



HAL
open science

Étude des effets de sources secondaires sur les couplages inductives, basée sur la méthode de développement multipolaire

Zhao Li, François Tavernier, Arnaud Bréard, Laurent Krähenbühl, Damien Voyer

► To cite this version:

Zhao Li, François Tavernier, Arnaud Bréard, Laurent Krähenbühl, Damien Voyer. Étude des effets de sources secondaires sur les couplages inductives, basée sur la méthode de développement multipolaire. Symposium de Génie Electrique (SGE'16), Jun 2016, Grenoble, France. hal-01361570

HAL Id: hal-01361570

<https://hal.science/hal-01361570>

Submitted on 7 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Étude des effets de sources secondaires sur les couplages inductives, basée sur la méthode de développement multipolaire

Z. Li¹, F. Tavernier¹, A. Bréard¹, L. Krähenbühl¹ and D. Voyer¹

¹Université de Lyon - Ampère (CNRS UMR5005), ECL, 69134 Écully, France

RESUME – Avec les progrès de la technologie, la densité de puissance des appareils électriques augmente, ce qui conduit à une augmentation des interférences électromagnétiques (IEM) entre deux systèmes d'électroniques de puissance. Ces IEM peuvent engendrer un dysfonctionnement des appareillages. Par conséquent, les problématiques de la compatibilité électromagnétique (CEM) entre deux appareils est devenue une activité essentielle lors de la conception d'un nouveau produit industriel. Afin de tenir compte de la conformité aux normes CEM dès le début de la phase de conception, une méthode de prédiction des couplages en champ proche entre composants complexes a été développée [1]. Cette méthode prédictive est basée sur le développement en harmoniques sphériques du champ à proximité de chaque dispositif, qui peut alors être représenté par une source ponctuelle multipolaire équivalente. Le couplage inductif entre dispositifs peut être directement extrait de ces développements [2]. Cependant, cette méthode n'est pas exacte en présence de sources induites liées à la présence de matériaux conducteurs (boîtiers, plans de masse) ou ferromagnétiques. Dans cet article, les effets de telles sources secondaires sont étudiés et une méthode basée également sur les harmoniques sphériques est proposée pour les compenser.

Mots-clés – CEM, harmonique sphérique, source secondaire, développement multipolaire.

1. INTRODUCTION

Les dispositifs utilisant l'électronique de puissance sont aujourd'hui omniprésents. Ils sont malheureusement sources intrinsèques d'interférences électromagnétiques. Afin de prendre en compte ces problèmes de CEM dès la phase initiale de conception, une méthode prédictive basée sur l'expansion multipolaire en harmoniques sphériques du champ proche autour de chaque dispositif a été mise au point. Pour déterminer les développements de base d'une source donnée, un banc de mesure dédié a été conçu [1] : l'expansion multipolaire d'un sous-système est obtenue par la mesure du champ magnétique autour de ce sous-système, isolé. Ces développements de chaque source considérée comme isolée permettent ensuite, sous certaines conditions, de calculer le couplage inductif entre dispositifs, en fonction de leurs positions relatives [3], ce qui permet par exemple d'optimiser le placement de sous-systèmes pour minimiser les couplages.

Il est possible de montrer que cette méthode est exacte lorsque chaque sous-système, non ferromagnétique, est uniquement constitué de circuits où il est possible d'imposer exactement la valeur et la répartition du courant. Nous montrons ensuite dans cet article que ce n'est plus toujours le cas lorsque les éléments de base mesurés contiennent des induits (conducteurs massifs, boucles conductrices...) ou des parties ferromagnétiques. Nous proposons finalement une méthode de correction, en utilisant le même banc de mesure que précédemment, mais pour pré-caractériser la réaction de chaque sous-système aux champs d'excitation extérieurs typiques.

2. LE DÉVELOPPEMENT MULTIPOLAIRE EN HARMONIQUES SPHÉRIQUES

Le développement multipolaire en harmoniques sphériques peut être utilisé pour une représentation du champ électromagnétique satisfaisant les équations de Maxwell. Il permet de décomposer un champ en une somme infinie de sources élémentaires (dipôle, quadripolaire, octupole, etc.). Pour le champ proche ($< 1m$ dans la gamme de fréquences 20 kHz-20 MHz), l'approximation quasi-statique est appropriée. Pour un point en dehors de la sphère de validité (la sphère minimale qui englobe la source), le champ magnétique peut être exprimé à l'aide d'un développement multipolaire, comme indiqué par l'équation [2] :

$$\mathbf{B}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} -\frac{\mu_0}{4\pi} Q_{nm} \nabla \left(\frac{1}{r^{n+1}} Y_{nm}(\theta, \varphi) \right) \quad (1)$$

où r est la distance de l'origine de l'expansion au point où le champ est exprimé, Q_{nm} sont les coefficients caractérisant la source (ils dépendent aussi de l'origine du développement) et Y_{nm} est la fonction harmonique sphérique réelle de $n^{ième}$ ordre et $m^{ième}$ moment :

$$Y_{nm}(\theta, \varphi) = \Theta_n^m(\theta) \cdot \Phi_m(\varphi) \quad (2)$$

$$\Theta_n^m(\theta) = \sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^m(\cos\theta) \quad (3)$$

$$\Phi_m(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos(m\varphi) & m > 0 \\ 1 & m = 0 \\ \sqrt{2} \sin(|m|\varphi) & m < 0 \end{cases} \quad (4)$$

Une fois que les coefficients harmoniques de deux systèmes sont identifiés, on peut déterminer le couplage entre eux par le calcul de l'inductance mutuelle [2] :

$$M_{AB} = \frac{1}{\mu_0 I_A I_B} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (-1)^m ({}_A Q_{1n,-m} \cdot {}_B Q_{1nm}) \quad (5)$$

où I_A et I_B sont les courants circulant dans les sources A et B. Il est important que les deux développements en harmoniques sphériques soient effectués dans la même repère, pour pouvoir appliquer le "Addition Theorem for Spherical Harmonics" [3]. Ce théorème consiste à calculer les symboles Wigner $3j$ qui sont souvent utilisés dans le domaine de la mécanique quantique. Il est à noter que la précision du calcul de l'inductance mutuelle est directement liée au choix de l'ordre maximal (N_{max}) utilisé dans la représentation. Cependant, même si le N_{max} est assez élevé, une partie de la source secondaire dans le système n'est pas prise en compte, comme expliqué ci-dessous.

3. CALCULS THÉORIQUES

L'objectif de cette section est d'évaluer analytiquement l'erreur d'estimation de l'inductance mutuelle. Le théorème de réciprocité est un des outils les plus utilisés dans les problèmes de champ et de circuit, qui peuvent être classés en trois types : circuit pur, champ pur, et mixtes. Un théorème du second type (champ pur) impliquant l'intensité du champ électromagnétique a été dérivé par Lorentz sous la forme d'une intégrale de surface [4] :

$$\int_{S_1} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_2} (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1 - \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) \cdot d\mathbf{s} \quad (6)$$

où surface S_1 englobe le dispositif 1 et S_2 entoure le dispositif 2. Les indices indiquent la source du champ. Rumsey a donné le nom "reaction" à la quantité représentée par les intégrales qui apparaissent dans le théorème de réciprocité de Lorentz [5]. Dans cette terminologie, le théorème de réciprocité de Lorentz indique que la réaction du dispositif 1 sur le dispositif 2 est égale à la réaction du dispositif 2 sur le dispositif 1 ; cette quantité sera appelée "inductance mutuelle" dans ce document.

3.1. Mesures en présence des deux dispositifs

Sur la Figure 1, on considère deux dispositifs constitués chacun d'une source primaire qui est directement alimentée par un générateur externe et une source secondaire qui représente l'ensemble des conducteurs et matériaux ferromagnétiques.

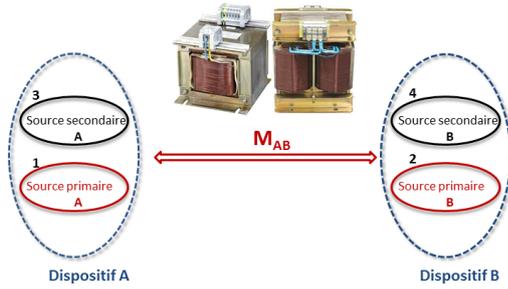


Fig. 1. Schéma de principe de calcul de l'inductance mutuelle

L'étude du couplage entre les deux dispositifs A et B est équivalente à celle du couplage entre les 4 circuits élémentaires notés {1 et 2} pour les sources primaires et {3 et 4} pour les sources secondaires. Nous pouvons décrire ce système avec quatre accès sous une forme matricielle avec des inductances propres et des inductances mutuelles définissant les couplages entre ces quatre éléments :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & L_3 & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & L_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

où L_i représente l'inductance propre de l'élément i et M_{ij} représente l'inductance mutuelle entre l'élément i et l'élément j . En imposant que les éléments 3 et 4 sont court-circuités ($V_3 = V_4 = 0$), on peut en déduire les relations entre I_1 , I_2 , I_3 et I_4 . Par exemple, en imposant :

$$V_4 = 0 = M_{14} \cdot I_1 + M_{24} \cdot I_2 + M_{34} \cdot I_3 + L_4 \cdot I_4 \quad (8)$$

$$I_4 = - \left(\frac{M_{14} \cdot I_1}{L_4} + \frac{M_{24} \cdot I_2}{L_4} + \frac{M_{34} \cdot I_3}{L_4} \right) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} V_3 = 0 &= M_{13} \cdot I_1 + M_{23} \cdot I_2 + L_3 \cdot I_3 + M_{34} \cdot I_4 \\ &= \left(M_{13} - \frac{M_{14}}{L_4} \cdot M_{34} \right) I_1 + \left(M_{23} - \frac{M_{24}}{L_4} \cdot M_{34} \right) I_2 \\ &\quad + \left(L_3 - \frac{M_{34}}{L_4} \cdot M_{34} \right) I_3 \end{aligned} \quad (10)$$

En reformulant (10), nous trouvons :

$$I_3 = - \left(\frac{M_{13} - \frac{M_{14}}{L_4} \cdot M_{34}}{L_3 - \frac{M_{34}}{L_4} \cdot M_{34}} \right) I_1 - \left(\frac{M_{23} - \frac{M_{24}}{L_4} \cdot M_{34}}{L_3 - \frac{M_{34}}{L_4} \cdot M_{34}} \right) I_2 \quad (11)$$

Enfin, on peut exprimer l'inductance mutuelle entre les deux dispositifs par M_{AB} qui est le ratio entre V_1 et I_2 :

$$\begin{aligned} M_{AB} &= M_{12} - \frac{M_{24}}{L_4} \cdot M_{14} - \frac{M_{13}}{L_3 - \frac{M_{34}}{L_4} \cdot M_{34}} \cdot M_{23} \\ &\quad + \frac{M_{24} M_{13}}{L_3 L_4 - M_{34} M_{34}} M_{34} + \frac{M_{23} L_4 - M_{24} M_{34}}{L_3 L_4 - M_{34} M_{34}} \cdot M_{14} \end{aligned} \quad (12)$$

L'inductance mutuelle M_{AB} peut également être écrite à partir du théorème de réciprocité de Lorentz :

$$M_{AB} = \iint_S (\mathbf{E}_A \times \mathbf{H}_B - \mathbf{E}_B \times \mathbf{H}_A) \cdot d\mathbf{s} \quad (13)$$

où $\{\mathbf{E}_A, \mathbf{H}_A\}$ est le champ électromagnétique induit par le dispositif A en présence du dispositif B, mais mis hors tension. $\{\mathbf{E}_B, \mathbf{H}_B\}$ est le champ électromagnétique induit par le dispositif B en présence du dispositif A hors tension. Il est nécessaire que la surface S englobe un seul des dispositifs. Ces champs sont déduits des champs élémentaires $\{\mathbf{e}_i^j, \mathbf{h}_i^j\}$ générés par les éléments $\{i = 1, 2, 3, 4\}$ lorsque les circuits $\{j = 1, 2\}$ sont alimentés.

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \iint_S \left[(\mathbf{e}_1^1 + \mathbf{e}_3^1 + \mathbf{e}_4^1) \times (\mathbf{h}_2^2 + \mathbf{h}_3^2 + \mathbf{h}_4^2) \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{e}_2^2 + \mathbf{e}_3^2 + \mathbf{e}_4^2) \times (\mathbf{h}_1^1 + \mathbf{h}_3^1 + \mathbf{h}_4^1) \right] \cdot d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (14)$$

Il convient de noter que chaque champ élémentaire est dans l'environnement où les deux dispositifs sont présents. Afin d'exprimer (14) en fonction de l'inductance propre et de l'inductance mutuelle, le développement de $\{\mathbf{e}_i^j, \mathbf{h}_i^j\}$ devrait être fait comme suit en partant de l'équation 11 (nous prenons $\{\mathbf{e}_3^1, \mathbf{h}_3^1\}$ comme exemple) :

$$\mathbf{e}_3^1 = \left(\frac{M_{13} - \frac{M_{14}}{L_4} \cdot M_{34}}{L_3 - \frac{M_{34}}{L_4} \cdot M_{34}} \right) \cdot \mathbf{e}_3 \cdot \frac{I_1}{I} \quad (15)$$

$$\mathbf{h}_3^1 = \left(\frac{M_{13} - \frac{M_{14}}{L_4} \cdot M_{34}}{L_3 - \frac{M_{34}}{L_4} \cdot M_{34}} \right) \cdot \mathbf{h}_3 \cdot \frac{I_1}{I} \quad (16)$$

où I représente le courant unitaire (1A) et $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{h}_3\}$ représente le champ électromagnétique généré par l'élément 3 seul parcouru par un courant de 1 A. Ensuite, en répétant la même approche pour chaque source élémentaire, il pourrait être prouvé que les équations 12 et 14 sont strictement équivalentes.

3.2. Mesures séparées avec un seul dispositif

Comme décrit ci-dessus, l'inductance mutuelle peut être calculée si les champs électromagnétiques pour chacun des dispositifs sont connus en présence de l'autre. Idéalement, ces champs sont mesurés ou calculés dans l'environnement réel, avec tous les autres dispositifs présents, mais pas excités. Cependant, ce n'est pas toujours possible, et on souhaiterait même pouvoir calculer les couplages a posteriori, en n'utilisant que le développement harmonique de chaque dispositif caractérisé tout seul. Si nous suivons la même approche que dans 3.1, nous pouvons obtenir :

$$M'_{AB} = \iint_s (\mathbf{E}'_A \times \mathbf{H}'_B - \mathbf{E}'_B \times \mathbf{H}'_A) \cdot d\mathbf{s} \quad (17)$$

où $\{\mathbf{E}'_A, \mathbf{H}'_A\}$ est le champ électromagnétique généré par le dispositif A seul et $\{\mathbf{E}'_B, \mathbf{H}'_B\}$ par le dispositif B seul. L'équation 17 pourrait être associée à l'équation 2, ce qui signifie que tous les calculs et mesures sont effectués en séparant les deux dispositifs. Cela équivaut à ignorer $\{\mathbf{e}'_4, \mathbf{h}'_4\}$ et $\{\mathbf{e}'_3, \mathbf{h}'_3\}$. Donc l'équation 14 devient :

$$M'_{AB} = \iint_s \left[(\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_3) \times (\mathbf{h}'_2 + \mathbf{h}'_4) - (\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_4) \times (\mathbf{h}'_1 + \mathbf{h}'_3) \right] \cdot d\mathbf{s} \quad (18)$$

Cette fois, contrairement à l'équation 15, \mathbf{e}'_3 ne sera pas affecté par l'élément 4, donc si nous reformulons comme dans l'équation 15, il deviendra :

$$\mathbf{e}'_3 = \frac{M_{13}}{L_3} \cdot \mathbf{e}_3 \cdot \frac{I_1}{I} \quad (19)$$

Idem pour \mathbf{h}'_3 , \mathbf{e}'_4 et \mathbf{h}'_4 . Par conséquent, l'inductance mutuelle entre les dispositifs A et B peut être exprimée comme suit :

$$M'_{AB} = M_{12} - \frac{M_{24}}{L_4} \cdot M_{14} - \frac{M_{13}}{L_3} \cdot M_{23} + \frac{M_{24}M_{13}}{L_3L_4} \cdot M_{34} \quad (20)$$

Il est à noter que l'inductance mutuelle calculée dans (20) ne correspond pas à la formule théorique donnée dans (12).

3.3. Mesure avec la méthode de Richmond

La méthode proposée par Richmond [4] pour calculer l'inductance mutuelle utilisant des champs électromagnétiques entre deux dispositifs est effectuée en 2 étapes. La première étape consiste à mesurer ou à calculer le champ du dispositif A sur une surface qui englobe un seul dispositif (A ou B) en présence de l'autre (dans ce cas, le milieu de propagation n'est pas nécessairement homogène). La deuxième étape consiste à mesurer ou à calculer le champ de l'autre dispositif sur la même surface que dans la première étape, mais en l'absence du dispositif A. En appliquant le théorème de réciprocité, on obtient :

$$M_{AB} = \iint_s (\mathbf{E}_A \times \mathbf{H}_B - \mathbf{E}_B \times \mathbf{H}_A) \cdot d\mathbf{s} \\ = \iint_s \left[(\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_3 + \mathbf{e}'_4) \times (\mathbf{h}'_2 + \mathbf{h}'_4) - (\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_4) \times (\mathbf{h}'_1 + \mathbf{h}'_3 + \mathbf{h}'_4) \right] \cdot d\mathbf{s} \quad (21)$$

Il convient de noter que, par rapport à la méthode de mesures séparées, seulement $\{\mathbf{e}'_3, \mathbf{h}'_3\}$ est ignoré. Avec exactement

la même approche, nous pouvons obtenir le même résultat que dans (12).

D'une part, cela signifie que pour la caractérisation des sources de rayonnement, un seul dispositif doit être identifié en présence de l'autre. D'autre part, on peut montrer aussi que la méthode de mesure séparée est correcte lorsque la source secondaire apparaît dans un seul dispositif. En supposant que l'élément 4 n'existe pas, ce qui signifie que $\{\mathbf{e}'_4, \mathbf{h}'_4, \mathbf{e}'_4, \mathbf{h}'_4\}$ sont nuls, on obtient :

$$M'_{AB} = M_{AB} = \iint_s \left[(\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_3) \times \mathbf{h}'_2 - \mathbf{e}'_2 \times (\mathbf{h}'_1 + \mathbf{h}'_3) \right] \cdot d\mathbf{s} \\ = M_{12} - \frac{M_{13}}{L_3} \cdot M_{23} \quad (22)$$

Cette méthode étant simple, nous allons dans ce texte la prendre comme référence pour la méthode des éléments finis (FEM : Finite Element Method).

4. CAS CONDUCTEUR

Dans cette section et la suivante, certains résultats de modélisation avec la FEM seront présentés afin de vérifier les conclusions analytiques obtenus au §3 et de quantifier l'erreur relative pour quelques exemples réels.

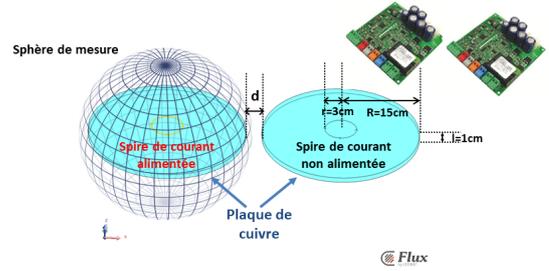


Fig. 2. Cas conducteur

Le premier cas que nous traitons est celui d'une source secondaire de type conducteur métallique. Deux dispositifs identiques avec une spirale de courant placée au-dessus d'une plaque de cuivre sont montrés dans la figure 2. La bobine circulaire qui est considérée comme la source primaire est alimentée par une source externe. Elle est coaxiale avec la plaque de cuivre qui a un rayon de 15 cm. La sphère représente les positions de mesures de l'induction magnétique. Ce modèle peut être associé à une situation réelle où deux cartes électroniques sont placées à proximité l'une de l'autre et le couplage entre les composants électroniques sur les cartes doit être déterminé.

La méthode de mesure séparée et la méthode de Richmond sont comparées. L'erreur relative sur l'inductance mutuelle est calculée en fonction de la distance entre deux dispositifs (Tableau I).

Tableau 1. Erreur en fonction de la distance entre les deux plaques de cuivre

d	Richmond	Séparé	Erreur relative
1cm	$1,77 \cdot 10^{-12}$	$1,13 \cdot 10^{-12}$	36,2%
2cm	$1,15 \cdot 10^{-12}$	$9,7 \cdot 10^{-13}$	18,5%
3cm	$8,98 \cdot 10^{-13}$	$8,35 \cdot 10^{-13}$	7,6%
5cm	$7,43 \cdot 10^{-13}$	$7,30 \cdot 10^{-13}$	1,8%
10cm	$6,06 \cdot 10^{-13}$	$5,97 \cdot 10^{-13}$	1,5%
15cm	$3,93 \cdot 10^{-13}$	$3,90 \cdot 10^{-13}$	0,8%

On constate que l'erreur relative devient importante lorsque les deux dispositifs sont très proches l'un de l'autre (dans cet

exemple pour $d \leq 2$ cm) et il diminue très vite avec la distance entre les deux dispositifs. Les mêmes conclusions ont été obtenues avec des dimensions géométriques différentes.

5. CAS FERROMAGNÉTIQUE

Dans la section précédente, la source secondaire était un conducteur. Nous considérons maintenant le cas d'un matériau ferromagnétique tel que le fer, le nickel ou le cobalt, qui s'aimante en présence du champ magnétique créé par les courants circulant dans le dispositif dont il fait partie, ou dans le dispositif voisin.

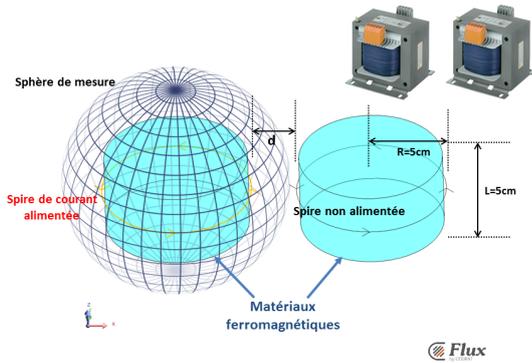


Fig. 3. Cas férromagnétique

La modélisation FEM d'une situation réelle est représentée à la figure 3. Le modèle peut être associé à deux transformateurs placés à proximité l'un de l'autre. Le rayon de la bobine circulaire est 5 cm et un cylindre en fer se trouve au centre. La même étude que dans le cas conducteur est faite.

Tableau 2. Erreur en fonction de distance entre dispositifs

d	Richmond	Séparé	Erreur relative
1cm	$7,79 \cdot 10^{-8}$	$6,37 \cdot 10^{-8}$	18,2%
2cm	$4,79 \cdot 10^{-8}$	$4,49 \cdot 10^{-8}$	6,3%
3cm	$3,18 \cdot 10^{-8}$	$3,10 \cdot 10^{-8}$	2,5%
5cm	$1,77 \cdot 10^{-8}$	$1,75 \cdot 10^{-8}$	1,1%
10cm	$6,38 \cdot 10^{-9}$	$6,37 \cdot 10^{-9}$	0,2%

Les conclusions sont également très similaires. L'erreur relative sur l'inductance mutuelle est importante lorsque les deux dispositifs sont très proches et elle diminue très rapidement avec la distance entre composants.

6. COMPENSATION DE L'ERREUR

Comme montré aux sections §4 et §5, le procédé de mesures séparées possède une erreur lorsque les sources secondaires apparaissent dans les deux dispositifs. Cette erreur est due au fait qu'on néglige le champ magnétique généré par la source secondaire.

Une approche est proposée ici pour compenser cette erreur. L'idée est de caractériser le rayonnement de la source secondaire en fonction du champ magnétique externe qui sera représenté en Q_{nm} .

Un exemple est proposé sur la figure 4. Les deux sources sont toujours identiques, mais chaque dispositif possède non seulement un conducteur métallique mais aussi un matériau ferromagnétique. Pour simplifier cet exemple, nous avons mis les deux dispositifs suivant l'axe z. En raison de la symétrie suivant l'axe z, le modèle harmonique équivalent possède seulement les composantes de moment nul.

Dans la modélisation FEM, nous constatons que :

$$M_{theoretical} = M_{richmond} = 4.22 \cdot 10^{-8} H \quad (23)$$

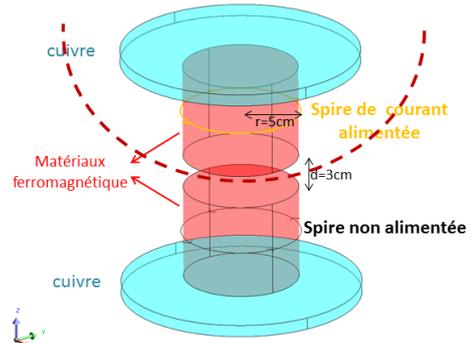


Fig. 4. Cas mixte avec conducteur et un matériau ferromagnétique

La $M_{theoretical}$ est calculée à partir du flux magnétique à travers la spire non alimentée :

$$M_{theoretical} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} \quad (24)$$

Dans la méthode de Richmond, le dispositif du dessus est caractérisé correctement, ce qui signifie que le champ magnétique est mesuré en présence des deux dispositifs. Afin d'obtenir une bonne précision, l'expansion multipolaire est considérée jusqu'à l'ordre 12 ($N_{max} = 12$). Les composantes harmoniques associées au champ magnétique sont différentes dans la méthode de mesure séparée et la méthode de Richmond. Les six premières composantes sont présentés dans le Tableau 3 :

Tableau 3. Coefficients harmoniques

degree	1	2	3	4	5	6
$Q_{richmon}$	1020	356	34.3	0.142	0.141	0.0025
Q_{sm}	955	326	29.1	0.67	0.18	0.0053

Plus intuitivement, si l'on observe le champ magnétique le long de la ligne rouge pointillée sur la figure 4, la différence entre les résultats des deux méthodes est plus évidente (figure 5). Plus le point d'observation est proche de la source du dessous, plus l'induction magnétique est loin de sa valeur théorique.

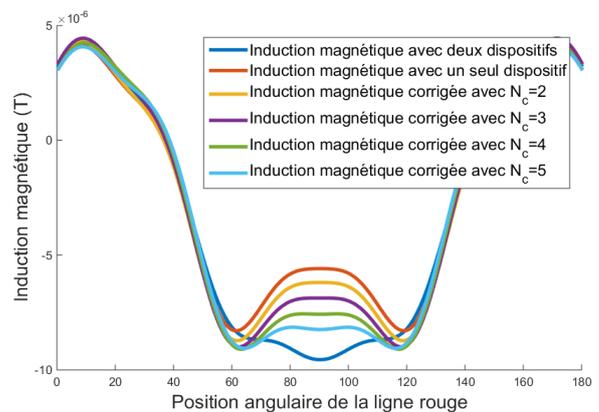


Fig. 5. Champ magnétique le long de la ligne rouge de la Fig. 4

L'inductance mutuelle calculée par la méthode de mesures séparées est $3,66 \cdot 10^{-8} H$ avec une erreur relative de 13,4% par rapport à la valeur théorique. L'erreur n'est pas très importante, mais il est toujours possible de la compenser par la mesure du

