Trace}\left(k_{\alpha,\beta}(w) \circ l_1^* \circ l_2 \circ k_{\alpha,\beta}(w)^{-1}\right) \\ &= \text{Trace}(l_1^* \circ l_2), \end{aligned}$$

ainsi  $h_{\alpha,\beta}(w) \in \mathcal{O}(\text{End}(\mathcal{V}), Q_{\text{End}})$ .  $\square$

Le fibré  $\text{End}(\zeta)$  est isomorphe au fibré  $\zeta^* \otimes \zeta$ , si  $\{t^\mu\}$  est une base de sections locales de  $\zeta^*$  et  $\{s_\nu\}$  une base de sections locales de  $\zeta$  alors  $t^\mu \otimes s_\nu$  définie par

$$t^\mu \otimes s_\nu : W \rightarrow E_W(\zeta^* \otimes \zeta),$$

$$\left( t^\mu \otimes s_\nu \right)(w) = t^\mu(w) \otimes s_\nu(w) \in E_W(\zeta^* \otimes \zeta) = E_W(\zeta^*) \otimes E_W(\zeta)$$

$$t^\mu(w) \otimes s_\nu(w) : E_w(\zeta) \rightarrow E_w(\zeta), \quad (t^\mu(w) \otimes s_\nu(w))(u) = t^\mu(w)(u) s_\nu(w),$$



forme une base de sections locales de  $\zeta^* \otimes \zeta|_W$ . Si le fibré  $\zeta$  est un fibré avec groupe de structure  $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}(\mathcal{V}, Q)$ , on définit la forme quadratique

$$\mathbf{Q}(w)(t^\mu(w) \otimes s_\nu(w)) = Q(w)(t_\mu(w))Q(w)(s_\nu(w)).$$

PROPOSITION 1. *Les fibrés  $\zeta^* \otimes \zeta$  et  $\text{End}(\zeta)$  munis des formes quadratiques  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{Q}_{\text{End}}$ , où  $\mathbf{Q}_{\text{End}}$  est la forme quadratique induite par  $Q_{\text{End}}$ , sont des fibrés isométriques.*

PROOF. On se fixe une base locales de sections  $\{s_\nu\}$  sur  $W$  qui est  $Q$ -orthogonale et réduite, relativement à la forme quadratique  $Q$ , et sa base  $Q$ -duale  $\{s^\mu\}$ . Sur chaque fibre  $E_w(w)$ ,  $g(w)$  est la forme polaire de  $Q(w)$ , on a

$$s^\mu(w)(s(w)) = g(w)(s(w), s_\mu(w)), \forall w \in W$$

en terme de section on écrit simplement

$$s^\mu(s) = g(s, s_\mu).$$

La famille  $\{s^\mu \otimes s_\nu\}$  est une base de sections locales de  $\text{End}(\zeta)$  définie sur  $W$ . Par définition

$$g\left(\left(s^\mu \otimes s_\nu\right)^*(s), t\right) = g\left(s, \left(s^\mu \otimes s_\nu\right)(t)\right) = s^\mu(t)g(s, s_\nu) = g(t, s_\mu)g(s, s_\nu),$$

en particulier,

$$\begin{aligned} g\left(\left(s^\mu \otimes s_\nu\right)^*(s_\tau), s_\rho\right) &= g(s_\rho, s_\mu)g(s_\tau, s_\nu) \\ &= g_{\rho\mu}g_{\tau\nu} = \begin{cases} g_{\mu\mu}g_{\nu\nu} & \text{si } (\rho, \tau) = (\mu, \nu) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

où  $(g_{\rho\mu})$  est la matrice de la forme polaire dans la base  $\{s_\nu\}$ , la base de sections  $\{s_\nu\}$  est  $Q$ -orthogonale et réduite, donc, les relations 4.4 sont vraies. Si on pose

$$\left(s^\mu \otimes s_\nu\right)^*(s_\tau) = \lambda_\tau^i s_i,$$

on a

$$g\left(\left(s^\mu \otimes s_\nu\right)^*(s_\tau), s_\rho\right) = \lambda_\tau^i g_{i\rho} = \lambda_\tau^\rho g_{\rho\rho} = g_{\rho\mu}g_{\tau\nu} \text{ et } \lambda_\tau^\rho = g_{\rho\rho}g_{\rho\mu}g_{\tau\nu}$$

on en déduit que  $\lambda_\tau^\rho = 0$  si  $(\rho, \tau) \neq (\mu, \nu)$  et  $\lambda_\nu^\mu = g_{\nu\nu}$ . La matrice de  $s^\mu \otimes s_\nu$  dans la base orthonormale est

$$(g_{\mu\tau}\delta_{\nu k}^{l\tau})$$

et la matrice de  $(s^\mu \otimes s_\nu)^*$  est

$$(g_{jj}\delta_{\mu j}^{i\nu}),$$

la matrice de  $(s^\mu \otimes s_\nu)^*(s^\nu \otimes s_\mu)$  s'écrit

$$(g_{jj}\delta_{\mu j}^{i\nu})(g_{\mu\tau}\delta_{\nu k}^{l\tau}) = (g_{jj}g_{\mu\tau}\delta_{\mu j}^{i\nu}\delta_{\nu k}^{j\tau}),$$

calculons

$$\mathbf{Q}_{\text{End}}(s^\mu \otimes s_\nu) = \text{Trace}\left(\left(s^\mu \otimes s_\nu\right)^*(s^\nu \otimes s_\mu)\right),$$

on a pour la trace

$$g_{jj}g_{\tau\mu}\delta_{\mu j}^{i\nu}\delta_{\nu i}^{j\tau} = g_{\nu\nu}g_{\tau\mu}\delta_\mu^i\delta_i^\tau = g_{\nu\nu}g_{\mu\mu}$$

donc

$$\mathbf{Q}_{\text{End}}(s^\mu \otimes s_\nu) = g_{\nu\nu}g_{\mu\mu}$$

et

$$\mathbf{Q} \left( s^\mu \otimes s^\nu \right) = Q(s_\mu) Q(s_\nu) = g_{\nu\mu} g_{\mu\nu},$$

donc  $\zeta^* \otimes \zeta$  et  $\text{End}(\zeta)$  sont des fibrés isométriques pour les formes quadratique  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{Q}_{\text{End}}$ .  $\square$

REMARK 5. Si  $\gamma$  est une section de Dirac métrisable sur le fibré tangent  $\xi_{\mathbf{W}}$  de l'univers  $\mathbf{W}$  et  $(W, \phi)$  une carte de trivialisatation de  $\xi_{\mathbf{W}}$  de local frame  $\{\partial_\mu\}$  et de local frame dual  $\{d^\nu\}$ . Pour les sections d'endomorphismes de Dirac

$$\gamma^\nu = \gamma^{d^\nu},$$

le tenseur

$$\gamma^{\mu\nu} = \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$$

est un tenseur métrique de signature  $(p, q)$  avec  $p + q = 4$ . La métrique induite  $g$  définie par 1.1, de forme quadratique  $Q$  permet de construire sur  $\text{End}(\xi_{\mathbf{W}})|_W$ , une structure de fibré hermitien par

$$g_{\text{End}}(\gamma, \tau) = \text{Trace}(\gamma^* \tau)$$

où  $\gamma^*$  est la section adjointe locale de la section  $\gamma$  de  $\text{End}(\xi_{\mathbf{W}})|_W$ . Si on identifie  $\text{End}(\xi_{\mathbf{W}})$  à  $\xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \xi_{\mathbf{W}}$  on peut dire, par abus de langage, que  $Q_{\text{End}}$  est le carré tensoriel de  $Q$ , la section locale des endomorphismes

$$e_\nu^\mu(X) = d^\mu(X) \partial_\nu, X \in \Gamma_W(\xi_{\mathbf{W}})$$

vérifie

$$Q_{\text{End}}(e_\nu^\mu) = Q(\partial_\nu) Q(\partial_\mu).$$

## 5. Algèbre de Clifford sur les sections d'un fibré

On note  $\Gamma(\text{End}(\zeta))$ , le  $C^\infty(\mathbf{W})$ -module des sections de  $\text{End}(\zeta)$ . L'espace  $\Gamma(\text{End}(\zeta))$  est muni d'un produit scalaire à valeurs dans l'anneau unitaire  $C^\infty(\mathbf{W})$ , si  $s$  et  $t$  sont deux sections de  $\text{End}(\zeta)$ , la section produit  $s.t$  est définie par

$$s.t(w) = s(w) \circ t(w), \forall w \in \mathbf{W}$$

et on pose

$$(s | t) : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{K}, (s | t)(w) = (s(w) | t(w))_w \quad 4.1$$

alors  $(s | t) \in C^\infty(\mathbf{W})$  et  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On définit l'idéal bilatère  $J$  de  $\Gamma(\text{End}(\zeta))$  engendré par les sections

$$s.s - (s | t) \mathbf{1}$$

où  $\mathbf{1}$  est la section identique définie par

$$\mathbf{1}(w) = \mathbf{1}_{E_w(\zeta)}, \forall w \in \mathbf{W}$$

et l'algèbre associée à  $\zeta$ , notée  $\mathcal{A}(\zeta)$ , comme le quotient

$$\mathcal{A}(\zeta) = \frac{\Gamma(\text{End}(\zeta))}{J}.$$

DEFINITION 3. L'algèbre  $\mathcal{A}(\zeta)$  est l'algèbre de Clifford du fibré  $\zeta$ .

PROPOSITION 2. Si l'univers  $\mathbf{W}$  est compact, l'algèbre  $\mathcal{A}(\zeta)$  est de type fini et projectif comme  $C^\infty(\mathbf{W})$ -module.

REMARK 6. Si l'univers  $\mathbf{W}$  n'est pas compact,  $\mathcal{A}(\zeta)$  n'est pas de type fini. On peut consulter [9] et [8] pour l'étude de ces algèbres.

Supposons que le fibré soit un fibré avec groupe de structure

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}(\mathcal{V}, Q)$$

et soit  $W$  une carte de trivialisation  $\phi$  de  $\zeta$  et  $\tilde{\phi}$  son extension au fibré  $\text{End}(\zeta)$ . On peut construire le 4-uplet

$$\mathcal{A}(\zeta, Q) = \left( \sqcup_{w \in \mathbf{W}} \frac{\text{End}(E_w(\zeta))}{J_w}, \pi, \mathbf{W}, \mathcal{A}(\mathcal{V}, Q) \right),$$

où  $\sqcup$  est la réunion disjointe,  $J_w$  est l'idéal bilatère engendré par les endomorphismes

$$e.e - Q(w)(e) \mathbf{1}_{\text{End}(E_w(\zeta))}, e \in \text{End}(E_w(\zeta))$$

et l'algèbre  $\mathcal{A}(\mathcal{V}, Q)$  est définie

$$\mathcal{A}(\mathcal{V}, Q) = \frac{\text{End}(\mathcal{V})}{\mathcal{I}}$$

où  $\mathcal{I}$  est l'idéal engendré par les éléments de la forme

$$e.e - Q(e) \mathbf{1}_{\mathcal{V}}.$$

CLAIM 2. Si  $\zeta$  est un fibré avec groupe de structure  $\mathcal{G} = \mathcal{O}(\mathcal{V}, Q)$  alors  $\mathcal{A}(\zeta, Q)$  est un fibré de fibre  $\mathcal{A}(\mathcal{V}, Q)$  pour lequel

$$\mathcal{A}(\zeta) = \Gamma(\mathcal{A}(\mathcal{V}, Q)).$$

## 6. L'algèbre de Clifford des matrices de Dirac

Les matrices de Pauli sont définies par

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on définit les matrices

$$M^\nu = \mathbf{I}_2 \boxtimes \sigma^\nu \text{ et } N^\nu = \sigma^\nu \boxtimes \mathbf{I}_2, \nu = 1, 2, 3$$

où  $\boxtimes$  est le produit de Kronecker défini par

$$A \boxtimes B = \begin{pmatrix} a_1^1 B & \cdots & a_m^1 B \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n B & \cdots & a_m^n B \end{pmatrix} \text{ si } A = (a_j^i).$$

On pose

$$M^{\mu\nu} = N^\mu M^\nu \text{ avec } N^0 = M^0 = \mathbf{I}_4,$$

on définit 16 matrices qui forment une base complète de l'algèbre de Clifford. En particulier, si  $M$  est une matrice de l'algèbre, on a

$$M = m_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \text{ avec } m_{\mu\nu} = \text{Trace}(MM^{\mu\nu}), \quad (6.1)$$

on peut consulter [2].

DEFINITION 4. Les matrices  $M^{\mu\nu}$  sont les matrices de Dirac.

LEMMA 2. Les matrices  $M^{\mu\nu}$  vérifient

$$\det M^{\mu\nu} = 1, (M^{\mu\nu})^2 = \mathbf{I}_4, \text{Tr} \overline{M^{\mu\nu}} = M^{\mu\nu}$$

$$\text{Trace} M^{\mu\nu} = 0 \text{ si } (\mu, \nu) \neq (0, 0) \text{ et } \text{Trace} M^{00} = 4,$$

le produit de deux matrices de Dirac  $M^{\mu\nu}$  donne encore une matrice de Dirac de la forme  $M^{\rho\tau}$  à un coefficient multiplicatif  $\pm 1$  ou  $\pm i$ .

EXEMPLE 1. *Les matrices décrites par Dirac sont*

$$M^{1\nu} \text{ et } M^{30} \text{ où } \nu = 1, 2, 3. \quad (6.2)$$

### 7. Construction des sections locales d'endomorphismes de Dirac $\gamma^\nu$

Les sections d'endomorphismes de Dirac  $\gamma^\nu$  définies sur une carte  $W$  à partir du local frame, doivent vérifier

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{I}_4, \quad g^{\nu\mu} = \frac{1}{4} \text{Trace}(\gamma^\nu \gamma^\mu).$$

et

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = G^{\mu\nu} - G^{\nu\mu}, \quad (7.1)$$

où  $G^{\nu\mu}$  est la section des endomorphismes dont la matrice dans le local frame est  $(g^{\sigma\mu} \delta_j^\nu)$  si on suppose que l'opérateur de Dirac de rang 2 est un opérateur de Ricci. On se fixe une base  $Q$ -orthogonale réduite  $\{e_\nu\}$  de champs sur  $W$  et on pose  $\{e^\nu\}$  sa base duale alors

$$g(e_\nu, e_\mu) = \pm \delta_{\nu\mu} \text{ et } e^\nu \otimes e_\mu = \delta_\mu^\nu,$$

on suppose que  $g$  est une métrique de Lorentz de signature  $(1, 3)$ , les sections d'endomorphismes  ${}^\mu\gamma = \gamma^{e^\nu}$  vérifient

$$\text{Trace}({}^0\gamma^0) = -1, \quad \text{Trace}({}^\nu\gamma^\nu) = 1 \text{ et } \text{Trace}({}^\nu\gamma^\mu) = 0 \text{ si } \mu \neq \nu.$$

On pose  ${}^0\bar{\gamma} = i({}^0\gamma)$  et  ${}^\nu\bar{\gamma} = {}^\nu\gamma$  pour  $\nu = 1, 2, 3$ . Les sections d'endomorphismes  $\{{}^\nu\bar{\gamma}\}$  sont des sections d'endomorphismes du fibré tangent complexifié, un champ complexe s'écrit

$$Z = Z^\mu \partial_\mu, \quad Z^\mu \in C^\infty(W, \mathbb{C})$$

et

$${}^\nu\bar{\gamma}(Z) = Z^\mu ({}^\nu\bar{\gamma}(\partial_\mu)),$$

c'est-à-dire,

$${}^0\bar{\gamma}(Z) = iZ^\mu ({}^0\gamma(\partial_\mu)), \quad {}^\nu\bar{\gamma}(Z) = Z^\mu ({}^\nu\gamma(\partial_\mu)) \text{ pour } \nu = 1, 2, 3.$$

Le complexifié  $\bar{\gamma}$  de la section de Dirac  $\gamma$  est défini par

$$\bar{\gamma}(d \otimes Z) = d_\nu ({}^\nu\bar{\gamma}(Z)) = id_0 ({}^0\gamma(Z)) + \sum_{\nu=1}^3 d_\nu ({}^\nu\gamma(Z)) \text{ si } d = d_\nu e^\nu.$$

On se restreint à la carte de trivialisatoin  $W$ . La section des matrices de passage  $\mathbf{P} = (p_\nu^\mu)$ , de matrices inverses  $\mathbf{Q} = (q_\mu^\nu)$ , de la section locale d'endomorphismes  $\theta$  vérifiant

$$\theta(\partial_\nu) = e_\nu,$$

doit vérifier les relations suivantes,

$$e_\nu = p_\nu^\mu \partial_\mu, \quad e^\nu = q_\tau^\nu d^\tau, \quad {}^\nu\gamma = q_\tau^\nu \gamma^\tau \text{ et } \gamma^\nu = p_\tau^\nu ({}^\tau\gamma)$$

on en déduit

$$\bar{\gamma}^\nu = p_\tau^\nu ({}^\tau\bar{\gamma}) = ip_0^\nu ({}^0\gamma) + \sum_{\nu=1}^3 p_\tau^\nu ({}^\tau\gamma).$$

On rappelle que

$${}^{\mu\nu}\gamma = \text{Trace}({}^\mu\gamma^\nu) = q_\tau^\mu q_\sigma^\nu \text{Trace}(\gamma^\tau \gamma^\sigma) = q_\tau^\mu q_\sigma^\nu \gamma^{\tau\sigma},$$

sous forme matricielle

$$({}^{\mu\nu}\gamma) = \mathbf{Q}(\gamma^{\tau\sigma})^{\text{Tr}} \mathbf{Q} \text{ et } \text{Tr} \mathbf{P}(g_{\mu\nu}) \mathbf{P} = (\pm \delta_{\mu\nu}) \quad (7.2)$$

avec  ${}^0\gamma = -4$ ,  ${}^{\mu\mu}\gamma = 4$  pour  $\mu = 1, 2, 3$  et  ${}^{\mu\nu}\gamma = 0$  pour  $\mu \neq \nu$ . En particulier, si  $\{\mu\bar{\gamma}\}$  est dans l'algèbre de Clifford

$$\{\mu\bar{\gamma}, \nu\bar{\gamma}\} = 2\delta^{\mu\nu} \text{Id}$$

alors  $\{\gamma^\mu\}$  est vérifiée

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \text{Id}. \quad (7.3)$$

Si 7.1 est vérifié alors l'opérateur de Dirac de rang 2 est un opérateur de Ricci, on a

$$\begin{aligned} [{}^\mu\gamma, {}^\nu\gamma] &= ({}^\mu\gamma)({}^\nu\gamma) - ({}^\nu\gamma)({}^\mu\gamma) = q_\tau^\mu q_\rho^\nu (\gamma^\tau) \gamma^\rho - q_\rho^\nu q_\tau^\mu \gamma^\rho \gamma^\tau \\ &= q_\tau^\mu q_\rho^\nu [\gamma^\tau, \gamma^\rho] = q_\tau^\mu q_\rho^\nu (G^{\tau\rho} - G^{\rho\tau}) = D_{\tau\rho}^{\mu\nu} G^{\tau\rho} \\ &= (D_{\tau\rho}^{\mu\nu} g^{i\tau} \delta_j^\rho) = (D_{\tau j}^{\mu\nu} g^{i\tau}) \end{aligned} \quad (7.4)$$

avec

$$D_{\tau\rho}^{\mu\nu} = q_\tau^\mu q_\rho^\nu - q_\rho^\mu q_\tau^\nu = \begin{vmatrix} q_\tau^\mu & q_\rho^\mu \\ q_\tau^\nu & q_\rho^\nu \end{vmatrix},$$

on en déduit

$$D_{\tau\rho}^{\mu\nu} G^{\tau\rho} = 2({}^\mu\gamma)({}^\nu\gamma) \text{ si } \mu < \nu,$$

en identifiant les opérateurs  ${}^\mu\gamma$  à leur représentation matricielle dans le local frame  $\{\partial_\nu\}$ , on a

$${}^0\gamma = -i\gamma_{\tau\rho}^0 M^{\tau\rho} \text{ et } {}^\mu\gamma = \gamma_{\tau\rho}^\mu M^{\tau\rho} \text{ d'après 6.1,}$$

on remarque que d'après 7.4 et 1.5 que si  $\mathbf{A}^{\mu\nu}$  est la matrice de  $2({}^\mu\gamma)({}^\nu\gamma)$  dans le local frame  $\{\partial_\nu\}$ , on a

$$\mathbf{D}^{\mu\nu} = \mathbf{G}\mathbf{A}^{\mu\nu}$$

pour  $\mu \neq \nu$  où  $(\mathbf{D}^{\mu\nu})_j^\tau = D_{\tau j}^{\mu\nu}$ ,  $(\mathbf{G}^{-1})_\tau^i = g^{i\tau}$ .

**THEOREM 2.** *Les endomorphismes de Dirac  $\gamma^\nu$  s'écrivent sous la forme*

$$\gamma^\nu = p_\tau^\nu ({}^\tau\gamma),$$

les matrices des endomorphismes complexifiés  $\{\mu\bar{\gamma}\}$  sont dans l'algèbre de Clifford des matrices de Dirac et vérifient

$$\{\nu\bar{\gamma}, \mu\bar{\gamma}\} = \delta^{\nu\mu} \text{Id}.$$

Si  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} = (q_\tau^\nu)$ , les matrices  $\mathbf{D}^{\mu\nu}$  de terme général

$$(\mathbf{D}^{\mu\nu})_\rho^\tau = \begin{vmatrix} q_\tau^\mu & q_\rho^\mu \\ q_\tau^\nu & q_\rho^\nu \end{vmatrix},$$

doivent vérifier

$$\mathbf{D}^{\mu\nu} = \mathbf{G}\mathbf{A}^{\mu\nu}, \quad (7.5)$$

pour que la section des opérateurs de Dirac de rang 2 est une section de Ricci.

Les équations 7.5 permettent de donner une description complète de la section de Dirac  $\gamma$  et de sa complexifiée  $\bar{\gamma}$ , à partir de quatre matrices réelles  $\mathbf{A}^\nu$ ,  $\nu = 0, 1, 2, 3$ , vérifiant  $\mathbf{A}^\mu \mathbf{A}^\nu = \mathbf{A}^{\mu\nu}$  telles que les matrices  $i\mathbf{A}^0$  et  $\mathbf{A}^\nu$ ,  $\nu = 1, 2, 3$ , soient dans l'algèbre de Clifford engendrée par les matrices de Dirac. On construit les sections d'endomorphismes de Dirac  ${}^\nu\bar{\gamma}$  dont la matrice dans le local frame est  $\mathbf{A}^\nu$  et les sections d'endorphismes  ${}^\nu\gamma$ ,  ${}^0\gamma = -i{}^0\bar{\gamma}$  et  ${}^\nu\gamma = ({}^\nu\bar{\gamma})$ . On calcule

$$\gamma^\nu = p_\tau^\nu ({}^\tau\gamma), \quad \mathbf{P} = (p_\tau^\nu) \text{ et } \mathbf{Q} = (q_\tau^\nu) = \mathbf{P}^{-1},$$

si la matrice  $\mathbf{Q}$  vérifie les équations 7.5, on peut construire les sections d'opérateurs de Dirac

$$H_2 = \gamma_2 \otimes R^\nabla \text{ et } \overline{H}_1 = \overline{\gamma} \otimes \overline{\nabla}$$

et définir les équations relativistes d'Einstein et de Dirac avec une section de Dirac réelle.

REMARK 7. *L'existence de la matrice  $\mathbf{Q}$  dépend du choix de la métrique  $g$  et des sections d'endomorphismes complexes  $\{\mu\overline{\gamma}\}$ .*

## 8. Conclusion

Pour unifier l'équation relativiste de Dirac et l'équation relativiste d'Einstein, on se donne une section de Dirac  $\gamma$  sur les champs réels de l'univers  $\mathbf{W}$  qui est métrisable, de métrique  $g$  ayant pour signature  $(-, +, +, +)$ . Sur une carte de trivialisatation  $W$  du fibré tangent, on note  $\{\partial_\nu\}$ , le local frame et  $\{d^\mu\}$  le local frame dual. Soit  $\{e_\nu\}$  une base locale de champs vérifiant

$$g(e_0, e_0) = -1, g(e_\mu, e_\mu) = 1 \text{ si } \mu \neq 0 \text{ et } g(e_\mu, e_\nu) = 0 \text{ si } \mu \neq \nu.$$

On note  $\{e^\mu\}$  sa base duale de  $\{e_\nu\}$ ,  $\mathbf{P} = (p_\nu^\mu)$  la section des matrices de passage de  $\{\partial_\nu\}$  à  $\{e_\nu\}$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} = (q_\mu^\nu)$ , alors si

$${}^\nu\gamma(X) = \gamma(e^\nu \otimes X) \text{ où } X \text{ est un champ réel local sur } W,$$

on a

$${}^\nu\gamma = q_\tau^\mu \gamma^\tau$$

et on complexifie  $\gamma$  en posant

$${}^0\overline{\gamma} = i({}^0\gamma) \text{ et } {}^\nu\overline{\gamma} = ({}^\nu\gamma)$$

la complexification de  $\gamma$  est donnée par

$$\overline{\gamma}(d \otimes Z) = d_\nu ({}^\nu\overline{\gamma}(Z)) = i({}^0\gamma(Z)) + \sum_{\nu=1}^3 ({}^\nu\gamma(Z)), \quad {}^\tau\gamma(Z) = ({}^\tau\gamma)(X) + i{}^\tau\gamma(Y)$$

où  $Z = X + iY$  est un champ complexe local sur  $W$  et  $d = d_\nu e^\nu$ . On peut complexifier l'opérateur de Dirac  $H_1$  de rang 1 défini par  $\gamma$ , en posant

$$\overline{H}_1 = \overline{\gamma} \otimes \overline{\nabla},$$

où  $\overline{\nabla}$  est la complexification de la connexion de Levi-Civita de  $g$ . Cet opérateur est défini localement sur  $W$ , on a construit deux opérateurs de Dirac,  $\overline{H}_1$  opère sur les champs complexes, l'autre opère sur les champs réels

$$H_2 = \gamma \otimes R^\nabla.$$

L'opérateur  $H_2$  est un opérateur de Ricci si

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = G^{\mu\nu} - G^{\nu\mu},$$

sous cette hypothèse l'équation relativiste d'Einstein s'écrit

$$H_2 = \lambda G + \kappa T,$$

$T$  est l'opérateur associé au tenseur énergie-impulsion,  $G$  est l'opérateur associé au tenseur métrique,

$$\lambda = \frac{1}{2}R - \Lambda,$$

$R$  est la courbure et  $\Lambda$  la constante cosmologique. L'équation relativiste de Dirac s'écrit

$$\overline{H}_1(Z) = \eta Z,$$

où  $\eta$  est une fonction de densité de masse définie sur  $W$  et  $Z$  un champ local complexe propre de  $\overline{H}_1$ . On peut ainsi, à partir d'une section de Dirac sur les champs réels, décrire l'équation relativiste d'Einstein et l'équation relativiste de Dirac.

### References

- [1] Angles P., Clerc R.L., "Opérateurs de création et d'annihilation et algèbres de Clifford", Annales de la fondation Louis de Broglie, Volume 28, n°3-4, 2003
- [2] Arfken G., "Mathematical Methods for Physicists", 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press, pp. 211-217, 1985
- [3] Jonot J.L., "Sur les opérateurs de Dirac de rang supérieur et l'équation relativiste", [hal.archives-ouvertes.fr/hal-01330724/document](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01330724/document)
- [4] Jonot J.L., "Sur une représentation unitaire des équations de Dirac-Einstein", [hal.archives-ouvertes.fr/hal-01345530/document](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01345530/document)
- [5] Jonot J.L., "Opérateurs de Dirac", [hal.archives-ouvertes.fr/hal-01325248/document](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01325248/document)
- [6] Jonot J.L., "Sur les champs physiques de divergence nulle et les champs en corde", [hal.archives-ouvertes.fr/hal-01072257/document](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01072257/document)
- [7] Lounesto P., "Clifford Algebras and Spinors", Cambridge University Press. 2001.
- [8] Porteous I., "Clifford Algebras and the Classical Groups", Cambridge University Press. 1995.
- [9] Schleben, Bradford J., "Infinitely Generated Clifford Algebras and Wedge Representations of  $gl_\infty|\infty$ ". Theses and Dissertations 2015. Paper 919.

*E-mail address:* [jean-louis.jonot@ac-versailles.fr](mailto:jean-louis.jonot@ac-versailles.fr)