

Formulation analytique de la matrice impédance de matériaux composites stratifiés anisotropes en fibres de carbone

Fiacre SENGHOR, Guillaume WASELYNCK, Didier TRICHET et Gérard BERTHIAU
IREENA, Université de Nantes, Boulevard de l'Université, 44602 Saint-Nazaire, France

RESUME – Avec l'usage accru des matériaux composites à fibres de carbone dans l'industrie aéronautique, la prédiction de leur comportement électromagnétique face à certains dangers environnementaux naturels (foudre, etc.) est primordiale pour leur utilisation sur certaines composantes des avions. Ce papier présente une méthode de formulation analytique de la matrice impédance de matériaux composites stratifiés anisotropes. Cette méthode est basée sur l'analyse de l'interaction électromagnétique entre une onde plane et un matériau composite stratifié anisotrope à bases fréquences en utilisant la Méthode des lignes de Transmission (TLM) pour déduire la matrice d'impédance.

Mots-clés – Fibre de carbone, matrice d'impédance, composite stratifié, anisotropie, tenseur de conductivité électrique.

1. INTRODUCTION

Au cours de ces dernières années, l'utilisation des matériaux composites renforcés de fibres de carbone c'est largement intensifié dans l'industrie du transport (aérospatiale, automobile, etc.) en remplacement aux matériaux traditionnels (alliages, aluminium, etc.). Cette intensification est due en grande partie à leurs bonnes propriétés mécaniques et légèretés. En dépit de ces avantages, ces matériaux composites ne sont pas autant conducteur d'électricité que les matériaux traditionnels (aluminium par exemple), du fait de leur plus faible conductivité électrique. Par conséquence, on assiste récemment au développement de nouveaux matériaux composites multifonctionnels combinant les propriétés électriques, thermiques et mécaniques, permet de répondre à cette problématique de conduction d'électricité. D'autre part, l'arrangement des fibres et leur orientation dans la matrice permettent d'améliorer les propriétés électriques et de moduler les propriétés mécaniques du matériau composite stratifié (Fig. 1.a) [1]. C'est pour ces raisons que la caractérisation du comportement électromagnétique de ces matériaux composites posent des défis de modélisation due à leur caractère anisotrope, à leur processus de fabrication, à l'orientation des plis, etc.[2]. Des travaux antérieurs ont été développés pour étudier le comportement électromagnétiques de ces matériaux, afin de prendre en compte l'anisotropie. A cet effet, Holloway a présenté un modèle équivalent multicouches reproduisant le comportement électromagnétique de matériaux composites anisotropes [3]. Il propose d'une part, un modèle analytique reposant sur les tenseurs de permittivité et de perméabilité qui permettent de prendre en compte l'anisotropie de ces matériaux. Et d'autre part, un modèle éléments finis qui repose sur le principe de périodicité de la géométrie des fibres de carbone et des couches superposées du matériau composite à l'aide de la matrice impédance de chaque couche. Dans la même optique, Piche et autres ont proposés dans[4] une approche numérique par éléments finis d'un modèle pour déterminer la matrice d'impédance d'un composite multicouches anisotrope en fibres de carbone. Earl a proposé aussi un modèle équivalent circuit permettant de considérer plusieurs couches différentes d'un matériau composite stratifié[5], où chaque couche est considérée comme un circuit RLC pour former un schéma en échelle, caractérisant

son comportement électromagnétique. Dans cet article, on propose un modèle équivalent décrivant le comportement électromagnétique de matériaux composites anisotropes soumis à une onde plane en bases fréquences nous permettant de déduire la matrice d'impédance, à partir du tenseur de permittivité électrique complexe d'un pli (ou couche) et du plan de drapage (ou orientation) des plis. A cet effet, on utilise la méthode des Lignes de Transmission (Transmission Line Matrix method (TLM))[6], en faisant l'analogie entre les équations électromagnétiques et celles de la TLM, comme support.

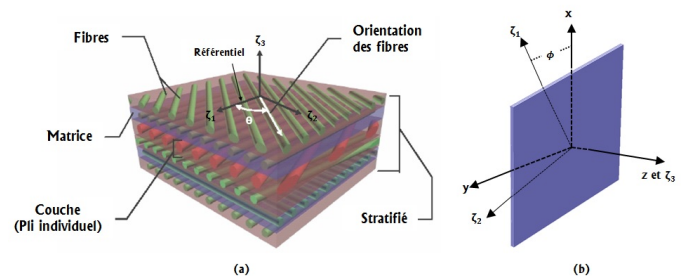


Fig. 1. Matériau composite stratifié anisotrope : (a) composition d'un stratifié, (b) plan de propagation de l'onde plane (o, x, y, z) et le référentiel $(0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$

2. FORMULATION DU PROBLÈME

Cette partie décrit l'approche utilisée pour déterminer la matrice d'impédance d'un matériau composite stratifié anisotrope. A cet effet, on analyse le comportement électromagnétique d'un matériau stratifié soumis à une onde plane (Fig. 1.b). On débute la formulation du problème sur un pli unidirectionnel (UD) à fibres carbone, puis on l'a généralise sur un matériau composite stratifié à plis UD.

2.1. Matrice d'impédance d'un seul pli UD

On considère un pli UD infini d'une épaisseur e , décrit par une perméabilité μ_o (matériau amagnétique) et d'un tenseur de permittivité électrique complexe anisotrope $\underline{\epsilon}$ (éq.(1)) combinant la permittivité ϵ et la conductivité σ , soumis à une onde plane. Par soucis de simplification de calcul, on suppose ce tenseur diagonal (anisotrope quasi-homogène).

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\epsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\epsilon}_3 \end{bmatrix} \quad \hat{\epsilon}_i = \epsilon_i + j \frac{\sigma_i}{\omega} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

où ω est la pulsation électrique et i représente les axes du référentiel du pli UD $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$. On considère ζ_1 et ζ_2 respectivement comme étant l'axe parallèle et l'axe perpendiculaire à l'orientation des fibres du pli. On note E et H les champs électrique et magnétique et l'onde plane comme incidence normale. Les équations (éq.(3) et éq.(2) qui décrivent ces grandeurs, sont obtenues par analogie à aux équations de la méthode TLM dans le plan référentiel du pli. De ce fait, on considère deux modes

normales de polarisation non couplées correspondant aux polarisations parallèle (TM) (éq.(2)) et perpendiculaire (TE) (éq.(3)) à l'orientation des fibres.

$$\begin{bmatrix} E_{\zeta_1}(\zeta_3) \\ H_{\zeta_2}(\zeta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \theta_1 & \eta_1 \sinh \theta_1 \\ \frac{\sinh \theta_1}{\eta_1} & \cosh \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\zeta_1}(\zeta_3 + e) \\ H_{\zeta_2}(\zeta_3 + e) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} E_{\zeta_2}(\zeta_3) \\ -H_{\zeta_1}(\zeta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \theta_2 & \eta_2 \sinh \theta_2 \\ \frac{\sinh \theta_2}{\eta_2} & \cosh \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\zeta_2}(\zeta_3 + e) \\ -H_{\zeta_1}(\zeta_3 + e) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{Où } \theta_i = \omega \sqrt{\mu_o \hat{\epsilon}_i} \text{ et } \eta_i = \sqrt{\frac{\mu_o}{\hat{\epsilon}_i}} \quad (\text{avec } i = 1, 2)$$

On obtient après une transformation géométrique (éq.(4)), les composantes tangentielles du champ électromagnétique E et H (éq.(5)) des deux cotés du pli dans le plan de propagation de l'onde. Ces composantes sont reliées par les paramètres de la matrice de transfert $ABCD$ (4x4).

$$\begin{cases} T_{\zeta_1} = T_x \cos \phi + T_y \sin \phi \\ T_{\zeta_2} = -T_x \sin \phi + T_y \cos \phi \end{cases} \quad (4)$$

où T représente soit une composante tangentielle du champ électrique ou magnétique et ϕ l'angle d'orientation du pli par rapport au plan de propagation (o, x, y, z).

$$\begin{bmatrix} E_x(z) \\ E_y(z) \\ H_y(z) \\ -H_x(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(z+e) \\ E_y(z+e) \\ H_y(z+e) \\ -H_x(z+e) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Toutefois, les composantes tangentielles du champ électromagnétique E et H transmises des deux cotés du pli (en entrée l'éq.(6) et en sortie l'éq.(6)) peuvent se décomposer en une somme de composantes incidentes et réfléchies.

$$\begin{cases} E_x(z) = E_{xi}(z) + E_{xr}(z) \\ E_y(z) = E_{yi}(z) + E_{yr}(z) \\ H_y(z) = \frac{1}{\eta_o} [E_{xi}(z) - E_{xr}(z)] \\ -H_x(z) = \frac{-1}{\eta_o} [E_{yi}(z) - E_{yr}(z)] \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} E_x(z+e) = E_{xi}(z+e) + E_{xr}(z+e) \\ E_y(z+e) = E_{yi}(z+e) + E_{yr}(z+e) \\ H_y(z+e) = \frac{1}{\eta_s} [E_{xi}(z+e) - E_{xr}(z+e)] \\ -H_x(z+e) = \frac{-1}{\eta_s} [E_{yi}(z+e) - E_{yr}(z+e)] \end{cases} \quad (7)$$

où η_o et η_s sont respectivement les impédances intrinsèques des milieux en entrée et en sortie du pli. Dans ce cas précis, elles correspondent tous les deux à l'impédance caractéristique du vide. Cependant, comme à la sortie du pli il n'y a pas de source, les composantes incidentes sont égales à zéro (i.e. $E_{xi}(z+t) = E_{yi}(z+t) = 0$). On obtient ainsi, après quelques transformations algébriques les paramètres de la matrice $[S]$ (4x4) (éq.(8)).

$$\begin{bmatrix} E_{xr}(z) \\ E_{yr}(z) \\ E_{xr}(z+e) \\ E_{yr}(z+e) \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} E_{xi}(z) \\ E_{yi}(z) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

De ce fait, la matrice d'impédance $[Z]$ (4x4) est obtenue à partir des coefficients de la matrice $[S]$ (4x4) grâce à l'éq.(9) [7].

$$[Z] = (I + S)(I - S)^{-1} \quad (9)$$

où I est une matrice identité (4x4).

$$\begin{bmatrix} E_x(z) \\ E_y(z) \\ E_x(z+e) \\ E_y(z+e) \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} H_x(z) \\ H_y(z) \\ H_x(z+e) \\ H_y(z+e) \end{bmatrix} \quad (10)$$

En posant $z=0$, l'éq.(10) peut être considérée comme les conditions aux limites appliquées sur la surface externe des deux cotés du pli. Cela nous permet de déduire les impédances surfacique et de transfert de ce pli UD de composite.

2.1.1. Matrice d'impédance d'un composite stratifié

Pour évaluer le comportement électromagnétique des matériaux composites stratifiés anisotropes à fibres de carbone, on construit une matrice de transfert $ABCD$ (4x4), produit des matrices de transfert de chacune des plis en tenant compte de leur orientation et de leur tenseur de permittivité électrique complexe anisotrope $\underline{\epsilon}$. On fait l'hypothèse que la contribution des contacts entre fibres de différents plis sur le comportement électromagnétique du composite est négligeable. Ainsi pour un échantillon de matériaux composite stratifié anisotrope à plis UD de structure de drapage ($90^\circ, \dots, 45^\circ$), on obtient l'éq.(11) ci-dessous.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{90^\circ} & B_{90^\circ} \\ C_{90^\circ} & D_{90^\circ} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} A_{45^\circ} & B_{45^\circ} \\ C_{45^\circ} & D_{45^\circ} \end{bmatrix} \quad (11)$$

De ce fait, on applique la même démarche qu'en 2.1 pour déterminer la matrice d'impédance de ce matériau composite stratifié anisotrope. Toutefois, la même démarche peut être appliquée à un composite stratifié, si l'on connaît son tenseur de permittivité complexe anisotrope diagonal homogénéisé.

3. CONCLUSIONS

Une nouvelle formulation analytique de prédiction de la matrice d'impédance d'un matériau composite stratifié anisotrope est proposée dans ce papier à partir de l'analyse de l'interaction électromagnétique entre une onde plane et ce dernier. Cette méthode prend en compte l'orientation des plis et de leur tenseur de permittivité électrique. Dans le document final, on détaillera plus nos calculs puis on présentera les résultats de ce formalisme sur un échantillon de composite stratifié qui seront validés par une méthode numérique ou expérimentale. Pour cela, on identifiera d'abord expérimentalement le tenseur de conductivité électrique et puis on en déduira le tenseur de permittivité électrique complexe de nos échantillons de composite stratifié anisotrope.

4. RÉFÉRENCES

- [1] G. Wasselynck, *Etude des interactions entre les ondes électromagnétiques de fréquences moyennes et les matériaux composites. Application à l'assemblage par induction de ces matériaux*. PhD thesis, Université Nantes, France, 2011.
- [2] J. Fouladgar, G. Wasselynck, and D. Trichet, "Shielding and Reflecting Effectiveness of Carbon Fiber Reinforced Polymer (CFRP) Composites," *IEEE, Electromagn. Theory (EMTS), Proc. 2013 URSI Int. Symp.*, pp. 104–107, 2013.
- [3] C. L. Holloway, M. S. Sarto, and M. Johansson, "Analyzing carbon-fiber composite materials with equivalent-layer models," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 47, no. 4, pp. 833–844, 2005.
- [4] V. S. A. Piche, A. Bennani, R. Perraud, T. Abboud, F. Bereux, G. Peres, "Electromagnetic modeling of multilayer carbon fibers composites," *Int. Symp. Electromagn. Compat. EMC Eur.*, 2009.
- [5] Simeon J. Earl, "Some methods for modelling carbon fibre composites for the effects of lightning," *Challenges Model. Meas. Electromagn. Mater.*, 2006.
- [6] S. A. Schelkunoff, *Electromagnetic waves*. Van Nostrand, 1943.
- [7] J. A. Dobrowolski, *Microwave Network Design Using the Scattering Matrix*. Boston / London : British Library Cataloguing, 2010.