



HAL
open science

Le traitement de l'incompressibilité dans un matériau élastique

Adair Roberto Aguiar

► **To cite this version:**

Adair Roberto Aguiar. Le traitement de l'incompressibilité dans un matériau élastique. [Rapport de recherche] Publications du LMA, numéro 121, LMA. 1991, 70 p. hal-01365727

HAL Id: hal-01365727

<https://hal.science/hal-01365727>

Submitted on 13 Sep 2016

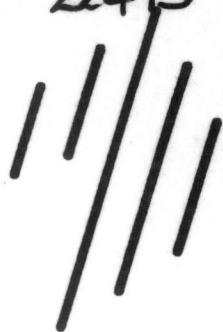
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PUBLICATIONS DU L.M.A.

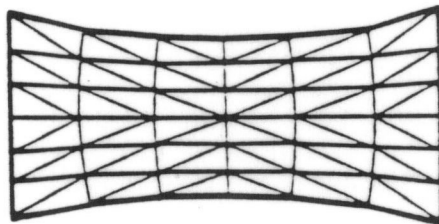
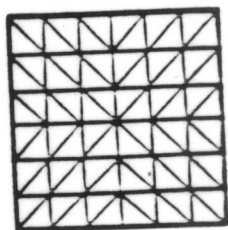
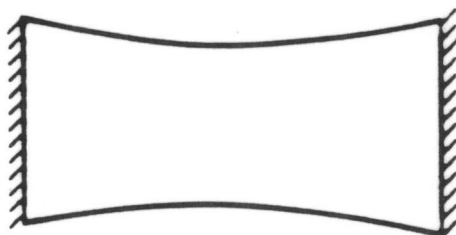
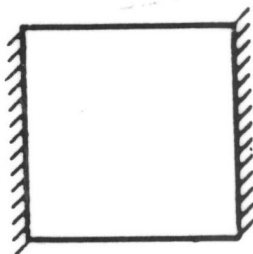
n° 121 (avril 1991)

NOTES SCIENTIFIQUES



LE TRAITEMENT DE L'INCOMPRESSIBILITE DANS UN MATERIAU ELASTIQUE

Adair Roberto AGUIAR



NOTE SCIENTIFIQUE n° 121 (AVRIL 1991) LE TRAITEMENT DE L'INCOMPRESSIBILITE DANS UN MATERIAU ELASTIQUE

Légende de la figure de couverture :
Etirement d'une éprouvette en caoutchouc.

PUBLICATIONS DU L.M.A.

n° 121 (avril 1991)

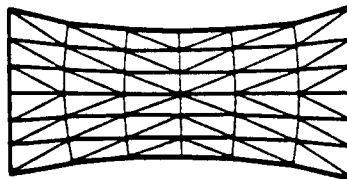
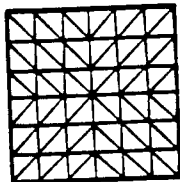
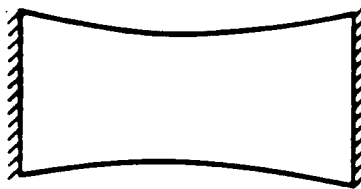
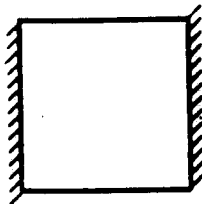
NOTES SCIENTIFIQUES



LE TRAITEMENT DE L'INCOMPRESSIBILITE DANS UN MATERIAU ELASTIQUE

Adair Roberto AGUIAR

PHYS
MEC



CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Publication référencée dans la base PASCAL de l'INIST

G82108

ADAIR ROBERTO AGUIAR

LE TRAITEMENT DE L'INCOMPRESSIBILITE DANS UN MATERIAU ELASTIQUE

Stage de 6 mois réalisé dans
le Laboratoire de Mécanique et
d'Acoustique - LMA / CNRS - ,
Marseille, France.
Superviseur: Michel Raous

Ce stage a été possible par le projet CAPES/COFECUB de
coopération internationale Brésil - France, dans le sujet
Comportamento Inelástico de Materiais.

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique

Equipe "Mécanique et Méthodes Numériques" - MMN

Marseille, le 5 septembre 1990

SOMMAIRE

Page

1 - INTRODUCTION	1
2 - ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	3
2.1 - La Position du Problème d'Incompressibilité	3
2.2 - Le Traitement du Problème	7
2.3 - La Choix de l'Élément Fini	14
2.4 - Résultats Numériques	19
3 - CAS DE PETITES DEFORMATIONS	23
3.1 - Le Problème d'Équilibre	23
3.2 - Présentation du Code Numérique <i>ELLN</i>	26
3.3 - La Validation du Code	29
3.4 - Autres Exemples	37
4 - CAS DE GRANDES DEFORMATIONS	41
4.1 - Le Problème d'Équilibre	41
4.2 - Le Code Numérique <i>ELFIN</i>	46
4.3 - Validation du Code	48
5 - CONCLUSION	53
ANNEXE 1	55
ANNEXE 2	57
ANNEXE 3	59
ANNEXE 4	61
ANNEXE 5	63
BIBLIOGRAPHIE	65



1- Introduction

On présente une contribution au traitement numérique de l'incompressibilité. On caractérise ce phénomène comme la préservation locale du volume d'un corps soumis à un état de déformation quelconque. Parmi les matériaux d'application industrielle qui présentent ce comportement, on note, en particulier, les caoutchoucs.

Le traitement analytique par un modèle constitutive est déjà bien établi. Mooney et Rivlin, [1940], proposent une loi constitutive simple pour un matériau incompressible. Un accord du modèle et des résultats expérimentaux est obtenu pour une large échelle de déformation. Ogden, [1972], propose un modèle plus complexe dans lequel le matériau de Mooney et Rivlin est un cas particulier.

Dès le travail de Hellinger et Reissner, [1950], des formulations variationnelles ont été établies pour traiter des problèmes avec restrictions. On ne prend plus en compte la formulation classique basée sur le potentiel d'énergie d'un seul champ de variables. On traite les restrictions en rajoutant des champs de variables supplémentaires. Néanmoins, les principes obtenus de ces formulations introduisent un nombre excessif d'inconnus.

Hermann, [1965], propose une forme plus simple dans laquelle le champ supplémentaire d'inconnus est une fonction scalaire. On obtient avec le **Principe de Hermann** une formulation mixte en éléments finis où les variables indépendantes sont le champ de déplacements et le champ de pression moyenne sur chaque élément.

Malkus et Hughes, [1978], prouvent que ce principe est équivalent à la *Téchnique d'Intégration Réduite avec Pénalisation*. On traite le problème de l'incompressibilité avec un seul champ de variables, ce qui diminue le nombre total d'inconnus. On prend en compte l'incompressibilité par une intégration réduite des termes de pression.

L'utilisation de cette technique dans l'*Elasticité Non-Linéaire Incompressible* est directe. Malkus et Hughes présentent une extension du principe de Hermann pour l'Elasticité Non-Linéaire et son équivalence avec l'Intégration Réduite. De nouveau, il faut bien identifier les termes de pression pour qu'on puisse les intégrer de manière différente et adaptée.

Le travail présenté concerne le traitement du problème de l'incompressibilité en Elasticité

Non-Linéaire et Déformations Planes. Dans la section 2 on présente une étude bibliographique sur le sujet de l'incompressibilité. Dans la section 3, comme étape intermédiaire, on traite le problème en petites déformations. On présente quelques exemples numériques pour tester l'efficacité de quelques éléments finis. On considère différents schémas d'intégration. Dans la section 4 on pose le problème d'équilibre non-linéaire incompressible. On présente une méthode itérative qui s'appuie sur les techniques de continuation pour le résoudre. On traite quelques problèmes avec gradient de pression pour lesquels on connaît la solution. Le but est de tester l'efficacité de la méthode itérative quand on rajoute la technique d'intégration réduite.

2- Etude Bibliographique

2.1- La Position du Problème d'Incompressibilité

L'imcompressibilité est un phénomène physique lié à la résistance interne d'un corps à changer son volume localement quand il est soumis à un champ de déformation: le volume du corps reste inchangé lors des déformations. Les matériaux sont dits incompressibles. Le caoutchouc est un exemple de matériau incompressible.

Soit l'expression (2.1) ci-dessous,

$$\det \mathbf{F} = \frac{V}{V_0} \quad (2.1)$$

où V_0 est le volume d'un corps B dans une configuration de référence, X , et V , le volume dans une configuration actuelle, χ (voir Fig. 2.1).

• \mathbf{F} est le *Tenseur Déformation* donné par:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \chi}{\partial X} \quad (2.2)$$

$\det \mathbf{F}$ représente la dilatation volumique, mesurée localement. On exprime la préservation de volume par:

$$\det \mathbf{F} - 1 = 0 \quad (2.3)$$

On peut réécrire l'expression (2.3) de façon à introduire une mesure de la déformation pure du corps:

$$(\det \mathbf{C})^{1/2} - 1 = 0 \quad (2.4)$$

où \mathbf{C} est le *Tenseur de Cauchy-Green à Droite*, rapporté au tenseur \mathbf{F} par l'expression (voir Ciarlet [1988]):

$$C = F^T \circ F \tag{2.5}$$

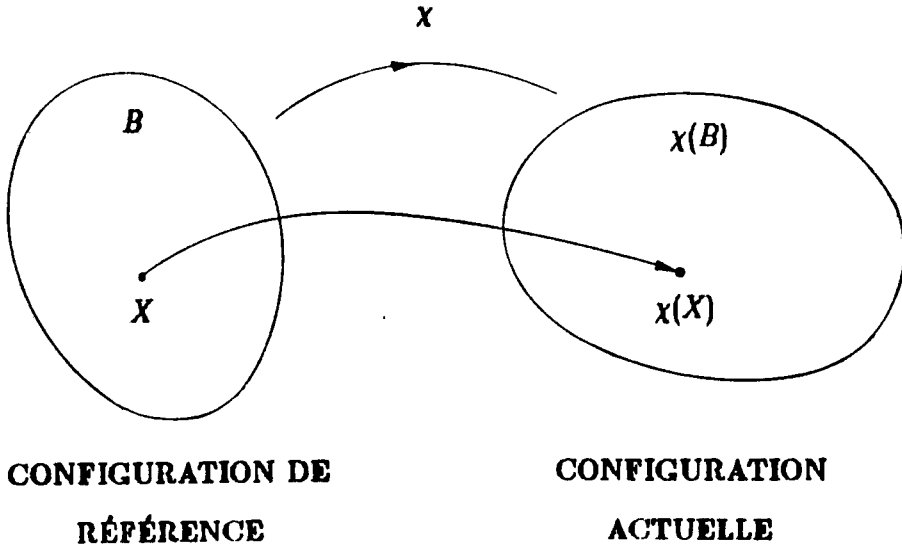


Fig. 2.1- Déformation d'un corps.

La relation entre la configuration actuelle, χ , et la configuration de référence, X , rend possible l'introduction du *champ de déplacements*, u , selon l'expression (2.6):

$$\chi = X + u \tag{2.6}$$

A l'aide des expressions (2.6), (2.2) et (2.5) on obtient une autre relation pour le tenseur C :

$$C - I = \left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^T + \frac{\partial u}{\partial X} + \left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^T \circ \frac{\partial u}{\partial X} \tag{2.7}$$

où I est la transformation Identité sur la configuration de référence.

Cette relation, (2.7), est une mesure de la différence entre la déformation totale du corps et les déplacements de corps rigide. Ceci permet d'introduire le *Tenseur Deformation de Green-St. Venant*, E :

$$E = \frac{1}{2}(C - I) \quad (2.8)$$

Dans le cas de petites déformations, les expressions (2.7) et (2.8) permettent le rapprochement suivant:

$$E = Grad_s u + o\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 \quad (2.9)$$

où • $Grad_s$ est l'operateur *Gradient Symétrique*;

• $o(\cdot)$ sont des termes d'ordre supérieur.

Pour mieux comprendre l'incompressibilité, on va analyser le cas d'*Elasticité Linéaire en Petites Déformations*. Il est plus facile d'identifier les termes responsables du changement de volume dans le problème d'équilibre. L'extension de cette analyse pour le cas non- linéaire, en général, est directe.

La relation constitutive est donnée par:

$$\sigma = \lambda tr E I + 2\mu E \quad (2.10)$$

où • σ est le *Tenseur de Contrainte de Cauchy*;

• E est donné par l'expression (2.9);

• λ et μ sont des *Constantes de Lamé*.

Les constantes de Lamé sont liés au module d'Young, E , et au coefficient de Poisson, ν , par:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.11a)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.11b)$$

On constate que la résistance à une variation de volume augmente au fur et à mesure que la valeur de ν se rapproche de 0.5. Dans ce cas là, le matériau est dit *presque-incompressible*.

Dans les expressions (2.11a et b), on note que lorsque σ tend vers la valeur 0.5 ces expressions prennent la forme suivante:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0.5} \lambda = +\infty \quad (2.12a)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow 0.5} \mu = \frac{E}{3} \quad (2.12b)$$

On voit que la valeur de ν ne joue pas un rôle très important dans la valeur du Module de Cisaillement, μ . Cependant, la valeur de λ est sensible à un changement de la valeur de ν proche de l'incompressibilité.

On peut réécrire l'expression (2.10) de façon à identifier une partie sphérique, $\bar{\sigma}$, qui dépend seulement de l'expansion volumique, d'une partie déviatorique, $\bar{\sigma}$:

$$\sigma = \bar{\sigma} + \bar{\sigma} \quad (2.13a)$$

avec,

$$\bar{\sigma} = B(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I} \quad (2.13b)$$

$$\bar{\sigma} = 2\mu[\mathbf{E} - \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{I}] \quad (2.13c)$$

où $B = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ est le *Module d'Expansion Volumique*.

Dans le cas limite, ($\nu \rightarrow 0.5$), $\bar{\sigma}$ est donné par l'expression (2.14):

$$\bar{\sigma} = -p\mathbf{I} \quad (2.14)$$

où $p = -\lambda(\text{tr } \mathbf{E})$ est une fonction scalaire qui prend des valeurs finies. Alors, de l'expression (2.14):

$$\lim_{\nu \rightarrow 0.5} (\text{tr } \mathbf{E}) = -\frac{p}{\lambda} = 0 \quad (2.15)$$

Donc, en petites déformations, la condition d'incompressibilité est donnée par:

$$\text{tr } \mathbf{E} = 0 \quad (2.16)$$

Quel que soit le cas, compressible ou incompressible, l'expression (2.10) peut être réécrite comme:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (2.17a)$$

$$p = -\lambda(\text{tr } \mathbf{E}) \quad (2.17b)$$

où $p\mathbf{I}$ est le tenseur sphérique, σ , quand $\nu \rightarrow 0.5$.

2.2- Le Traitement du Problème

L'approche analytique du problème d'incompressibilité peut être considérée de deux façons différentes: soit par la *Théorie Constitutive*, soit par des *Principes Variationnels* qui traitent le problème d'équilibre continu. Gadala, [1986], présente un exposé général sur ce sujet et quelques applications de la théorie pour la *Méthode des Éléments Finis*.

Par rapport à la Théorie Constitutive, on va aborder le problème d'incompressibilité au niveau de la loi de comportement d'un matériau hyper-élastique isotrope. Sa fonction densité d'énergie, W , dépend des trois invariants principaux du tenseur \mathbf{C} :

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad (2.18)$$

où

$$I_1 = \text{tr } C \quad (2.19a)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr } C)^2 - \text{tr } (C)^2] \quad (2.19b)$$

$$I_3 = \det C \quad (2.19c)$$

Pour plus de détails sur la Théorie Constitutive pour les matériaux hyper-élastiques, Beatty, [1987], présente une vision assez complète et succincte.

Pour traiter le problème incompressible on réécrit l'expression (2.18) comme:

$$W = W(I_1, I_2) \quad (2.20a)$$

$$I_3 = 1 \quad (2.20b)$$

Ogden, [1972], propose une expression général pour la fonction W :

$$W = \sum_{i=1}^M a_i I_1^{\gamma_i/2} + \sum_{j=1}^N b_j I_2^{\delta_j/2} \quad (2.21)$$

où • $a_i > 0$, $\gamma_i \geq 1$, $b_j > 0$, $\delta_j \geq 1$.

Mooney et Rivlin, [1940] et [1951], proposent une forme plus simple pour la fonction W , basée sur des résultats expérimentaux concernant le caoutchouc:

$$W = a(I_1 - 3) + b(I_2 - 3) \quad (2.22)$$

où • a et b sont des constantes du matériau, déterminés sur un état proche de l'état naturel (c'est-à-dire, l'état où $\chi = X$ et $\sigma = 0$). Le matériau modélisé par cette fonction est appelé

Matériau de Mooney et Rivlin. On remarque que ce matériau est un cas particulier du matériau d'Ogden. Il suffit de mettre $M = N = 1$ et $\gamma_1 = \delta_1 = 2$ dans l'expression (2.21).

Le Matériau Neo-Hookean est un autre exemple de matériau incompressible. Sa fonction W , exprimée par l'expression (2.23), est un cas particulier de l'expression (2.22), puisque la constante b est égal à zero.

$$W = a(I_1 - 3) \tag{2.23}$$

Il faut remarquer que ces modèles approchent bien le comportement de matériaux incompressibles, type caoutchouc, en grandes déformations. Par exemple, dans l'essai de traction simple montré dans la Fig. 2.2, le matériau de Mooney et Rivlin se comporte bien pour des déformations allant jusqu'à 150%, selon Beatty, [1987]. Toutefois, il y a petites variations de volume négligeables, par lesquelles on voit que le matériau n'est pas totalement incompressible. Alors, il est raisonnable de penser à une fonction W qui prenne en compte le troisième invariant, I_3 , mais qui à la limite, le matériau soit presque-incompressible.

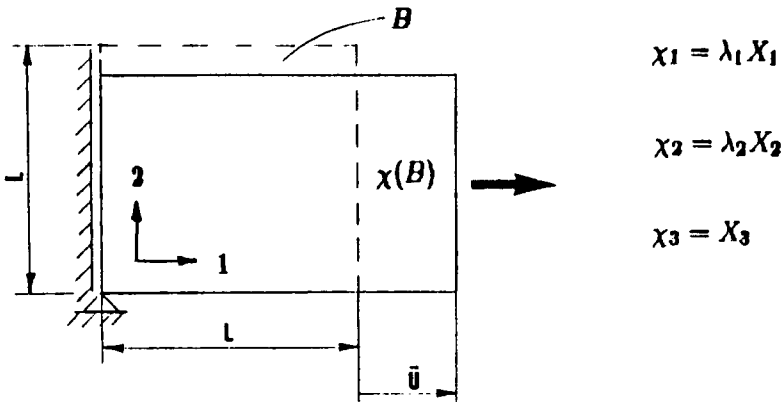


Fig. 2.2- L'essai de Traction Simple.

Ainsi, on rajoute au matériau de Mooney et Rivlin une fonction convexe, $\tau(\delta)$, telle que:

$$W = a(I_1 - 3) + b(I_2 - 3) + \tau(I_3) \quad (2.24a)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \tau(\delta) = \infty \quad (2.24b)$$

Maintenant le matériau de Mooney-Rivlin est appelé matériau compressible. Ciarlet et Geymonat, [1988], proposent pour $\tau(\delta)$ l'expression suivante:

$$\tau(I_3) = cI_3 - d \log(I_3)^{1/2} \quad (2.25)$$

où c et d sont constantes à déterminer proches de l'état naturel.

On va utiliser cette forme d'énergie, exprimée par les expressions (2.24a et b), pour s'approcher du matériau de Mooney et Rivlin incompressible.

La formulation du problème d'équilibre de l'Elasticité pour un matériau incompressible est posée de la façon suivante:

Soit $S = \{u \in (H^1(B))^3\}$, où H^1 est un espace de Hilbert,

Problème P1:

* Trouver la configuration χ qui satisfait la relation $u = \chi - X$, $u \in S$, de façon à vérifier les relations suivantes:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = -f & \text{sur } B \\ \sigma n = g & \text{sur } \tau_g \\ \sigma = -pI + \frac{\partial W}{\partial B} & \\ \chi = \bar{\chi} & \text{sur } \tau_u \end{cases} \quad (2.25)^*$$

où $\{f, g\} \in (L^2(B))^3 \times (L^2(\tau_g))^3$ sont des densités de charge volumiques et surfaciques, respectivement;

- τ_g est le bord de B où on impose g ;
- τ_u est le bord de B où on impose $\chi = \bar{\chi}$;

- n est la normale extérieure à B en τ_q ;
- p est une fonction scalaire qui représente une pression non-constitutive. Cette fonction, comme dans le cas linéaire, (voir expression (2.17a et b)), n'affecte pas la configuration, χ , seulement la tension, σ .

La formulation variationnelle classique, basée sur le champ d'une seule variable, ne suffit pas pour traiter le problème d'incompressibilité. On voit par l'expression (2.25c) que la contrainte σ est une fonction de la configuration, χ , et, en plus, de la pression, p .

Le Principe de Hellinger-Reissner traite ce genre de problème par une formulation variationnelle avec deux champs de variables: le champ de déplacements et le champ des contraintes. Plus général, le Principe de Hu-Washizu traite le problème avec quatre variables indépendantes: les déformations, les déplacements, les contraintes et les efforts surfaciques.

Si d'une certaine façon, ces principes posent bien le problème d'équilibre variationnel, ils introduisent par ailleurs un nombre excessif d'inconnues. Lorsqu'on les utilise dans la Méthode des Éléments Finis, on s'aperçoit que elles conduisent à un système d'équations qui n'est pas économique à résoudre.

Le travail de Hermann, [1965], est un des premiers efforts pour l'application de formulation mixte dans la Méthode des Éléments Finis. Dans le contexte d'un théorème variationnel, Hermann a développé une forme réduite du Principe de Hellinger-Reissner pour traiter des problèmes en Elasticité Linéaire Incompressible et Presque-incompressible. Cette forme, connue comme Principe de Hermann, a permis la proposition des premiers éléments finis efficaces, pour le traitement de l'incompressibilité.

La formulation mixte basée sur le Principe de Hermann utilise deux champs de variables: le champ de déplacements et le champ de pression. Ce dernier champ est une fonction scalaire de la pression moyenne sur l'élément fini. On montre que cette formulation donne des résultats convergents.

On écrit la formulation mixte du problème P1 en utilisant la *Téchnique du Lagrangien Perturbé*. Soit $V = \{v \in H^1(B); v = 0 \text{ sur } \tau_u\}$ l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles; on définit la fonctionnelle perturbée, $L_\alpha(v, q)$, comme,

$$L_\alpha(v, q) = F(v) + \int_B [qL(v)] dB - \frac{\alpha}{2} \int_B \|q\|^2 dB \quad (2.26)$$

où • $F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v)$ est le Potentiel d'Energie Totale;

- $q \in T = \{q \in H^1(B); q = 0 \text{ sur } \tau_u\}$;
- $L : V \rightarrow R$;
- $\alpha > 0$ est une perturbation.

avec $a(\chi, v) = \int_B (\frac{\partial W}{\partial B}) B : \frac{\partial v}{\partial \chi} dB$;

$$(f, v) = \int_B f \cdot v dB + \int_{\tau_g} g \cdot v dS$$

Oden et Kikuchi, [1982], fournissent plus de details pour l'obtention de la fonction L_α et les conditions sous lesquels L_α est convexe et coercive.

La formulation variationnelle similaire au problème P1 est posée pour l'Elasticité Linéaire, comme:

Problème P2.

"Trouver le déplacement $u \in S$ et la pression $p \in T$, de façon à vérifier les relations suivantes:

$$a(u, v) + (p, L(v)) = (f, v), \quad \forall v \in V \quad (2.27a)$$

$$(L(u), q) - \lambda * (p, q) = 0, \quad \forall q \in T \quad (2.27b)^p$$

où • $a(u, v) = \int_B 2 * \mu * Grad_u u : Grad_v v dB$

- $(p, L(v)) = \int_B p * L(v) dB$
- $L(v) = tr Grad_v v$
- $(p, q) = \int_B p \cdot q dB$

Remarque: La constante λ joue le rôle de la perturbation α .

A la suite du Principe de Hermann, d'autres formulations mixtes ont été formulés pour traiter plusieurs problèmes avec restrictions comme, par exemple, ceux de plaques et de

coques. Mais, il reste deux difficultés avec ces formulations: d'abord, le temps de calcul est encore grand à cause du nombre d'inconnus qu'on ajoute. Ensuite, la généralisation pour les problèmes non-linéaires n'est pas toujours claire.

Alors, il fallait trouver une formulation avec un seul champ d'inconnues, qui prendrait en compte les avantages de la formulation mixte dans le cas de l'incompressibilité. Zienkiewicz, Taylor et Too, [1971], sont les premiers à proposer une Technique d'Intégration Réduite pour traiter le problème de plaques et coques, avec un seul champ de variables. Seulement avec le Théorème d'Équivalence de Malkus et Hughes, [1978], on réussit à montrer que cette formulation d'intégration équivaut à la formulation mixte. Les applications de ce théorème ont été faites dans le cas de l'élasticité incompressible et presque-incompressible, pour les équations de Navier-Stokes, pour la flexion de plaques et coques et pour l'élasticité non-linéaire. Il faut remarquer qu'on profite de toute la théorie de la formulation mixte en n'utilisant qu'un seul champ de variables.

On utilise la Méthode de Pénalisation, décrite par Oden et Kikuchi, [1982], pour trouver une fonctionnelle $F_\alpha(v)$, telle que:

$$F_\alpha(v) = F(v) + \frac{1}{2 * \alpha} * \int_B (L(v))^2 dB \quad (2.28)$$

Ainsi, on peut écrire une formulation avec un seul champ de variables. On pose le problème variationnel équivalent au problème P2, comme:

Problème P3:

*Trouver le déplacement $u, u \in S$, de façon à satisfaire la relation suivante:

$$a(u, v) + \frac{1}{\lambda} * \int_B L(u)L(v)dB = (f, v); \quad \forall v \in V \quad (2.29)^*$$

Remarque: Par le théorème d'équivalence de Malkus et Hughes, l'intégration des termes de pression en (2.29) doit être réalisé sur des points qui seraient les noeuds où on définirait les fonctions de base associées à l'espace T dans la formulation mixte.

2.3- La choix de l'Elément Fini

Il reste encore un problème à résoudre par rapport au choix de l'élément fini. Avant le développement de la formulation mixte, les formulations basées sur un seul champ de variables ne donnaient pas de bons résultats dans le traitement de l'incompressibilité. Plusieurs auteurs remarquent qu'en général, la restriction directe du champ de déplacements est sensible au type de l'élément, à son orientation sur le maillage, au nombre total de degrés de liberté et à sa relation avec le nombre total de restrictions, au type de problème traité et à sa géométrie particulière.

Nagtegaal, Parks et Rice [1974], proposent un critère simple pour prévoir la possibilité de succès d'un élément fini. Il s'agit de la détermination d'une relation entre le nombre total de degrés de liberté, N_{DL} , par rapport au nombre total de restrictions, N_R , quand le maillage est raffiné infiniment. Le critère est donné par:

$$r = \frac{N_{DL}}{N_R} \quad (2.30)$$

Il y aura convergence si N_{DL} augmente plus vite que N_R . N_{DL} est donné par l'expression:

$$N_{DL} = N_{DN} * R_{REF} \quad (2.31)$$

où • N_{DN} est le nombre de degrés de liberté par noeud;

• R_{REF} exprime le nombre de noeuds par élément quand le maillage est raffiné infiniment et, selon Nagtegaal, Parks et Rice, il est donné par:

$$R_{REF} = \frac{N}{2} \quad (2.32)$$

où $N * \pi$ est la somme des angles internes de l'élément. Par exemple, soit un problème de déformation plane avec le domaine discretisé par des éléments finis triangulaires de deuxième ordre, l'élément T6, comme montré dans la Fig. 2.3. Pour cet élément la valeur de $N * \pi$ est

$4 \cdot \pi$, de façon qu'à la limite, le maillage aura 2 noeuds par élément selon l'expression (2.32). Alors, pour ce problème $N_{DN} = 2$ et $N_{DL} = 4$.

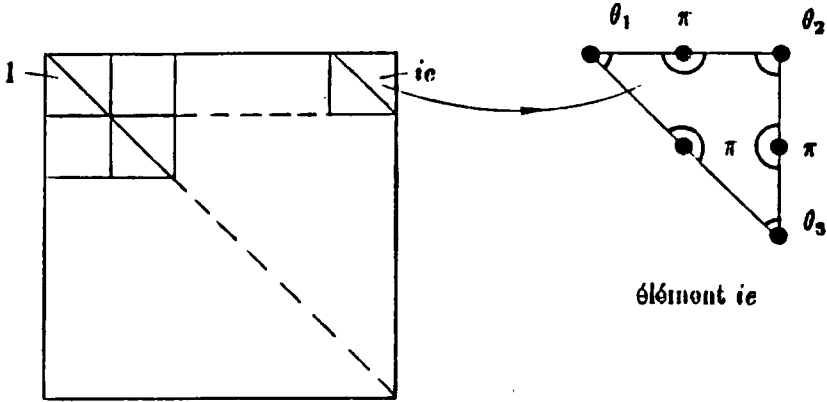


Fig. 2.3 - Domaine Discretisé avec l'élément T6.

Pour calculer le nombre de restrictions on doit se rapporter à l'expression de la fonction de base pour l'élément considéré. Ensuite, on impose la restriction sur le champ des variables approchées par cette fonction. Par exemple, dans le cas d'élasticité linéaire en petites déformations, on exprime l'incompressibilité par l'expression (2.16), qui est équivalent à la relation (2.33):

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (2.33)$$

où u est approché par,

$$u = \sum_{i=1} N_i \bar{u}_i \quad (2.34)$$

où \bar{u}_i sont les valeurs de u aux noeuds. De nouveau, si on prend l'élément T6, sa fonction de base dans un système de coordonnées général, est donnée par:

$$N = a + b * x + c * y + d * x * y + e * x^2 + f * y^2 \quad (2.35)$$

où a , b , c , d , e et f sont des constantes. L'introduction de cette fonction dans l'expression (2.34) et (2.33) donnent les restriction sur l'élément pour que l'incompressibilité soit vérifiée. Dans le cas de déformations planes ces restrictions sont exprimées par les expressions (2.36a, b et c).

$$b + c = 0 \quad (2.36a)$$

$$d + 2 * f = 0 \quad (2.36b)$$

$$d + 2 * e = 0 \quad (2.36c)$$

Le nombre de restrictions par élément, N_R , est 3. Finalement, par l'expression (2.30) la valeur de r est $\frac{1}{3}$.

Il faut remarquer que N_R depend de la disposition des éléments finis dans le maillage. La manière d'arranger les éléments permet ^{de} réduire le nombre total de restrictions indépendantes.

Il est raisonnable de penser que pour le cas continu il y ait aussi une relation entre le nombre de degrés de liberté et le nombre de restrictions. Au fur et à mesure qu'on raffine le maillage, la valeur de r du problème discretisé, r_D , devrait être égal à la valeur de r du problème continu, r_C . De toutes façons, on se trouve devant les éventualités suivantes:

$\frac{r_D}{r_C} > 1$, il y a peu de restrictions;

$\frac{r_D}{r_C} = 1$, on a le cas idéal;

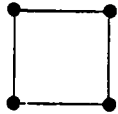

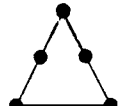
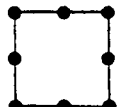
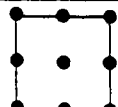
$\frac{r_D}{r_C} < 1$, il y a trop de restrictions dans le problème discret;

$\frac{r_D}{r_C} \ll 1$, il apparait le phénomène de *locking*.

Dans le cas plan, le nombre de degrés de liberté est 2 et le nombre de restrictions est 1.

Alors, $r_C = 2$ et $\frac{r_D}{r_C} = \frac{2}{3}$ pour le maillage de la Fig. 2.3.

Sur la base des considerations anterieures on peut construire un tableau avec quelques uns des éléments les plus utilisés dans la discretisation de problèmes d'Elasticité Linéaire Plane. Dans ce cas on a déjà vu que $r_G = 2$.

L'Elément	N_R [Restr.] Elem.	N_{DL} [Deg. de Lib.] Elem.	r_D [Deg. de Lib.] Restr.	r_D/r_G
	1	1	1	1 / 2
	3	4	4 / 3	2 / 3
	3	2	2 / 3	1 / 3
	6 à 8 *	6	1 à 3/4	1/2 à 3/8
	4	8	2	1

(* La valeur depend si le bord de l'élément est linéaire ou quadratique, respectivement.)

Tableau 2.1- Les Types d'Eléments Finis.

Avec la formulation mixte des éléments finis il faut bien choisir les fonctions qui approchent le champ de pression. Oden, [1971], a été un des premiers auteurs à suggérer l'utilisation de fonctions de base pour la pression qui soient d'ordre inférieur à celles des déplacements. Hughes, [1987], suggère cette mesure pour adoucir l'effet de la pression sur les déplacements.

L'ordre de cette fonction de base peut être estimé sur le nombre souhaitable de restrictions par élément, N_R . On le tire de l'expression (2.30) quand $r_D = r_C$:

$$N_R = \frac{N_{DL}}{r_C} \quad (2.37)$$

La valeur de N_R donne le nombre de monomes indépendants pour la fonction de base. Par le tableau 2.1, la valeur de N_R pour l'élément T8 est 2. En fait, on utilise l'élément T8 avec une fonction constante pour la pression (un seul monome).

De toutes façons, il y a une théorie mathématique bien établie sur la convergence des éléments finis. Les travaux de Ladyszhenkaya, [1969], Babuska, [1972] et [1973], et Brezzi, [1974] fournissent une condition de stabilité, connue comme *La Condition LBB*. Pour les éléments que satisfont cette condition, on peut écrire l'estimation de l'erreur comme:

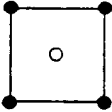
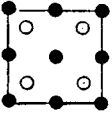
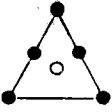
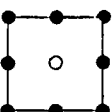
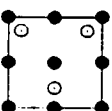
$$\|u^h - u\|_1 + \|p^h - p\|_0 = O(h^{\min(k,l+1)}) \quad (2.38)$$

où, k et l sont les ordres des interpolations de déplacement et de pression. Avec ces éléments le phénomène de *locking* ne se produit pas.

La condition LBB est aussi utilisée dans l'intégration réduite avec pénalisation des termes de pression. Oden et Kikuchi, [1982], présentent une méthode systématique pour tester la condition LBB. On impose des conditions aux limites de Dirichlet. Dans le cas plan avec un domaine rectangulaire, ils exhibent quelques éléments qui satisfont la condition LBB, comme, par exemple, les éléments du tableau 2.2.

Hughes, [1987], présente d'autres types d'éléments qu'on ne va pas considérer dans ce travail:

- Les éléments solides, c'est-à-dire, avec trois degrés de liberté par noeud;
- Les éléments avec des fonctions pour le champ de pression continues sur le bord;
- Les macro-éléments.

	Type de l'Élément	Interpol. du Déplacement	Interpol. de la Pression	Intégration Réduite de Gauss
a		Bi-linéaire	Constante	Un point
b		Bi-quadratique	Bi-linéaire	2 x 2
c		Quadratique	Constante	Un point
d		<i>Serendipity</i>	Constante	Un point
e		Bi-quadratique	Linéaire	3 points

*(Les types a et b ne vérifient pas la condition LBB, mais on peut prouver qu'ils convergent sous quelques hypothèses (voir Hughes, [], et Oden et Kikuchi, [1982]))

** (Les types c et d convergent plus lentement que le type e.)

Tableau 2.2- Eléments Finis pour Traiter l'Incompressibilité.

2.4- Résultats Numériques

Malkus et Hughes, [1978], traitent plusieurs problèmes avec restriction en utilisant la Technique d'Intégration Réduite avec Pénalisation. On fait la discretisation avec l'élément bi-linéaire Q_4 . Les termes des déplacements sont intégrés avec 2×2 points de Gauss. Le terme

de restriction est intégré avec 2×2 et 1 points de Gauss, de façon à comparer les solutions quand on force l'incompressibilité. Ils traitent les problèmes de Déformation Plane, de poutre et de plaques. Dans tous ces cas ils arrivent aux conclusions suivantes:

- 1- Les résultats avec 2×2 et 1 points de Gauss sont semblables quand il n'y a pas de restriction;
- 2- Plus on force la restriction, plus les résultats avec 2×2 points de Gauss divergent de ceux avec 1 point seulement;
- 3- La discretisation avec l'élément Q4 à 1 point de Gauss pour la restriction approche bien les problèmes avec restriction.

Sussman et Rahe, [1987], utilisent une Formulation Mixte pour traiter un problème d'élasticité linéaire avec déformations planes. Ils discretisent avec les éléments Q4, Q8 et Q9. Différentes fonctions d'intégration pour le terme de pression sont prises en compte. On utilise 3×3 points de Gauss pour les éléments Q8 et Q9 et 2×2 pour l'élément Q4. D'une façon générale, ils arrivent aux conclusions résumées dans le tableau 2.3.

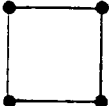
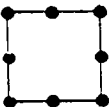
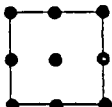
Type de l'Élément	Interpolation de la Pression	Observation
Q4: 	Formulation de Déplacement (Q4)	Il apparaît un sévère effet de <i>locking</i> dans l'élément.
	Constante (Q4/1)	Il y a <i>locking</i> , mais moins intense.
Q8: 	Formul. de Déplac. (Q8)	<i>Locking</i> sévère de l'élément. C'est le cas plus sévère.
	Bi-Linéaire (Q8/4)	<i>Locking</i> moins intense.
	Linéaire (Q8/3)	<i>Locking</i> moins intense encore que Q8/4.
Q9: 	Formul. de Déplac. (Q9)	<i>Locking</i> sévère de l'élément.
	Bi-Linéaire (Q9/4)	<i>Locking</i> de l'élément au même niveau de Q8/3.
	Linéaire (Q9/3)	Il n'y a pas de <i>locking</i> de l'élément.

Tableau 2.3- Résultats en Déformation Plane.

Par le tableau 2.3 on conclut que la formulation basée sur les déplacements (classique) est la pire. Les éléments $Q4/1$, $Q8/3$, et $Q9/4$ donnent de meilleurs résultats. Pourtant, ils bloquent encore. Sans doute, le meilleur élément est le $Q9/3$.

Sussman et Bathe utilisent l'élément $Q9/3$ pour traiter des problèmes de l'élasticité linéaire orthotrope, de l'élasticité non-linéaire, de problèmes de contact, etc.. Ils arrivent toujours à obtenir de bons résultats avec cet élément.



3- Cas de Petites Déformations

On va traiter le problème de l'incompressibilité dans *l'Elasticité Linéaire en Petites Déformations*, en utilisant la Technique d'Intégration Réduite avec Pénalisation. Le champ de variables est celui des déplacements, u . On ne va considérer que le cas de déformations planes; u est donné par ses deux composants (u_1, u_2) .

D'abord, on pose le problème d'équilibre. Ensuite, on fait la discretisation du problème avec différents types d'éléments finis. On considère quelques exemples numériques avec ces éléments, de façon à comparer les résultats dans le cas compressible et presque-incompressible. On connaît la solution analytique pour quelques exemples. À la fin, on applique le code sur un exemple présenté dans la littérature, pour lequel la solution numérique est connue. Il s'agit d'un problème de conditions aux limites non-linéaires traité par Malkus et Hughes, [1978].

3.1- Le Problème d'Equilibre

Le problème d'équilibre continu en petites déformations est le cas plus simple de la formulation général, considéré dans le problème P1 de la section 2. On le pose comme,

Problème L1:

"Trouver le champ de déplacements $u : B \rightarrow R^2$, tel que:

$$\begin{cases} \text{Div} \sigma = -f & \text{sur } B; \\ \text{Div} u = 0 & \text{sur } B; \\ u = \bar{u} & \text{sur } \Gamma_u; \\ \sigma n = g & \text{sur } \Gamma_g; \end{cases} \quad (3.1)$$

et,

$$\sigma = -pI + 2\mu \text{Grad}_s u \quad (3.2a)$$

$$p = -\lambda(\text{tr Grad}_s u) \quad (3.2b)''$$

où • Div est l'opérateur divergence, $\frac{\partial}{\partial x}$;

La forme variationnelle du problème L1 est posée en utilisant la Technique d'Intégration Réduite avec Pénalisation. On la présente dans le problème P3 de la section 2.

Dans le cas sans restrictions, on approche l'espace solution, en utilisant la formulation de Galerkin (voir Hughes, [1987]). De la même façon, l'espace solution S est approché ici par l'espace S^h , où $S^h \subset S, S^h = \{u^h : B \rightarrow R^2; u^h \text{ sur } \Gamma_u, u, u^h \in [H^1(B)]^2\}$. On écrit la formulation approchée du problème d'équilibre comme:

Problème L2

"Trouver $v^h \in S^h$, tel que, quel que soit $v^h \in V^h$,

$$\int_B (2\mu Grad_s v^h) : Grad_s v^h dB + \int_B (\lambda Div u) I : Grad_s v^h dB + \\ - \left(\int_B f \cdot v^h dB + \int_{\Gamma_g} g \cdot v^h d\Gamma \right) = 0 \quad (3.3)''$$

où • $V^h \subset V, V^h = \{v^h : B \rightarrow R^2; v^h = 0 \text{ sur } \Gamma_u, v^h \in [H^1(B)]\}$

Pour la formulation discrète du problème L2, présentée dans le problème L3 ci-dessous, on choisit la fonction de base N_i tel que $V^h = span\{N_i, i = 1, \dots, 2n\}$, où $2n$ est le nombre de degrés de liberté.

Problème L3

"Trouver $\{u_i, i = 1, \dots, 2n\} \in R^{2n}$, tel que,

$$u^h = \sum_{i=1}^{2n} u_i N_i + \sum_{j=1}^{2m} u_j N_j \quad (3.4)$$

et

$$(K_\lambda + K_\mu)u^h = F \quad (3.5)''$$

où

$$\bullet K_\lambda = \lambda \int_B \text{Div} N_i : \text{Grad}_s N_j dB \quad (3.6a)$$

$$\bullet K_\mu = 2\mu \int_B \text{Grad}_s N_i : \text{Grad}_s N_j dB \quad (3.6b)$$

$$\bullet F = \int_B f \cdot N_j dB + \int_{\Gamma_s} g \cdot N_j d\Gamma \quad (3.7)$$

avec $i, j = 1, \dots, 2(m+n)$ et m , le nombre de noeuds sur Γ_u .

On définit la fonction N_i sur le support approché $B = \sum_{e=1}^{nel} B^e$. Quel que soit e_1, e_2 , ($1 \leq e_1, e_2 \leq nel$), $B^{e_1} \cap B^{e_2} = \emptyset$.

Pour chaque élément B^e , on définit les matrices K_μ^e, K_λ^e , tel que,

$$K_\lambda = \sum_{e=1}^{nel} K_\lambda^e \quad (3.8a)$$

$$K_\mu = \sum_{e=1}^{nel} K_\mu^e \quad (3.8b)$$

On utilise une technique d'intégration de Gauss, (voir Hughes, [1987]), telle que:

$$K_\lambda^e = \lambda \sum_{i_1=1}^{nint_1} [(\text{Div} N_{i_1}^{l_1}) I : \text{Grad}_s N_{j_1}^{l_1}] W^{l_1} \quad (3.9a)$$

$$K_\mu^e = 2\mu \sum_{i_2=1}^{nint_2} [\text{Grad}_s N_{i_2}^{l_2} : \text{Grad}_s N_{j_2}^{l_2}] W^{l_2} \quad (3.9b)$$

où \bullet $nint$ est le nombre de points d'intégration;

- \bullet N_i^l est la fonction N du noeud i calculée sur le point l ;
- \bullet W est le poids d'intégration;
- \bullet les indices 1 et 2 représentent λ et μ , respectivement.

3.2- Présentation du Code Numérique *ELIN*

L'algorithme utilisé pour la construction du code *ELIN* ressemble aux algorithmes classiques de l'élasticité linéaire sans restriction. Les différences apparaissent dans le calcul de la matrice globale de rigidité, K . Cette matrice est la somme des matrices données dans les expressions (3.8a et b):

$$K = \sum_{e=1}^{nel} (K_{\lambda}^e + K_{\mu}^e) \quad (3.10)$$

où K_{λ}^e et K_{μ}^e sont calculés par les expressions (3.9a et b).

L'Algorithme du Code *ELIN*

1- Entrée de Données:

Soit $nint_1$ et $nint_2$ le nombre de points d'intégration de la partie dépendant de λ et μ , respectivement, tel que, $nint_1 \leq nint_2$. Les valeurs pour $nint_1$ ou $nint_2$ dépendent de la forme de l'élément implementé. (*carré* ou *triangle*). On donne dans le tableau 3.1 le nombre de points d'intégration et le nombre de noeuds possibles par type d'élément.

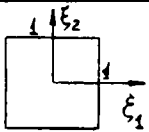
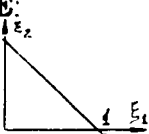
Forme	Type	$nint$
CARRE: 	Bi-linéaire (4 noeuds)	1 4 et
	Bi-quadratic (9 noeuds)	9
TRIANGLE: 	Linéaire (3 noeuds)	1 3
	Quadratic (6 noeuds)	4 et 6

Tableau 3.1- Eléments Implementés dans le code *ELIN*.

Dans le tableau 3.2 on donne la liste de variables d'un fichier d'entrée pour un domaine discretisé avec l'élément Q_4 , considéré dans la Fig. 3.1 .

2- Calcul des Fonctions de Forme Locales

La fonction N_i et ses dérivées sont calculées par rapport au système (ξ_1, ξ_2) , selon la

Fig. 3.2:

$$N_i = N_i(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) \quad (3.11)$$

où, $\bullet (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$ est le point d'intégration pour $nint = nint_1$ ou $nint = nint_2$.

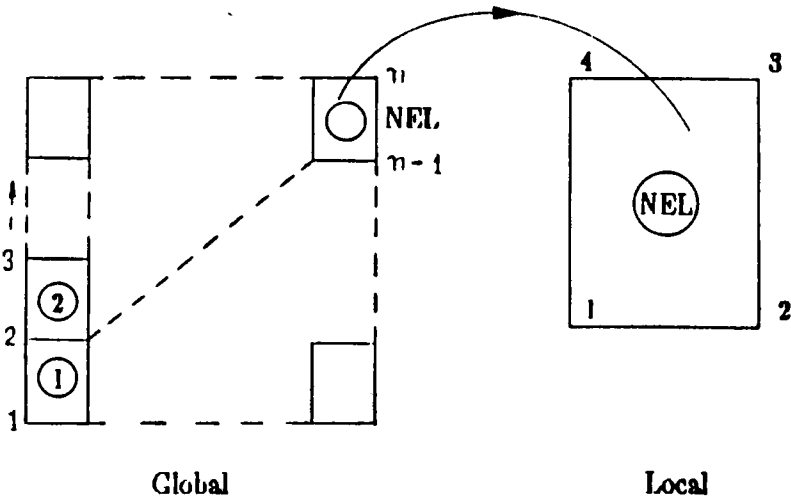


Fig. 3.1- Discretisation avec l'élément Q_4

3- Calcul du Vecteur F (expression 3.7)

On utilise toujours le nombre d'intégration $nint_2$.

4- Calcul des Fonctions de Forme Globales.

La fonction globale et ses dérivées par rapport à un système de coordonnées général (x_1, x_2) sont données par:

$$N_i(x_1, x_2) = N_i(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) \quad (3.12a)$$

$$N_{i,s} = \xi_{i,s} N_{i,\xi} \tag{3.12b}$$

où

$$\bullet N_{i,s} = \begin{pmatrix} N_{i,s_1} \\ N_{i,s_2} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \xi_{i,s} = \begin{pmatrix} \xi_{1,s_1} & \xi_{1,s_2} \\ \xi_{2,s_1} & \xi_{2,s_2} \end{pmatrix}$$

$$\bullet N_{i,\xi} = \begin{pmatrix} N_{i,\xi_1} \\ N_{i,\xi_2} \end{pmatrix}$$

'CARRE'	'Q4'	4 DOMAINE, TYPE D'ELEMENT ET NOEUDS/ELEM.			
	2	2	POINTS D'INTEG. INCOMPRES.		
	2	2	POINTS D'INTEG. COMPRES.		
	4	1	NOMBRE DE NOEUDS ET D'ELEMENTS		
	1	1	NOMBRE DE INTERV. EN X ET Y		
0.0000000000000000E+00			0.0000000000000000E+00	(X,Y)	1
0.0000000000000000E+00			1.0000000000000000	(X,Y)	2
1.0000000000000000			0.0000000000000000E+00	(X,Y)	3
1.0000000000000000			1.0000000000000000	(X,Y)	4
	1	3	4	2 ELEM.	1
1		0.0000000000000000E+00		0.0000000000000000E+00	DL 1
1		0.0000000000000000E+00		0.0000000000000000E+00	DL 2
1		0.0000000000000000E+00		0.0000000000000000E+00	DL 3
0		0.0000000000000000E+00		0.0000000000000000E+00	DL 4
0		0.0000000000000000E+00		0.5000000000000000	DL 5
0		0.0000000000000000E+00		0.0000000000000000E+00	DL 6
0		0.0000000000000000E+00		0.5000000000000000	DL 7
0		0.0000000000000000E+00		0.0000000000000000E+00	DL 8
1		2	1	2	1
7		8	4	7	2
3		4	11	16	3
5		6	22	29	4
0		0	37	0	5

Tableau 3.2- Liste de Variables d'Entrée,
(Domaine discretisé avec un seul élément Q4).

5- Calcul de la Matrice de Rigidité Élémentaire, K^e

$$K^e = K_\mu^e + K_\lambda^e$$

où, • K_λ^e et K_μ^e sont calculés par les expressions (3.6a) et (3.6b).

6- Assemblage de la Matrice de Rigidité

L'assemblage est réalisé de façon vectorielle.

7- Résolution du Système Linéaire

On résout le système de l'expression (3.5) par la Méthode d'Élimination de Gauss.

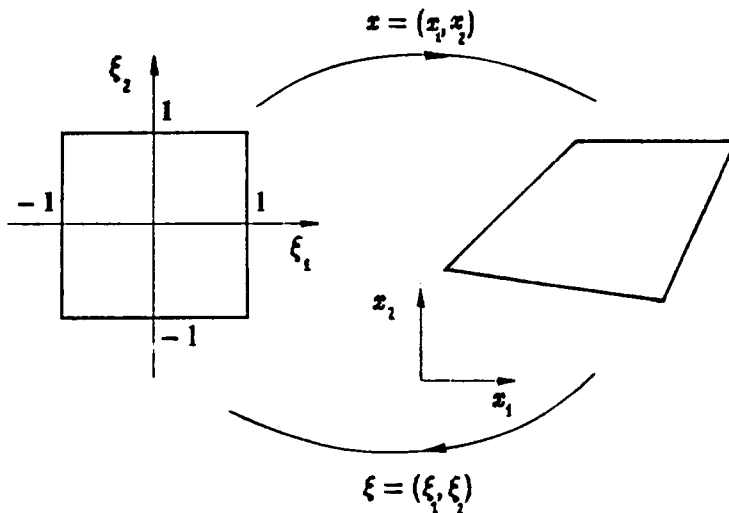


Fig. 3.2- Coordonnées Locales et Globales.

3.3- La Validation du Code

On considère deux types de tests. D'abord, on discrétise un domaine avec un seul élément type Q_4 . Ceci nous permet de valider le code, et également d'analyser différents

problèmes avec différents schémas d'intégration. Ensuite, on considère quelques problèmes, traités à l'aide de différents types d'éléments. On fait l'analyse dans les cas compressible et incompressible. On impose la condition d'incompressibilité en considérant la relation $\frac{\lambda}{\mu}$ suggéré par Hughes, [1987]:

$$10^7 \leq \frac{\lambda}{\mu} \leq 10^9$$

On prend la valeur de μ égal à 1.0 pour tous les cas. La valeur de λ est 1.0 pour le cas compressible, ($\nu = 0.25$) et elle est $1.0 * 10^8$, ($\nu = 0.499999995$), pour le cas incompressible.

a- Discretisation avec l'élément Q4

On traite les essais considérés dans le tableau 3.4. On ne considère qu'un seul élément Q4 de dimensions unitaires (voir Fig. 3.3). On impose les conditions aux limites de la façon indiquée sur les dessins. On donne les solutions analytiques en déplacements pour les essais de traction simple (cas 1 et 2), traction bi-axial (cas 3) et cisaillement simple (cas 4) dans le tableau 3.3.

CAS	u_1	u_2
Traction Simple	$\frac{(1-\nu)}{2\mu} g_1 X_1$	$-\frac{\nu}{2\mu} g_1 X_2$
Traction Isotrope	$\frac{[g_1 - \nu(g_1 + g_2)]}{2\mu} X_1$	$\frac{[g_2 - \nu(g_1 + g_2)]}{2\mu} X_2$
Cisaillement Simple	$\frac{1}{\mu} g_1 X_2$	0

Tableau 3.3- Solutions Analytiques pour quelques Essais Classiques.

Dans le tableau 3.4 on présente les résultats numériques en déplacements pour le noeud '4' de la Fig. 3.3. Pour le cas 1, les valeurs analytiques et numériques sont égales, sauf quand $nint_1 = 1$ et $nint_2 = 1$. La matrice de rigidité est non inversible et aucune valeur de α est calculée. Hughes, [1987], prévoit cette anomalie comme un défaut de l'ordre de la matrice.

Du cas 1 au cas 4 on note que pour une même relation $\frac{\lambda}{\mu}$, les déplacements pour $nint_1 < nint_2$ sont les mêmes que pour $nint_1 = nint_2$. Les cas 5 et 6, plus sévères que les précédents, ne présentent pas ces caractéristiques. Pour $\frac{\lambda}{\mu} = 1.0$, les déplacements obtenus quand $nint_1 < nint_2$ sont un petit plus grands que quand $nint_1 = nint_2$. Pour $\frac{\lambda}{\mu} = 1.0 * 10^6$, les cas 5 et 6 présentent le phénomène de *locking* quand $nint_1 = nint_2$, c'est-à-dire, que les déplacements sont nuls. Par contre, si $nint_1 < nint_2$, ce phénomène disparaît.

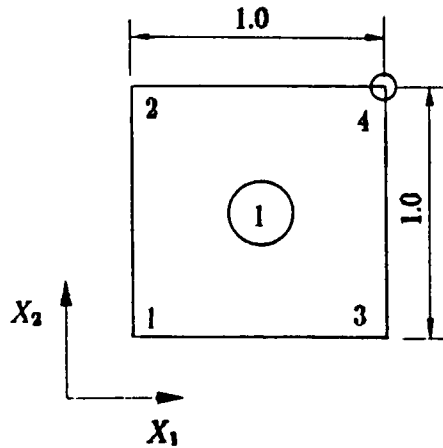


Fig. 3.3- Le Domaine Unitaire Discretisé par 1 Élément Q4.

On calcule le volume pour les cas 5 et 6 quand $\frac{\lambda}{\mu} = 10^6$ et $nint_1 < nint_2$. Le volume pour le cas 5 est 0.84 et pour le cas 6 est 1.00. Ces volumes ne sont pas représentatifs, parce qu'on traite un problème avec conditions aux limites non-homogènes en utilisant un seul élément pour la discretisation. Donc, il faut raffiner davantage le maillage.

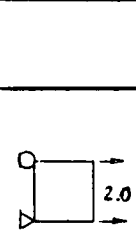
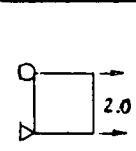
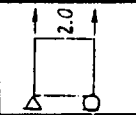
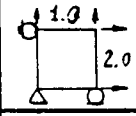
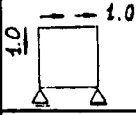
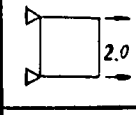
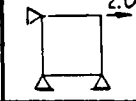
CAS		$\frac{\Delta}{P}$	min. max.	$(u_1, u_2)_{ANAL.}$	$(u_1, u_2)_{NUM.}$
1		1.0	1 / 1 1 / 4 4 / 4 9 / 9	(0.750; -0.250)	(0.750; -0.250)
		$1.0 \cdot 10^8$	1 / 4 4 / 1 4 / 4	(0.500; -0.500)	(0.500; -0.500)
2		1.0	4 / 4	(- 0.250; 0.750)	(- 0.250; 0.750)
3		1.0	4 / 4	(0.625; 0.125)	(0.625; 0.125)
		$1.0 \cdot 10^8$	1 / 4 4 / 4	(0.250; -0.250)	(0.250; -0.250)
4		1.0	4 / 4	(1.0; 0)	(1.0; 0)
		$1.0 \cdot 10^8$	1 / 4 4 / 4	(1.0; 0)	(1.0; 0)
5		1.0	1 / 4 4 / 4	—	(0.727; -0.182) (0.722; -0.167)
		$1.0 \cdot 10^8$	1 / 4 4 / 4	—	(0.400; -0.400) ($0.8 \cdot 10^{-7}$; $-0.6 \cdot 10^{-7}$)
6		1.0	1 / 4 4 / 4	—	(0.952; -0.381) (0.873; -0.327)
		$1.0 \cdot 10^8$	1 / 4 4 / 4	—	(0.667; -0.667) ($0.7 \cdot 10^{-7}$; $-0.5 \cdot 10^{-7}$)

Tableau 3.4- Résultats Obtenus par la Discretisation avec un seul Elément Q4.

b- Discretisation avec les Eléments Q_4 , Q_0 , T_3 et T_6

On considère les cas 1, 5 et 6 du tableau 3.4, avec les discretisations suivantes:

- Q_4 : 16 éléments et 25 noeuds;
- Q_0 : 4 éléments et 25 noeuds;
- T_3 : 32 éléments et 25 noeuds;
- T_6 : 8 éléments et 25 noeuds.

Les maillages pour ces discretisations sont présentés sur la Fig. 3.4. Les conditions aux limites sont les mêmes que celles considérés auparavant. On montre les schémas d'intégration et les résultats numériques pour la paire (u_1, u_2) dans le tableau 3.5. De nouveau, on va considérer les cas compressible, ($\nu = 0.25$), et incompressible, ($\nu = 0.499999995$).

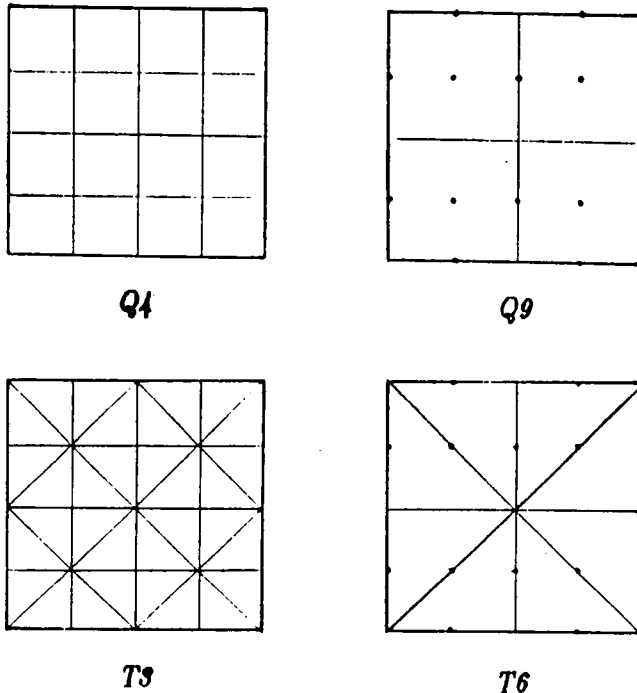


Fig. 3.4- Domaines Unitaires Discretisés par les Eléments Q_4 , Q_0 , T_3 et T_6 .

A partir des résultats présentés dans le tableau 3.5, on fait une analyse cas par cas et on tire quelques conclusions des résultats obtenus avec différents éléments et différents schémas d'intégration.

Cas 1: Pour ce cas, on a les résultats analytiques présentés dans le tableau 3.4. A part l'élément $Q\theta$ avec un schéma d'intégration 1/9, tous les autres éléments donnent de résultats qui s'accordent avec le calcul analytique.

Cas 5: • $Q4$: Il apparait le phénomène de *locking* avec le schéma 4/4 et $\frac{\lambda}{\mu} = 10^8$. Il faut remarquer que dans le cas d'un seul élément, présenté dans le tableau 3.4, ce phénomène apparait aussi.

• $Q9$: Les résultats obtenus avec les schémas 4/9 et 9/9 sont proches les uns des autres, quelle que soit la relation $\frac{\lambda}{\mu}$. Par contre, les résultats obtenus par le schéma 1/9 présentent une différence considérable pour la norme de u , $\Delta\|u\|$, par rapport au schéma 4/9:

$$\Delta\|u\| \simeq 5\% \text{ quand } \frac{\lambda}{\mu} = 1.0$$

$$\Delta\|u\| \simeq 20\% \text{ quand } \frac{\lambda}{\mu} = 1.0 * 10^8$$

• $T6$: Avec les schémas 3/6 et 6/6, on obtient les mêmes résultats. La différence en norme de u , $\Delta\|u\|$, quand on utilise le schéma 1/6 et 3/6 est:

$$\Delta\|u\| = 0.1\%, \text{ quand } \frac{\lambda}{\mu} = 1.0$$

$$\Delta\|u\| = 1.0\%, \text{ quand } \frac{\lambda}{\mu} = 1.0 * 10^8$$

Cas 6: • $Q4$: Il apparait de nouveau le phénomène de *locking* quand $\frac{\lambda}{\mu} = 10^8$.

• $Q9$: De nouveau, la différence en norme de u avec les schémas 1/9 et 4/9 est grande. De même, $\Delta\|u\|$ pour les schémas 4/9 et 9/9 augmente de façon considérable.

Schémas 1/9 et 4/9:

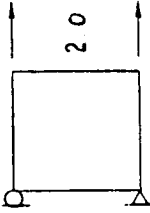
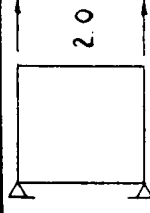
$$\bullet \Delta\|u\| = 5\% \text{ quand } \lambda/\mu = 1.0;$$

$$\bullet \Delta\|u\| = 14\% \text{ quand } \lambda/\mu = 1.0 * 10^8.$$

Schémas 9/9 et 4/9:

$$\bullet \Delta\|u\| = 0.3\% \text{ quand } \lambda/\mu = 1.0;$$

$$\bullet \Delta\|u\| = 9\% \text{ quand } \lambda/\mu = 1.0 * 10^8.$$

CAS	—	Type d'Elém.	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\frac{n_{int}}{n_{ext}}$	$(u_1, u_2)_{NUM.}$
1		Q4	1.0	4 / 4	(0.750; -0.250)
			$1.0 * 10^8$	1 / 4 4 / 4	(0.500; -0.500) (" ; ")
		Q9	1.0	1 / 9 4 / 9	(0.7903; -0.1610) (0.7500; -0.2500)
			$1.0 * 10^8$	1 / 9 4 / 9 9 / 9	(0.6022; -0.3040) (0.5000; -0.5000) (" ; ")
			1.0	1 / 3 3 / 3	(0.7500; -0.2500) (" ; ")
		T3	$1.0 * 10^8$	1 / 3 3 / 3	(0.5000; -0.5000) (" ; ")
			1.0	1 / 6 3 / 6	(0.7500; -0.2500) (" ; ")
		T6	$1.0 * 10^8$	1 / 6 3 / 6 6 / 6	(0.5000; -0.25000) (" ; ") (" ; ")
			1.0	1 / 4 4 / 4	(0.7395; -0.1298) (0.7400; -0.1302)
		5		Q4	$1.0 * 10^8$
1.0	1 / 9 4 / 9 9 / 9				(0.7863; -0.0912) (0.7403; -0.1282) (0.7405; -0.1289)
$1.0 * 10^8$	1 / 9 4 / 9 9 / 9				(0.5806; -0.1688) (0.4372; -0.2502) (0.4049; -0.2508)
T3	1.0			1 / 3 3 / 3	(0.7400; -0.1313) (" ; ")
	$1.0 * 10^8$			1 / 3 3 / 3	(0.4171; -0.2681) (" ; ")
T6	1.0			1 / 6 3 / 6 6 / 6	(0.7406; -0.1297) (0.7413; -0.1305) (" ; ")
	$1.0 * 10^8$			1 / 6 3 / 6 6 / 6	(0.4422; -0.2553) (0.4340; -0.2581) (" ; ")

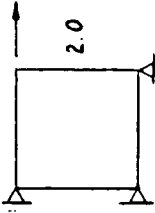
6		Q4	1.0	1 / 4	(0.8040; -0.3362)
				4 / 4	(0.8000; -0.3335)
			$1.0 * 10^8$	1 / 4	(0.5001; -0.5001)
				4 / 4	$(0.8 * 10^{-6}; -0.8 * 10^{-6})$
		Q9	1.0	1 / 9	(0.8496; -0.3106)
				4 / 9	(0.7954; -0.3313)
				9 / 9	(0.7974; -0.3325)
			$1.0 * 10^8$	1 / 9	(0.6510; -0.4497)
			4 / 9	(0.4913; -0.4913)	
			9 / 9	(0.4501; -0.4501)	
		T3	1.0	1 / 3	(0.7832; -0.3224)
				3 / 3	(" ; ")
	$1.0 * 10^8$	1 / 3	(0.4778; -0.4778)		
		3 / 3	(" ; ")		
T6	1.0	1 / 6	(0.8117; -0.3396)		
		3 / 6	(0.8052; -0.3401)		
		6 / 6	(" ; ")		
	$1.0 * 10^8$	1 / 6	(0.5146; -0.5146)		
	3 / 6	(0.4793; -0.4793)			
		1 / 3	(" ; ")		

Tableau 3.5- Résultats Obtenus par la Discretisation avec les Elements Q4, Q9, T3 et T6.

•T6: On obtient les mêmes résultats avec les schémas 3/6 et 6/6. La différence dans la norme de u par rapport au schéma 1/6 est:

- $\Delta\|u\| = 0.7\%$ quand $\lambda/\mu = 1.0$;
- $\Delta\|u\| = 7\%$ quand $\lambda/\mu = 1.0 * 10^8$.

D'une façon générale, on conclut que:

- L'élément Q9 avec le schéma d'integration 1/9 n'approche pas bien l'espace des déplacements, quel que soit la relation $\frac{\lambda}{\mu}$ (compressibilité ou incompressibilité).

- L'élément T3 avec les schémas 1/3 et 3/3 donnent les mêmes résultats, quel que soit les conditions aux limites. Hughes, [1987], prévoit que cet élément ne permet pas d'approcher

l'espace de déplacement dans le cas incompressible, ($\frac{\lambda}{\mu} = 1.0 * 10^8$).

- L'élément *T6* avec les schémas 3/6 et 6/6 donnent les mêmes résultats dans tous les cas et pour toutes les conditions aux limites.

- Les résultats obtenus avec les schémas 1/4 pour le *Q4*, 4/9 pour le *Q9* et 1/6 pour le *T6*, sont proches entre eux. Selon Oden et Kikuchi, [1982], l'élément *T6* avec le schéma 1/6 est le seul élément parmi ceux présentés auparavant qui satisfait la condition *LBB*. Si on le prend comme référence, on observe que la différence en norme de u , $\Delta\|u\|$, pour le cas 3 avec $\frac{\lambda}{\mu} = 1.0 * 10^8$ est:

$$\Delta\|u\| = 2\% \text{ par rapport au } Q4 \text{ avec } 1/4;$$

$$\Delta\|u\| = 5\% \text{ par rapport au } Q9 \text{ avec } 4/9.$$

3.4- Autres exemples:

a- Poutre en Flexion Simple:

Hughes, [1987], présente un exemple d'une poutre en flexion simple. Il utilise l'élément bi-quadratic, *Q4*, avec 2x2 points de Gauss pour approcher le champ de déplacement. Il traite les cas compressible et presque-incompressible en prenant $\nu = 0.3$ et $\nu = 0.499$, respectivement. Il utilise une technique d'intégration réduite proposée par Malkus et Hughes, [1978], pour prendre en compte la presque- incompressibilité.

On montre dans la Fig. 3.5 la discretisation avec 32 éléments utilisée par Hughes. Les conditions de bord pour ce problème sont:

Déplacements:

$$u_1(0, 0) = u_2(0, 0) = 0$$

$$u_1(0, c) = 0$$

Traction:

$$g_1(x, c) = g_2(x_1, c) = 0, \quad x \in]0, l[$$

$$g_1(L, x_2) = 0, \quad x_2 \in]0, c[$$

$$g_2(L, x_2) = \frac{P}{2I}(c^2 - x_2^2), \quad x_2 \in]0, c[$$

$$g_1(0, x_2) = \frac{PL}{I}x_2, \quad x_2 \in]0, c[$$

$$g_2(0, x_2) = -\frac{P}{2I}(c^2 - x_2^2), \quad x_2 \in]0, c[$$

où • $I = 2c^3/3$;

• $L = 16.0$;

• $c = 2.0$.

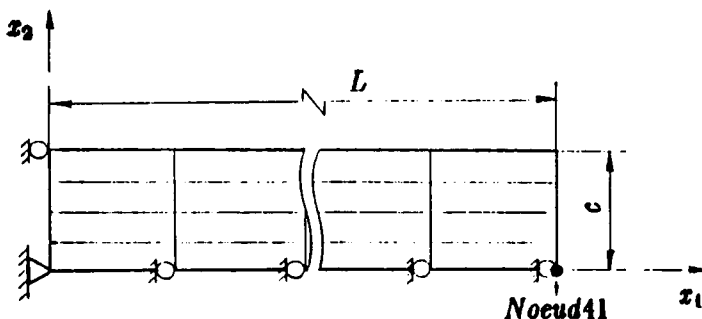


Fig. 3.5- Le Maillage du Problème proposé par Hughes.

Les données d'entrée qu'on utilise pour la résolution avec le code *ELIN* sont celles données par Hughes, sauf les valeurs de la charge P , et du module d'Young, E , que ne sont pas données. Les valeurs suivantes semblent être celles qui ont été utilisés par Hughes; ce sont celles que nous choisissons: $P = 1.0$ $E = 1.0$.

Le tableau 3.6 donne la valeur du déplacement vertical, u_2 , pour le noeud 41. Les valeurs obtenues par le code *ELIN*, $u_{2(E)}$, sont plus grandes que les valeurs données par Hughes, $u_{2(H)}$. Néanmoins, on voit que pour une même valeur de ν , la relation $\frac{u_{2(E)}}{u_{2(H)}}$ ne change pas beaucoup: 0.1% quand $\nu = 0.3$ et 0.2% quand $\nu = 0.499$. Cette relation change beaucoup, ($\sim 15.7\%$), si on compare les résultats pour des valeurs de ν différentes.

Dans le tableau 3.7, on présente des valeurs de $u_{2(E)}$ pour les éléments $Q4$, $Q9$ et $T6$. On considère le même problème que le précédant, mais avec différents approches. En plus, on ajoute les valeurs de $\nu = 0.498$ et 0.499999 . De l'analyse des tableaux 3.6 et 3.7 on tire

les observations suivantes:

I- Pour $\nu = 0.3$, (cas compressible), il n'y a presque différence entre les valeurs de u_2 calculées avec $nint_1 = nint_2$ ou $nint_1 < nint_2$. La petite différence est due à les conditions de charge non-linéaires.

II- Pour $\nu = 0.499$, (cas presque-incompressible), la valeur de u_2 dépend de la relation $\frac{nint_1}{nint_2}$. Selon Hughes, [1987], le schéma d'intégration avec $nint_1 < nint_2$ approche mieux la valeur de u_2 . L'élément $Q4$ est le plus sensible au rapport $\frac{nint_1}{nint_2}$.

Elément	ν	$\frac{nint_1}{nint_2}$	$u_{2(E)}$	$u_{2(H)}$	$\frac{u_{2(E)}}{u_{2(H)}}$	Diff. (%)
Q4	0.3	4 / 4	216.88	0.904	239.9	—
		1 / 4	218.56	0.912	239.7	0.1
(32 élém.)	0.499	4 / 4	67.57	0.334	202.3	15.7
		1 / 4	180.19	0.937	201.9	0.2

Tableau 3.6- Déplacements obtenus par le code *ELIN* et par Hughes.

III- Donnés $\nu = 0.498$, $\nu = 0.499$ et $\nu = 0.499999$, les valeurs de $u_{2(E)}$ ne changent pas beaucoup pour $nint_1 < nint_2$, quel que soit l'élément, ($Q4$, $Q9$ ou $T6$). La différence maximum est de l'ordre de 0.42 % pour l'élément $Q4$.

IV- Pour $nint_1 < nint_2$, plus ν tend vers 0.5, plus $u_{2(E)}$ diminue. Plus ν tends vers 0.30, plus $u_{2(E)}$ augmente. Ces tendances sont cohérents avec l'imposition de l'incompressibilité.

V- Des éléments considérés, l'élément $T6$ est le seul élément qui obeit à la condition LBB. On prend la valeur de $u_{2(E)}$ calculée avec cet élément, comme une valeur de référence. Alors, on peut écrire que

$$\lim_{\nu \rightarrow 0.50} u_{2(E)} \simeq 207.17$$

VI- Il faut bien remarquer qu'au fur et à mesure qu'on raffine la maillage avec le $Q4$, on

est plus proche de la valeur de $u_{2(E)}$ obtenue avec le T6:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2(E)} \simeq 207.17, \quad \nu = 0.4999999$$

Donc, les résultats obtenus avec le Q4 convergent vers la solution.

Elément	ν	$\frac{n_{int}}{n_{ext}}$	$u_{2(E)}$
Q4 (32 élém.) (128 élém.)	0.498	4 / 4 1 / 4	95.94 189.39
	0.499999	4 / 4 1 / 4	11.90 188.99
	0.499999	1 / 4	200.65
	0.3	9 / 9 4 / 9	244.07 244.07
Q9 (32 élém.)	0.499	9 / 9 4 / 9	205.72 205.70
	0.498	9 / 9 4 / 9	205.96 205.94
	0.499999	9 / 9 4 / 9	205.47 205.70
	0.3	6 / 6 1 / 6	244.07 245.21
T6 (64 élém.)	0.499	6 / 6 1 / 6	205.50 207.41
	0.498	6 / 6 1 / 6	205.82 207.65
	0.499999	6 / 6 1 / 6	204.83 207.17

Tableau 3.7- Déplacements obtenus par le code *ELIN* avec les éléments Q4, Q9 et T6

4- Cas de Grandes Déformations

On traite le problème de l'incompressibilité avec la Technique d'Intégration Réduite avec Pénalisation suggérée par Hughes, [1987], pour le cas de l'Elasticité Non-Linéaire. La configuration, χ , constitue le champ de variables à trouver. On ne considère que le cas de déformations planes, de façon que $\chi = (\chi_1, \chi_2)$.

La formulation variationnelle du problème d'équilibre conduit à des équations non-linéaires en χ . La résolution de ces équations en χ est possible par l'utilisation d'une méthode itérative. Dans la méthode présentée, appelée la *Méthode de Continuation*, on cherche la solution χ à partir d'une autre solution connue, χ_0 , en utilisant une technique de prédiction-correction.

On travaille avec le matériau de Ciarlet-Geymonat, introduit dans la section 2.2. On fait d'abord quelques essais numériques pour lesquels on connaît la solution analytique. On utilise les éléments *Q9* avec le schéma d'intégration 4/9 et 9/9 et l'élément *T6*, avec 1/6 et 6/6.

4.1- Le Problème d'Equilibre

On pose le problème d'équilibre continu comme:

Problème N1:

"Trouver la position $\chi : B \rightarrow R^3$, tel que:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{T} = -f & \text{sur } B ; \\ \chi = \bar{u} & \text{sur } \Gamma_u ; \\ Tn = g & \text{sur } \Gamma_g ; \end{cases} \quad (4.1)$$

avec

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{F} \circ [(\alpha + bI_1)\mathbf{I} - b\mathbf{C} - (\alpha + 2b + p)\mathbf{C}^{-1}] \quad (4.2a)$$

$$p = -c(I_3 - 1) \quad (4.2b)$$

où $\bullet T$ est le 1^{ère} Tenseur de Piola-Kirchhoff, obtenu de la dérivation de la fonction densité d'énergie, W , pour le matériau de Ciarlet-Geymonat, (voir Annexe I). W est exprimée par les relations (2.24a) avec (2.24b) et (2.25)),

• div est l'opérateur divergence, $\frac{\partial}{\partial X}$;

• a , b et c sont constantes calculées au voisinage de l'état naturel. Ces valeurs, par rapport aux valeurs de λ et μ , sont (voir Annexe II):

$$a = \frac{1}{14}(4\mu - \frac{\lambda}{2}) \quad (4.3a)$$

$$b = \frac{1}{14}(3\mu + \frac{\lambda}{2}) \quad (4.3b)$$

$$c = \frac{3}{14}(\lambda - \mu) \quad (4.3c)$$

Il faut remarquer que toutes les constantes dependent de λ , mais que seulement la constante c est utilisée pour imposer l'incompressibilité dans le matériau, puisque $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c = \infty$. Quel que soit la valeur de λ on a:

$$2(a + b) = \mu \quad (4.4)$$

L'expression (4.2a) peut être réécrite pour obtenir la relation constitutive en termes du tenseur de Cauchy, σ :

$$\sigma = 2J^{-1}\{(a + bI_1)\mathbf{B} - b\mathbf{B}^2 - [(a + 2b) + p]\mathbf{I}\} \quad (4.5a)$$

Dans le cas limite d'incompressibilité, la partie sphérique du tenseur de Cauchy, $\frac{tr \sigma}{3}$, est donnée par, (voir Annexe III):

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{tr \sigma}{3} = \frac{2}{3} J^{-1} [a(I_1 - 3) + 2b(I_2 - 3) - p] \quad (4.5)$$

On remarque que, dans le cas limite, la fonction p de l'expression (4.2a) n'est pas la pression hydrostatique. Par l'expression (4.5), on voit que la pression hydrostatique est constitué de propriétés du matériau et de la fonction qui force l'incompressibilité, p .

Soient S et V les espaces définis dans la formulation en petites déformations. La formulation variationnelle du problème N1 se pose en utilisant la technique d'intégration réduite dans le terme de pression. On l'écrit comme:

Problème N2:

"Trouver la configuration, $\chi = X + u$, tel que $u \in S$ satisfait les relations suivantes:

$$a(\chi, v) - (f, v) = 0, \quad \forall v \in V \quad (4.6)^*$$

où,

$$\bullet a(\chi, v) = \bar{a}(\chi, v) + \bar{a}(\bar{\chi}, v) \quad (4.7a)$$

$$\bullet \bar{a}(\chi, v) = -2 \int_B (pF \circ C^{-1}) : \frac{\partial v}{\partial \chi}, \quad p = -c(I_3 - 1), \quad (4.7b)$$

$$\bullet \bar{a}(\chi, v) = 2 \int_B \{F \circ [(a + bI_1)I - bC - (a + 2b)C^{-1}]\} : \frac{\partial v}{\partial \chi}, \quad (4.7c)$$

$$\bullet (f, v) = \int_B f \cdot v + \int_{\Gamma_s} g \cdot v \quad (4.8)$$

Remarque: On fait l'hypothèse simplificatrice que la densité de charge volumique, f , et surfacique, g , ne dépendent que de la configuration initiale, X .

Soit $V^h \subset V$ l'espace défini dans la formulation en petites déformations. On pose le problème approché de N2, en utilisant la *Formulation de Galerkin*:

Problème N3:

*Trouver $\chi^h = X^h + u^h$, tel que $u^h \in S^h$ satisfait la relation suivante:

$$a(\chi^h, v^h) - (f, v^h) = 0; \quad \forall v^h \in V^h \quad (4.9)$$

Soit V^h engendré par les fonctions de base N_i , $V^h = \text{span}\{N_i, i = 1, \dots, 2n\}$. On écrit la formulation discrète du problème N3 comme:

Problème N4:

*Trouver $\{\chi_i, i = 1, \dots, 2n\} \in R^{2n}$, telle que $\chi^h = \sum_{i=1}^{2n} \chi_i N_i + \sum_{j=1}^{2m} \bar{\chi}_j N_j$, $\bar{\chi} = X + \bar{u}_j$ sur Γ_u , et

$$a(\chi^h, N_j) = (f, N_j), \quad \forall N_j \in V^h, \quad (4.10)$$

avec $j = 1, \dots, 2(m+n)$, où m et n sont le nombre de noeuds sur Γ_u et B , respectivement.

L'expression (4.10) conduit à un système d'équations non-linéaires en χ^h . La résolution de ce système est possible par l'utilisation d'une technique de prédiction-corréction, à partir d'une solution initiale connue, χ_0 . Pour l'implémenter, il faut définir la fonctionnelle G , à partir de l'expression (4.6):

Soit $G: R^{2n} \times R \rightarrow R$ une fonctionnelle telle que:

$$G(\chi, \lambda) = \begin{cases} a(\chi, v) - \lambda(f, v) = 0, & \forall v \in V; \\ \chi - [\lambda \bar{\chi} + (1 - \lambda)X] = 0, & \forall X \in \Gamma_u; \end{cases} \quad (4.11)$$

avec $\lambda \in (a, b) \subset R$. On dit que λ est un parameter de continuation.

Alors, pour le problème discret on peut écrire:

$$G_j(\chi_i, \lambda) = \begin{cases} a(\chi_i N_i, N_j) - \lambda(f, N_j) = 0, & j = 1, \dots, 2n; \\ \chi_j - [\lambda \bar{\chi}_j + (1 - \lambda)X_j] = 0, & j = 2(n+1), \dots, 2(n+m); \end{cases} \quad (4.12)$$

En plus, il faut linéariser la fonctionnelle G par l'utilisation d'une dérivée directionnelle:

$$G_{,x}(\chi, \lambda)[\dot{\chi}] = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(a(\chi, v))[\dot{\chi}], & \forall v \in V; \\ 1, & \forall X \in \Gamma_u; \end{cases} \quad (4.13)$$

$$G_{,\lambda}(\chi, \lambda)[\dot{\lambda}] = \begin{cases} -(f, v), & \forall v \in V; \\ -(\bar{\chi} - X) = -\bar{u}, & \forall X \in \Gamma_u; \end{cases} \quad (4.14)$$

où \bar{u} est le déplacement imposé sur Γ_u .

Du problème discret on a ($\chi^h = \sum_{i=1}^{2n} \chi_i N_i + \sum_{j=1}^{2m} \lambda_j N_j$):

$$G_{j,x}(\chi, \lambda)[\dot{\chi}] = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(a(N_i \chi_i, N_j))[\dot{\chi}], & j = 1, \dots, 2n; \\ \delta_i^j, & j = 2(n+1), \dots, 2(n+m); \end{cases} \quad (4.15)$$

$$G_{j,\lambda}(\chi, \lambda)[\dot{\lambda}] = \begin{cases} -(f, N_j), & j = 1, \dots, 2n; \\ -\bar{u}, & j = 2(n+1), \dots, 2(m+n); \end{cases} \quad (4.16)$$

où

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j; \end{cases}$$

On réécrit l'expression (4.13a) pour le matériau de Ciarlet-Geymonat, de façon à identifier la partie qui provient du terme en p des autres parties. Ainsi, (voir Annexe IV),

$$G_{,x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{a}(\chi, v) + \frac{\partial}{\partial \chi} \bar{a}(\chi, v)$$

où,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{a}(\chi, v)[\dot{\chi}] = \int_B \{ \dot{\mathbf{F}} \circ S_2 + 2\mathbf{F} \circ [\text{btr } \dot{\mathbf{C}}\mathbf{I} - \text{bC} + (a + 2b)\dot{\mathbf{C}} \circ \mathbf{C} \circ \dot{\mathbf{C}}] \} : \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} dB$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \bar{a}(\chi, v)[\dot{\chi}] = \int_B \{ \dot{\mathbf{F}} \circ S_1 + 2\mathbf{F} \circ [cI_3 \text{tr}(\mathbf{C}^{-1} \circ \dot{\mathbf{C}})\mathbf{I} + p\mathbf{C}^{-1} \circ \dot{\mathbf{C}}] \circ \mathbf{C}^{-1} \} : \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} dB$$

La façon discrete:

$$K_{e_i} = \int_B \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial X} \circ S_2 + 2F \circ [b \text{tr } \dot{C}_1 I - b \dot{C}_1 + (a + 2b) \dot{C}_1 \circ C \circ \dot{C}_1] \right\} : \frac{\partial N_i}{\partial X} dB$$

$$K_c = \int_B \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial X} \circ S_1 + 2F \circ [c I_3 \text{tr}(C^{-1} \circ \dot{C}_1) I + p C^{-1} \circ \dot{C}_1 \circ C^{-1}] \right\} : \frac{\partial N_i}{\partial X} dB$$

avec $i = 1, \dots, 2n$.

où, $\bullet \dot{C}_i = F^T \circ \text{Grad} N_i + (\text{Grad} N_i)^T \circ F$

$$\bullet F^h = \frac{\partial(\chi_i N_i)}{\partial X} \Rightarrow \bullet \dot{F}^h = \frac{\partial N_i}{\partial X} \dot{\chi}_i$$

$$\bullet S = S_1 + S_2$$

$$S_1 = -2pC^{-1}, \quad p = -c(I_3 - 1)$$

$$S_2 = 2[(a + b \text{tr } C)I - bC - (a + 2b)C^{-1}]$$

Remarque: \bullet On emploie l'Intégration Réduite Selective sur les termes p et $\frac{\partial p}{\partial X}$ (voir Hughes, [1987]).

4.2- Le Code Numérique ELFIN

D'une façon générale, l'algorithme du code *ELFIN* ressemble au code *ELIN*, déjà décrit dans la section 3.2. On va présenter la méthode utilisée pour traiter la non-linéarité de l'opérateur G .

D'abord, on présente la structure générale du programme:

1- Entrée de données et initialisation de variables:

2- Calcul d'une estimation à partir d'un *Pas d'Euler*:

a- La Tangente $(\dot{\chi}, \dot{\lambda})$;

b- La Prediction (χ_p, λ_p) ;

3- Itérations de Newton-Raphson pour chercher la paire (χ_k, λ_k) qui satisfait $G(\chi, \lambda) = 0$;

4- Sortie de données.

Soit (χ_0, λ_0) une solution connue qui satisfait $G(\chi, \lambda) = 0$. On calcule la tangente $(\dot{\chi}, \dot{\lambda})$ à partir de la résolution du système suivant:

$$\begin{cases} G_{,\chi} [\dot{\chi}] + G_{,\lambda} [\dot{\lambda}] = 0 & ; \\ \|\dot{\chi}\|^2 + |\dot{\lambda}|^2 = 1 & ; \end{cases} \quad (4.20)$$

où $\bullet (\dot{\chi}, \dot{\lambda}) = (\frac{\partial \chi}{\partial s}, \frac{\partial \lambda}{\partial s})$, $s \in R$.

• $G_{,\chi}$ et $G_{,\lambda}$ sont donnés par les expressions (4.15) et (4.16), respectivement.

On calcule la prediction (χ_p, λ_p) , (voir Fig. 4.1), comme:

$$(\chi_p, \lambda_p) = (\chi_0 + \dot{\chi} \Delta s, \lambda_0 + \dot{\lambda} \Delta s) \quad (4.21)$$

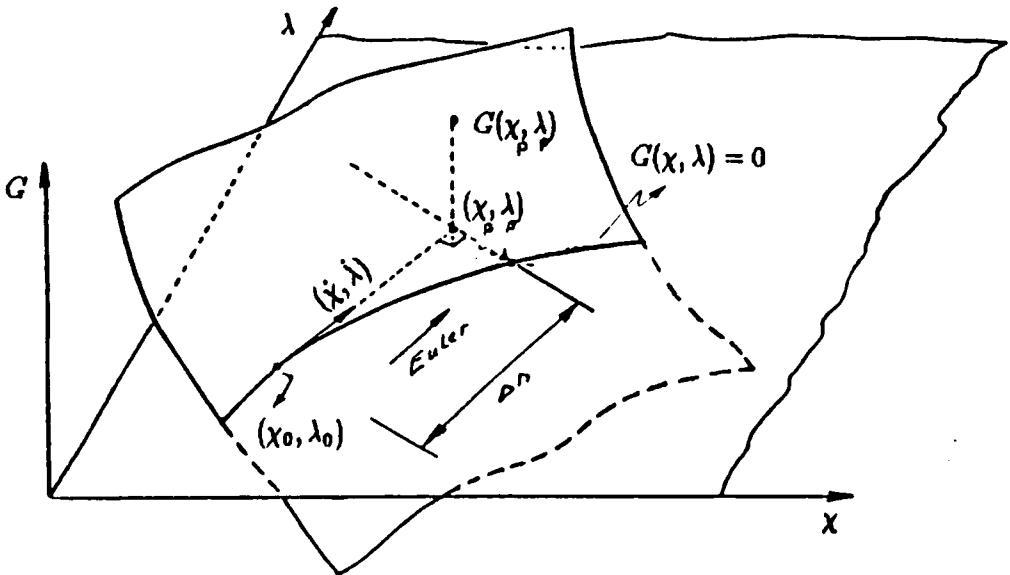


Fig. 4.1- La Prediction.

On vérifie si,

$$\|G(\chi, \lambda)\| + FM\|\Delta\chi\| = 0 \quad (4.22)$$

où, • FM est un Facteur Multiplicatif pour approcher l'espace de G et χ .

Si la relation (4.22) est satisfaite, alors $(\chi_p, \lambda_p) \rightarrow (\chi_0, \lambda_0)$ et on retourne aux expressions (4.20a) et (4.20b).

Sinon $k = 1, (\chi_p, \lambda_p) \rightarrow (\chi_k, \lambda_k)$ et on calcule la normale $N(\chi_k, \lambda_k)$ comme:

$$N(\chi_k, \lambda_k) = (\chi_k - \chi_0) \cdot \dot{\chi} + (\lambda_k - \lambda_0) \cdot \dot{\lambda} - \Delta s \quad (4.23)$$

La résolution du système matriciel linéaire (4.25) conduit à la paire $(\Delta\chi_k, \Delta\lambda_k)$, où:

$$(\Delta\chi_k, \Delta\lambda_k) = (\chi_{k+1} - \chi_k, \lambda_{k+1} - \lambda_k) \quad (4.24)$$

$$\begin{pmatrix} G_\chi & G_{,\lambda} \\ \dot{\chi} & \dot{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\chi_k \\ \Delta\lambda_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} G(\chi_k, \lambda_k) \\ N(\chi_k, \lambda_k) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Si la paire $(\chi_{k+1}, \lambda_{k+1})$ (voir Fig. 4.2) satisfait l'expression (4.22) on fait $(\chi_0, \lambda_0) = (\chi_{k+1}, \lambda_{k+1})$ et on retourne aux expressions (4.20a) et (4.20b). Sinon, $k = k + 1$, et on retourne au calcul de $N(\chi_k, \lambda_k)$ par l'expression (4.23).

4.3- Validation du Code

On fait l'essai de traction simple avec déplacement imposé. On discretise un domaine unitaire, (voir Fig. 4.3), avec,

- 49 noeuds et 9 éléments $Q9$ et,
- 49 noeuds et 18 éléments $T6$.

On impose des déplacements sur le bord droit, $u = 1.0$. On présente dans le tableau 4.2 la paire (χ_1, χ_2) pour le noeud 49 de la Fig. 4.3. Dans le même tableau on présente les valeurs

analytiques et numériques pour la composante T_{11} du 1^{ère} tenseur de Piola-Kirchoff. En plus, on présente aussi la valeur du volume local, calculée sur le noeud 49 (et qui est le même pour tous les autres noeuds).

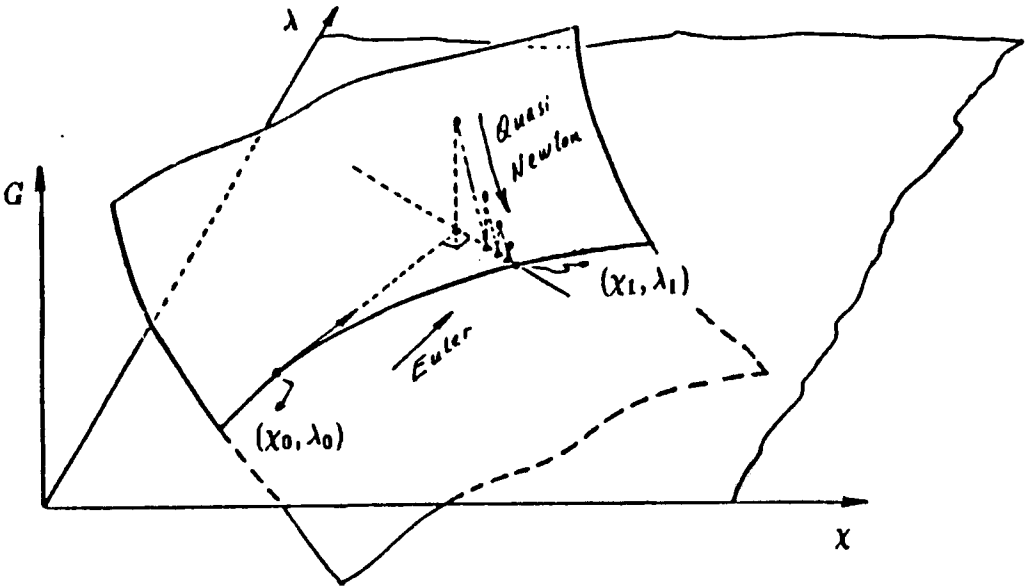


Fig. 4.2- La Correction.

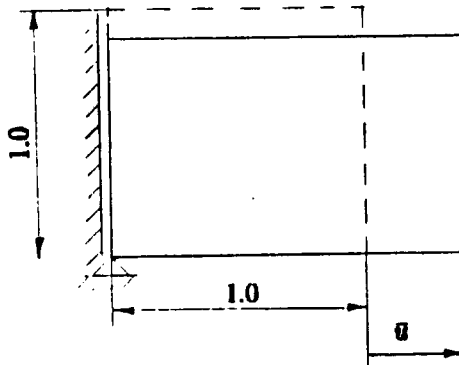


Fig. 4.3- La Traction Simple avec Déplacement Imposé.

La valeur analytique de T_{11} pour cet essai est, (voir Annexe V):

$$T_{11(ANAL)} = 2\chi_1(a+b)\left[1 - \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial\chi_1}\right)^2\right] \quad (4.25a)$$

où,

$$\chi_2 = \sqrt{\frac{1+e}{\chi_1^2+e}} \quad (4.25b)$$

et

$$e = \frac{a+b}{b+c} \quad (4.25c)$$

Remarque: dans le cas incompressible, la constante e tend vers l'infini et l'expression de χ_2 reste comme:

$$\lim_{e \rightarrow \infty} \chi_2 = \frac{1}{\chi_1}$$

On obtient les résultats du tableau 4.2 à partir des quatre cas présentés dans le tableau 4.1.

Dans tous les cas considérés on voit bien que les résultats numériques sont en accord avec les résultats obtenus analytiquement. En plus, il faut remarquer qu'au fur et à mesure qu'on impose la condition d'incompressibilité, ($c \rightarrow \infty$), le terme de volume, $(I_3)^{1/2}$, tend vers la valeur 1.0.

Sous l'aspect numérique, il faut diminuer la valeur de l'incrément Δs quand $c \rightarrow \infty$, pour que la méthode itérative converge vers une solution. Cette mesure augmente le nombre de pas d'Euler nécessaire pour atteindre le même déplacement imposé, \bar{u} . Ainsi, il faut bien choisir la valeur initiale de Δs .

CAS	B	C	D	E
ν	0.305	0.49	0.499	0.499999
$a \left[= \frac{1}{14} \left(4\mu - \frac{\lambda}{2} \right) \right]$	1.6732629	-9.3360499	-111.13361	-113093.20
$b \left[= \frac{1}{14} \left(3\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \right]$	1.9665857	12.523969	114.30239	113096.37
$c \left[= \frac{3}{14} (\lambda - \mu) \right]$	0.8799629	65.580058	676.30801	678568.71
$\frac{a+b}{b+c}$	1.2786884	0.0408163	0.004008	5.6×10^{-6}

Tableau 4.1- Les valeurs des constantes a , b et c .

TYPE	CAS	$\frac{m_1}{m_2}$	(X_1, X_2)	$P_{11}(TEOR.)$	$P_{11}(NUM.)$	$I_3^{1/2}$
	B	9 / 9	(1.97119, 0.66426)	12.720	12.720	1.3094
		4 / 9	(" , ")	"	"	"
Q9	C	9 / 9	(1.96315, 0.51695)	11.649	11.649	1.0148
		4 / 9	(" , ")	"	"	"
	D	9 / 9	(1.99679, 0.50155)	11.856	11.856	1.0015
		4 / 9	(2.02072, 0.49562)	12.036	12.036	"
	B	6 / 6	(1.97666, 0.66288)	12.771	12.771	1.3103
		1 / 6	(" , ")	"	"	"
	C	6 / 6	(1.96821, 0.51563)	11.688	11.688	1.0149
		1 / 6	(" , ")	"	"	"
T6	D	6 / 6	(1.98269, 0.50512)	11.750	11.750	1.0015
		1 / 6	(2.02607, 0.49431)	12.076	12.076	1.0015
	E	6 / 6	(2.00149, 0.49963)	11.899	11.899	1.0000
		1 / 6	(2.00001, 0.50000)	11.888	11.888	1.0000

Tableau 4.2- Résultats Numériques et Analytiques pour l'essai de Traction Simple

5- Conclusion

Le sujet de ce rapport est le traitement de l'incompressibilité dans un matériau élastique non-linéaire. On utilise la Technique d'Intégration Réduite avec Pénalisation, pour obtenir une formulation variationnelle avec un seul champ de variables. Cette mesure diminue le nombre total d'inconnus par rapport à les formulations mixtes.

On utilise la Méthode des Eléments Finis pour approcher le champ de la variable indépendante. On obtient un système d'équations non-linéaires qui est résolu par une technique de Continuation type prédicteur-correcteur.

On teste l'efficacité de quelques types d'éléments finis avec différents schémas d'intégration, pour traiter le problème d'incompressibilité dans le cas de l'Elasticité Linéaire et Non-linéaire. Des éléments implémentés dans le code numérique, (bi-quadratique, Q_9 , bilinéaire, Q_4 , linéaire, T_3 et quadratique, T_6), les éléments T_6 , avec 1 point d'intégration pour les termes de pression, et Q_9 , avec 4 points d'intégration pour la pression, permettent de traiter la restriction d'incompressibilité très bien.

Par la suite de ce travail, on propose tester le code numérique avec un problème de gradient de pression qui soit connue dans le domaine du corps.

ANNEXE 1

Le Matériau de Clarlet-Geymonat

Soit la fonction W , donnée par:

$$W(C) = a(\text{tr}C) + b[\text{tr}(\text{cof}C)] + c(\det C) - d[\log(\det C)]^{1/2} \quad (\text{A1.1})$$

Cette fonction exprime la densité d'énergie pour le matériau de Clarlet-Geymonat. Sa dérivée par rapport au tenseur C donne le 2^{ème} tenseur de Piola-Kirchhoff, $S = 2 \frac{\partial W}{\partial C}$. De l'expression (A1.1) on doit considérer les dérivées suivantes:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\text{tr}C)}{\partial C} = 1; \\ \text{tr}(\text{cof}C) = \frac{1}{2}[(\text{tr}C)^2 - \text{tr}C^2]; \\ \frac{\partial \text{tr}(\text{cof}C)}{\partial C} = (\text{tr}C)\mathbf{I} - C; \\ \frac{\partial \det C}{\partial C} = \det C C^{-1}; \\ \frac{\partial \log(\det C)^{1/2}}{\partial C} = \frac{1}{2}C^{-1}; \end{cases} \quad (\text{A1.2})$$

Donc,

$$\hat{S} = 2\{a\mathbf{I} + b[(\text{tr}C)\mathbf{I} - C] + c(\det C)C^{-1} - \frac{d}{2}C^{-1}\} \quad (\text{A1.3})$$

Dans la configuration de référence on a $S = 0$. Alors,

$$d = 2a + 4b + 2c \quad (\text{A1.4})$$

Ainsi,

$$\hat{S} = 2\{[a + b(\text{tr}C)]\mathbf{I} - bC + [c(\det C) - (a + 2b + c)]C^{-1}\} \quad (\text{A1.5})$$



De cette façon, on obtient l'expression de la relation constitutive du matériau de Ciarlet-Gaymonat en termes du 1^{ère} tenseur de Piola-Kirchhoff, $\mathbf{T} = \mathbf{F} \circ \mathbf{S}$:

$$\hat{\mathbf{T}} = 2\mathbf{F} \circ \{[a + b(\text{tr}\mathbf{C})]\mathbf{I} - b\mathbf{C} + [c(\det\mathbf{C} - (a + 2b + c))\mathbf{C}^{-1}]\} \quad (\text{A1.6})$$

ANNEXE 2

- Le Matériau de Ciarlet-Geymonat au voisinage de l'État Naturel.

Le Matériau de Ciarlet-Geymonat:

$$W(C) = a(\text{tr } C) + b[\text{tr}(\text{cof } C)] + c(\det C) - d[\log(\det C)^{1/2}] \quad (A2.1)$$

Proche de l'état naturel, on va l'approcher par un matériau de *St. Venant-Kirchhoff*, (Ciarlet, [1988]):

$$\hat{W}(E) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr } E)^2 + \mu(\text{tr } E^2) + o(\|E\|^2) \quad (A2.2)$$

Il faut déterminer la relation entre les constantes (a, b, c, d) et (λ, μ) . Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} F = I + \frac{\partial u}{\partial X}; \\ C = I + 2E = I + \frac{(\partial u)^T}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{(\partial u)^T}{\partial X} \circ \frac{\partial u}{\partial X}; \\ \text{tr } C = 3 + 2\text{tr } E; \\ \text{trcof } C = 3 + 4\text{tr } E + 2(\text{tr } E)^2 - 2\text{tr } E^2; \\ \det(C) = 1 + 2\text{tr } E + 2(\text{tr } E)^2 - 2\text{tr } E^2 + o(\|E\|^3); \\ \Gamma[(\det(C))^{1/2}] = \Gamma(1) + \Gamma'(1)[\text{tr } E + \frac{1}{2}(\text{tr } E)^2 - \text{tr } E^2] + \\ \quad \frac{1}{2}\Gamma''(1)(\text{tr } E)^2 + o(\|E\|^3); \\ \Gamma[(\det(C))^{1/2}] = c + (2c - d)[\text{tr } E + \frac{1}{2}(\text{tr } E)^2 - \text{tr } E^2] + \\ \quad \frac{1}{2}(2c + d)(\text{tr } E)^2 + o(\|E\|^3) \end{array} \right.$$

où • $\Gamma((\det C)^{1/2}) = cI_3 - d\log(I_3)^{1/2}$

Donc,

$$\begin{aligned} \hat{W}(E) = & a(3 + 2\text{tr } E) + b[3 + 4\text{tr } E + 2(\text{tr } E)^2 - 2\text{tr } E^2] + \\ & c + (2c - d)[\text{tr } E + \frac{1}{2}(\text{tr } E)^2 - \text{tr } E^2] + \frac{1}{2}(2c + d)(\text{tr } E)^2 + o(\|E\|^3) \end{aligned} \quad (A2.3)$$

Des expressions (A2.2) et (A2.3) on tire les relations entre les constantes a , b , c , d et λ , μ :

$$a = \frac{1}{14}(4\mu - \frac{\lambda}{2}) \quad (A2.4a)$$

$$b = \frac{1}{14}(3\mu + \frac{\lambda}{2}) \quad (A2.4b)$$

$$c = \frac{1}{14}(3\lambda - 3\mu) \quad (A2.4c)$$

$$d = \frac{1}{2}(2\mu + \lambda) \quad (A2.4d)$$

ou, sinon, aussi:

$$\lambda = 4(b + c) \quad (A2.5a)$$

$$\mu = 2(a + b) \quad (A2.5b)$$

avec, • $d = 2(a + 2b + c)$.

Au voisinage de l'État Naturel, le 1^{ère} tenseur de Piola-Kirchhoff est donné par l'expression (A2.6):

$$\mathbf{T} = \lambda(\text{tr } \text{Grad}_s \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu(\text{Grad}_s \mathbf{u}) \quad (A2.6)$$

Par la substitution des expressions (A2.5a et b) dans l'expression (A2.6), on obtient l'équation constitutive pour le matériau de Ciarlet-Geymonat au voisinage de l'État Naturel:

$$\mathbf{T} = 4[(b + c)(\text{tr } \text{Grad}_s \mathbf{u})\mathbf{I} + (a + b)(\text{Grad}_s \mathbf{u})] \quad (A2.6)$$

ANNEXE 3

La Partie Sphérique du Tenseur de Cauchy ($tr \sigma$)

Le tenseur de Cauchy pour le matériau de Ciarlet-Geymonat:

$$\sigma = J^{-1} \mathbf{F} \circ \mathbf{S} \circ \mathbf{F}^{-T} \quad (A3.1)$$

où • $\mathbf{S} = 2\{(a + bI_1)\mathbf{I} - b\mathbf{C} - [(a + 2b) + p]\mathbf{C}^{-1}\}$

• $p = -c(I_3 - 1)$

Ainsi,

$$\sigma = 2J^{-1}\{(a + bI_1)\mathbf{B} - b\mathbf{B}^2 - [(a + 2b) + p]\mathbf{I}\} \quad (A3.2)$$

Si $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ on vérifie que $\sigma = 0$ et $p = 0$, (O.K.).

$$\sigma = -p^*\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{B} + \alpha_2\mathbf{B}^2 \quad (A3.3)$$

où, $p^* = 2J^{-1}[(a + 2b) + p]$

$\alpha_1 = 2J^{-1}(a + bI_1)$

$\alpha_2 = -2J^{-1}b$

$$tr\sigma = -3p^* + \alpha_1 tr\mathbf{B} + \alpha_2 tr\mathbf{B}^2 \quad (A3.4)$$

où • $tr\mathbf{B}^2 = (tr\mathbf{B})^2 - 2I_2$

$$\frac{tr\sigma}{3} = \frac{2}{3}J^{-1}[a(I_1 - 3) + 2b(I_2 - 3) - p] \quad (A3.5a)$$

$$p = -c(I_3 - 1) \quad (A3.5b)$$

On va considérer le cas limite sur lequel le matériau est incompressible, c'est-à-dire, $I_3 = J = 1$.

$$\frac{tr \sigma}{3} = \frac{2}{3}[a(I_1 - 3) + 2b(I_2 - 3) - p] \quad (A3.6a)$$

$$p = -c(I_3 - 1) \quad (A3.6b)$$

ANNEXE 4

Déduire $\frac{\partial}{\partial \chi} G(\chi, \lambda) [\dot{\chi}]$ pour le Matériau de Clariet-Geymonat

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{F} \circ \{(a + bI_3)\mathbf{I} - b\mathbf{C} - (a + 2b + p)\mathbf{C}^{-1}\}; \quad p = -c(I_3 - 1) \quad (A4.1)$$

Alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} D\mathbf{F}(\mathbf{F})[\dot{\mathbf{F}}] = \mathbf{I} \circ \dot{\mathbf{F}}; \\ D(\text{tr}\mathbf{C})(\mathbf{F})[\dot{\mathbf{F}}] = \text{tr}\dot{\mathbf{C}}; \\ D\mathbf{C}(\mathbf{F})[\dot{\mathbf{F}}] = \dot{\mathbf{C}}; \\ D(\det\mathbf{C})(\mathbf{F})[\dot{\mathbf{F}}] = (\det\mathbf{C})\text{tr}(\mathbf{C}^{-1} \circ \dot{\mathbf{C}}); \\ D(\mathbf{C}^{-1})(\mathbf{F})[\dot{\mathbf{F}}] = -\mathbf{C}^{-1} \circ \dot{\mathbf{C}} \circ \mathbf{C}^{-1}; \end{array} \right.$$

Donc,

$$\frac{\partial}{\partial \chi} G(\chi, \lambda) [\dot{\chi}] = \left\{ \frac{\partial}{\partial \chi} \bar{a}(\chi, v) [\dot{\chi}] + \frac{\partial}{\partial \chi} \bar{a}(\chi, v) [\dot{\chi}] \right\} \quad (A4.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \bar{a}(\chi, v) [\dot{\chi}] = \int_B \{ \dot{\mathbf{F}} \circ \mathbf{S}_1 + \mathbf{F} \circ [b\text{tr}\dot{\mathbf{C}} - b\dot{\mathbf{C}} + (a + 2b)\dot{\mathbf{C}} \circ \mathbf{C} \circ \dot{\mathbf{C}}] \} : \frac{\partial}{\partial \chi} v dB \quad (A4.2b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \bar{a}(\chi, v) [\dot{\chi}] = \int_B \{ \dot{\mathbf{F}} \circ \mathbf{S}_2 + \mathbf{F} \circ [cI_3\text{tr}(\mathbf{C}^{-1} \circ \dot{\mathbf{C}}) \circ \mathbf{I} + p\mathbf{C}^{-1} \circ \dot{\mathbf{C}} \circ \mathbf{C}^{-1}] \} : \frac{\partial}{\partial \chi} v dB \quad (A4.2c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} G(\chi, \lambda) [\dot{\chi}] = G_{,\chi(1)} + G_{,\chi(2)} \quad (A4.2a)$$

où, $\bullet \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}} \circ \mathbf{F}$

$\bullet \mathbf{F}^h = \frac{\partial(\chi, N, t)}{\partial \chi}$

$\bullet \dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \chi} [\dot{\chi}]$

- $\dot{\chi} = \frac{\partial \chi}{\partial s}, \quad s \in R$

- $S = S_1 + S_2$

$$S_1 = -2pC^{-1}, \quad p = -c(I_s - 1)$$

$$S_2 = 2[(a + b \operatorname{tr} C)I - bC - (a + 2b)C^{-1}]$$

ANNEXE 5

L'Essai de Traction Simple avec le Matériau de Clarlet-Geymonat.

Soit la relation constitutive donnée en termes du 1^{ère} Tenseur de Piola-Kirchhoff, \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{F} \circ [(a + b\text{tr } \mathbf{C}) - b\mathbf{C} - (a + 2b + p)\mathbf{C}^{-1}] \quad (\text{A5.1a})$$

$$p = -c(I_3 - 1) \quad (\text{A5.1b})$$

où les constantes a, b et c sont donnés par rapport à les constantes de Lamé, λ et μ :

$$a = \frac{1}{14}(4\mu - \frac{\lambda}{2}) \quad (\text{A5.2a})$$

$$b = \frac{1}{14}(3\mu + \frac{\lambda}{2}) \quad (\text{A5.2b})$$

$$c = \frac{3}{14}(\lambda - \mu) \quad (\text{A5.2c})$$

Soit la paire, $(\chi_1, \chi_2) = (k_1 X_1, k_2 X_2)$ les coordonnées de la configuration actuelle dans un essai de traction simple bi-dimensionnel. On donne les composantes des matrices des tenseurs \mathbf{F} , \mathbf{C} et \mathbf{C}^{-1} et les valeurs des invariants I_1 et I_3 par:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A5.3a})$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} K_1^2 & 0 \\ 0 & K_2^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A5.3b})$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} K_1^{-2} & 0 \\ 0 & K_2^{-2} \end{pmatrix} \quad (\text{A5.3c})$$

$$I_1 = K_1^2 + K_2^2 + 1 \quad (A5.4a)$$

$$I_3 = K_1^2 K_2^2 \quad (A5.4b)$$

L'introduction des expressions (A5.3a, b et c) et (A5.4a et b) dans l'expression (A5.1a) permet calculer une relation de K_2 par rapport à K_1 , donnée par:

$$K_2 = \sqrt{\frac{1+e}{K_1^2+e}} \quad (A5.5)$$

où $e = \frac{a+b}{c}$.

Remarque: La limite de K_2 quand c tend vers l'infini est l'inverse de la valeur de K_1 ,
 $\lim_{c \rightarrow \infty} K_2 = K_1^{-1}$.

Pour cet essai, la matrice de \mathbf{T} présente une seule composante non nulle, T_{11} , donnée par:

$$P_{11} = 2K_1(a+b) \left| 1 - \frac{1+e}{K_1^2(K_1^2+e)} \right| \quad (A5.6)$$

Dans le cas de c tendre vers l'infini, la valeur de T_{11} est donnée par

$$T_{11} = 2K_1(a+b) \left(1 - \frac{1}{K_1^2} \right) \quad (A5.7)$$

6- BIBLIOGRAPHIE

- [1972] BABUSKA, I & AZIZ, A. K. - 'Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method' , in *The Mathematical Foundations of FEM with Application to Partial Differential Equations* (edited by A. K. Aziz), Academic Press, New York.
- [1973] BABUSKA, I. - 'The Finite Element Method with Penalty' , *Mathematics and Computation*, 27, pp. 221 - 228.
- [1987] BEATTY, Millard F. - 'Topics in Finite Elasticity: Hyperelasticity of Rubber, Elastomers, and Biological Tissues - with Examples' , *Appl. Mech. Rev.*, vol. 40, n. 12, Dec..
- [1974] BREZZI, F.- 'On the Existence, Uniqueness, and Approximation of Saddle-Point Problems arising from Lagrange Multipliers' , *R.A.I.R.O.*, 8, pp. 129 - 151.
- [1988] CIARLET, P. G. - *Mathematical Elasticity* , vol. 1 - *Three-dimensional Elasticity* , Elsevier Science Publishers B. V., Netherlands.
- [1986] GADALA, Mohamed S. - 'Numerical Solutions of Non-linear Problems of Continua - II. Survey of Incompressibility Constraints and Software Aspects' , *Computers & Structures*, vol. 22, n. 5, pp. 841 - 855.
- [1981] GURTIN, M. E. - *An Introduction to Continuum Mechanics* , Academic Press, Inc., N. Y., 1981.
- [1965] HERMANN, Leonard R. - 'Elasticity Equations for Incompressible and Nearly Incompressible Materials by a Variational Theorem' , *AIAA Journal*, vol. 3, n. 10, Oct., pp. 1896 - 1900.

- 1987 | HUGHES, T. J. R. - *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- 1969 | LADYSZHENSKAYA, O. A. - *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows*, Gordon and Beach.
- 1978 | MALKUS, David S. & HUGHES, Thomas J. R. - 'Mixed Finite Element Methods - Reduced and Selective Integration Techniques: A Unification of Concepts', *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 15, pp. 63 - 81.
- 1940 | MOONEY, M. - 'A Theory of Large Elastic Deformation', *J. Appl. Phys.*, 11, pp. 582 - 597.
- 1974 | NAGTEGAAL, J. C., PARKS, D. M. & RICE, J. R. - 'On Numerically Accurate Finite Element Solutions in the Fully Plastic Range', *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 4, pp. 153 - 177.
- 1971 | ODEN, J. T. & KEY, J. E. - 'On Some Generalizations of the Incremental Stiffness Relations for Finite Deformations of Compressible and Incompressible Finite Elements', *Nucl. Engng. Des.*, 15, 121 - 134.
- 1982 | ODEN, J. T. & KIKUCHI, N. - 'Finite Element Methods for Constrained Problems in Elasticity', *Int. J. Numer. Meths. Engng.*, vol. 18, pp, 701 - 725.
- 1972 | OGDEN, R. W. - 'Large Deformation Isotropic Elasticity: On the Correlation of Theory and Experiment for Compressible Rubber-like Solids', *Proc. Roy. Soc. London A328*, pp. 567 - 583.
- 1950 | REISSNER, E. - 'On a Variational Theorem in Elasticity', *J. Math. Phys.*, 29, pp. 90 - 95.
- 1951 | RIVLIN, R. S. - 'Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. VII. Experiments

on the Deformation of Rubber' , Philos. Trans. R. Soc. London Ser., A243, pp. 251 - 288.

- [1987] SUSSMAN, Theodore & BATHE, Klaus-Jurgen - ' ' A Finite Element Formulation for Nonlinear Incompressible Elastic and Inelastic Analysis' ', vol. 26, n. 12, pp. 357 - 409.
- [1971] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. & TOO, J. M. - ' 'Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells' ', Int. J. Numer. Meths. Engng., vol. 3, pp. 275 - 290.



LABORATOIRE DE MECANIQUE ET D'ACOUSTIQUE (L.M.A.)

**31, chemin Joseph-Aiguier
13402 MARSEILLE CEDEX 09**

**Téléphone : 91 22 40 00
Télécopieur : 91 22 08 75
Téléscripneur : CNRSMAR 430225 F**