



HAL
open science

Normes cyclotomiques naïves et unités logarithmiques

Jean-François Jaulent

► **To cite this version:**

| Jean-François Jaulent. Normes cyclotomiques naïves et unités logarithmiques. 2016. hal-01361276v1

HAL Id: hal-01361276

<https://hal.science/hal-01361276v1>

Preprint submitted on 7 Sep 2016 (v1), last revised 14 Feb 2017 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Normes cyclotomiques naïves et unités logarithmiques

Jean-François JAULENT

Résumé. Nous déterminons le rang du sous-groupe \tilde{E}_K des éléments du groupe multiplicatif d'un corps de nombres K qui sont normes à chaque étage fini de sa \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique K^c ; et nous comparons son ℓ -adifié $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$ avec le ℓ -groupe des unités logarithmiques $\tilde{\mathcal{E}}_K$.

Abstract. We compute the \mathbb{Z} -rank of the subgroup $\tilde{E}_K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_{K_n/K}(K_n^\times)$ of elements of the multiplicative group of a number field K that are norms from every finite level K_n of the cyclotomic \mathbb{Z}_ℓ -extension K^c of K . Thus we compare its ℓ -adification $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$ with the group of logarithmic units $\tilde{\mathcal{E}}_K$.

Introduction

Le ℓ -groupe des normes cyclotomiques \tilde{E}_K attaché à un corps de nombres K se présente comme le sous-module du ℓ -adifié $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ du groupe multiplicatif K^\times formé des éléments de \mathcal{R}_K qui sont normes dans tous les étages finis K_n/K de la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique K^c de K .

Or, comme observé dans [11], \tilde{E}_K ne provient pas en général (par ℓ -adification) d'un sous-groupe naturel (ou naïf) du groupe K^\times . La Théorie ℓ -adique du corps de classes (cf. [8] ou [3]) permet cependant d'interpréter ce groupe des normes cyclotomiques comme un groupe d'unités, analogue au ℓ -adifié $\mathcal{E}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_K$ du groupe des unités au sens habituel, en lien avec un groupe de classes $\tilde{\mathcal{U}}_K$, qui est le pendant logarithmique du ℓ -groupe des classes d'idéaux.

Le rang sur \mathbb{Z}_ℓ du groupe des unités logarithmiques $\tilde{\mathcal{E}}_K$ (i.e. la dimension de son quotient par le sous-groupe $\mu_K^{(\ell)}$ des racines de l'unité d'ordre ℓ -primaire contenues dans K) est donné par la formule (cf. [11], Sco. 6) :

$$\dim_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{E}}_K = r_K + c_K + \delta_K^{\mathcal{G}},$$

où r_K et c_K sont respectivement les nombres de places réelles et complexes de K ; et $\delta_K^{\mathcal{G}}$ mesure le défaut dans K de la conjecture de Gross-Kuz'min pour le premier ℓ . En particulier, lorsque le corps K vérifie cette conjecture pour le premier ℓ (par exemple pour K abélien sur \mathbb{Q}), il suit :

$$\tilde{\mathcal{E}}_K \simeq \mu_K^{(\ell)} \mathbb{Z}_\ell^{r_K + c_K}.$$

Bien entendu, il reste possible, indépendamment de toute conjecture, de définir le groupe des ℓ -normes cyclotomiques *naïves* comme l'intersection

$$\tilde{E}_K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_{K_n/K}(K_n^\times)$$

des sous-groupes normiques de K^\times attachés aux étages finis de la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique K^c/K .

Le groupe obtenu est un sous-groupe du groupe E'_K des ℓ -unités du corps K , qui contient le \mathbb{Z} -module multiplicatif engendré par ℓ , donc un \mathbb{Z} -module de type fini, produit direct

$$\tilde{E}_K \simeq \mu_K \mathbb{Z}^{\tilde{e}_K}$$

du groupe des racines de l'unité contenues dans K et d'un \mathbb{Z} -module libre de dimension \tilde{e}_K avec

$$1 \leq \tilde{e}_K = \dim_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K \leq \dim_{\mathbb{Z}} E'_K = r_K + c_K + l_K - 1,$$

où l_K désigne le nombre de places de K au-dessus de ℓ .

Le but de cette note est de préciser la valeur de \tilde{e}_K indépendamment de toute conjecture ainsi que les cas d'égalité entre le groupe $\tilde{\mathcal{E}}_K$ et son sous-module *naïf* $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$.

1. Bref rappel sur les unités logarithmiques

Soient ℓ un nombre premier donné et K un corps de nombres. À chaque place finie \mathfrak{p} de K , il est attaché dans [7] une application à valeurs dans \mathbb{Z}_ℓ , définie sur le groupe multiplicatif $K_{\mathfrak{p}}^\times$ du complété de K en \mathfrak{p} par la formule :

$$\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = -\frac{\text{Log}_\ell N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}(x_{\mathfrak{p}})}{\text{deg } \mathfrak{p}},$$

où Log_ℓ désigne le logarithme d'Iwasawa et $\text{deg } \mathfrak{p}$ est un facteur de normalisation, dont l'expression exacte est sans importance ici, destiné à assurer que l'image de $K_{\mathfrak{p}}^\times$ est dense dans \mathbb{Z}_ℓ . Cette application induit un morphisme surjectif du compactifié ℓ -adique $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim K_{\mathfrak{p}}^\times / K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^n}$ de $K_{\mathfrak{p}}^\times$ sur \mathbb{Z}_ℓ dont le noyau, dit *sous-groupe des unités logarithmiques* de $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$,

$$\tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} = \{u_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \mid \tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(u_{\mathfrak{p}}) = 0\}$$

s'identifie par la Théorie ℓ -adique locale du corps de classes (cf. [8]) au sous groupe normique de $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}$ associé à la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique $K_{\mathfrak{p}}^c$ de $K_{\mathfrak{p}}$.

Soit maintenant \mathcal{J}_K le ℓ -adifié du groupe des idèles de K , i.e. le produit $\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p}}^{\text{res}} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ des compactifiés $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ des groupes multiplicatifs des complétés $K_{\mathfrak{p}}$, restreint aux familles $(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ dont presque tous les éléments tombent dans le sous-groupe unité $\tilde{\mathcal{U}}_K = \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}$. La Théorie ℓ -adique globale du corps de classes établit un isomorphisme de groupes topologiques compacts entre le ℓ -groupe des classes d'idèles \mathcal{C}_K défini comme quotient

$$\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K$$

de \mathcal{J}_K par son sous-groupe principal $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ et le groupe de Galois $G_K = \text{Gal}(K^{ab}/K)$ de la pro- ℓ -extension abélienne maximale de K . Dans la correspondance ainsi établie (cf. [7, 8]) :

- (i) Le groupe de normes associé à la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique K^c du corps K est le sous-groupe des idèles de degré nul : $\tilde{\mathcal{J}}_K = \{\mathfrak{x} = (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{J}_K \mid \text{deg}(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{p}} \tilde{\nu}(x_{\mathfrak{p}}) \text{deg } \mathfrak{p} = 0\}$.
- (ii) Le groupe de normes associé à la plus grande sous-extension K^{lc} de K^{ab} qui est localement cyclotomique (i.e. complètement décomposée sur K^c en chacune de ses places) est le produit $\tilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K$ du sous-groupe $\tilde{\mathcal{U}}_K = \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}$ des unités logarithmiques locales et de \mathcal{R}_K .
- (iii) En particulier, le groupe de Galois $\text{Gal}(K^{lc}/K^c)$ s'identifie au quotient $\tilde{\mathcal{C}}_K = \tilde{\mathcal{J}}_K / \tilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K$, lequel peut être regardé comme quotient du groupe $\tilde{\mathcal{D}}_{\ell K} = \tilde{\mathcal{J}}_K / \tilde{\mathcal{U}}_K$ des diviseurs logarithmiques de degré nul par son sous-groupe principal $\mathcal{P}_{\ell K} = \mathcal{R}_K \tilde{\mathcal{U}}_K / \tilde{\mathcal{U}}_K$, le numérateur $\tilde{\mathcal{D}}_{\ell K}$ s'identifiant au sous-groupe $\bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p}$ des diviseurs de degré nul de la somme formelle $\bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p}$.
- (iv) Et le noyau $\tilde{\mathcal{E}}_K = \mathcal{R}_K \cap \tilde{\mathcal{U}}_K$ du morphisme $\tilde{\text{div}} : x \mapsto \sum_{\mathfrak{p}} \tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x) \mathfrak{p}$ de \mathcal{R}_K dans $\tilde{\mathcal{D}}_{\ell K}$ est le sous-groupe des normes cyclotomiques globales de \mathcal{R}_K .

Nous disons que $\tilde{\mathcal{C}}_K$ est le ℓ -groupe des classes logarithmiques du corps K et que $\tilde{\mathcal{E}}_K$ est le ℓ -groupe des unités logarithmiques globales.

Dans ce contexte, la conjecture de Gross-Kuz'min (cf. [11] §2) se présente comme suit :

Théorème & Conjecture. *Le groupe $\tilde{\mathcal{E}}_K$ des unités logarithmiques de K est le produit :*

$$\tilde{\mathcal{E}}_K = \mu_K^{(\ell)} \mathbb{Z}_\ell^{r_K + c_K + \delta_K^{\mathcal{C}}}$$

du ℓ -sous-groupe $\mu_K^{(\ell)}$ des racines globales de l'unité et d'un \mathbb{Z}_ℓ -module libre de rang $r_K + c_K + \delta_K^{\mathcal{C}}$, où r_K et c_K sont respectivement les nombres de places réelles et complexes de K ; et $\delta_K^{\mathcal{C}} = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{C}}_K$ mesure le défaut dans K de la conjecture de Gross-Kuz'min pour le premier ℓ , laquelle postule précisément la finitude du groupe $\tilde{\mathcal{C}}_K$ ou, de façon équivalente, l'égalité : $\dim \tilde{\mathcal{E}}_K = r_K + c_K$.

Il est bien connu (cf. e.g. [5, 6]) que la conjecture de Gross-Kuz'min est satisfaite pour tous les premiers ℓ dès lors que K est abélien, en vertu du théorème d'indépendance de Baker-Brumer. Mais c'est aussi le cas pour des raisons triviales (du fait de la formule du produit), lorsque le corps K admet une seule place au-dessus du premier ℓ : la valuation logarithmique $\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}$ définie plus haut coïncide, en effet, avec la valuation $\nu_{\mathfrak{p}}$ au sens ordinaire, dès que \mathfrak{p} ne divise pas ℓ . Il suit de là que le groupe $\tilde{\mathcal{E}}_K$ est contenu dans le tensorisé $\mathcal{E}'_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_K$ du groupe des ℓ -unités de K . D'où l'égalité pour $\dim_{\mathbb{Z}} E'_K = r_K + c_K$, i.e. lorsque K admet $l_K = 1$ places au-dessus de ℓ . Dans la pratique, le calcul du groupe $\tilde{\mathcal{C}}_K$ est parfaitement effectif (cf. [1])

2. Normes cyclotomiques naïves

Intéressons-nous maintenant au groupe \tilde{E}_K des ℓ -normes cyclotomiques au sens naïf, c'est-à-dire à l'intersection

$$\tilde{E}_K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_{K_n/K}(K_n^\times)$$

des sous-groupes normiques de K^\times attachés aux étages finis de la \mathbb{Z}_ℓ -extension cyclotomique K^c/K .

Par le principe de Hasse, la condition normique se lit localement, de sorte que \tilde{E}_K est encore le noyau dans K^\times des valuations logarithmiques $\tilde{\nu}_\mathfrak{p}$ présentées plus haut :

$$\tilde{E}_K = \{x \in K^\times \mid \tilde{\nu}_\mathfrak{p}(x) = 0 \quad \forall \mathfrak{p} \nmid \infty\} = \{\varepsilon \in E'_K \mid \tilde{\nu}_\mathfrak{p}(\varepsilon) = 0 \quad \forall \mathfrak{p} \mid \ell\}.$$

En particulier \tilde{E}_K est un sous-groupe du groupe E'_K des ℓ -unités de K qui contient les racines de l'unité ainsi que les puissances de ℓ , ce qui se traduit par les deux inclusions :

$$\mu_K \ell^{\mathbb{Z}} \subset \tilde{E}_K \subset E'_K \simeq \mu_K \mathbb{Z}^{r_K + c_K + l_K - 1},$$

où r_K , c_K et l_K désignent respectivement les nombres de places réelles, complexes et ℓ -adiques de K , de sorte que l'on a :

$$\tilde{E}_K \simeq \mu_K \mathbb{Z}^{\tilde{e}_K}$$

et la dimension \tilde{e}_K de \tilde{E}_K est comprise entre 1 et $r_K + c_K + l_K - 1$.

Observons tout de suite que les deux bornes sont atteintes sous des hypothèses convenables :

Proposition 1. *Soit $\tilde{e}_K = \dim_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$ la dimension du groupe des ℓ -normes cyclotomiques naïves.*

(i) *Si le corps K possède une unique place au-dessus de ℓ , \tilde{E}_K coïncide avec le groupe des ℓ -unités E'_K et il vient : $\tilde{e}_K = r_K + c_K + l_K - 1 = r_K + c_K$.*

(ii) *Si, tout au contraire, la place ℓ est complètement décomposée dans K/\mathbb{Q} , on a : $\tilde{E}_K = \mu_K \ell^{\mathbb{Z}}$ et $\tilde{e}_K = 1$. Nous disons alors que K est totalement ℓ -adique.*

Preuve. Le cas (i) ayant été traité à la fin de la section précédente, concentrons nous sur le cas (ii). Par hypothèse, la norme locale N_{K/\mathbb{Q}_ℓ} aux places \mathfrak{l} au-dessus de ℓ étant triviale, les valuations logarithmiques correspondantes $\tilde{\nu}_\mathfrak{l}$ sont proportionnelles au logarithme d'Iwasawa Log_ℓ et il suit :

$$\tilde{E}_K = \{\varepsilon \in E'_K \mid \text{Log}_\ell(\varepsilon) = 0\} = \mu_K \ell^{\mathbb{Z}},$$

puisque, du fait de l'hypothèse de complète décomposition, les seules puissances fractionnaires de ℓ contenues dans K sont les puissances entières.

Plus généralement, en présence de conjugaison ℓ -adique (cf. [9] pour cette notion), il vient :

Définition & Théorème 2. *Convenons de dire qu'un corps de nombres K est à conjugaison ℓ -adique lorsque c'est une extension non-décomposée aux places au-dessus de ℓ d'un sous-corps k complètement décomposé au dessus de ℓ . Pour un tel corps K la dimension de \tilde{E}_K est donnée par :*

$$\tilde{e}_K = (r_K + c_K) - (r_k + c_k - 1),$$

où r_K , r_k , c_K et c_k sont les nombres respectifs de plongements réels et complexes de K et k .

Preuve. Notons $V'_K = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} E'_K$ et $V'_k = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} E'_k$ les \mathbb{Q} -espaces vectoriels construits sur les groupes de ℓ -unités respectifs de K et k , puis $V_{K/k}^*$ le noyau de l'opérateur norme $\nu = N_{K/k}$ de V'_K sur V'_k .

Par construction, le sous-espace $\tilde{V}_K = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$ de V'_K construit sur les unités logarithmiques est donné par :

$$\tilde{V}_K = \{\varepsilon \in V'_K \mid N_{K/k}(\varepsilon) \in \ell^{\mathbb{Q}}\},$$

comme préimage par la norme $N_{K/k}$ du noyau du logarithme. Il vient donc :

$$\dim_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K = \dim_{\mathbb{Q}} \tilde{V}_K = 1 + \dim_{\mathbb{Q}} V_{K/k}^* = 1 + (r_K + c_K + l_K - 1) - (r_k + c_k + l_k - 1);$$

d'où le résultat annoncé, puisque K et k ont même nombre $l_K = l_k$ de places au-dessus de ℓ .

Scolie 3. *Sous les hypothèses du Théorème 2, on a l'égalité $\tilde{e}_K = r_K + c_K$ (et donc, sous la conjecture de Gross-Kuz'min, l'identité $\tilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$) si et seulement si le sous-corps totalement ℓ -adique k est ou bien le corps des rationnels \mathbb{Q} ou bien un corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$.*

3. Étude du cas galoisien

Examinons maintenant le cas où le corps de nombres considéré est galoisien de degré n sur \mathbb{Q} et notons $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ son groupe de Galois.

Faisons choix d'une des places à l'infini, disons \mathfrak{p}_∞ de K et notons $D_{\mathfrak{p}_\infty}$ son groupe de décomposition ; notons de même \mathfrak{p}_ℓ l'une des places de K au-dessus de ℓ et $D_{\mathfrak{p}_\ell}$ son groupe de décomposition. Notons enfin d_∞ l'ordre de $D_{\mathfrak{p}_\infty}$ (qui vaut 1 ou 2) et d_ℓ celui de \mathfrak{p}_ℓ .

D'après le Théorème de Herbrand, le caractère du $\mathbb{Q}[G]$ -module $V'_K = \mathbb{Q} \otimes E'_K$ construit sur le groupe des ℓ -unités de K est donné par :

$$\chi_{E'_K} = \chi_\infty + \chi_\ell - 1,$$

où $\chi_\infty = \text{Ind}_{D_{\mathfrak{p}_\infty}}^G 1_{D_{\mathfrak{p}_\infty}}$ est l'induit à G du caractère de la représentation unité du sous-groupe de décomposition de \mathfrak{p}_∞ ; et $\chi_\ell = \text{Ind}_{D_{\mathfrak{p}_\ell}}^G 1_{D_{\mathfrak{p}_\ell}}$ son analogue pour \mathfrak{p}_ℓ ; et 1 désigne le caractère unité.

L'objet de cette section est de calculer le caractère $\chi_{\tilde{E}_K}$ du $\mathbb{Q}[G]$ -module $\tilde{V}_K = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$.

Or d'un côté, les 1-composantes isotypiques respectives de V'_K et de \tilde{V}_K s'identifient au sous-espace $V'_\mathbb{Q} = \tilde{V}_\mathbb{Q} = \ell^\mathbb{Q}$, et $\chi_{E'_K}$; de sorte que $\chi_{\tilde{E}_K}$ contiennent une seule fois le caractère unité.

Et d'un autre côté, si E_K^* désigne le noyau dans E'_K de la norme $N_{K/\mathbb{Q}}$, le \mathbb{Q} -espace associé $V_K^* = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} E_K^*$ n'est autre que le sous- $\mathbb{Q}[G]$ -module de V'_K annulé par l'idempotent $e_1 = \frac{1}{n} \sum_{\gamma \in G} \gamma$; et le caractère de V_K^* est donné par :

$$\chi_{E_K^*} = (\chi_\infty - 1) + (\chi_\ell - 1).$$

L'expression des valeurs absolues logarithmiques donnée au début de la section 1 montre alors que le sous-espace $\tilde{V}_K^* = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K^*$ de V_K^* construit sur les unités logarithmiques de norme 1 est l'intersection des noyaux dans V_K^* de l'idempotent associé au sous-groupe $D_{\mathfrak{p}_\ell}$

$$e_{\mathfrak{p}_\ell} = \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in G} \chi_\ell(\sigma^{-1}) \sigma = \frac{1}{d_\ell} \sum_{\tau \in D_{\mathfrak{p}_\ell}} \tau$$

et de ses conjugués $e_{\mathfrak{p}_\ell \gamma} = \gamma e_{\mathfrak{p}_\ell} \gamma^{-1}$, lorsque γ décrit G . En résumé :

Proposition 4. *Le $\mathbb{Q}[G]$ -module $\tilde{V}_K = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$ construit sur les unités logarithmiques naïves est la somme directe $\tilde{V}_K = \tilde{V}_\mathbb{Q} \oplus \tilde{V}_K^*$, où*

- $\tilde{V}_\mathbb{Q} = \ell^\mathbb{Q}$ est l'image de \tilde{V}_K par l'idempotent central $e_1 = \frac{1}{n} \sum_{\gamma \in G} \gamma$ attaché à la norme ;
- \tilde{V}_K^* est le plus grand sous-module de V_K^* qui est tué par l'idempotent $e_{\mathfrak{p}_\ell} = \frac{1}{d_\ell} \sum_{\tau \in D_{\mathfrak{p}_\ell}} \tau$.

À partir de là, la détermination du caractère $\chi_{\tilde{E}_K}$ est un pur problème de théorie des représentations où l'arithmétique n'a plus aucune part : on dispose d'un groupe fini G , d'un $\mathbb{Q}[G]$ module projectif $X = V_K^*$ de caractère $\chi = \chi_{E_K^*} = (\chi_\infty - 1) + (\chi_\ell - 1)$, d'un sous-groupe $H = D_{\mathfrak{p}_\ell}$ de G ; et on cherche le caractère du plus grand sous-module de X qui est annulé par l'idempotent $e_H = \frac{1}{|H|} \sum_{\tau \in H} \tau$ de l'algèbre $\mathbb{Q}[G]$ construit sur les éléments de H .

Écrivons donc $\chi = \sum_{i \in I} n_i \chi_i$ la factorisation irréductible de χ et $X \simeq \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{j=1}^{n_i} X_i$ comme somme directe d'idéaux à gauche minimaux deux à deux non isomorphes. Pour un i donné, on a :

- ou bien $e_H X_i = 0$; et X_i est annulé par e_H (et tous ses conjugués) ;
- ou bien $e_H X_i \neq 0$; et le seul sous-module de X_i qui est annulé par e_H est le module nul.

En fin de compte, le sous-module cherché \tilde{X} est donc donné par : $\tilde{X} \simeq \bigoplus_{e_H X_i = 0} \bigoplus_{j=1}^{n_i} X_i$. Notons que la condition $e_H X_i = 0$ se lit encore $e_H A_i = 0$, si $A_i = \mathbb{Q}[G] e_{\chi_i}$ est le facteur simple correspondant au caractère χ_i , autrement dit : $e_H e_{\chi_i} = 0$. En pratique, on obtient donc \tilde{V}_K^* à partir de V_K^* en éliminant les composantes irréductibles représentés dans $\mathbb{Q}[G/H] \simeq \mathbb{Q}[G] e_H$. Ainsi :

Théorème 5. *Pour K/\mathbb{Q} galoisienne le caractère du groupe des normes cyclotomiques naïves est :*

$$\chi_{\tilde{E}_K} = 1 + (\chi_\infty \wedge \bar{\chi}_\ell),$$

où $\bar{\chi}_\ell$ désigne la partie du caractère régulier $\chi_{\text{rég}}$ qui est étrangère à χ_ℓ .

4. Discussion des cas d'égalité : $\tilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$

Le groupe des normes cyclotomique naïves \tilde{E}_K étant un sous-module pur du groupe multiplicatif K^\times , et de même le groupe des unités logarithmiques $\tilde{\mathcal{E}}_K$ dans le ℓ -adifié $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$, comme noyaux des valuations logarithmiques $\tilde{\nu}_p$, l'égalité $\tilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$ a lieu si et seulement si le \mathbb{Z} -rang de \tilde{E}_K coïncide avec le \mathbb{Z}_ℓ -rang de $\tilde{\mathcal{E}}_K$.

Dans le cas galoisien, cela revient à dire que les deux groupes définissent le même caractère. Or celui du groupe des unités logarithmiques est calculé dans [7] : il est égal à χ_∞ augmenté du caractère de défaut de la conjecture de Gross-Kuz'min. Il vient donc directement :

Théorème 6. *Dans une extension galoisienne K de \mathbb{Q} , l'égalité $\tilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$ a lieu si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

- (i) le corps K vérifie la conjecture de Gross-Kuz'min (pour le premier ℓ) ;
- (ii) on a : $\chi_\infty \wedge \chi_\ell = 1$.

Corollaire 7. *Pour K galoisien réel, l'égalité $\tilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$ a lieu si et seulement si le corps K possède une seule place au-dessus de ℓ ; auquel cas, il vient : $\tilde{E}_K = E'_K$ et $\tilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K = \mathcal{E}'_K$.*

Preuve. Si K est réel, on a $\chi_\infty = \chi_{\text{rég}}$ et l'assertion (ii) s'écrit : $\chi_\ell = 1$; ce qui se traduit par le fait que K admet une unique place au-dessus de ℓ . D'où le résultat en vertu de la Proposition 1. Notons que, dans ce contexte, la condition (i) est alors automatiquement satisfaite.

Corollaire 8. *Si K est à conjugaison complexe, i.e. si c'est une extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps K_∞ totalement réel, l'égalité $\tilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$ a lieu si et seulement si*

- (i) ou bien K ne possède qu'une seule place au-dessus de ℓ ;
- (ii) ou bien K est composé direct d'un sous-corps galoisien réel K_∞ qui ne possède qu'une place au-dessus de ℓ et d'un sous-corps quadratique imaginaire K_ℓ qui en possède exactement 2.

Avant d'établir ce résultat, observons que nous avons, par un argument de points fixes immédiat :

Lemme 9. *Si l'égalité $\tilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$ a lieu pour un corps de nombres quelconque donné K , elle vaut aussi pour chacun de ses sous-corps.*

Preuve du Corollaire. Si K est à conjugaison complexe, le sous-groupe de décomposition D_∞ des places à l'infini est normal et d'ordre 2 et son sous-corps des points fixes K_∞ est alors un corps galoisien réel auquel nous pouvons appliquer le corollaire précédent. Si donc K satisfait l'égalité, K_∞ la satisfait aussi donc ne possède qu'une seule place au-dessus de ℓ . Ainsi pour chaque place ℓ -adique de K , le sous-groupe de décomposition s'envoie surjectivement sur le quotient G/D_∞ . Il est donc d'indice 1 ou 2 dans G et, par conséquent, normal. Notons le D_ℓ .

- Dans le premier cas ($D_\ell = G$), le corps K ne possède qu'une seule place au-dessus de ℓ ; et il vient, comme plus haut : $\tilde{E}_K = E'_K$ et $\tilde{\mathcal{E}}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K = \mathcal{E}'_K$.
- Dans le second cas ($D_\ell \neq G$), le groupe G est alors le produit direct des sous-groupes D_∞ et D_ℓ , et K le composé direct de leurs sous-corps invariants respectifs K_∞ et K_ℓ . Ici encore le corps réel K_∞ vérifie les hypothèses du corollaire précédent, de sorte qu'on a : $\tilde{E}_{K_\infty} = E'_{K_\infty}$ et $\tilde{\mathcal{E}}_{K_\infty} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_{K_\infty} = \mathcal{E}'_{K_\infty}$. Comme, sous la conjecture de Gross-Kuz'min, les groupes $\tilde{\mathcal{E}}_{K_\infty}$ et $\tilde{\mathcal{E}}_K$ ont même \mathbb{Z}_ℓ -rang $r_{K_\infty} = c_K$, il suit bien : $\tilde{\mathcal{E}}_K = \mu_K^{(\ell)} \tilde{\mathcal{E}}_{K_\infty} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$.

En fin de compte, il reste seulement à vérifier dans ce dernier cas que le corps $K = K_\ell K_\infty$ vérifie la conjecture de Gross-Kuz'min. Or, cela résulte du résultat général suivant :

Scolie 10. *Soit K un corps de nombres à conjugaison ℓ -adique (non nécessairement galoisien), extension non décomposée aux places au-dessus de ℓ d'un sous-corps K_ℓ où les places au-dessus de ℓ sont complètement décomposées. Alors la conjecture de Gross-Kuz'min pour le premier ℓ est vérifiée dans K dès qu'elle l'est dans le sous-corps K_ℓ (par exemple dès que K_ℓ est abélien sur \mathbb{Q}).*

Preuve. Elle est très simple : le corps K et son sous-corps K_ℓ ayant même nombre de places au-dessus de ℓ , le groupe des diviseurs logarithmiques de K_∞ construits sur les places au-dessus de ℓ est d'indice fini dans son homologue de K . Ainsi $\tilde{\mathcal{C}}_{K_\infty}$ et $\tilde{\mathcal{C}}_K$ sont-ils simultanément finis ou pas.

INDEX DES PRINCIPALES NOTATIONS

K : un corps de nombres arbitraire ; $K_{\mathfrak{p}}$: le complété de K en la place \mathfrak{p} ;
 $K^c = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ avec $[K_n : K] = \ell^n$: la \mathbb{Z}_{ℓ} -extension cyclotomique de K ;
 E_K : le groupe des unités de K et E'_K le groupe des ℓ -unités ;
 $\tilde{E}_K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_{K_n/K}(K_n^{\times})$: le groupe des normes cyclotomiques naïves de K ;
 μ_K : le groupe des racines de l'unité de K et $\mu_K^{(\ell)}$ son ℓ -sous-groupe de Sylow ;
 r_K, c_K, l_K : les nombres respectifs de places réelles, complexes et ℓ -adiques du corps K ;
 $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} K^{\times}$: le ℓ -adifié du groupe multiplicatif du corps K ;
 $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim K_{\mathfrak{p}}^{\times} / K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^m}$: le compactifié ℓ -adique du groupe multiplicatif $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$;
 $\mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}}}$: le sous-groupe unité et $\tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}$ le groupe des normes cyclotomiques dans $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$;
 $\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p}}^{\text{res}} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$: le ℓ -adifié du groupe des idèles de K ;
 $\tilde{\mathcal{U}}_K = \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}$: le sous-groupe des normes cyclotomiques dans \mathcal{J}_K ;
 $\tilde{\mathcal{C}}_K = \mathcal{J}_K / \tilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K$: le ℓ -groupe des classes logarithmiques du corps K ;
 $\mathcal{E}'_K = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{E}'_K$: le ℓ -adifié du groupe des ℓ -unités de K ;
 $\mathcal{E}_K = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} E_K = \mathcal{R}_K \cap \mathcal{U}_K$: le ℓ -adifié du groupe des unités de K ;
 $\tilde{\mathcal{E}}_K = \mathcal{R}_K \cap \tilde{\mathcal{U}}_K$: le ℓ -groupe des unités logarithmiques de K ;
 $\delta_K^{\mathcal{C}} = \dim_{\mathbb{Z}_{\ell}} \tilde{\mathcal{C}}_K$: le défaut de la conjecture de Gross-Kuz'min dans K .

RÉFÉRENCES

- [1] F. DIAZ Y DIAZ, J.-F. JAULENT, S. PAULI, M.E. POHST & F. SORIANO, *A new algorithm for the computation of logarithmic class groups of number fields*, Experimental. Math. **14** (2005), 67–76.
- [2] L.J. FEDERER & B.N. GROSS, (with an appendix by W. SINNOT), *Regulators and Iwasawa modules*, Inv. Math. **62** (1981), 443–457.
- [3] G. GRAS, *Class Field Theory : from theory to practice*, Springer Monographs in Mathematics (2003).
- [4] C. GREITHER, *Sur les normes universelles dans les \mathbb{Z}_p -extensions*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 205–220.
- [5] J.-F. JAULENT, *Sur l'indépendance ℓ -adique de nombres algébriques*, J. Numb. Th. **20** (1985), 149–158.
- [6] J.-F. JAULENT, *Sur les conjectures de Leopoldt et de Gross*, Actes des Journées Arithmétiques de Besançon, Astérisque **147-148** (1987), 107–120.
- [7] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.
- [8] J.-F. JAULENT, *Théorie ℓ -adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.
- [9] J.-F. JAULENT, *Plongements ℓ -adiques et ℓ -nombres de Weil*, J. Théor. Nombres Bordeaux **20** (2008), 335–351.
- [10] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques et capitulation*, Functiones et Approximatio **54** (2016), 227–239.
- [11] J.-F. JAULENT, *Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz'min*, Annales Math. Québec (à paraître)
- [12] L. V. KUZ'MIN, *The Tate module of algebraic number fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **36** (1972), 267–327.
- [13] S. SEO, *On the Tate module of a number field*, Preprint.
- [14] S. SEO, *On the conjectures of Gross and Leopoldt*, Preprint.

Jean-François JAULENT
 Institut de Mathématiques de Bordeaux
 Université de BORDEAUX & CNRS
 351, cours de la libération
 F-33405 TALENCE Cedex
 courriel : Jean-Francois.Jaulent@math.u-bordeaux1.fr