HAL
open science

Comparaison du calcul d'inductances mutuelles entre dispositifs à partir de développements harmoniques séparés de leurs champs proches en coordonnées cylindriques et elliptiques

François Tavernier, Zhao Li, Arnaud Bréard, Laurent Krähenbühl, Damien Voyer

To cite this version:

François Tavernier, Zhao Li, Arnaud Bréard, Laurent Krähenbühl, Damien Voyer. Comparaison du calcul d'inductances mutuelles entre dispositifs à partir de développements harmoniques séparés de leurs champs proches en coordonnées cylindriques et elliptiques. Symposium de Génie Electrique (SGE'16), Jun 2016, Grenoble, France. hal-01361572

HAL Id: hal-01361572

https://hal.science/hal-01361572v1

Submitted on 7 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comparaison du calcul d'inductances mutuelles entre dispositifs à partir de développements harmoniques séparés de leurs champs proches en coordonnées cylindriques et elliptiques

F. Tavernier, Z. Li, A. Bréard, D. Voyer et L. Krähenbühl
Université de Lyon, Ampère (CNRS UMR5005), ECL, 69134 Ecully, France

RESUME – Pour prévenir dès la phase de conception les problèmes de Compatibilité Electro Magnétique (CEM), il faut pouvoir prédire la mutuelle inductance entre deux éléments. Sous certaines hypothèses, cette inductance mutuelle peut être déterminée à partir des développements harmoniques du champ magnétique de chacun de ces éléments, considérés seul : cette caractérisation est faite une seule fois, les couplages ne dépendent alors plus que des positions relatives, qui peuvent alors être optimisées durant la conception. Cette méthode présente cependant des limites de validité, notamment lorsque deux éléments sont très proches l'un de l'autre. Après avoir expliqué en détail cette problématique, nous comparons en 2D deux approches possibles pour y faire face : changement du centre du développement harmonique classique en coordonnées cylindriques, ou passage à des coordonnées elliptiques.

Compatibilité électromagnétique, harmoniques polaire, harmonique elliptique, magnétostatique, magnétodynamique, électronique de puissance.

1. INTRODUCTION

Des problèmes de Compatibilité Electro Magnétique (CEM) se posent notamment dans le cas des convertisseurs d'électroniques de puissance. Ces problèmes sont souvent traités après la mise au point d'un prototype, ce qui retarde la processus de conception et conduit à des coûts et délais supplémentaires. Une meilleure approche consiste à intégrer la préoccupation CEM dès le début de la conception des systèmes ; pour cela, il est nécessaire de savoir déterminer a priori le couplage en champ proche entre deux composants complexes.

Une méthode possible consiste à caractériser séparément le champ proche généré par chaque élément du système, puis à calculer les couplages inductifs en fonction des positions relatives des éléments dans le système complet, ces positions devenant des paramètres pour la conception.

Pour une fréquence donnée, nous représentons le champ magnétique généré par un élément spécifique (inductance de lissage, transformateur, convertisseur, ...) comme celui d'une source ponctuelle multipolaire, somme infinie tronquée de termes standards (dipôles, quadripôles, octopôles, ...) dont on doit fixer le centre (identique pour tous les termes) et les coefficients.

Cette représentation de chaque élément par développement harmonique est bien adaptée à notre problématique, car ces développements permettent ensuite, sous certaines hypothèses, un calcul simple des inductances mutuelles représentant le couplage en champ proche en fonction des positions relatives des éléments [1].

Onze types de développements harmoniques sont recensés dans la littérature [2]. Ce travail s'intéresse particulièrement à deux d'entre eux, valables pour les problèmes de Laplace en 2D, de manière à comparer leurs performances pour la description du champ proche en fonction de la géométrie du dispositif représenté : développement circulaire (transposition en 2D des harmoniques sphériques classiques), et développement elliptique, qui pourrait être plus efficace pour des objets allongés.

Dans la première partie nous définissons précisément nos hypothèses de travail. Nous montrons comment trouver les coefficients harmoniques d'une source magnétique. Nous définissons enfin la notion de zone de validité (sphère de validité en 3D pour les harmoniques sphériques) dans le cas du problème de Dirichlet intérieur et dans le cas du problème de Dirichlet extérieur.

Dans une seconde partie nous rappelons comment le théorème de réciprocité de Lorenz s'applique à notre problème. Nous montrons l'intérêt de la méthode de Richmond par rapport à la méthode d'origine, et expliquons les limites de cette méthode des champs séparés.

Dans une troisième partie, nous comparons les performances obtenues pour le calcul des inductances mutuelles dans les formalismes en coordonnées cylindriques et elliptiques, suivant la forme extérieure des éléments considérés, et leur proximité relative.

2. DÉVELOPPEMENT HARMONIQUE

Pour résoudre ce problème on utilise les équations de Maxwell. Voici les hypothèses dans lesquelles nous nous plaçons :

- On se place en régime sinusoïdal, la dérivée temporelle s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} = \pm j\omega$.
- Nous supposons également que nous sommes dans l'approximation des régimes quasi stationnaires, ainsi on peut négliger le temps de propagation des ondes électromagnétiques.
- Nous supposons que le milieu de propagation est isotrope c'est a dire $\mu = constante$.
- Nous supposons que le champ électrique est faible devant le champ magnétique de notre problème.

D'après nos hypothèses nous nous trouvons dans un problème magnétodynamique.

Nous allons distinguer deux types de problème :

Problème de Dirichlet extérieur pour une source isolée dans le vide, on souhaite connaître le champ à l'extérieur d'un cercle englobant la source.

Problème de Dirichlet intérieur pour une source isolée dans le vide, on souhaite connaître le champ à l'intérieur d'un cercle qui n'englobe aucune partie de la source.

Dans ce cas, nos problèmes de magnétodynamique peuvent donc être simplifiés à la résolution de l'équation de Laplace, avec des conditions de Dirichlet sur la sphère, $\Delta\phi = 0$ avec ϕ le potentiel scalaire magnétique se trouve soit à l'extérieur soit à l'intérieur d'un cercle.

A des fins didactiques, nous allons supposer qu'on cherche à résoudre un problème dont la géométrie est infiniment longue, par exemple des câbles dans une gaine. Il y a donc invariance du champ magnétique suivant l'axe z, le problème peut être simplifié à la résolution du champ uniquement sur un plan (x, y). L'équation de Laplace peut être résolue de manière analytique dans le système de coordonnées polaires $C(r, O)$ en utilisant la méthode de séparation de variable.

La solution générale est la combinaison linéaire de toute les solutions particulières, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\phi(r,\theta) &= (A_0 \ln r + B_0) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{-n})(C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta)\end{aligned} \tag{1}$$

On peut donner un sens physique à la solution de l'équation de Laplace. Dans le problème de Dirichlet intérieur, la source est à l'intérieur du cylindre infini $C(r, O)$ le champ suivant $\vec{r}$ décroit en $\frac{1}{r^n}$ (les conditions aux limites nous imposent que $\lim_{r\to+\infty} \phi(r) = 0$). A contrario dans le problème de Dirichlet extérieur la source est à l'extérieur du cylindre infini, le champ suivant $-\vec{r}$ décroit en r^n (il existe une singularité en 0 pour les développements de la forme $\frac{1}{r^n}$). Nous obtenons donc deux solutions distinctes pour les problèmes intérieur et extérieur.

2.1. *Développement multipolaire*

A partir de la solution du potentiel scalaire magnétique on peut trouver le champ magnétique en utilisant le développement harmonique de ϕ car on sait que $\vec{B} = \mu\vec{\nabla}\phi$. Cela implique que les coefficients du développement harmonique peuvent être obtenus à partir des champs B_x, B_y qui ne sont pas indépendants. Il est donc plus commode de combiner les deux champs magnétiques réels dans un unique champ magnétique complexe $\mathbf{B} = B_x + iB_y$.

A partir du développement harmonique du potentiel vecteur nous savons que le champ magnétique s'exprime sous la forme d'une fonction harmonique :

$$\mathbf{B} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{Mp} e^{-in\theta} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \tag{2}$$

Avec les coefficients du développement harmonique $D_n^{Mp} \in \mathbb{C}$, ces coefficients sont indépendants de r mais dépendent du centre O du système de coordonnées.

A partir de la connaissance du champ magnétique, on peut identifier les différents coefficients du développement par une projection orthogonale sur la base des fonctions harmoniques polaires de centre O :

$$D_n^{Mp} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{B}(R_0 e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta \tag{3}$$

Dans la figure 1 "Développement multipolaire", on suppose qu'une source magnétique S_i est à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}(O, R)$. Le champ est considéré comme valide au point d'observation M_j uniquement en dehors du cercle, la limite de validité est définie par : $\forall S_i \in [0 \dots N], \forall M_j \in [0 \dots M] / \ max(||OS_i||) < max(||OM_i||)$. Le plus petit cercle est appelé "cercle de validité". Lorsqu'on va utiliser notre développement il faudra veiller à ne pas exploiter dans nos calculs de champ qui ce trouve à l'intérieur de ce cercle. Cependant ce cercle n'est qu'une limite théorique, il peut y avoir des limites pratiques, comme le bruit de mesures, qui peuvent rendre nos développements invalides, ceci bien au delà du cercle de validité.

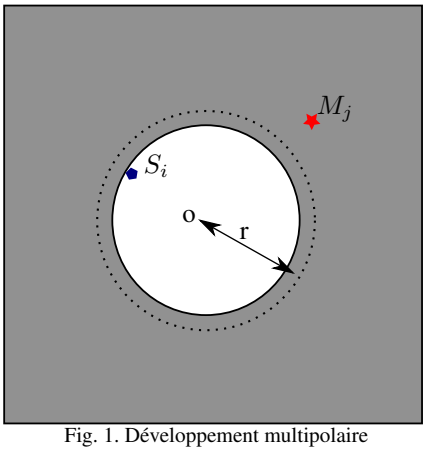

Fig. 1. Développement multipolaire

2.2. *Développement local*

Comme dans le cas du développement mutipolaire, on utilise les fonctions harmoniques du potentiel scalaire magnétique pour en déduire les fonctions harmoniques du champ magnétique.

$$\mathbf{B} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{Loc} e^{in\theta} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \tag{4}$$

Avec les coefficients du développement harmonique $D_n^{Loc} \in \mathbb{C}$, ces coefficients sont indépendants de r mais dépendent du centre O du système de coordonnées.

A partir de la connaissance du champ magnétique, on peut identifier les différents coefficients du développement par une projection orthogonale sur la base des fonctions harmoniques.

$$D_n^{Loc} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{B}(R_0 e^{-i\theta}) e^{in\theta} d\theta \tag{5}$$

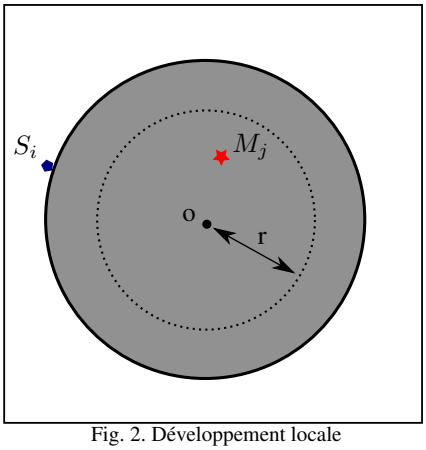

Fig. 2. Développement locale

Dans la figure 2 "Développement local", on suppose qu'une source magnétique S_i est à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}(O, R)$. Le champ est considéré comme valide au point d'observation M_j uniquement en dehors du cercle, la limite de validité : $\forall S_i \in [0 \dots N], \forall M_j \in [0 \dots M] / \ max(||OS_i||) > max(||OM_i||)$. Le plus grand cercle est appelé "cercle de validité". De la même manière que dans le développement multipolaire, le cercle de validité n'est qu'une limite théorique et non pratique.

3. MUTUELLE INDUCTANCE

L'objectif est de pouvoir caractériser un circuit équivalent d'un système composé de deux dispositifs, voir figure 3. Chacun de ces deux dispositifs est constitué de conducteur et de

matériau ferromagnétique. Nous supposons que nous sommes en régime sinusoïdal.

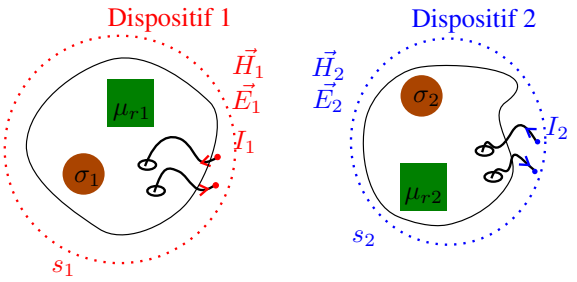

Fig. 3. Deux dispositifs

On peut poser le problème sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Pour mesurer z_{11} et z_{22} qui sont les impédances intrinsèques de chaque dispositif, il faut effectuer les mesures séparément dans une chambre anéchoïque.

Pour la mesure de la mutuelle impédance z_{12} on place les deux dispositifs dans la configuration désirée et dans une chambre anéchoïque. Si on mesure la tension V_1 aux bornes du dispositif 1 lorsque $I_1 = 0$ et le dispositif 2 est alimenté par une source de courant I_2, alors $z_{12} = \frac{V_1}{I_2}$

De la même manière que précédemment on peut mesurer z_{21}, mais ceci n'est pas nécessaire car d'après le théorème de réciprocité $z_{21} = z_{12}$.

L'avantage de cette méthode est sa facilité d'application.

3.1. *Rappels théoriques*

Il existe une autre méthode pour calculer z_{12} en utilisant uniquement les champs électromagnétiques [5]. L'équation 7 est la formule de la mutuelle impédance en fonction des champs électromagnétiques.

$$-\frac{1}{I_1 I_2} \oiint_{s_2} \left(\vec{E_2} \times \vec{H_1} - \vec{E_1} \times \vec{H_2} \right) \cdot d\vec{s} = Z_{21} \tag{7}$$

Tout d'abord, pour calculer la mutuelle inductance entre deux sources, il faut choisir une surface (s_1, s_2) englobant une des deux sources. C'est sur cette surface qu'on effectuera l'intégrale des champs électromagnétiques. Il est important que le volume défini par la surface d'intégration n'englobe qu'une seule source.

Puis il faut soit simuler soit mesurer les champs $\vec{H_1}, \vec{E_1}, \vec{H_2}$ et $\vec{E_2}$ qui sont respectivement les champs électromagnétiques rayonnés par les sources 1 et 2 sur la surface choisie pour l'intégration. Si on déplace une des deux sources alors leur mutuelle va changer, et il faut donc soit mesurer le champ soit simuler à nouveau le problème, cela peut prendre du temps et être fastidieux.

3.2. *Méthode de Richmond*

La méthode de Richmond [6] permet de simplifier le calcul de la mutuelle. Nous supposons que la surface d'intégration est s_2 (ou s_1). Dans ce cas il suffit de mesurer ou de simuler, avec la même méthode que précédemment, les champs $\vec{H_1}, \vec{E_1}$ sur la surface. Par contre, on peut mesurer ou simuler les champs $\vec{H_2'}$ et $\vec{E_2'}$, sans la présence du dispositif 1 (figure 4) et même dans un milieu totalement différent (le milieu à l'intérieur de s_2 ne doit pas être différent). Mais l'espace doit être libre de source c'est a dire que le $I_3 = 0$. L'équation 7 devient l'équation 8 en utilisant la méthode de Richmond :

$$-\frac{1}{I_1 I_2} \oiint_{s_2} \left(\vec{E_2'} \times \vec{H_1} - \vec{E_1} \times \vec{H_2'} \right) \cdot d\vec{s} = Z_{21} \tag{8}$$

De la même manière, on peut calculer la mutuelle impédance sur la surface s_2(ou s_1) en supposant que l'on connaît les champs $\vec{H_2}, \vec{E_2}$ sur cette surface ainsi que les champs $\vec{H_1'}, \vec{E_1'}$. Cette méthode peut permettre d'alléger les temps de calcul et les mesures à effectuer.

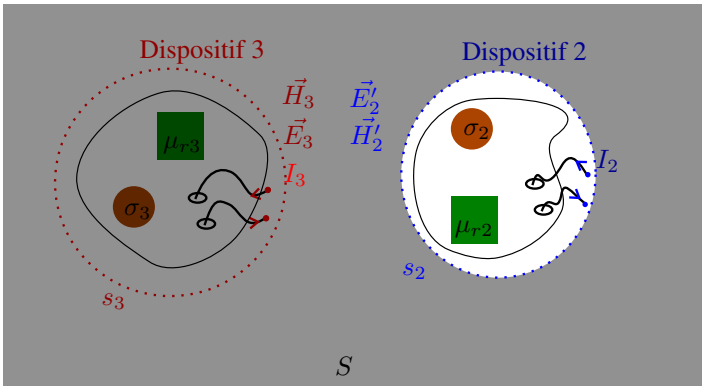

Fig. 4. Dispositifs avec la méthode de Richmond

3.3. *Cas magnétodynamique*

Maintenant qu'on a introduit la formule de la mutuelle impédance dans le cas générale. Nous utilisons les mêmes hypothèses que la section "développement harmonique". Dans le cadre de la magnétodynamique nous recherchons la mutuelle inductance entre les sources, et non plus la mutuelle impédance.

D'après l'équation locale de conservation du flux magnétique, on peut définir un potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ tel que : $\vec{B} = \vec{\nabla} \times A$. D'après nos hypothèses et l'équation de Maxwell Faraday on peut écrire :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - j\omega\vec{A} \tag{9}$$

avec ϕ le potentiel scalaire électrique.

En magnétostatique, la formulation du problème ne fait pas apparaître le potentiel ϕ. De la même façon, le potentiel ϕ n'est défini que dans un problème de magnétodynamique et uniquement dans les régions conductrices. Lors du calcul de la mutuelle inductance, sur la surface d'intégration il ne peut y avoir de régions conductrices alors l'équation 7 se réduit à :

$$\frac{1}{I_1 I_2} \oiint_{s_2} \left(\vec{A_2} \times \vec{H_1} - \vec{A_1} \times \vec{H_2} \right) \cdot d\vec{s} = M_{21} \tag{10}$$

Dans les hypothèses de la magnétostatique et de la magnétodynamique nous avons montré que le calcul de la mutuelle inductance peut être effectué en remplaçant le champ électrique par le potentiel vecteur magnétique.

3.4. *Méthode des champs séparés*

L'objectif est de pouvoir calculer la mutuelle inductance entre deux sources de la manière la plus simple. Notre méthode consiste à la mesurer pour chaque source séparément dans une

chambre anéchoïque afin de ne mesurer que le champs émit par la source.

Nous utilisons les mêmes hypothèses que précédemment néanmoins cela ne suffit pas pour calculer la mutuelle en utilisant cette méthode.

- Nous supposons que les courants de Foucault sont négligés. De plus on néglige les matériaux ferromagnétiques.

Ainsi la connaissance des champs électromagnétiques autour de la source 1, et de la source 2 est nécessaire et suffisante pour calculer la mutuelle impédance dans n'importe quelle situation.

Néanmoins l'hypothèse est contraignante, si on utilise la méthode de Richmond on peut alors la simplifier. Notre méthode reste donc valide si une des deux sources possède des sources de rayonnements secondaires (matériaux induits ou ferromagnétiques).

On peut maintenant calculer la mutuelle inductance en injectant les équations 2 et 4 dans l' équation 10. Le schéma 5 résume le mode opératoire pour calculer la mutuelle inductance entre deux sources.

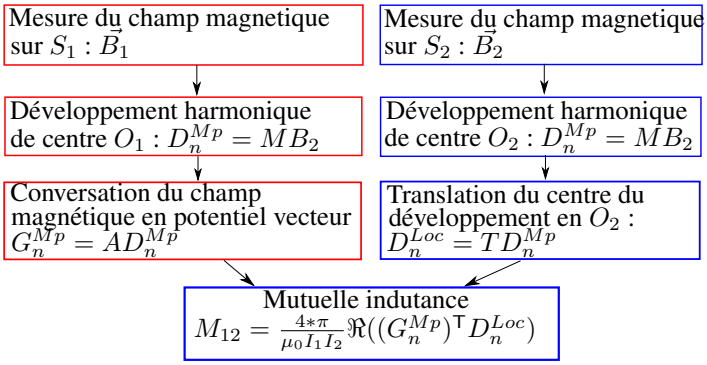

Fig. 5. Schéma pour calculer la mutuelle inductance

On peut écrire le problème sous forme matricielle :

$$M_{12} = \frac{4*\pi}{\mu_0 I_1 I_2}\Re(B_1^\top M^\top A^\top T M B_2) \tag{11}$$

On définie : B_1, B_2 les champs mesurés, M la matrice inverse des moindres carrés, T la matrice de translation [4] (elle est définie par la position relative entre les deux sources), et A la matrice qui permet de transformer les coefficients du développement du champ magnétique en coefficient du développement du potentiel vecteur [7].

Ainsi on peut calculer la mutuelle inductance dans n'importe quelle position relative entre les deux sources. Par exemple les algorithmes d'optimisation sous contraintes (taille de la carte électronique etc...) peuvent permettre de trouver quelle est la position optimale des deux sources.

3.5. *Exemple en utilisant notre méthode*

Nous allons montrer quel est l'impact de la distance entre deux sources lors du calcul de la mutuelle inductance dans le cas de câbles infinis.

Les figures 6 et 7 définissent les deux sources de l'exemple numérique (vue en coupe des câbles). Les croix représentent des courants de -1A et les cercles représentent des courants de 1A. La somme des courants est nulle afin d'éviter la modélisation d'un monopole magnétique. Les points noirs représentent la position des points de mesure. Les mesures obtenues vont permettre de calculer les coefficients harmoniques.

Sur la figure 8, les centres des deux sources sont séparés de 2 cm suivant la direction $\vec{z}$. Les mutuelles M_{21} et la M_{12} sont strictement égales ce qui est conforme au théorème de réciprocité.

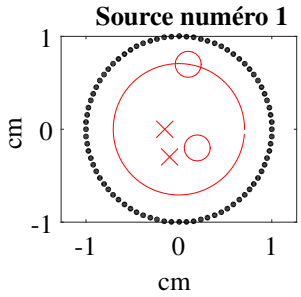

Fig. 6. Configuration de la source 1

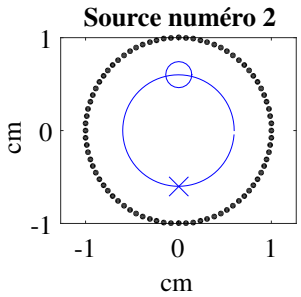

Fig. 7. Configuration de la source 2

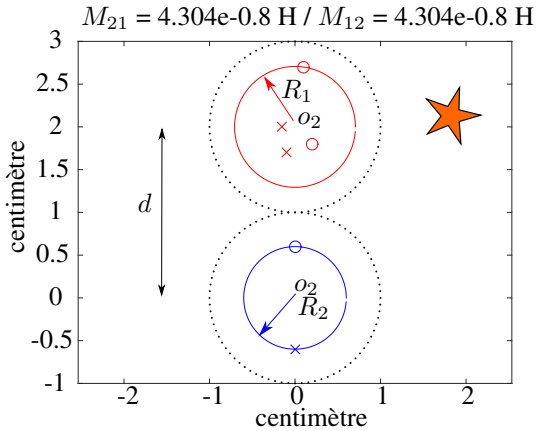

Fig. 8. Deux sources distantes de 2 cm

Sur la figure 9, les centres des deux sources sont séparés de 1,4 cm suivant la direction $\vec{z}$. Les mutuelles M_{21} et la M_{12} ont une erreur relative de $0,2\%$ qui provient nécessairement d'erreur numérique. Un des moyens de réduire cette erreur est d'augmenter l'ordre du modèle. Mais cela n'est pas suffisant il faut aussi rapprocher les points de mesure du cercle de validité.

Sur la figure 10, les centres des deux sources sont séparés de 1 cm suivant la direction $\vec{z}$, et les mutuelles M_{21} et M_{12} ne sont plus égales. On remarque que les deux cercles de validités s'intersectent, on pourrait donc penser que le champ n'est pas valide à l'intérieur du cercle de validité. Cependant comme la surface d'intégration $S(R_2, O)$ englobe uniquement la source 2 la mutuelle M_{21} est juste, contrairement à la mutuelle M_{12}.

Pour avoir une mutuelle inductance précise il faut utiliser un maximum d'ordre (voir figure 11), de plus le choix de la surface d'intégration conditionne la validité de la mutuelle inductance et peut permettre de calculer une mutuelle inductance de deux sources très proches.

4. COMPARAISON DES DEUX GÉOMÉTRIES

Dans notre nouvelle approche nous proposons d'utiliser l'ellipse comme géométrie de référence ce qui permet de diminuer le volume où le champ magnétique est inconnu. Pour cela nous devons utiliser les coordonnées et le développement multipolaire elliptique.

Lorsque deux sources sont très proches, la méthode de calcul proposée ci-dessus n'est plus valide car la sphère de validité englobe au moins une partie des deux sources. Pour pallier à ce problème on propose deux solutions :

- Changer le système de coordonnées et de trouver une géométrie "mieux adaptée à la forme de la source".

-De translater le centre de décomposition du développement harmonique.

Il existe une infinité de configurations de systèmes de coordonnées elliptiques. Sur la figure 12 les ellipses correspondent au cas où $r = constante$ dans un système de coordon-

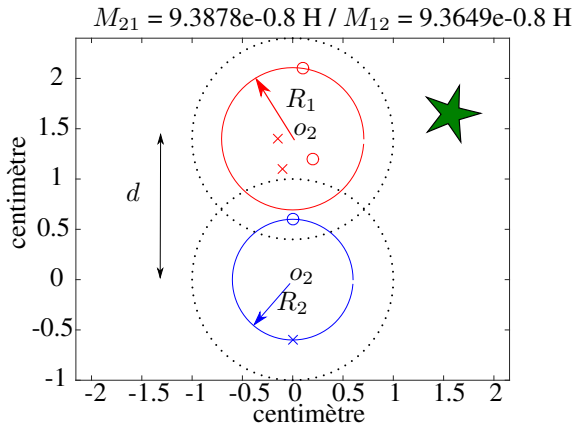

Fig. 9. Deux sources distantes de 1,4 cm

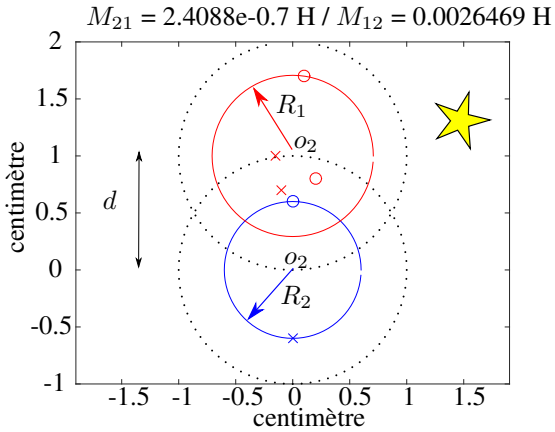

Fig. 10. Deux sources distantes de 1 cm

nées polaires. Les hyperboloïdes correspondent au cas où $\theta = constante$ dans un système de coordonnées polaires. Un système elliptique particulier est défini par la valeur de son excentrique e, qui permet de définir la valeur des demi-axes a et b sur une ellipse de η_0 tel que $a = e\cosh\eta_0$ et $b = e\sinh\eta_0$

$$E_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{B}(e\cosh(\eta + i\psi))e^{in\psi}d\psi \tag{12}$$

$$\mathbf{B} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-in\psi} e^{n(\eta_0-\eta)} \tag{13}$$

$$E_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{B}(e\cosh(\eta + i\psi))e^{-in\psi}d\psi \tag{14}$$

$$\mathbf{B} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\frac{cosh(n\eta)}{cosh(n\eta_0)}cos(n\psi) + B_n\frac{sinh(n\eta)}{sinh(n\eta_0)}sin(n\psi)\right] \tag{15}$$

avec $A_n = E_n + E_{-n}$ et $B_n = i\,(E_n - E_{-n})$

4.1. *Marges de mesure*

On ne peut pas mesurer directement le champ magnétique sur la surface du dispositif pour des raisons mécaniques (le capteur pourrait être endommagé). De plus, la décroissance du champ magnétique permet d'utiliser la distance de mesure comme un moyen de filtrer les harmoniques d'ordres élevés. On remarque que plus on se rapproche de la surface plus la quantité d'information est importante, il faut donc réaliser plus de mesures.

Dans le cas d'un développement circulaire le choix du centre de développement est arbitraire. Le cercle de validé va être fonction du centre de développement ainsi que de la forme des courants de la source.

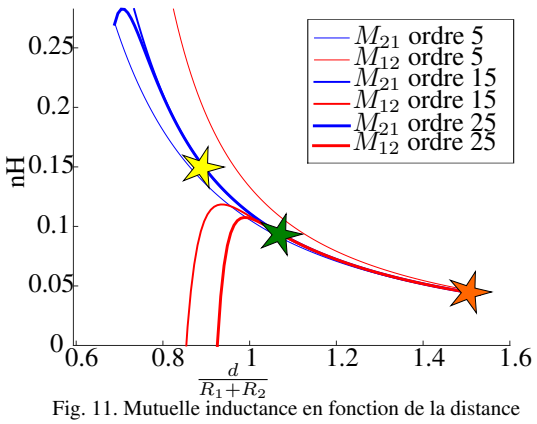

Fig. 11. Mutuelle inductance en fonction de la distance

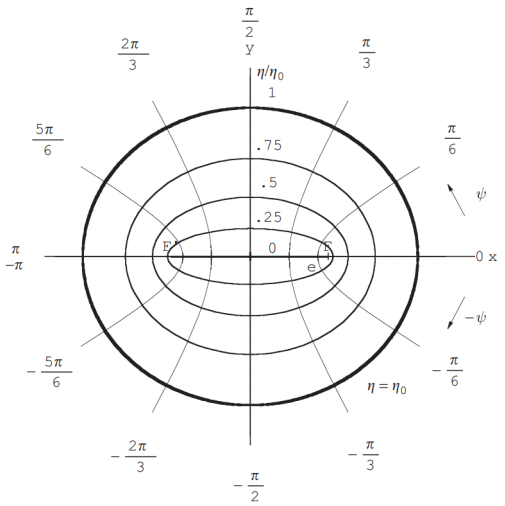

Fig. 12. Coordonnées elliptiques(η, ψ)

Dans notre cas on cherche le meilleur cercle de validité qui sera celui qui a le plus petit rayon. Il existe des algorithmes qui permettent de trouver ce cercle.

De même, on peut trouver le centre de l'ellipse, son excentrique ainsi que l'inclinaison du grand axe, en utilisant l'algorithme de [3].

4.2. *Exemple*

L'objectif est de calculer la mutuelle entre deux sources, il faut donc faire le choix pertinent d'une géométrie adaptée à la forme.

Sur la figure 13, le cercle de validité et l'ellipse de validité sont représentés en bleu. Les points noirs représentent les points de mesure respectant le principe de marge énoncé précédemment.

On peut remarquer que la modification de la marge de mesure, ne change pas le centre du développement dans le cas circulaire mais seulement son rayon. Alors que dans le cas elliptique le centre de décomposition ainsi que la valeur de l'excentrique vont être modifiés.

Sur la figure 14 la mutuelle inductance calculée sur la surface elliptique converge plus rapidement que la mutuelle inductance calculée sur la surface circulaire.

4.3. *Contre exemple*

Sur la figure 15 nous considérons que la forme du dispositif n'a pas changé contrairement à la position des courants. Le cercle de validité et l'ellipse de validité sont représentés en bleu. Les points noirs représentent les points de mesures.

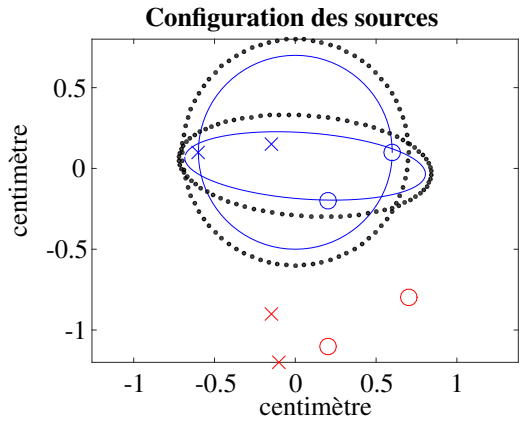

Fig. 13. Exemple de configuration des sources

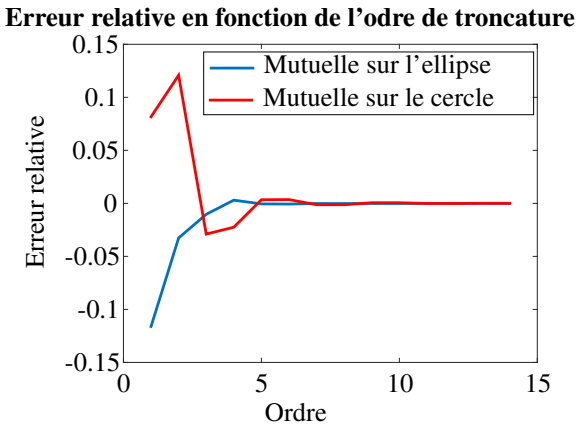

Fig. 14. Convergence de la mutuelle de l'exemple

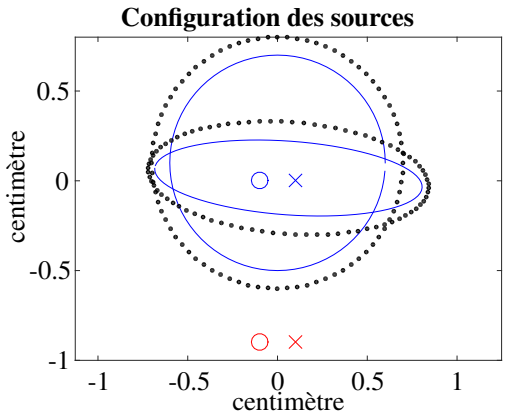

Fig. 15. Contre exemple de configuration des sources

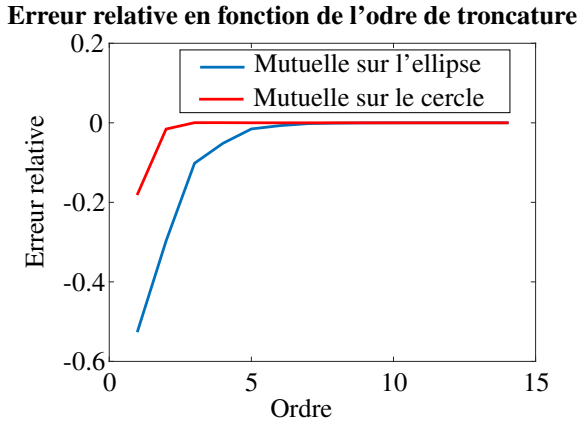

Fig. 16. Convergence de la mutuelle du contre exemple

Sur la figure 16 la mutuelle inductance calculée sur la surface elliptique converge moins rapidement que la mutuelle calculée sur la surface circulaire. On a donc démontré que la forme de la source ne laisse pas présager de la géométrie la plus adaptée. En effet, dans cet exemple il parait évident que les meilleurs harmoniques pour représenter un dipôle circulaire est une harmonique circulaire. Ce résultat peut être généralisé à tous les systèmes de coordonnées.

5. CONCLUSION

Nous avons présenté comment calculer la mutuelle inductance entre deux sources en utilisant des développements harmoniques en coordonnées cylindriques ou elliptiques. Les premiers résultats obtenus montrent que les deux approches sont possibles, indépendamment de la forme extérieure des éléments considérés, avec une précision qui paraît comparable sur des cas test académiques. La mise en œuvre systématique des deux techniques sur des cas réalistes (systèmes élémentaires plus complexes, interactions mutuelle de plus que 2 éléments, systèmes 3D) pourrait conduire à des critères de choix plus clairs, également en fonction de la complexité algorithmique associée.

6. REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier l'Ecole Centrale de Lyon (ECL) qui finance cette recherche (contrat doctoral) ainsi que l'ANR (PolHar-CEM project : ANR-14-CE22-0009).

7. RÉFÉRENCES

[1] T. Q. V. Hoang, A. Bréard, and C. Vollaire, *Near Magnetic Field Coupling Prediction Using Equivalent Spherical Harmonic Sources,* IEEE Trans.on EMC, Vol. 56, n6, pp. 1457-1465, 2014.

[2] P. Moon and D. Spencer, *Field theory handbook : including coordinate systems, differential equations and their solutions,* Springer-Verlag, 1988.

[3] Moshtagh, N., *Minimum volume enclosing ellipsoid,* GRASP Laboratory, University of Pennsylvania.

[4] Christopher A. and HeadGordon, Martin, *Rotating around the quartic angular momentum barrier in fast multipole method calculations White,* The Journal of Chemical Physics, 105,5061-5067 (1996).

[5] Billy C.Brock, *Using vector spherical harmonics to compute antenna mutual impedance from measured or computed fields,* SANDIA Report, April 2001.

[6] J. H. Richmond, *A Reaction Theorem and Its Application toAntenna Impedance Calculations,* IRE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-9, no. 6, pp 515-520, November 1961.

[7] P. Schnizer, B. Schnizer, P. Akishin, E. Fischer, *Theory and application of plane elliptic multipoles for static magnetic fields,* Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 607 (2009) 505–516. DOI 10.1016/j.nima.2009.06.007.