Application d'une méthode de Galerkin multiharmonique au calcul des densités spectrales de puissance évolutives

Robert Bouc, Mario Defilippi

▶ **To cite this version:**

Robert Bouc, Mario Defilippi. Application d'une méthode de Galerkin multiharmonique au calcul des densités spectrales de puissance évolutives. [Rapport de recherche] Publications du LMA, numéro 136, LMA. 1991, 35 p. hal-01365726

HAL Id: hal-01365726
https://hal.science/hal-01365726

Submitted on 13 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

22943

PUBLICATIONS DU L.M.A.
Répertoriées dans la base Pascal de l'I.N.I.S.T.
n° 136 (novembre 1991)

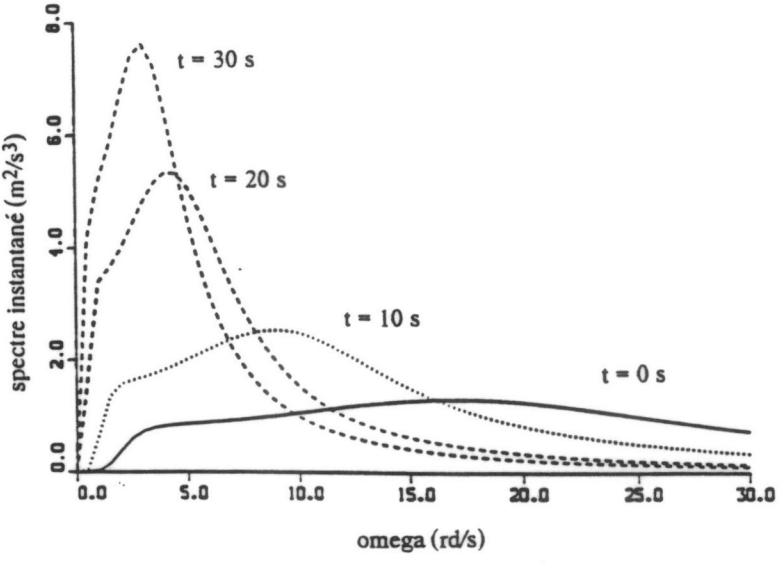
ISSN 0750 - 7356

INIST-CNRS
17 FEV. 1992

NOTES SCIENTIFIQUES

APPLICATION D'UNE METHODE DE GALERKIN MULTIHARMONIQUE AU CALCUL DES DENSITES SPECTRALES DE PUISSANCE EVOLUTIVES

Robert BOUC et Mario DEFILIPPI



CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

G82122

Légende de la figure de couverture :
Spectre instantané (d'après C.H.YEH et Y.K.WEN [41]).

PUBLICATIONS DU L.M.A.
Répertoriées dans la base Pascal de l'I.N.I.S.T.
n° 136 (novembre 1991)

ISSN 0750 - 7356

NOTES SCIENTIFIQUES

PHYS
9/EC

APPLICATION D'UNE METHODE DE GALERKIN MULTIHARMONIQUE AU CALCUL DES DENSITES SPECTRALES DE PUISSANCE EVOLUTIVES

Robert BOUC et Mario DEFILIPPI

Institut de l'Information Scientifique et Technique - INIST

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

G82122

APPLICATION D'UNE METHODE DE GALERKIN MULTIHARMONIQUE AU CALCUL DES DENSITES SPECTRALES DE PUISSANCE EVOLUTIVES.

Résumé.

Les systèmes mécaniques sous entrée aléatoire peuvent posséder, dans le cas de sollicitations sismiques par exemple, des réponses telles que l'amplitude mais aussi le contenu fréquentiel sont modulés dans le temps et conduisent à des DSP évolutives.

La réponse instationnaire est approchée, sur un intervalle de temps T, par un développement de Galerkin, en sinus et cosinus, à un ordre fini M dont les coefficients sont lentement variables en fonction du temps et conduisent à une DSP évolutive.

Les équations déterminantes, algébriques dans le cas stationnaire, sont remplacées par des équations différentielles dont les coefficients et le terme forçant dépendent uniquement du temps lent. Le calcul de l'accélération pour un modèle d'excitation sismique est donné comme exemple de résultat.

SOMMAIRE.

Introduction 7

1. Méthode de Galerkin multiharmonique. 9
   1.1. Cas des systèmes déterministes T-périodiques. 9
   1.2. Cas des systèmes mécaniques sous entrée aléatoire. 10

2. Extention de la méthode. Spectre évolutif. 15
   2.1. Approximation de Galerkin à coefficients lentement variable. 15

3.Modèle d'excitation sismique. 19
   3.1. Excitation sismique. Modèle stationnaire. 19
   3.2. Excitation sismique. Modèle non stationnaire. 20
   3.3. Modèle différentiel déduit de la méthode multiharmonique. 23

4. Mise en oeuvre de la méthode pour le modèle d'excitation sismique. 25
   4.1. Détermination du spectre évolutif. 25
   4.2. Résultats numériques. Illustration. 26

Conclusion. Perspectives. 29

Figures. 31

Bibliographie 35

INTRODUCTION.

La méthode élaborée par M.Urabe [1] pour déterminer, sous forme d'approximations de Galerkin d'ordre fini M, les réponses périodiques de systèmes différentiels périodiques a été étendue dans [3] à des systèmes mécaniques sous sollicitation aléatoire stationnaire. Cette méthode relève à la fois de l'analyse harmonique des processus stochastiques et du traitement du signal. Elle se prête bien au calcul des réponses stationnaires des systèmes non linéaires qui ne présentent pas de symétries particulières. Elle donne des résultats satisfaisant aussi bien pour les estimations spectrales que pour les trajectoires temporelles.

L'objet de ce rapport est de montrer que cette méthode multiharmonique s'applique à des systèmes aléatoires non stationnaires.Les systèmes envisagés ici sont linéaires et font apparaître deux échelles de temps.

La réponse instationnaire est approchée, sur un intervalle de temps T, par un développement de Galerkin d'ordre M dont les coefficients sont "lentement variables" en fonction du temps, les termes périodiques sont fonction uniquement du "temps rapide". Les équations déterminantes, obtenues par balance harmonique, sont des équations différentielles dont les coefficients et le terme forçant dépendent du temps lent seul.

Les estimations spectrales, calculées à l'aide des coefficients de Fourier comme dans le cas stationnaire, sont alors fonction du temps et conduisent à une DSP évolutive.Le procédé est testé à l'aide d'un modèle d'excitation sismique non stationnaire développé dans [4] qui s'écrit en terme d'équations différentielles. L'accélération sismique est décrite par un processus stochastique de la forme

$$a_{IN}(t) = I(t)\, a_{ST}(\phi(t))$$

où $a_{ST}(\phi)$ est un processus stationnaire de l'argument ϕ, I(t) et $\phi(t)$ sont des fonctions certaines, régulières, lentement variables, qui modulent, respectivement, l'amplitude et le contenu fréquentiel du séisme. I(t) est strictement positive, $\phi(t)$ est strictement croissante.Des exemples de résultats concernant un modèle de séisme tiré de [4] sont donnés en illustration.

1. LA METHODE DE GALERKIN MULTIHARMONIQUE.

1.1 Cas des systèmes déterministes T-périodiques.[1]

Soit le système différentiel

$$\dot{x} = X(x(t),g(t)) \tag{1.1}$$

où x et X(x,y) sont des vecteurs de même dimension d. Le terme d'excitation g(t) est un vecteur de dimension m, T-périodique tel que pour tout t

$$g(t) = g(t + T),\ T > 0.$$

Une approximation de Galerkin d'ordre M d'une solution T-périodique $x^*(t)$ de (1) (dont l'existence est supposée) est un polynôme trigonométrique

$$x^M(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{M} (a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t) \text{ où } \omega_k = 2\pi k/T \tag{1.2}$$

Le vecteur α des coefficients de Fourier

$$\alpha = [a_0, a_1, b_1, \ldots, a_M, b_M]^t$$

est solution des équations déterminantes, non linéaires, obtenues par balance harmonique jusqu'à l'ordre M:

$$F_0^M = \frac{1}{T}\int_T X(x^M(s),g(s))\, ds = 0$$

$$F_k^M = \frac{1}{T}\int_T X(x^M(s),g(s))\cos(\omega_k s)\, ds - \omega_k b_k = 0 \tag{1.3}$$

Institut de l'Information Scientifique et Technique - INIST

$$G_k^M = \frac{1}{T}\int_T X(x^M(s),g(s))\,\sin(\omega_k s)\,ds + \omega_k a_k = 0$$

où k = 1,. . .,M.

En notant $\mathbf{P}_M f(t)$ le polynôme trigonométrique obtenu en tronquant à l'ordre M la série de Fourier associée à toute fonction T-périodique régulière f(t) les équations (1.3) peuvent s'écrire sous la forme (fonctionnelle) abrégé

$$\dot{x}^M(t) = \mathbf{P}_M[X(x^M(t),g(t))] \qquad (1.4)$$

M.Urabe a montré [1] que, sous certaines conditions de régularité de (1.1), des approximations de Galerkin d'ordre M suffisamment grand existent dans un voisinage de toute solution T-périodique "isolée" de (1.1), et

$$\| x^* - x^M \| = O(1/M)\ ;\ \forall\ M \geq M_0,\ M_0 \text{ grand.}$$

Une solution périodique est dite isolée si l'équation aux variations

$$\dot{y}\ (t) = [\Psi((x^*(t),g(t))]\ y(t)$$

où $\Psi(.)$ désigne la matrice jacobienne de X relativement à x, ne possède pas de solution T-périodique autre que 0.
Les coefficients de Fourier sont déterminés numériquement en résolvant (1.3) par la méthode de Newton .

1.2 Cas des systèmes mécaniques sous entrée aléatoire.

Série de Fourier d'un processus stochastique stationnaire.[2]

Tout processus stochastique, g_t, assez régulier, stationnaire à l'ordre deux, peut être développé en série de Fourier sur l'intervalle ouvert fini (-T/2, T/2), soit

$$g_t^* = \sum_n G_n \exp(i2\pi nt/T)\ ;\ G_n = \frac{1}{T}\int_T g_s \exp(-i2\pi ns/T)\,ds \qquad (1.5)$$

avec les propriétés suivantes

- Les processus g_t et g_t^* coincident en moyenne quadratique sur (-T/2, T/2) c'est à dire que $E[\,|g_t - g_t^*|^2] = 0$ pour $|t| < T/2$.
- Les coefficients de Fourier G_n, G_m sont asymptotiquement décorrélés pour $T \rightarrow \infty$.
- Si $S_g(k\Delta f)$ désigne la DSP de g_t à la fréquence $k\Delta f$, $\Delta f = 1/T$, alors pour T "grand" S_g est approché par

$$S_g(k\Delta f) = T\, E[|G_k|^2]$$

La série de Fourier associée à un processus stationnaire sur un intervalle T n'est pas un processus stationnaire. C'est un processus asymptotiquement stationnaire pour $T \rightarrow \infty$.

Méthode multiharmonique pour un système mécanique sous entrée aléatoire.[3]

Soit une classe de problèmes non linéaires régie par l'équation dynamique réelle

$$M\,\ddot{x}_t + C\,\dot{x}_t + K\,x_t + N(\dot{x}_t, x_t, g_t) = 0 \qquad (1.6)$$

L'excitation g_t et la réponse x_t sont supposées être des processus stochastiques stationnaires et une réalisation de longue durée g_t est supposée connue.

L'opérateur prenant en compte la partie linéaire de (6) est noté L

$$L = M\,d^2/dt + C\,d/dt + K \qquad (1.7)$$

Soit g_t^* la série de Fourier de période T associée à g_t sur un intervalle de temps T. Le problème (1.6) est remplacé par le problème T-périodique aléatoire

$$Lx_t + N(\dot{x}_t, x_t, g_t^*) = 0 \qquad (1.8)$$

Une approximation de Galerkin, x_t^M, de x_t est solution de

$$L\, x_t^M + P_M\, N(\dot{x}_t^M, x_t^M, g_t^*) = 0 \text{ , où} \qquad (1.9)$$

$$x_t^M = a_0 + \sum_{k=1}^{M} (a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t) \text{ , } \omega_k = 2\pi kt/T \qquad (1.10)$$

$$\dot{x}^M = \sum_{k=1}^{M} \omega_k(- a_k \sin\omega_k t + b_k \cos\omega_k t) \qquad (1.11)$$

La matrice de densité spectrale de x_t est approchée aux fréquences $k\Delta f$, $k > 0$, $\Delta f = 1/T$, par

$$S_x(k\Delta f) = \frac{T}{4}\, E[a_k a_k^t + b_k b_k^t + i(a_k b_k^t - b_k a_k^t)] \qquad (1.12)$$

où l'exposant t note la transposition et avec M et T "grand".

Les approximations de Galerkin sur un intervalle de temps T d'un processus stationnaire, sont des processus asymptotiquement stationnaires quand M, et ensuite T, tendent vers l'infini.

Le système d'équations algébriques non linéaires peut se résoudre par la méthode de Newton, qui s'écrit

$$[L + P_M \Psi_n]\partial x_{n+1} = - [Lx_n + P_M N_n] \quad ; n = 0,1,2,\ldots \qquad (1.13)$$

où pour simplifier les notations

$$x_n = x_n^M(t) \text{ (n indice d'itération; } x_0 \text{ donné)}$$

$$N_n = N(\dot{x}_n^M(t), x_n^M(t), g_t^*)$$

$$\Psi_n = [\partial N/\partial \dot{x}, \partial N/\partial x](\dot{x}_n^M(t), x_n^M(t), g_t^*)$$

$$\partial x_{n+1} = x_{n+1} - x_n$$

En pratique il faut résoudre, à chaque itération, un système linéaire en dimension (2M+1)d, dimension qui croit rapidement avec le nombre M d'harmoniques et la dimension d du système différentiel. Cette difficulté est surmontée [3] en modifiant le schéma itératif (1.13) de façon à résoudre à

chaque itération M fois un système linéaire en dimension 2d et une fois un système en dimension d au lieu d'un système en dimension (2M + 1)d.

En effet la partie linéaire L rend souvent la matrice $[L + P_M \Psi_n]$ dans (13) à blocs diagonaux dominants, chacun d'eux correspondant à une fréquence f_k du développement. Soit alors

$$x_j = P_j x_t^M = a_j \cos(2\pi jt/T) + b_j \sin(2\pi jt/T)$$

la vibration de fréquence j/T. Les quantités $x_n = \sum_j x_{j,n}$ et $Lx_{j,n} + P_j N_n$ étant connues à l'étape n, x_{n+1} est calculé suivant le shéma bloc-diagonal

$$L\partial x_{j,n+1} + P_j[\Psi_n \partial x_{j,n+1}] = - [Lx_{j,n} + P_j N_n]$$

$$x_{j,n+1} = x_{j,n} + \lambda_n \partial x_{j,n+1} \; ; \; j = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1.14)$$

$$x_{n+1} = \sum_j x_{j,n+1}$$

λ_n est un paramètre qui controle la convergence.

2. EXTENSION DE LA METHODE. SPECTRE EVOLUTIF.

Dans ce qui suit on se propose d'étendre la méthode à la résolution de problèmes non stationnaires linéaires.

La modélisation d'une excitation sismique, par exemple, conduit à des processus stochastiques non stationnaires dont, à la fois, l'intensité et le contenu fréquentiel sont fonction du temps [4]. Un modèle souvent utilisé est construit comme produit d'un processus stationnaire à "variations rapides" par une fonction d'enveloppe déterministe, positive, à "variations lentes" et de durée limité T. Une réponse est alors cherchée sous forme d'un développement de Galerkin dont les coefficients sont des fonctions lentement variables du temps et conduisent à une DSP évolutive. Dans le cas stationnaire le système d'équations déterminantes (1.3) à résoudre s'écrit $F(\alpha) = 0$, le cas non stationnaire nécessite la résolution d'un système à évolution lente de la forme

$$\frac{d\alpha_t}{dt} = F(t,\alpha_t).$$

2.1 Approximation de Galerkin à coefficients lentement variables.

On considère le système linéaire à coefficients variables

$$M\ddot{X}(t) + C(t)\dot{X}(t) + K(t)X(t) = B(t)\hat{e}(t). \qquad (2.1)$$

X est un vecteur de dimension d, M, C, K des matrices d × d. B est un vecteur de dimension d.
$\hat{e}(t)$ est un processus stochastique stationnaire, "large bande", de dimension 1(pour simplifier). Il admet sur l'intervalle T un développement de Galerkin à l'ordre M qui s'écrit d'après (1.5)

$$\hat{e}^M(t) = e_0 + \sum_{k=1}^{M} (e_k^c \cos\omega_k t + e_k^s \sin\omega_k t) \text{ où } \omega_k = 2\pi k/T \text{ et } M/T = f_{max} \quad (2.2)$$

Dans le cas d'un modèle d'excitation sismique, T correspond à la durée du séisme.

Nous supposerons que l'évolution temporelle de C, K, B, est "lente" par rapport aux fluctuations "rapides" du bruit ê(t).

Une solution X(t) de (2.1) est approchée par un développement de Galerkin à l'ordre M dont les coefficients dépendent uniquement du temps "lent" qui sera noté τ à partir de maintenant: $X^M(t) = X^M(t,t) = X^M(t,\tau)$

$$X^M(t,\tau) = X_0(\tau) + \sum_{k=1}^{M} (X_k^c(\tau)\cos\omega_k t + X_k^s(\tau)\sin\omega_k t) \qquad (2.3)$$

La dérivation correspondante sera notée par (') d'où,

$$\dot{X}^M(t,\tau) = X_0'(\tau) + \sum_{k=1}^{M} [(X_k'^c(\tau)+\omega_k X_k^s(\tau))\cos\omega_k t + (X_k'^s(\tau)-\omega_k X_k^c(\tau))\sin\omega_k t]$$

$$\ddot{X}^M(t,\tau) = X_0''(\tau) + \sum_{k=1}^{M} [(X_k''^c(\tau)+2\omega_k X_k'^s(\tau)-\omega_k^2 X_k^c(\tau))\cos\omega_k t \qquad (2.4)$$

$$+ (X_k''^s(\tau)-2\omega_k X_k'^c(\tau)-\omega_k^2 X_k^s(\tau))\sin\omega_k t]$$

Le système d'équations différentielles, analogue des équations déterminantes dans le cas stationnaire, qui régit le comportement des coefficients de Galerkin *lentement variables*, est obtenu par balance harmonique dans (2.1).
Pour k = 0

$$MX_0'' + C(\tau)\,X_0' + K(\tau)\,X_0 = B_0(\tau) = B(\tau)\,e_0 \qquad (2.5)$$

Pour k = 1, . . . M

$$M \begin{bmatrix} X_k^{''c} \\ X_k^{''s} \end{bmatrix} + C_k(\tau) \begin{bmatrix} X_k^{'c} \\ X_k^{'s} \end{bmatrix} + K_k(\tau) \begin{bmatrix} X_k^{c} \\ X_k^{s} \end{bmatrix} = B_k(\tau) \qquad (2.6)$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad C_k(\tau) = \begin{bmatrix} C(\tau) & 2\omega_k M \\ -2\omega_k M & C(\tau) \end{bmatrix}$$

$$K_k(\tau) = \begin{bmatrix} -\omega_k^2 M + K(\tau) & \omega_k C(\tau) \\ -\omega_k C(\tau) & -\omega_k^2 M + K(\tau) \end{bmatrix} \qquad (2.7)$$

$$B_k(\tau) = \begin{bmatrix} B(\tau)\, e_k^c \\ B(\tau)\, e_k^s \end{bmatrix}$$

Le modèle étant linéaire toutes les composantes fréquentielles sont "découplées" et la détermination des coefficients de Fourier demande la résolution de (2.6) pour chaque valeur k de la fréquence, séparément. Les coefficients relatifs au bruit large bande du second membre sont obtenus par tirage aléatoire et FFT à partir de sa densité spectrale de puissance [8] dans le cas d'une simulation numérique, ou directement par FFT si l'on dispose d'une trajectoire expérimentale de longue durée de e(t). L'intégration numérique de (2.6) se fait à partir de valeurs initiales des coefficients qui dépendent du modèle particulier traité.

Les coefficients de Fourier étant calculés, *la matrice de densité spectrale de puissance, fonction du temps lent, est <u>définie</u> pour k > 0 (cf. (1.12) avec* $2G_k = X_k^C(\tau) - i\, X_k^S(\tau)$*) par:*

$$S_X(\omega_k,\tau) = \frac{T}{4} E\{X_k^C(\tau)[X_k^C(\tau)]^t + X_k^S(\tau)[X_k^S(\tau)]^t + i(X_k^C(\tau)[X_k^S(\tau)]^t - X_k^S(\tau)[X_k^C(\tau)]^t)\}$$

3. APPLICATION A UN MODELE D'EXCITATION SISMIQUE.

3.1 Excitation sismique. Modèles stationnaires.

Des modèles peuvent être construits par filtrage d'un bruit blanc par des filtres linéaires invariants dans le temps.

Kanai et Tajimi [5] considèrent la réponse d'accélération $a_{KT}(t)$ d'un système à 1 DDL sollicité par un bruit blanc e(t) de moyenne nulle et de DSP $S_{ee}(\omega) = S_0$ constante pour toutes les pulsations ω.

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta_g \omega_g \dot{x}(t) + \omega_g^2 x(t) = - e(t) \tag{3.1}$$

$$a_{KT}(t) = \ddot{x}(t) + e(t) = -[\, 2\zeta_g \omega_g \dot{x}(t) + \omega_g^2 x(t)] \tag{3.2}$$

L'excitation sismique est représenté par le processus stationnaire $a_{KT}(t)$ dont la DSP est de la forme

$$S_{KT}(\omega) = S_0 \frac{\omega_g^4 + 4\,\zeta_g^2\,\omega_g^2\,\omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\,\zeta_g^2\,\omega_g^2\,\omega^2} \tag{3.3}$$

Les paramètres ζ_g, amortissement, et ω_g, pulsation propre, traduisent les propriété dynamiques du sol. La vitesse et le déplacement associés à $a_{KT}(t)$ ont des variances infinies car la DSP ne s'annulle pas au voisinage de $\omega = 0$.

Clough et Penzien [5] évitent cette singularité en filtrant l'accélération $a_{KT}(t)$ suivant l'équation

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta_f \omega_f \dot{y}(t) + \omega_f^2 y(t) = a_{KT}(t) \tag{3.4}$$

l'excitation du sol étant représentée par $\ddot{y}(t) = a_{CP}(t)$ soit

$$a_{CP}(t) = - [\, 2\zeta_f \omega_f \dot{y}(t) + \omega_f^2 \, y(t)] + a_{KT}(t) \qquad (3.5)$$

dont la DSP

$$S_{CP}(\omega) = S_0[\frac{\omega_g^4 + 4\,\zeta_g^2\,\omega_g^2\,\omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\,\zeta_g^2\,\omega_g^2\,\omega^2}][\frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\,\zeta_f^2\,\omega_f^2\,\omega^2}] \qquad (3.6)$$

a un comportement en ω^4 au voisinage de $\omega = 0$ compatible avec les enregistrements de séismes.

3.2 Excitation sismique. Modèles non stationnaires.[4], [6]

Des modèles plus réalistes sont élaborés de façon à prendre en compte l'évolution temporelle de l'amplitude et du contenu fréquentiel qui caractérise les accélérogrammes de séismes réels.

Processus modulé en amplitude.

L'évolution de l'amplitude peut être prise en compte par le processus

$$a_{IN}(t) = I(t)\, a_{ST}(t) \qquad (3.7)$$

où $a_{ST}(t)$ est un processus stationnaire de moyenne nulle et I(t) une fonction régulière, déterministe, positive, lentement variable qui gouverne l'intensité du séisme si la variance de $a_{ST}(t)$ est égale à l'unité.
On peut appliquer la théorie des processus de moyenne nulle à spectre évolutif [7]

$$a_{IN}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t,\omega)\, \exp(i\omega t)\, dZ(\omega) \qquad (3.7)'$$

$Z(\omega)$ est un processus aléatoire, indexé sur les fréquences, de moyenne nulle tel que

$$E[dZ(\omega_1)dZ^*(\omega_2)] = 0 \text{ si } \omega_1 \neq \omega_2 \text{ et } E[\,|dZ(\omega)|^2] = S_{ST}(\omega)d\omega$$

de sorte que la DSP évolutive de $a_{IN}(t)$ est par définition,

$$S_{IN}(\omega) = A^2(t,\omega)\, S_{ST}(\omega).$$

La modulation d'amplitude revient à choisir

$$A(t,\omega) = I(t)$$

Processus modulé en fréquence.

L'évolution du contenu fréquentiel peut se traduire en changeant l'échelle de temps dans la composante stationnaire a_{ST} de (3.7).

Soit Y(t) un processus stationnaire et $\phi(t)$ une fonction monotone croissante du temps. Le processus

$$X(t) = Y(\phi(t))$$

n'est pas en général stationnaire mais $Y(\phi)$ est stationnaire pour l'argument ϕ. La fonction de corrélation de X s'écrit

$$R_{XX}(t,\tau) = E[\, X(t+\tau)\, X(t)]$$

$$R_{XX}(t,\tau) = E[\, Y(\phi(t+\tau))\, Y(\phi(t))]$$

$$R_{XX}(t,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega[\phi(t+\tau)-\phi(\tau)])S_{YY}(\omega)d\omega$$

Si $\phi(t)$ est à croissance lente alors

$$\phi(t+\tau) \approx \phi(t) + \phi'(t)\tau \text{ et}$$

Institut de l'Information Scientifique et Technique - INIST

$$R_{XX}(t,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega[\phi'(t)\tau]) S_{YY}(\omega) d\omega$$

$$R_{XX}(t,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iv\tau) S_{YY}([\phi'(t)]^{-1}v)[\phi'(t)]^{-1} dv$$

Cette dernière expression montre qu'une approximation raisonable de la DSP instantanée de X(t) est donnée par

$$S_{XX}(t,\omega) = [\phi'(t)]^{-1} S_{YY}([\phi'(t)]^{-1}\omega) \qquad (3.8)$$

Modèle différentiel stochastique associé

Après le changement de t en $\phi(t)$ et en notant encore x(t) et y(t) les processus $x(\phi(t))$ et $y(\phi(t))$ les équations (3.1) (3.2) (3.4) (3.5) deviennent:

$$\ddot{x}(t) + [-\phi''(t)[\phi'(t)]^{-1} + 2\zeta_g \omega_g \phi'(t)]\, \dot{x}(t) + \omega_g^2 [\phi'(t)]^2 x(t) =$$

$$-[\phi'(t)]^2 e(\phi(t)) \qquad (3.9)$$

$$\ddot{y}(t) + [-\phi''(t)[\phi'(t)]^{-1} + 2\zeta_f \omega_f \phi'(t)]\, \dot{y}(t) + \omega_f^2 [\phi'(t)]^2 y(t) =$$

$$-[\phi'(t)]^2 [2\zeta_g \omega_g [\phi'(t)]^{-1} \dot{x}(t) + \omega_g^2 x(t)] \qquad (3.10)$$

$$a_{CP}(t) = -I(t)\{[2\zeta_f \omega_f [\phi'(t)]^{-1} \dot{y}(t) + \omega_f^2 y(t)]$$

$$+ [2\zeta_g \omega_g [\phi'(t)]^{-1} \dot{x}(t) + \omega_g^2 x(t)]\} \qquad (3.11)$$

où I(t) est une fonction déterministe de modulation d'amplitude. La DSP instantanée du terme entre accolades de (3.11) est donnée par

$$S(t,\omega) = [\phi'(t)]^{-1} S_{CP}([\phi'(t)]^{-1}\omega). \qquad (3.12)$$

La DSP du bruit $e(\phi(t))$ s'écrit

$$S(t,\omega) = [\phi'(t)]^{-1}\, S_0$$

par suite on posera

$$e(\phi(t)) = [\phi'(t)]^{-1/2}\,(S_0)^{1/2}\,\hat{e}(t) \qquad (3.13)$$

où $\hat{e}(t)$ est un bruit blanc gaussien standard, stationnaire d'intensité 1.

Les fonctions de modulation sont prises sous la forme

$$I^2(t) = A\, t^B\, [D + t^E]^{-1} \exp(-Ct) \text{ et } \phi(t) = at + bt^2 + ct^3 \qquad (3.14)$$

Le choix de ces expressions et la détermination de leurs paramètres pour des accélérogrammes correspondants à différents séismes sont discutés dans [4].

3.3 Modèle différentiel déduit de la méthode multiharmonique.

Le système (3.9) (3.10) (avec (3.13)) est de la forme (2.1) avec X vecteur de composantes x et y . La matrice M est la matrice unité, les matrices C, K et B sont données par

$$C(\tau) = \begin{bmatrix} -\phi''(\tau)[\phi'(\tau)]^{-1} + 2\zeta_g\omega_g\phi'(\tau) & 0 \\ 2\zeta_g\omega_g\phi'(\tau) & -\phi''(\tau)[\phi'(\tau)]^{-1} + 2\zeta_f\omega_f\phi'(\tau) \end{bmatrix}$$

$$K(\tau) = \begin{bmatrix} \omega_g^2[\phi'(\tau)]^2 & 0 \\ \omega_g^2[\phi'(\tau)]^2 & \omega_f^2[\phi'(\tau)]^2 \end{bmatrix} \qquad (3.15)$$

$$B(\tau) = \begin{bmatrix} -[\phi'(\tau)]^{3/2}\,(S_0)^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur inconnu de (2.6) s'écrit,

$$[x_k^c \; y_k^c \; x_k^s \; y_k^s]^t$$

Les matrices qui caractérisent le système différentiel (2.6) se déduisent de (2.7) en faisant M la matrice unité soit

$$C_k(\tau) = \begin{bmatrix} C(\tau) & \begin{bmatrix} 2\omega_k & 0 \\ 0 & 2\omega_k \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 2\omega_k & 0 \\ 0 & 2\omega_k \end{bmatrix} & C(\tau) \end{bmatrix}$$

$$K_k(\tau) = \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} \omega_k^2 & 0 \\ 0 & \omega_k^2 \end{bmatrix} + K(\tau) & \omega_k C(\tau) \\ -\omega_k C(\tau) & -\begin{bmatrix} \omega_k^2 & 0 \\ 0 & \omega_k^2 \end{bmatrix} + K(\tau) \end{bmatrix} \qquad (3.16)$$

Remarque: La représentation intégrale (3.7)' d'un processus à spectre évolutif,[7], peut s'approcher par une série de Fourier obtenue par discrétisation de l'intégrale au pas $\Delta\omega$. Les coefficients de Fourier (aléatoires) sont fonctions du temps. Ceci justifie notre approche de la DSP aux fréquences discrètes par l'expression donnée à la fin de la page 15.

4. MISE EN ŒUVRE DE LA METHODE POUR LE MODELE D'EXCITATION SISMIQUE.

4.1 Détermination du spectre évolutif.

L'excitation $\hat{e}(t)$ est un bruit blanc standard d'intensité unité, les coefficients de (2.2) sont obtenus par tirage aléatoire gaussien pour chaque valeur de k.

Les coefficients de Fourier du second membre étant calculés les systèmes différentiels (2.5) et (2.6) sont résolus par un schéma de Newmark.

$$X''_{i+1} = -X''_i + \frac{4}{h^2}(X_{i+1} - X_i - hX'_i)$$

$$X'_{i+1} = -X'_i + \frac{2}{h}(X_{i+1} - X_i)$$

$$X_{i+1} = A^{-1}[X''_i + \frac{4}{h}X'_i + \frac{4}{h^2}X_i + C_{i+1}(X'_i + \frac{2}{h}X_i) + B_{i+1}]$$

avec $$A = \frac{4}{h^2} + \frac{2}{h}C_{i+1} + K_{i+1}$$

et $$X''_i = B_i - K_i X_i - C_i X'_i$$

$h = \Delta t$ est le pas en temps.

Pour initialiser le processus il faut se donner X_i et X'_i pour le temps initial. La relation (3.12) permet de calculer la variance à l'instant initial

$$\sigma^2_{u_k} = 2\Delta f[\phi'(0)]^{-1} S([\phi'(0)]^{-1}\omega_k) = \frac{1}{2}E(u^{c2}_k(0) + u^{s2}_k(0)) \qquad (4.1)$$

où u est une composante de X et S un des spectres définis en (3.3) ou (3.6). Les coefficients initiaux $u_k^c(0)$ et $u_k^s(0)$ sont alors considérés comme des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de même variance $\sigma^2_{u_k}$, et déterminés par tirage aléatoire.

Une approximation de la Densité Spectrale de Puissance évolutive (3.12), pour une valeur de $t = \tau$ donnée, est déterminée en faisant une moyenne sur N tirages aléatoires de l'excitation $\hat{e}(t)$ et N calculs (2.6).

4.2 Résultats numériques. Illustration.

L'accélérogramme du séisme de Ventura (voir fig. 6), analysé dans [4], montre des changements significatifs à la fois dans les fréquences dominantes et la forme des spectres de puissance, c'est pourquoi il est utilisé pour tester le procédé de calcul des coefficients de Fouriers évolutifs. Le modèle utilise la DSP de Clough et Penzien (3.6) avec $S_0 = 1$, les autres paramètres, déterminés dans [4], sont

$$\omega_g = 15.46 \text{ rd/s} \quad \omega_f = 1.636 \text{ rd/s}$$
$$\zeta_g = 0.623 \quad \zeta_f = 0.619$$

Les paramètres de la fonction de modulation en fréquence $\phi(t)$ définie en (3.14) sont

$$a = 1.35955 \quad b = -0.039398 \quad c = 0.4588\ 10^{-3}$$

De même la fonction de modulation en amplitude est déterminée par

$$A = 3.6862\ 10^5 \quad B = 5.8425 \quad C = -4.8880\ 10^{-2}$$

$$D = 1.5929\ 10^7 \quad E = 8.8911$$

La durée du séisme T est de l'ordre de 30 secondes. Les spectres sont visualisés pour les valeurs de t = 0, 10, 20 et 30 secondes.

La figure 1 représente le spectre évolutif de Yeh et Wen[4] calculé à partir de (3.12) avec (3.6) et $S_0 = 1m^2/s^3$.

Les figures 2 et 3 donnent la même DSP calculée à partir des coefficients de Fourier évolutifs en faisant la moyenne sur 500 tirages pour la figure 2 et 1000 pour la figure 3. Dans les deux cas le nombre de coefficients était égal à M = 64 et le pas d'intégration était égal à $\Delta t = 0.05$ s. Pour montrer l'influence du nombre d'harmoniques la figure 4 représente la DSP calculée par moyenne sur 500 tirages, $\Delta t = 0.05$ s et M = 128. D'autres essais ont été réalisés avec M = 32 et M = 256. A partir de M = 64 le nombre d'harmoniques n'affecte pas de façon appréciable la forme de la DSP. Le nombre de tirages pour obtenir une bonne approximation par moyenne est de l'ordre de 500.

Le schéma de Newmark utilisé pour l'intégration numérique de (2.6) était à pas fixe. Par suite le pas en temps Δt dépend de la valeur maximum f_{max} de la fréquence apparaissant dans la DSP, ce qui grève le temps de calcul si f_{max} est grand. On peut envisager une méthode d'intégration à pas variable pour pallier à cette situation.

La comparaison des DSP instantanées montre un très bon accord avec les résultats obtenus à partir de l'approximation de Yeh et Wen.

La figure 5 représente la trajectoire temporelle construite à l'aide des coefficients de Fourier calculés avec 128 harmoniques et un pas $\Delta t = 0.025$. Elle fait apparaître une zone à fréquence élevée et une zone à basse fréquence. Ce résultat est cohérent avec l'accélérogramme du séisme donné dans [4].

CONCLUSION. PERSPECTIVES.

La méthode multiharmonique à coefficients de Fourier "lentement" variables permet d'approcher de façon satisfaisante les caractéristiques spectrales et les trajectoires temporelles d'une excitation paramétrique associée à un modèle d'excitation sismique par exemple. L'aspect linéaire du problème simplifie le calcul dans la mesure où toutes les fréquences sont découplées (cf. (2.6)).

La méthode proposée est susceptible d'être appliquée à des modèles non linéaires sous excitation paramétrique dont un exemple type est l'oscillateur à hystérésis à 1 DDL sous sollicitation sismique unidirectionnelle [6], [4]. Si l'excitation sismique est modélisée par l'accélération modulée en amplitude et en fréquence (3.11) le problème de vibrations est posé complètement en terme d'équations différentielles de forme générale

$$M\ddot{X}(t) + C(t)\dot{X}(t) + K(t)X(t) + g(\dot{X}(t),X(t)) = B(t)\hat{e}(t)$$

Les matrices M, C(t), K(t), B(t) ne sont pas nécessairement carrées et symétriques et C(t), K(t), B(t) dépendent du temps par l'intermédiaire de la fonction de modulation $\phi(t)$. $g(\dot{X}(t),X(t))$ est un vecteur non linéaire.

X(t) peut encore être cherché sous la forme du développement à coefficients lentement variables (2.3) mais dans ce cas les équations différentielles qui déterminent les coefficients ne sont plus linéaires ce qui introduit un couplage entre les composantes fréquentielles.

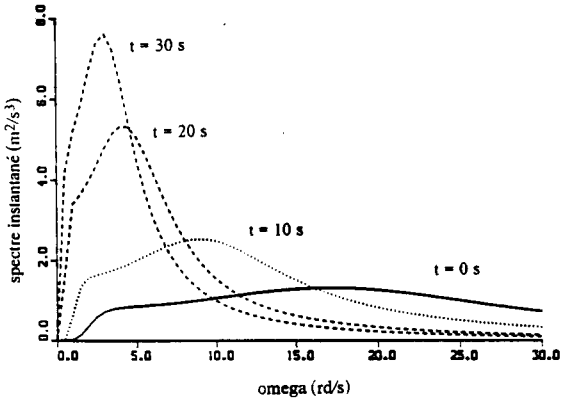

t = 30 s
t = 20 s
t = 10 s
t = 0 s
spectre instantané (m²/s³)
omega (rd/s)
0.0
2.0
4.0
6.0
8.0
0.0
5.0
10.0
15.0
20.0
25.0
30.0

fig. 1.

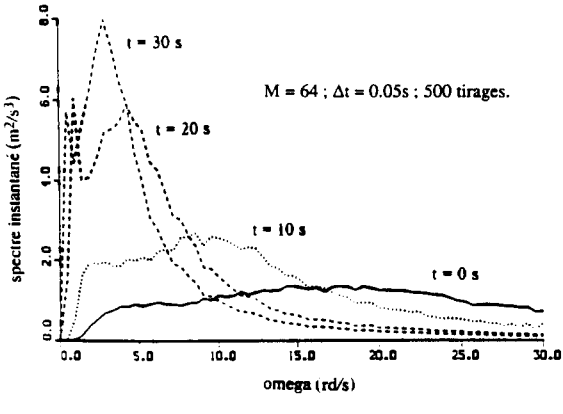

t = 30 s
M = 64 ; Δt = 0.05s ; 500 tirages.
t = 20 s
t = 10 s
t = 0 s
spectre instantané (m²/s³)
omega (rd/s)
0.0
2.0
4.0
6.0
8.0
0.0
5.0
10.0
15.0
20.0
25.0
30.0

fig. 2.

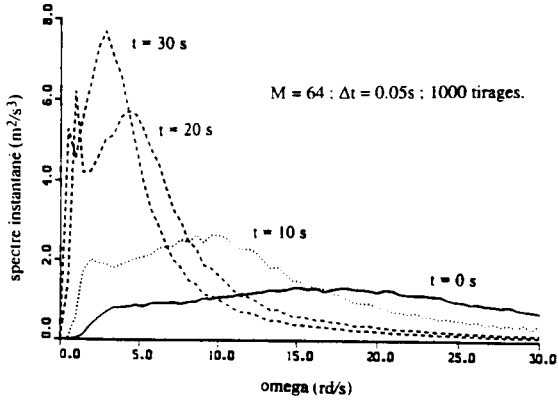

t = 30 s
M = 64 ; Δt = 0.05s ; 1000 tirages.
t = 20 s
t = 10 s
t = 0 s
spectre instantané (m²/s³)
omega (rd/s)

fig. 3.

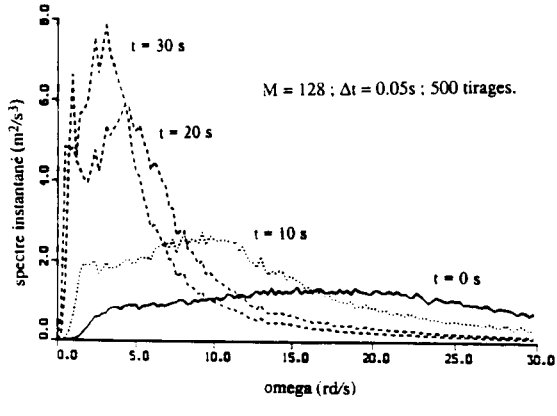

t = 30 s
M = 128 ; Δt = 0.05s ; 500 tirages.
t = 20 s
t = 10 s
t = 0 s
spectre instantané (m²/s³)
omega (rd/s)

fig. 4.

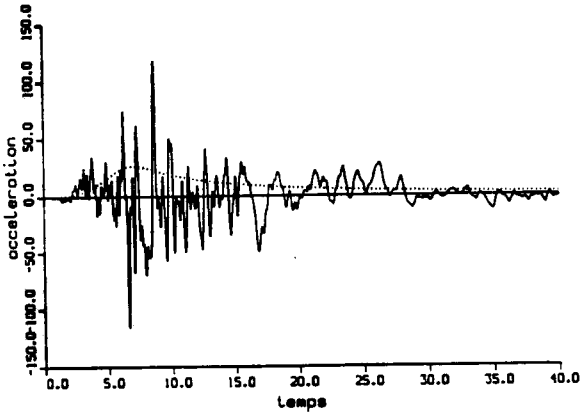

acceleration
150.0
100.0
50.0
0.0
-50.0
-100.0
-150.0
0.0
5.0
10.0
15.0
20.0
25.0
30.0
35.0
40.0
temps

fig. 5.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M.Urabe. Galerkin's procedure for non linear periodic systems. Archs. Ration. Mech. Analysis. **20** 120, 1965.

[2] A.Papoulis. Probability, Random variables and Stochastics Process. Mc Graw-Hill Book Co, New-York, 1965.

[3] R.Bouc et M.Defilippi. A Galerkin multiharmonic procedure for nonlinear multidimensional random vibration. Int. Journal of Ing. Sciences. 25, 723-733, 1987.

[4] C.H.Yeh and Y.K.Wen. Modeling of nonstationary earthquake ground motion and biaxial and torsional response of inelastic structures.Civil Engineering Studies, Structural Research Series N° 546 University of Illinois at Urbana-Champain, Urbana, Illinois, Août 1989. ISSN: 0069-4274.

[5] R.V.Clough and J.Penzien. Dynamics of structures. Mc Graw-Hill Book Co, New-York, 1975.

[6] R.Bouc. Modélisation instationnaire des sollicitations sismiques et des réponses associées. Cours IPSI, Méthodes probabilistes appliquées à la dynamique des structures. Mars 1990.

[7] M.B.Priestley. Spectral analysis and time series. Academic Press, 1981.

[8] F.Poirion et C.Soize. Simulation numérique de champs vectoriels stochastiques gaussiens homogènes et non homogènes. Rech.Aérosp. n° 1, pp.41-61; 1989

LABORATOIRE DE MECANIQUE ET D'ACOUSTIQUE (L.M.A.)
31, chemin Joseph-Aiguier
13402 MARSEILLE CEDEX 09

Téléphone : 91 16 40 00
Télécopieur : 91 22 08 75
Téléscripteur : CNRSMAR 430 225 F