



**HAL**  
open science

# Formulation analytique de la matrice impédance de matériaux composites stratifiés anisotropes en fibres de carbone

Fiacre Djonkone Senghor, Guillaume Wasselynck, Didier Trichet, Gerard Berthiau

## ► To cite this version:

Fiacre Djonkone Senghor, Guillaume Wasselynck, Didier Trichet, Gerard Berthiau. Formulation analytique de la matrice impédance de matériaux composites stratifiés anisotropes en fibres de carbone. Symposium de Genie Electrique, Jun 2016, Grenoble, France. hal-01361642

**HAL Id: hal-01361642**

**<https://hal.science/hal-01361642v1>**

Submitted on 7 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Formulation analytique de la matrice impédance de matériaux composites stratifiés anisotropes en fibres de carbone

Fiacre D. SENGHOR, Guillaume WASELYNCK, Didier TRICHET et Gérard BERTHIAU

IREENA, Université de Nantes, Boulevard de l'Université, 44602 Saint-Nazaire, France

**RESUME** – Avec l'usage accru des matériaux composites à fibres de carbone dans l'industrie aéronautique, la prédiction de leur comportement électromagnétique face à certains dangers environnementaux naturels (foudre, etc.) est primordiale pour leur utilisation sur certaines composantes des avions. Cette communication présente une méthode de formulation analytique de la matrice impédance de matériaux composites stratifiés anisotropes. Cette méthode est basée sur l'analyse de l'interaction électromagnétique entre une onde plane et un matériau composite stratifié anisotrope à bases fréquences en utilisant la Méthode des lignes de Transmission (TLM) pour déduire la matrice d'impédance.

**Mots-clés** – Fibre de carbone, Matrice d'impédance, Composite stratifié, Anisotropie, Tenseur de conductivité électrique.

## 1. INTRODUCTION

Au cours de ces dernières années, l'utilisation des matériaux composites renforcés de fibres de carbone c'est largement intensifiée dans l'industrie du transport (aérospatiale, automobile, etc.) en remplacement aux matériaux traditionnels (alliages, aluminium, etc.). Cette intensification est due en grande partie à leurs bonnes propriétés mécaniques et légèretés. En dépit de ces avantages, ces matériaux composites sont très peu conducteur d'électricité par rapport aux matériaux traditionnels.

Par conséquence, on assiste depuis peu au développement de nouveau matériau composite multifonctions combinant propriétés électrique, thermique et mécanique, pour répondre aux exigences des industriels (amélioration de leurs propriétés électrique et thermique sans dégradé leurs propriétés mécaniques). L'arrangement et l'orientation des fibres dans la matrice permettent en plus d'améliorer les propriétés électriques de ces matériaux composites stratifiés tout en modulant leurs propriétés mécaniques (Fig. 1) [1]. C'est dans ce contexte que la modélisation et la caractérisation du comportement électromagnétique de ces matériaux composites posent un certain nombre de défis due à leurs structures complexes, leurs caractères anisotropes, à leur processus de fabrication, à l'orientation des plis, etc.[2].

Des travaux antérieurs ont été développés en ce sens pour étudier le comportement électromagnétiques de ces matériaux, afin de prendre en compte leurs anisotropies. A cet effet, Holloway et al. ont présenté un modèle équivalent multicouches reproduisant le comportement électromagnétique de matériaux composites anisotropes [3]. Il propose d'une part, un modèle analytique reposant sur les tenseurs de permittivité et de perméabilité qui permettent de prendre en compte l'anisotropie de ces matériaux. Et d'autre part, un modèle éléments finis qui repose sur le principe de périodicité de la géométrie des fibres de carbone et des couches superposées du matériau composite à l'aide de la matrice impédance de chaque couche. Dans la même optique, Piche et al. ont proposés dans[4] une approche numérique par éléments finis d'un modèle pour déterminer la matrice d'impédance d'un composite multicouches anisotrope en fibres de

carbone. Earl et al. ont proposé aussi un modèle équivalent circuit permettant de considérer plusieurs couches différentes d'un matériau composite stratifié[5], où chaque couche est considérée comme un circuit RLC pour former un schéma en échelle, caractérisant son comportement électromagnétique.

Dans cette communication, nous proposons un modèle équivalent décrivant le comportement électromagnétique de matériaux composites anisotropes soumis à une onde plane en bases fréquences. Ce modèle permet de déduire la matrice d'impédance d'un matériau composite stratifié, à partir du tenseur de permittivité électrique complexe d'un pli (ou couche) et du plan de drapage (ou orientation) des plis. Pour cela, on utilise la méthode des Lignes de Transmission(Transmission Line Matrix method (TLM))[6], en faisant l'analogie entre les équations électromagnétiques et celles de la TLM, comme support.

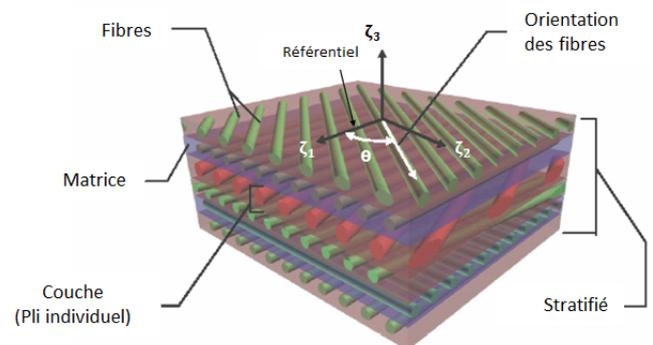


Fig. 1. Matériau composite stratifié anisotrope de référentiel  $(0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  commun à tous les plis.

## 2. FORMULATION DU PROBLÈME

Dans cette partie on décrit l'approche utilisée pour déterminer la matrice d'impédance d'un matériau composite stratifié anisotrope. Pour cela, on analyse le comportement électromagnétique d'un matériau composite stratifié à  $n$  plis soumis à une onde plane à incidence normale, de plan de propagation  $(0, x, y, z)$  (Fig. 2). Dans un première temps, la formulation du problème est restreinte à un pli unidirectionnel (UD) à fibres carbone, puis elle est généralisée sur un matériau composite stratifié à plis UD.

### 2.1. Matrice d'impédance d'un pli UD

On considère un pli UD infini d'une épaisseur  $e$ , décrit par une perméabilité  $\mu_o$  (matériau amagnétique) et d'un tenseur de permittivité électrique complexe anisotrope  $\underline{\epsilon}$  (éq.(1)) combinant la permittivité  $\epsilon$  et la conductivité  $\sigma$ , qui est soumis à une onde

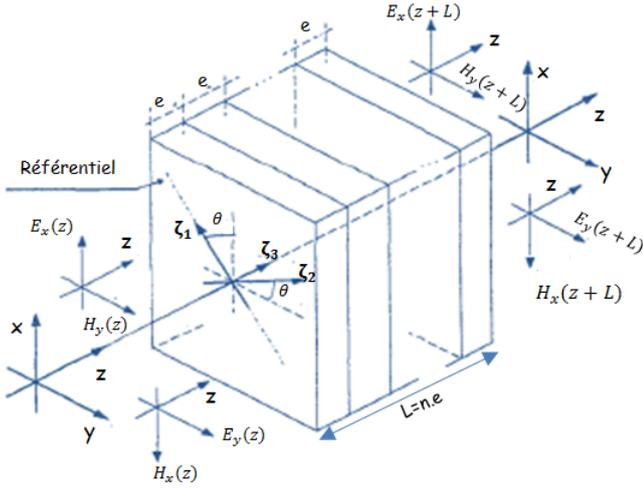


Fig. 2. Plan de propagation  $(0, x, y, z)$  d'une onde plane à incidence normale sur un matériaux composite stratifié d'épaisseur  $L=n.e$ .

plane. Par soucis de simplification de calcul, on suppose ce tenseur diagonal (anisotrope quasi-homogène).

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\epsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\epsilon}_3 \end{bmatrix} \quad \hat{\epsilon}_i = \epsilon_i - j \frac{\sigma_{\zeta_i}}{\omega} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

où  $\omega$  est la pulsation électrique et  $i$  représente l'indice de l'axe du référentiel du pli UD  $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ .

On considère  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  respectivement comme étant l'axe parallèle et l'axe perpendiculaire à l'orientation des fibres du pli. On note  $E$  et  $H$  les champs électrique et magnétique de l'onde plane. Les équations éq.(3) et éq.(2) décrivent ces grandeurs. Elles sont obtenues par analogie aux équations de la méthode TLM dans le plan référentiel du pli, correspondant respectivement aux modes normaux non couplés de polarisation parallèle (TM) et perpendiculaire (TE) au sens d'orientation des fibres du pli.

$$\begin{bmatrix} E_{\zeta_1}(\zeta_3) \\ H_{\zeta_2}(\zeta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \phi_1 & \phi_1 \sinh \phi_1 \\ \frac{\sinh \phi_1}{\eta_1} & \cosh \phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\zeta_1}(\zeta_3 + e) \\ H_{\zeta_2}(\zeta_3 + e) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} E_{\zeta_2}(\zeta_3) \\ -H_{\zeta_1}(\zeta_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \phi_2 & \eta_2 \sinh \phi_2 \\ \frac{\sinh \phi_2}{\eta_2} & \cosh \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\zeta_2}(\zeta_3 + e) \\ -H_{\zeta_1}(\zeta_3 + e) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{Où } \phi_i = \omega \sqrt{\mu_o \hat{\epsilon}_i} \quad \text{et} \quad \eta_i = \sqrt{\frac{\mu_o}{\hat{\epsilon}_i}} \quad (\text{avec } i = 1, 2)$$

On obtient après une transformation géométrique (éq.(4)), les composantes tangentielles du champ électromagnétique  $E$  et  $H$  (éq.(5)) des deux cotés du pli dans le plan de propagation de l'onde. Ces composantes sont reliées par les paramètres de la matrice de transfert  $ABCD$  (4x4).

$$\begin{cases} T_{\zeta_1} = T_x \cos \theta + T_y \sin \theta \\ T_{\zeta_2} = -T_x \sin \theta + T_y \cos \theta \end{cases} \quad (4)$$

où  $T$  représente soit une composante tangentielle du champ électrique ou magnétique et  $\phi$  l'angle d'orientation du pli par rapport

au plan de propagation  $(0, x, y, z)$ .

$$\begin{bmatrix} E_x(z) \\ E_y(z) \\ H_y(z) \\ -H_x(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(z+e) \\ E_y(z+e) \\ H_y(z+e) \\ -H_x(z+e) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Toutefois, les composantes tangentielles du champ électromagnétique  $E$  et  $H$  transmises des deux cotés du pli (en entrée l'éq.(6) et en sortie l'éq.(7)) peuvent se décomposer en une somme de composante incidente et réfléchi.

$$\begin{cases} E_x(z) = E_{xi}(z) + E_{xr}(z) \\ E_y(z) = E_{yi}(z) + E_{yr}(z) \\ H_y(z) = \frac{1}{\eta_o} [E_{xi}(z) - E_{xr}(z)] \\ -H_x(z) = \frac{-1}{\eta_o} [E_{yi}(z) - E_{yr}(z)] \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} E_x(z+e) = E_{xi}(z+e) + E_{xr}(z+e) \\ E_y(z+e) = E_{yi}(z+e) + E_{yr}(z+e) \\ H_y(z+e) = \frac{1}{\eta_s} [E_{xi}(z+e) - E_{xr}(z+e)] \\ -H_x(z+e) = \frac{-1}{\eta_s} [E_{yi}(z+e) - E_{yr}(z+e)] \end{cases} \quad (7)$$

où  $\eta_o$  et  $\eta_s$  sont respectivement les impédances intrinsèques des milieux en entrée et en sortie du pli. Dans ce cas précis, elles correspondent tous les deux à l'impédance caractéristique du vide. Cependant, comme à la sortie du pli il n'y a pas de source, les composantes incidentes du champ électromagnétique  $y$  sont nulles (i.e.  $E_{xi}(z+e) = E_{yi}(z+e) = 0$ ). Ainsi, après quelques transformations algébriques, on obtient les paramètres de la matrice  $[S]$  (4x4) (éq.(8)).

$$\begin{bmatrix} E_{xr}(z) \\ E_{yr}(z) \\ E_{xr}(z+e) \\ E_{yr}(z+e) \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} E_{xi}(z) \\ E_{yi}(z) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

La matrice d'impédance  $[Z]$  (4x4) est obtenue à partir des coefficients de la matrice  $[S]$  (4x4) grâce à l'éq.(9) [7].

$$[Z] = (I + S)(I - S)^{-1} \quad (9)$$

où  $I$  est une matrice identité (4x4).

$$\begin{bmatrix} E_x(z) \\ E_y(z) \\ E_x(z+e) \\ E_y(z+e) \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} H_x(z) \\ H_y(z) \\ H_x(z+e) \\ H_y(z+e) \end{bmatrix} \quad (10)$$

En posant  $z=0$  dans l'éq.(10), on obtient les conditions aux limites appliquées sur la surface externe des deux cotés du pli. On en déduit de ces conditions limites les matrices impédances surfacique  $[Z_s]$  ( $2 \times 2$ ) et de transfert  $[Z_t]$  ( $2 \times 2$ ) du pli UD.

$$\begin{bmatrix} E_x(0) \\ E_y(0) \end{bmatrix} = [Z_s] \begin{bmatrix} H_x(0) \\ H_y(0) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} E_x(e) \\ E_y(e) \end{bmatrix} = [Z_T] \begin{bmatrix} H_x(0) \\ H_y(0) \end{bmatrix} \quad (12)$$

### 2.1.1. Matrice d'impédance d'un composite stratifié

Pour évaluer le comportement électromagnétique des matériaux composites stratifiés anisotropes à fibres de carbone, on construit une matrice de transfert  $ABCD$  ( $4 \times 4$ ), produit des matrices de transfert de chacune des plis en tenant compte de leur orientation et de leur tenseur de permittivité électrique complexe anisotrope  $\underline{\varepsilon}$ . On fait l'hypothèse que la contribution des contacts entre fibres de différents plis sur le comportement électromagnétique du composite est négligeable. Ainsi pour un échantillon de matériaux composite stratifié anisotrope à plis UD de structure de drapage ( $90^\circ, \dots, 45^\circ$ ), on obtient l'éq.(13) ci-dessous.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{90^\circ} & B_{90^\circ} \\ C_{90^\circ} & D_{90^\circ} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} A_{45^\circ} & B_{45^\circ} \\ C_{45^\circ} & D_{45^\circ} \end{bmatrix} \quad (13)$$

On applique la même démarche qu'en 2.1 pour déterminer la matrice d'impédance de ce matériau composite stratifié anisotrope. Toutefois, la même démarche peut être appliquée à un composite stratifié, si l'on connaît son tenseur de permittivité complexe anisotrope diagonal homogénéisé.

### 3. EXEMPLE D'APPLICATION

On considère un pli UD de matériau composite de tenseur permittivité électrique complexe homogénéisé ( $\underline{\varepsilon}$  (eq.(1)). Ce pli UD est constitué de fibres longues de carbone non rectiligne mais ondulés, toutes orientées dans une même direction, et noyées dans une résine époxy (matrice) (Fig. 3). Son tenseur permittivité électrique complexe combine le tenseur la permittivité électrique  $[\varepsilon]$  et le tenseur de conductivité électrique  $[\sigma]$ . On se propose de modéliser un pli UD à fibres de carbone dont le tenseur de conductivité électrique a été évalué par Todoroki et al. [8].

Tableau 1. Tenseur de conductivité électrique diagonal d'un pli UD [8]

$V_f$ (fraction volumique)	$\sigma_{\zeta_1}$ ( $S m^{-1}$ )	$\sigma_{\zeta_2}$ ( $S m^{-1}$ )	$\sigma_{\zeta_3}$ ( $S m^{-1}$ )
60%	5500	203.5	20.9

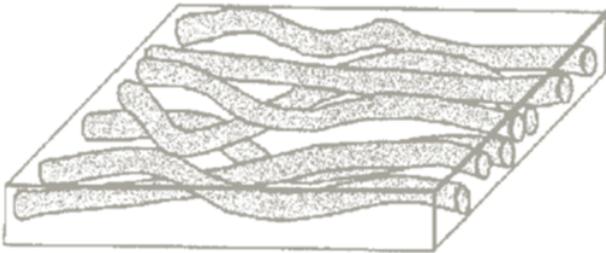


Fig. 3. Modèle schématisé du réseau de fibre de carbone d'un pli unidirectionnel (UD) de matériau composite [8].

Ainsi, compte tenu des valeurs de conductivité électrique évaluées par Todoroki et al. [8] dans le référentiel composite, le pli UD de ce matériau composite peut être considéré comme conducteur. Par conséquent, la mesure de la permittivité électrique n'est pas nécessaire dans la gamme de fréquence qui nous intéresse (i.e basse fréquence de DC à qqes MHz approx.) [9, 10]. Étant donné qu'on considère le courant de conduction plus grande que le courant de déplacement et qu'il

n'y a pas « d'effet peau ». Le comportement électromagnétique du pli UD de ce matériau composite homogénéisé conducteur est assuré globalement par l'absorption d'énergie électromagnétique qui dépendant principalement de la conductivité électrique (car  $\sigma_{\zeta_i} \gg \varepsilon_i \omega$ ) et très peu de la permittivité électrique en base fréquence [11]. La permittivité  $\varepsilon_i$  peut être considéré comme égale à la permittivité  $\varepsilon_o$  d'un matériau conducteur [12]. Toutefois, cette hypothèse n'est pas valide en haute fréquence où l'effet de peau au niveau des fibres n'est plus négligeable, et est d'autant plus élevé, si les fibres ont une très forte conductivité électrique [12, 13, 14]. De ce fait, en basse fréquence le tenseur de permittivité complexe peut s'écrire comme suit :

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_o - j \frac{\sigma_{\zeta_1}}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_o - j \frac{\sigma_{\zeta_2}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_o - j \frac{\sigma_{\zeta_3}}{\omega} \end{bmatrix} \quad (14)$$

où  $\varepsilon_o$  est la permittivité du vide.

Dans ce cas d'étude, on considère que les deux modes normaux de polarisation parallèle (TM) et perpendiculaire (TE) au sens d'orientation des fibres du pli sont découplés (i.e  $\theta = 0^\circ$  ou  $\theta = 90^\circ$ ). Par conséquent, les éléments de la matrice d'impédance surfacique et transfert respectent les égalités ci-dessous :

$$Z_{sxx} = Z_{syy} = Z_s \quad \text{et} \quad Z_{txx} = Z_{tyy} = Z_t \quad (15)$$

La Figure. 4 montre à titre d'exemple les allures fréquentielles des impédances ( $Z_s$  et  $Z_t$ ), calculer par cette formulation analytique.

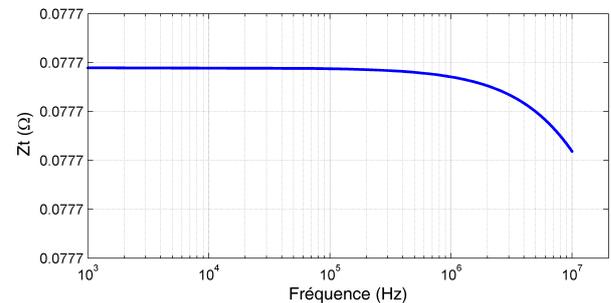
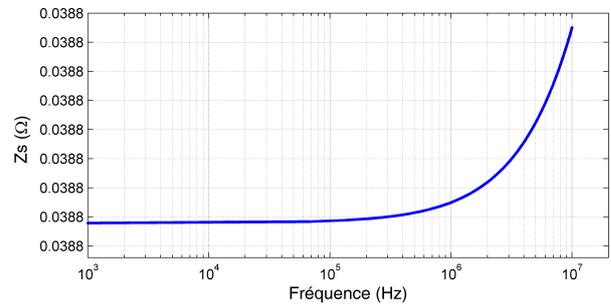


Fig. 4. Impédances surfacique  $Z_s$  et de transfert  $Z_t$  d'un pli UD [8] de matériau composite à fibre de carbone.

Pour valider l'hypothèse de la faible influence de la permittivité électrique sur le comportement électromagnétique en basse fréquence du pli de composite homogénéisé, on l'a fait varier.

Nous pouvons observer sur figure. 5 que notre formulation fournit une bonne estimation des impédances du pli UD en basse fréquence.

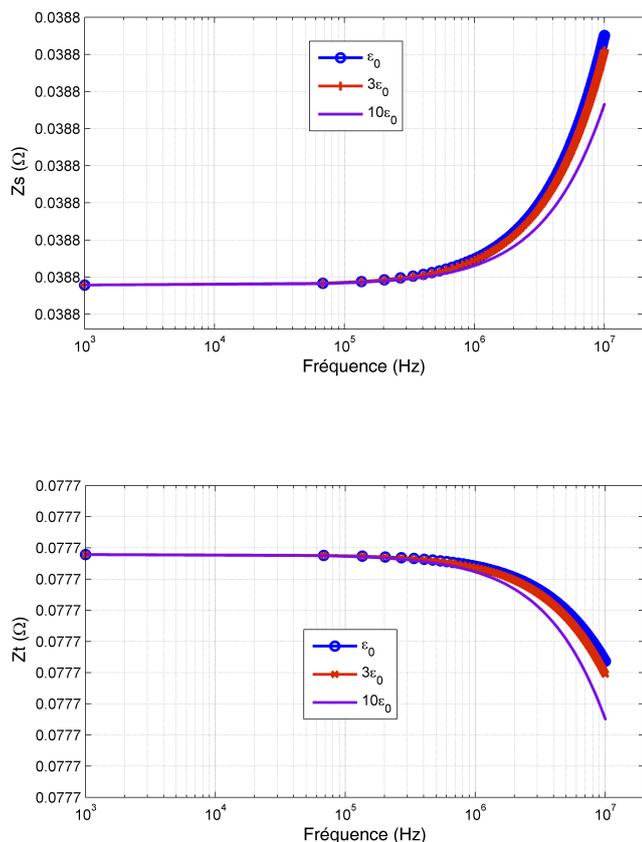


Fig. 5. Variation des impédances surfacique  $Z_s$  et de transfert  $Z_t$  d'un pli UD [8] de matériau composite à fibre de carbone en fonction de la permittivité  $\varepsilon$

#### 4. CONCLUSIONS

Une formulation analytique de prédiction de la matrice d'impédance d'un matériau composite stratifié anisotrope a été élaboré dans cette communication. Ce modèle est basé sur une formulation de matrice à partir de l'analyse de l'interaction électromagnétique entre une onde plane et ce dernier. Notre modèle prend en compte l'anisotropie du matériau composite via son tenseur de permittivité électrique homogénéisé. C'est une modèle bien adaptée à l'étape de pré-dimensionnement de matériaux composites pour le blindage électromagnétique car elle est rapide et simple à appliquer comparée aux méthodes numériques. Une poursuite de ces travaux sera la validation expérimentale de ce modèle avec une cellule TEM (ASTM D4935 standard). Cette cellule permettra la mesure des champs électrique et magnétique sur des échantillons plaques de matériaux composites stratifiés à fibres de carbone (UD), illuminé par une onde électromagnétique plane. Vu que, ce mode d'essai est représentative d'un mode de couplage qu'on rencontre fréquemment dans l'aéronautique.

#### 5. REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient la région Pays de la Loire et les différents partenaires pour la fructueuse collaboration dans le cadre du projet FUI ACCEA (Amélioration des Conductivités des Composites pour Équipements Aéronautiques).

#### 6. RÉFÉRENCES

- [1] G. Wasselynck, *Etude des interactions entre les ondes électromagnétiques de fréquences moyennes et les matériaux composites. Application à l'assemblage par induction de ces matériaux*. PhD thesis, Université Nantes, France, 2011.
- [2] J. Fouladgar, G. Wasselynck, and D. Trichet, "Shielding and Reflecting Effectiveness of Carbon Fiber Reinforced Polymer ( CFRP ) Composites," *IEE, Electromagn. Theory (EMTS), Proc. 2013 URSI Int. Symp.*, pp. 104–107, 2013.
- [3] C. L. Holloway, M. S. Sarto, and M. Johansson, "Analyzing carbon-fiber composite materials with equivalent-layer models," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 47, no. 4, pp. 833–844, 2005.
- [4] V. S. A. Piche, A. Bennani, R. Perraud, T. Abboud, F. Beureux, G. Peres, "Electromagnetic modeling of multilayer carbon fibers composites," *Int. Symp. Electromagn. Compat. EMC Eur.*, 2009.
- [5] Simeon J. Earl, "Some methods for modelling carbon fibre composites for the effects of lightning," *Challenges Model. Meas. Electromagn. Mater.*, 2006.
- [6] S. A. Schelkunoff, *Electromagnetic waves*. Van Nostrand, 1943.
- [7] J. A. Dobrowolski, *Microwave Network Design Using the Scattering Matrix*. Boston / London : British Library Cataloguing, 2010.
- [8] A. Todoroki, M. Tanaka, and Y. Shimamura, "Measurement of orthotropic electric conductance of CFRP laminates and analysis of the effect on delamination monitoring with an electric resistance change method," *Compos. Sci. Technol.*, vol. 62, no. 5, pp. 619–628, 2002.
- [9] W. J. Gajda, "Measurement of the Electrical Properties of Composite Materials in the Frequency Range of DC to 30 MHz," tech. rep., SYRACUSE UNIV NY DEPT OF ELECTRICAL ENGINEERING, RADC-TR-79-203, 1979.
- [10] W. S. Chin and D. G. Lee, "Laminating rule for predicting the dielectric properties of E-glass/epoxy laminate composite," *Compos. Struct.*, vol. 77, no. 3, pp. 373–382, 2007.
- [11] M. Koledintseva, P. C. Ravva, R. DuBroff, J. Drewniak, K. Rozanov, and B. Archambeault, "Engineering of composite media for shields at microwave frequencies," in *IEEE Int. Symp. Electromagn. Compat.*, vol. 1, pp. 169–174, 2005.
- [12] S. J. Orfanidis, *Waves and Antennas Electromagnetic*. Rutgers University New Brunswick, NJ, 2002.
- [13] M. Y. Koledintseva, J. L. Drewniak, R. E. DuBroff, K. N. Rozanov, and B. Archambeault, "Modeling of Shielding Composite Materials and Structures for Microwave Frequencies," *Prog. Electromagn. Res. B*, vol. 15, pp. 197–215, 2009.
- [14] V. Préault, R. Corcolle, L. Daniel, and L. Pichon, "Influence of skin effect on the effective shielding effectiveness of composite materials," *J. Appl. Phys.*, vol. 115, p. 154904, apr 2014.