LA CONJECTURE DU FACTEUR DIRECT

Yves André

LA CONJECTURE DU FACTEUR DIRECT

YVES ANDRÉ

RÉSUMÉ. M. Hochster a conjecturé que pour toute extension finie S d'un anneau commutatif régulier R, la suite exacte de R-modules $0 \to R \to S \to S/R \to 0$ est scindée. En nous appuyant sur sa réduction au cas d'un anneau local régulier R complet non ramifié d'inégale caractéristique, nous proposons une démonstration de cette conjecture dans le contexte de la théorie perfectoïde de P. Scholze. Les deux ingrédients-clé sont le « lemme d'Abhyankar » perfectoïde de [1] et l'analyse des extensions kummériennes de R par une technique d'épaississement sur des voisinages tubulaires.

ABSTRACT. M. Hochster conjectured that any finite extension of a regular commutative ring splits as a module. Building on his reduction to the case of an unramified complete regular local ring R of mixed characteristic, we propose a proof in the framework of P. Scholze's perfectoid theory. The main ingredients are the perfectoid "Abhyankar lemma" from [1] and an analysis of Kummer extensions of R by a thickening technique.

TABLE DES MATIÈRES

Date: 23 août 2016.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 13D22, 13H05, 14G20.
Key words and phrases. Direct summand conjecture, big Cohen-Macaulay algebra, perfectoid algebra, purity.

INTRODUCTION.

0.1. La conjecture du facteur direct, publiée par M. Hochster en 1973 [12], est l'énoncé suivant, d'apparence élémentaire :

0.1.1. **Conjecture.** *Soit R un anneau commutatif noethérien* régulier. *Alors pour toute R-algèbre commutative fidèle et* finie *S, l'inclusion $R \hookrightarrow S$ admet une* rétraction *R-linéaire, i.e. R est facteur direct de S en tant que R-module.*

Il revient au même de dire que toute extension finie $R \hookrightarrow S$ est *pure*, *i.e.* universellement injective, ou encore que S est un générateur de la catégorie des R-modules.

Cette conjecture occupe une place centrale dans l'écheveau des « conjectures homologiques », issues des travaux de C. Peskine et L. Szpiro [22], et qui structurent la vision sous-jacente à bien des travaux d'algèbre commutative depuis une quarantaine d'années [15]. Le résultat suivant, qui synthétise les travaux de plusieurs auteurs, donne un aperçu de son caractère protéiforme.

Les énoncés suivants sont équivalents [1] *:*

(1) La conjecture du facteur direct vaut pour tout anneau régulier.

(2) Pour tout idéal I d'un anneau régulier R et toute extension finie S, $I = R \cap IS$.

(3) Pour tout anneau local (noethérien) R, toute suite sécante maximale $(x_1, \dots, x_d)$ et tout couple $(m, n) \in \mathbf{N}^2$, le monôme $(x_1 \cdots x_d)^m$ est dans l'idéal engendré par $x_1^n, \dots, x_d^n$ si et seulement si $m \geq n$.

(4) Pour tout anneau local R d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et tout complexe de modules libres de type fini $0 \to F_d \to \cdots \to F_0 \to 0$ tel que $H_i(F_\bullet)$ soit de longueur finie pour $i > 0$ et que $H_0(F_\bullet) \setminus \mathfrak{m}H_0(F_\bullet)$ ait de la torsion $\mathfrak{m}$-primaire, on a $\dim R \leq d$.

Ils impliquent la conjecture des syzygies :

(5) Tout k-ième module de syzygies M (d'un module de type fini sur un anneau local), qui est de dimension projective finie mais non libre, est de rang $\geq k$.

0.2. La conjecture du facteur direct est un problème local sur R mais pas sur l'extension S (problème de recollement des rétractions). Si le degré de l'extension est inversible, il est facile de construire une rétraction à l'aide d'une trace divisée, ce qui établit la conjecture lorsque R contient $\mathbf{Q}$. C'est encore facile si l'extension finie est plate (donc fidèlement plate, de sorte que la suite exacte $0 \to R \to S \to S/R \to 0$ se scinde), ce qui établit la conjecture en dimension ≤ 2, puisque toute extension finie normale de R est alors plate. Le cas beaucoup plus ardu de la dimension 3 a été résolu par R. Heitman [11].

Par ailleurs, sans l'hypothèse de régularité, il est aisé de trouver des contre-exemples : l'idéal $(x+y)$ de $R = K[x,y]/(xy)$ n'est le contracté d'aucun idéal du normalisé $K[x] \times K[y]$; la normalité ne suffirait pas, d'ailleurs [12, ex. 1].

Hochster a démontré la conjecture en caractéristique $p > 0$ (voir 5.4 ci-dessous), et a *ramené le cas général au cas d'un anneau local complet non ramifié d'inégale caractéristique $(0, p)$ de corps résiduel k parfait*, c'est-à-dire, en vertu du théorème de structure de Cohen, au cas d'un anneau de séries formelles $W(k)[[T_1, \dots, T_n]]$ à coefficients dans l'anneau de Witt de k [13, th. 6.1].

---

1. Une suite sécante maximale est un système de $(\dim R)$ générateurs d'un idéal dont le radical est l'idéal maximal ("system of parameters" en anglais). Le rang d'un module de dimension projective finie (sur un anneau local) est la somme alternée des rangs dans une résolution libre.

Pour l'équivalence $(1) \Leftrightarrow (3)$, voir [13, th. 6.1]. L'implication $(1) \Rightarrow (2)$ est élémentaire : la pureté de l'extension S entraîne que $R/I \to S/IS$ est injectif ; pour la réciproque, voir [8]. Pour $(3) \Rightarrow (4)$, voir [13], et [9] pour la réciproque. L'implication $(4) \Rightarrow (5)$, implicite dans [10], est explicitée dans [13].

L'objectif de cet article est de la démontrer en général, via cette réduction :

0.2.1. **Théorème.** *La conjecture du facteur direct est vraie pour $W(k)[[T_1,\dots,T_n]]$ (donc aussi pour tout anneau régulier R).*

Nous ferons usage de techniques « transcendantes » issues de la théorie de Hodge p-adique, quittant délibérément le monde noethérien où l'algèbre commutative est diserte, pour le non-noethérien où elle annône.

0.3. Expliquons la stratégie de la preuve dans le cas analogue, mais beaucoup plus simple, où $R = k[[T_0,\dots,T_n]]$ et où l'extension finie S de R est intègre et munie d'un groupe fini G d'automorphismes tel que $S^G = R$.

La trace $\mathrm{tr} : S \to R$ donnée par la somme des conjugués est non nulle, car l'extension des corps de fractions est galoisienne ; néanmoins tr n'est pas surjective en général, donc est impropre à fournir une rétraction de $R \hookrightarrow S$ si p divise l'ordre de G.

La situation s'améliore en passant aux clôtures parfaites : l'extension des corps de fractions demeure galoisienne de groupe G, mais l'idéal non nul $\mathrm{tr}(S^{1/p^\infty})$ de R^{1/p^∞} devient radiciel : $\mathrm{tr}(S^{1/p^\infty}) = (\mathrm{tr}(S^{1/p^\infty}))^{1/p^\infty}$. En particulier, $\mathrm{tr}(S^{1/p^\infty})$ n'est pas contenu dans l'idéal $(T_0,T_1,\dots,T_n)R^{1/p^\infty}$. Comme R^{1/p^∞} est libre sur R de base $(T_0^{m_0}\cdots T_n^{m_n})_{\underline{m}\in(\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]\cap[0,1[)^{n+1}}$, on en déduit l'existence d'un élément $s \in S^{1/p^\infty}$ et d'un indice $\underline{m}$ tels que la projection de $\mathrm{tr}(s)$ sur le facteur R indexé par $\underline{m}$ soit égal à 1. En composant les applications R-linéaires $S \to S^{1/p^\infty} \overset{s'\mapsto \mathrm{tr}(ss')}{\to} R^{1/p^\infty} \overset{\mathrm{pr}_{\underline{m}}}{\to} R$, on obtient la rétraction cherchée.

0.4. En inégale caractéristique, où $W(k)$ se substitue à $k[[T_0]]$, la théorie de Hodge p-adique suggère une approche analogue, en remplaçant clôtures radicielles par *extensions profondément ramifiées*. Dans le cas de $A := W(k)[[T_1,\dots,T_n]]$, on peut par exemple considérer $\hat{A}^o_\infty := W(k[[T_1^{\frac{1}{p^\infty}},\dots,T_n^{\frac{1}{p^\infty}}]])\hat{\otimes}_{W(k)}\hat{K}^o_\infty$, où $\hat{K}^o_\infty$ est le complété de la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique $K^o_\infty = W(k)[\zeta_{p^\infty}]$ de $W(k)$.

Cette idée a déjà été explorée par plusieurs auteurs, dont P. Roberts, puis K. Shimomoto, B. Bhatt, O. Gabber et L. Ramero ; elle a notamment permis à Bhatt [4] de prouver la conjecture du facteur direct dans le cas où $B[\frac{1}{p}]$ est étale sur $A[\frac{1}{p}]$: dans ce cas, le théorème de « presque-pureté » de Faltings implique en effet que l'anneau des entiers $(B\otimes_A \hat{A}_\infty)^o$ est presque pur sur $\hat{A}^o_\infty$, et un argument noethérien permet de passer de là à la pureté sur A. L'argument s'étend d'ailleurs au cas où $B[\frac{1}{p}]$ n'est ramifié qu'au-dessus de $T_1\cdots T_n = 0$.

0.5. Pour le cas général, le théorème de Faltings s'avère insuffisant. Nous le remplacerons par le « lemme d'Abhyankar » perfectoïde de [1], qui permet de traiter le cas où $B[\frac{1}{p}]$ est ramifié sur $A[\frac{1}{p}]$ le long d'un discriminant $g\in A$ quelconque.

Ce résultat affirme entre autre que *quitte à adjoindre les racines p^∞-ièmes de g et prendre une fermeture [complètement] intégrale, l'extension des anneaux d'entiers devient « presque » presque étale finie modulo toute puissance de p - « presque »* étant entendu au sens où l'on « néglige » tout ce qui est annulé par $(\zeta_{p^j}-1)g^{\frac{1}{p^j}}$ pour tout j. Plus précisément, la fermeture intégrale $\mathcal{B}^o$ de $g^{-\frac{1}{p^\infty}}\hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^o$ dans $B\otimes_A \hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle[\frac{1}{g}]$ est *presque* étale finie et pure sur $\hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^o$ modulo toute puissance de p (th. 3.2.1).

La presque-algèbre intervient ici dans un cadre inédit où l'idéal idempotent n'est pas un idéal de valuation. On a par ailleurs remplacé $\hat{A}^o_\infty$ par $\hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^o$ et, pour conclure, on a besoin de propriétés de pureté ou de platitude de $\hat{A}^o_\infty \to \hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^o$.

0.6. L'étude des extensions kummériennes $A[\zeta_{p^i}, g^{\frac{1}{p^i}}, \frac{1}{p}]^o$ de A est notoirement difficile : on sait que l'anneau des entiers de $A[g^{\frac{1}{p}}]$ (*resp.* $A[g^{\frac{1}{p^i}}]$) est pur sur A mais, après adjonction d'une racine p-ième de l'unité, pas nécessairement plat sur A [17] (*resp.* [23]). Notre approche consistera à travailler avec $\hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^o$ directement, en l'« épaississant », c'est-à-dire en la voyant comme colimite complétée-séparée d'algèbres de fonctions bornées sur des voisinages tubulaires de $T = g$ dans le spectre analytique de $\hat{A}_\infty\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$, et en exploitant le caractère perfectoïde de telles algèbres. En résumé, $\hat{A}_\infty\langle g^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^o$ est *presque* fidèlement plate sur une certaine décomplétion A^o_∞ de $\hat{A}^o_\infty$, « presque » étant entendu ici au sens où l'on néglige ce qui est annulé par l'idéal de valuation de K^o_∞ (th. 2.5.1). On en déduit assez facilement la pureté de $A \hookrightarrow A[\zeta_{p^i}, g^{\frac{1}{p^i}}, \frac{1}{p}]^o$ (cor. 2.6.1).

0.7. Comme l'ont montré les travaux de Heitman et surtout Hochster, la conjecture du facteur direct est proche de (et impliquée par) l'existence d'algèbres de Cohen-Macaulay (non nécessairement noethériennes) pour les anneaux locaux (*cf. e.g.* [15][16]). On peut combiner les résultats esquissés ci-dessus aux techniques de [14] pour établir cette existence.

0.7.1. **Théorème.** *Pour tout anneau local noethérien complet intègre B d'inégale caractéristique $(0, p)$, il existe une B-algèbre C de Cohen-Macaulay, i.e. telle que toute suite sécante maximale de B devient une suite régulière dans C.*

Remerciements. Ma vive reconnaissance va à Luisa Fiorot, qui m'a fait connaître la conjecture du facteur direct fin 2012, et m'a expliqué son importance dans la problématique de la descente.

1. Préliminaires.

1.1. Commençons par deux lemmes aux confins de l'algèbre noethérienne.

1.1.1. **Lemme.** *Soient R un anneau noethérien, $\mathfrak{I}$ un idéal et S une R-algèbre plate (non nécessairement noethérienne). Alors le complété-séparé $\mathfrak{I}$-adique $\hat{S}$ de S est plat sur R, et pour tout module M de type fini sur R, le complété de M_S s'identifie à $M_{\hat{S}}$. Si $\mathfrak{I}$ est contenu dans le radical de Jacobson de R (ce qui est le cas si R est $\mathfrak{I}$-adiquement complet) et si S est fidèlement plat sur R, alors $\hat{S}$ est fidèlement plat sur R.*

Démonstration. [2] Considérons une suite exacte courte $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ de R-modules de type fini. D'après Artin-Rees, il existe m tel que pour tout $n \geq m$, en posant $N_1 = M_1 \cap \mathfrak{I}^m M_2$, la suite $0 \to M_1/\mathfrak{I}^{n-m}N_1 \to M_2/\mathfrak{I}^n M_2 \to M_3/\mathfrak{I}^n M_3 \to 0$ soit exacte. On obtient encore une suite exacte en tensorisant avec la R-algèbre plate S, puis, d'après Mittag-Leffler, en passant à la limite sur n. Puisque $\mathfrak{I}^{n-m}N_1$ est coincé entre $\mathfrak{I}^n M_1$ et $\mathfrak{I}^{n-m}M_1$, on obtient une suite exacte courte $0 \to \widehat{M_{1S}} \to \widehat{M_{2S}} \to \widehat{M_{3S}} \to 0$.

Pour tout R-module de type fini M, le morphisme $M_{\hat{S}} \to \widehat{M_S}$ est surjectif, et on déduit de ce qui précède, en prenant une présentation de M, qu'il est en fait bijectif. On déduit de là et de la suite exacte précédente que $\hat{S}$ est plat sur R.

Supposons ensuite qu'on ait $M_{\hat{S}} = 0$. Alors $(M/\mathfrak{I}M) \otimes_R S = M \otimes_R (\hat{S}/\mathfrak{I}\hat{S}) = 0$. Si S est fidèlement plat, on a $M = \mathfrak{I}M$. Si $\mathfrak{I}$ est contenu dans le radical, on a $M = 0$ d'après Nakayama, et on conclut que $\hat{S}$ est fidèlement plat sur R, ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

2. ce lemme apparaît sous diverses formes et avec diverses preuves dans la littérature, par exemple [25, th. 0.1] ; la preuve qui suit est plus élémentaire que celle de *loc. cit.* . L'énoncé est à première vue surprenant dans le cas où S n'est pas séparé ; il ne dit rien d'ailleurs sur le séparé de S.

1.1.2. **Lemme.** *Soient R est un anneau noethérien, $\mathfrak{J}$ un idéal, S une R-algèbre fidèlement plate (ou pure), et $\mathfrak{K}$ un idéal idempotent de S contenu dans $\mathfrak{J}S$. Alors pour tout $s \in R \cap \mathfrak{K}$, il existe $r \in \mathfrak{J}$ tel que $(1-r)s = 0$. En particulier, si R est local et $R \cap \mathfrak{K} \neq 0$, alors $\mathfrak{J} = R$.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^n$ est contenu dans $(\mathfrak{J}S)^n = \mathfrak{J}^n S$. Par platitude fidèle (ou pureté), on a $R \cap (\mathfrak{J}S)^n = R \cap (\mathfrak{J}^n \otimes S) = \mathfrak{J}^n$ [5, I, §2, n. 6, prop. 7]. Donc $R \cap \mathfrak{K}$ est contenu dans $\cap \mathfrak{J}^n$. On conclut par le lemme de Krull. □

1.2. Voici quelques rappels et compléments sur la *localisation de Weierstrass* des algèbres de Banach uniformes (*i.e.* dont la norme est équivalente à la norme spectrale associée [1, 2.2]).

Soient $\mathcal{K}$ un corps complet pour une valuation non-triviale, λ un élément non nul de l'anneau de valuation $\mathcal{K}^o$. Soient $\mathcal{B}$ une $\mathcal{K}$-algèbre de Banach uniforme, et f un élément de la boule unité $\mathcal{B}_{\leq 1}$. Alors $\mathcal{B}\{\frac{f}{\lambda}\}$ est définie comme le quotient de $\mathcal{B}\langle U\rangle$ par l'adhérence de l'idéal engendré par $\lambda U - f$; c'est une algèbre de Banach pour la norme quotient (non nécessairement uniforme). En fait, cet idéal est *fermé* [19, prop. 2.3], de sorte que

$$\mathcal{B}\{\frac{f}{\lambda}\} = \mathcal{B}\langle U\rangle/(\lambda U - f). \tag{1.1}$$

Si f est non-diviseur de zéro dans $\mathcal{B}$, $\lambda U - f$ l'est aussi dans $\mathcal{B}\langle U\rangle$.

1.2.1. Supposons que $|\mathcal{K}|$ soit dense dans $|\mathcal{B}|$ (ce qui est le cas si la valuation est non discrète). Pour tout élément $\varpi \in \mathcal{K}^{oo}$, la topologie de $\mathcal{B}_{\leq 1}$ est la topologie ϖ-adique [1, sor. 2.3.1].

Supposons que *la multiplication par f soit isométrique* dans $\mathcal{B}$ (ce qui est en particulier le cas si la norme de $\mathcal{B}$ est multiplicative et $|f| = 1$). Alors le quotient $\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U\rangle/(\lambda U - f)$ est sans ϖ-torsion : en effet, il suffit de voir que tout élément annulé par λ est nul ; or si $\sum b_m U^m$ relève un tel élément, l'équation $\lambda(\sum b_m U^m) = (\lambda U - f)\sum_0^\infty a_m U^m,\ \ a_m \in \mathcal{B}_{\leq 1}$, implique que λ divise tous les a_m puisque la multiplication par f est injective modulo λ. On a donc $(\lambda U - f)\mathcal{B}_{\leq 1} = ((\lambda U - f)\mathcal{B})_{\leq 1}$, et il en découle que

$$\mathcal{B}\{\frac{f}{\lambda}\}_{\leq 1} = \mathcal{B}_{\leq 1}\langle U\rangle/(\lambda U - f) \tag{1.2}$$

si la valuation de $\mathcal{K}$ et discrète, et

$$\mathcal{B}\{\frac{f}{\lambda}\}_{\leq 1} = (\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U\rangle/(\lambda U - f))^a_* \tag{1.3}$$

sinon, en utilisant la notation $(\ )^a_*$ de la presque-algèbre dans le cadre $(\mathcal{K}^o, \mathcal{K}^{oo})$, qui se traduit ici par $\mathfrak{B}^a_* := \bigcap_{\eta \in \mathcal{K}^{oo}} \eta^{-1}\mathfrak{B}$ [1, sor. 2.3.1].

La formule (1.1) montre par ailleurs que $\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U\rangle/(\lambda U - f)$ est ϖ-adiquement séparé, *i.e.* $(\lambda U - f)$ est fermé dans $\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U\rangle$. On en déduit l'égalité

$$\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U\rangle/(\lambda U - f) = \widehat{\mathcal{B}_{\leq 1}[\frac{f}{\lambda}]}, \tag{1.4}$$

avec le complété ϖ-adique de $\mathcal{B}_{\leq 1}[\frac{f}{\lambda}] \subset \mathcal{B}$. En effet, le même argument que ci-dessus montre que $\mathcal{B}_{\leq 1}[U]/(\lambda U - f)$ est sans ϖ-torsion, de sorte que la suite

$$0 \to (\lambda U - f)\mathcal{B}_{\leq 1}[U] \to \mathcal{B}_{\leq 1}[U] \to \mathcal{B}_{\leq 1}[\frac{f}{\lambda}] \to 0 \tag{1.5}$$

est exacte. Elle induit comme d'habitude par complétion une suite

$$0 \to (\lambda U - \widehat{f)\mathcal{B}_{\leq 1}}[U] \to \mathcal{B}_{\leq 1}\langle U\rangle \to \widehat{\mathcal{B}_{\leq 1}[\frac{f}{\lambda}]} \to 0 \tag{1.6}$$

exacte à droite et où l'image de $(\lambda U-f)\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U\rangle$ est dense dans le noyau de $\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U\rangle \to \widehat{\mathcal{B}_{\leq 1}[\frac{f}{\lambda}]}$; or on a $\widehat{(\lambda U-f)\mathcal{B}_{\leq 1}}[U]=(\lambda U-f)\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U\rangle$ et la suite (1.6) est exacte à gauche ; et puisque $(\lambda U-f)\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U\rangle$ est fermé dans $\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U\rangle$, on conclut que la suite (1.6) est exacte.

L'algèbre $\mathcal{B}_{\leq 1}\langle U\rangle/(\lambda U-f)=\widehat{\mathcal{B}_{\leq 1}[\frac{f}{\lambda}]}$ ne change pas, à isomorphisme près, si l'on change f en f' tel que $|f-f'|\leq|\lambda|$ (*resp.* λ en λ' tel que $|\lambda|=|\lambda'|$), l'isomorphisme étant induit par $U\mapsto \frac{\lambda}{\lambda'}(U+h)$ où $h=\lambda^{-1}(f'-f)\in\mathcal{B}_{\leq 1}$.

2. Extensions « kummériennes » de $W(k)[[T_1,\dots,T_n]]$.

2.1. Pour tout corps p-adique K, on note K^o l'anneau de valuation et K^{oo} l'idéal de valuation.

Soient k un corps parfait de caractéristique p, K_0 le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$. Considérons la tour cyclotomique $K_\infty=\cup K_j$ avec $K_j=K_0[\zeta_{p^j}]$. Le complété p-adique $\hat{K}_\infty$ est alors un corps perfectoïde : l'endomorphisme de Frobenius de $\hat{K}^o_\infty/p$ est surjectif (voir [1, §3.1, 3.2] pour les définitions et résultats de base concernant les corps et algèbres perfectoïdes).

2.2. Comme dans l'introduction, posons

$$A:=W(k)[[T_1,\dots,T_n]] \tag{2.1}$$

et fixons un élément non nul $g\in A$.

Posons $K_j^o[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^j}}]][g^{\frac{1}{p^k}}]:=K_j^o[[T_1^{\frac{1}{p^j}},\dots,T_n^{\frac{1}{p^j}}]][T]/(T^{p^k}-g)$ et

$$A_{jk}=K_j^o[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^j}}]][g^{\frac{1}{p^k}}][\frac{1}{p}]. \tag{2.2}$$

Lorsque (j,k) varie dans $\mathbf{N}^2$, on obtient un double système inductif de K_0-algèbres, dont les morphismes de transition sont les inclusions naturelles. On permet la valeur ∞ pour l'un des indices (ou les deux), en prenant la réunion indexée par les valeurs finies de cet indice.

2.3. On note A^o_{jk} la fermeture intégrale de A dans A_{jk}. Cette K^o_j-algèbre contient $K_j^o[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^j}}]][g^{\frac{1}{p^k}}]$ et vérifie $A_{jk}=A^o_{jk}[\frac{1}{p}]$. Elle est noethérienne et p-adiquement complète si $(j,k)\in\mathbf{N}^2$. Si $j=\infty$, elle est réunion croissante d'algèbres $A^o_{j'k'}$ qui sont noethériennes, intégralement fermées dans $A_{j'k'}$, et finies les unes sur les autres, donc elle est complètement intégralement fermée dans $A_{\infty k}$ (*i.e.* tout élément de $A_{\infty k}$ dont les puissances sont contenues dans un sous-$A^o_{\infty k}$-module de type fini appartient à $A^o_{\infty k}$). On note $\hat{A}^o_{\infty k}$ le complété p-adique de $A^o_{\infty k}$.

Pour $j'\leq j, k'\leq k$, on a $A^o_{j'k'}=A^o_{jk}\cap A_{j'k'}$, et $A^o_{00}=A$.

Pour $j\in\mathbf{N}$, on a $A^o_{j0}=K^o_j[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^j}}]]$. Le système $(A^o_{j0})_j$ est à flèches de transition finies et plates, de sorte que $A^o_{\infty 0}$ est fidèlement plate (en fait libre) sur chaque A^o_{j0}. D'après le lemme 1.1.1, $\hat{A}^o_{\infty 0}$ est fidèlement plate sur chaque A^o_{j0}, donc aussi sur $A^o_{\infty 0}$.

On a $\hat{A}^o_{\infty 0}\cong W(k[[T_{\leq n}^{\frac{1}{p^\infty}}]])\hat{\otimes}_{W(k)}\hat{K}^o_\infty$ [1, ex. 3.2.3 (2)] (nous n'en ferons pas usage).

2.4. Puisque $A^o_{\infty k}$ est complètement intégralement fermée dans $A_{\infty k}$, et que $|K_\infty|$ est dense dans $\mathbf{R}_+$, il existe une unique norme de K_∞-algèbre sur $A_{\infty k}$ dont $A^o_{\infty k}$ est la boule unité, et cette norme est spectrale (*i.e.* multiplicative pour les puissances) [1, sorite 2.3.1 (4)]. Si l'on munit les A_{jk} de la norme (spectrale) induite, la boule unité est A^o_{jk}, et lorsque (j,k) varie, les flèches de transition du système (A^o_{jk}) (les inclusions naturelles) sont isométriques [1, sorite 2.3.1 (2c)].

Les A_{j0} sont multiplicativement normées, mais ce n'est pas nécessairement le cas de A_{jk} si $k \neq 0$. L'idéal $A^{oo}_{\infty 0}$ de $A^o_{\infty 0}$ formé des éléments topologiquement nilpotents est un idéal premier idempotent égal à $K^{oo}_\infty A^o_{\infty 0}$ [1, 2.2.1, 2.2.2].

2.5. Nous renvoyons à [1, §1] pour un résumé des notions de presque-algèbre utilisées dans la suite (notamment §1.5 pour les changements de cadre).

2.5.1. **Théorème.** *Dans le cadre* $(K^o_\infty, K^{oo}_\infty)$, $\hat{A}^o_{\infty\infty}$ *est presque fidèlement plate sur* $A^o_{\infty 0}$.

Démonstration. Comme $\hat{K}_\infty$ est un corps perfectoïde, il existe $\varpi \in \hat{K}^o_\infty$ tel que $|p| \leq |\varpi| < 1$ et admettant des racines $\varpi^{\frac{1}{p^h}} \in \hat{K}^o_\infty$; on le fixe, ainsi qu'un élément $\varpi' \in K^o_\infty$ tel que $|\varpi| < |\varpi'| < 1$. Si $\mathcal{B}$ est une $\hat{K}_\infty$-algèbre de Banach, on note $\mathcal{B}^o$ l'anneau de ses éléments de puissance bornée ; on a donc $\mathcal{B}_{\leq 1} \subset \mathcal{B}^o$, avec égalité si $\mathcal{B}$ est spectrale.

Commençons par établir quelques formules, exprimant $\hat{A}^o_{\infty\infty}$ en termes d'une triple colimite complétée. D'après [1, cor. 2.9.2], on a un isomorphisme canonique

$$\hat{A}^o_{\infty\infty} \overset{\sim}{\to} \widehat{\mathrm{colim}}_i\, \hat{A}_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\{\frac{T-g}{\varpi^i}\}^o, \tag{2.3}$$

où $\hat{A}_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ le complété p-adique de $A_{\infty 0}[T^{\frac{1}{p^\infty}}]$ (c'est aussi le complété pour la norme multiplicative de Gauss), et $\widehat{\mathrm{colim}}$ le complété p-adique de la colimite [1, §2.6.3] ; on a

$$\hat{A}_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^o = \hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle = \hat{A}_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle_{\leq 1}. \tag{2.4}$$

et $T - g$ est de norme 1.

Nous allons tirer parti de ce que $\hat{A}_{\infty 0}$ est une $\hat{K}_\infty$-algèbre perfectoïde (c'est celle notée $\hat{A}_\infty$ dans [1, ex. 3.2.3 (2)]), donc $\hat{A}_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ aussi [1, ex. 3.2.3 (1)], et du fait qu'on dispose d'après Scholze d'une description en presque-algèbre des boules unité des localisations d'algèbres perfectoïdes. En effet, selon [20, cor. 6.7 i], il existe un élément $f_i \in \hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$, congru à $T - g$ modulo ϖ' et admettant des racines $f_i^{\frac{1}{p^k}}$ dans $\hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$, tel que

$$\hat{A}_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\{\frac{T-g}{\varpi^i}\}^o \cong \hat{A}_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\{\frac{f_i}{\varpi^i}\}^o \tag{2.5}$$

En outre, selon [20, lemma 6.4], le morphisme canonique $\widehat{\hat{A}_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle^o[(\frac{f_i}{\varpi^i})^{\frac{1}{p^\infty}}]} \to \hat{A}_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\{\frac{f_i}{\varpi^i}\}^o$ est un presque-isomorphisme :

$$\hat{A}_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\{\frac{f_i}{\varpi^i}\}^{oa} \cong (\widehat{\hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle[(\frac{f_i}{\varpi^i})^{\frac{1}{p^\infty}}]})^a \tag{2.6}$$

où $\hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle[(\frac{f_i}{\varpi^i})^{\frac{1}{p^\infty}}] := \mathrm{colim}_k\, \hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle[(\frac{f_i}{\varpi^i})^{\frac{1}{p^k}}] \subset \hat{A}_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$. Par ailleurs, le morphisme canonique

$$\widehat{\mathrm{colim}}_k\, \hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle[(\frac{f_i}{\varpi^i})^{\frac{1}{p^k}}] \to \widehat{\mathrm{colim}}_k\, (\widehat{\hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle[(\frac{f_i}{\varpi^i})^{\frac{1}{p^k}}]})$$

est un isomorphisme, comme on le vérifie immédiatement par réduction modulo ϖ^n pour tout n. En combinant ceci aux formules (2.5) (2.6) et (1.4), on obtient

$$\begin{aligned}\hat{A}_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\{\frac{T-g}{\varpi^i}\}^{oa} &\cong \widehat{\mathrm{colim}}_k\, (\widehat{\hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle[(\frac{f_i}{\varpi^i})^{\frac{1}{p^k}}]})^a \\ &\cong \widehat{\mathrm{colim}}_k\, (\hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, U\rangle/(\varpi^{\frac{i}{p^k}}U - f_i^{\frac{1}{p^k}}))^a.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Fixons (i, k). Comme $\hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, U\rangle/(\varpi^{\frac{i}{p^k}}U - f_i^{\frac{1}{p^k}})$ ne change pas si l'on remplace $f_i^{\frac{1}{p^k}}$ par tout élément de $\hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ qui lui est congru modulo $\varpi^{\frac{i}{p^k}}$, on peut le remplacer par un $f_{ik} \in A^o_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}\rangle$ pour j assez grand. On peut aussi remplacer $\varpi^{\frac{i}{p^k}}$ par un élément $\varpi_{ik} \in K_{j0}$ de même norme, de sorte que

$$\hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, U\rangle/(\varpi^{\frac{i}{p^k}}U - f_i^{\frac{1}{p^k}}) \cong \hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, U\rangle/(\varpi_{ik}U - f_{ik}). \tag{2.8}$$

Par ailleurs, comme $\hat{A}_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle$ est perfectoïde (spectrale), pour j assez grand, il existe $g_k \in A^o_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}\rangle$ tel que $g_k^{p^k} \equiv g$ modulo ϖ. On peut aussi supposer qu'une uniformisante ϖ_j de K^o_{j0} vérifie

$$|\varpi_j| \geq |\varpi'|^{\frac{1}{p^k}} > |\varpi_{ik}|. \tag{2.9}$$

Le morphisme canonique

$$\widehat{\operatorname{colim}}_j\, A^o_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}, U\rangle/(\varpi_{ik}U - f_{ik}) \to \hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, U\rangle/(\varpi_{ik}U - f_{ik}) \tag{2.10}$$

est un isomorphisme, comme on le voit aisément par réduction modulo ϖ^n_{ik} pour tout n. Enfin, rappelons qu'en vertu de (1.2) et de ce que $A^o_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}, U\rangle = A_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}, U\rangle_{\leq 1}$, on a

$$A^o_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}, U\rangle/(\varpi_{ik}U - f_{ik}) = A_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}\rangle\{\frac{f_{ik}}{\varpi_{ik}}\}_{\leq 1}. \tag{2.11}$$

Ceci établi, venons-en à la platitude.

Commençons par l'anneau noethérien $A^o_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}, U\rangle/(\varpi_{ik}U - f_{ik})$. D'après le critère de platitude par fibres sur A^o_{j0}, il s'agit de vérifier que

$a)$ $A_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}\rangle\{\frac{f_{ik}}{\varpi_{ik}}\}$ est plate sur A_{j0} ; or, le spectre analytique de A_{j0} est réunion croissante des polydisques affinoïdes de rayons $r \in |K^{oo}_\infty|$, et pour une telle algèbre de Tate B_r, $B_r\langle T^{\frac{1}{p^j}}\rangle\{\frac{f_{ik}}{\varpi_{ik}}\}$ est même plate sur $B_r\langle T^{\frac{1}{p^j}}\rangle$ [3, prop. 2.2.4] ; et

$b)$ $A^o_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}, U\rangle/(\varpi_{ik}U - f_{ik}, \varpi_j) = A^o_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}, U\rangle/(f_{ik}, \varpi_j)$ est plate sur A^o_{j0}/ϖ_j : or dans $A^o_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}\rangle$, on a les congruences $f_{ik}^{p^k} \equiv f_i \equiv T - g \equiv (T^{\frac{1}{p^k}} - g_k)^{p^k}$ modulo ϖ', d'où $f_{ik} \equiv T^{\frac{1}{p^k}} - g_k$ modulo ϖ_j ; ceci donne $A^o_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}, U\rangle/(f_{ik}, \varpi_j) \cong (A^o_{j0}/\varpi_j)[T^{\frac{1}{p^j}}, U]/(T^{\frac{1}{p^k}} - g_k)$, qui est libre sur A^o_{j0}/ϖ_j.

Ainsi $A_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}\rangle\{\frac{f_{ik}}{\varpi_{ik}}\}_{\leq 1}$ est plate sur A^o_{j0}. Comme A^o_{j0} est locale, le quotient par $\mathfrak{m}_{A^o_{j0}}$ de $A^o_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}, U\rangle/(\varpi_{ik}U - f_{ik})$ est $k[T^{\frac{1}{p^j}}, U]/\bar{f}_{ik}$ où $\bar{f}_{ik}$ est l'image de f_{ik} dans $k[T^{\frac{1}{p^j}}]$, et comme $\bar{f}_{ik}$ n'est pas inversible dans $k[T^{\frac{1}{p^j}}]$ puisque $\bar{f}_{ik}^{p^k} \equiv T - \bar{g}$, ce quotient est non nul. Donc $A_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}\rangle\{\frac{f_{ik}}{\varpi_{ik}}\}_{\leq 1}$ *est fidèlement plate sur* A^o_{j0}.

Dès lors, il en est de même de $\operatorname{colim}_j A_{j0}\langle T^{\frac{1}{p^j}}\rangle\{\frac{f_{ik}}{\varpi_{ik}}\}_{\leq 1}$ sur $\operatorname{colim}_j A^o_{j0} = A^o_{\infty 0}$, c'est-à-dire sur chaque A^o_{j0}. D'après le lemme 1.1.1, la colimite complétée est encore fidèlement plate sur $A^o_{\infty 0}$, donc $\hat{A}^o_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}, U\rangle/(\varpi^{\frac{i}{p^k}}U - f_i^{\frac{1}{p^k}})$ *est fidèlement plate sur* $A^o_{\infty 0}$ d'après (2.8) et (2.10).

De même, la colimite (en k) complétée est fidèlement plate sur $A^o_{\infty 0}$. Compte tenu de (2.7), on obtient que $\hat{A}_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\{\frac{T-g}{\varpi^i}\}^{oa}$ *est fidèlement plate sur* $A^{oa}_{\infty 0}$ dans le cadre $(K^o_\infty, K^{oo}_\infty)$, ou ce qui revient au même, dans le cadre $(A^o_{\infty 0}, A^{oo}_{\infty 0} = K^{oo}_\infty A^o_{\infty 0})$ [1, §1.5]. Dans ce dernier cadre, l'adjoint à gauche $(\,)_{!!}$ du foncteur de localisation $(\,)^a$ pour les $A^o_{\infty 0}$-algèbres respecte la platitude fidèle [7, 3.1.3], donc $\hat{A}_{\infty 0}\langle T^{\frac{1}{p^\infty}}\rangle\{\frac{T-g}{\varpi^i}\}^{oa}_{!!}$ est fidèlement plate sur $A^o_{\infty 0}$. Ces algèbres forment un système inductif (en i). Appliquant derechef le lemme 1.1.1, on obtient que la colimite complétée est fidèlement plate sur $A^o_{\infty 0}$. En vertu de (2.3), on conclut que $\hat{A}^{oa}_{\infty\infty}$ *est fidèlement plate sur* $A^{oa}_{\infty 0}$. $\square$

2.6. Bien que cela ne soit pas nécessaire pour la suite, expliquons comment en déduire de la pureté :

2.6.1. **Corollaire.** *Pour tout* (i,j,k), $A^o_{j0} \hookrightarrow A^o_{jk}$ *est pur.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $A^o_{\infty\infty}$ est pur sur $A^o_{\infty 0}$, puisque ce dernier est pur sur chaque A^o_{j0}.

Comme les A^o_{j0} sont finis plats les uns sur les autres, $A^o_{\infty 0}$ est cohérent [5, I, §2, ex. 12]. Soient alors M un $A^o_{\infty 0}$-module de présentation finie, et N un quelconque sous-module de type fini de $\ker(M \to M \otimes_{A^o_{\infty 0}} A^o_{\infty\infty})$. Comme $A^o_{\infty 0}$ est cohérent, N est de présentation finie. Comme $\hat{A}^o_{\infty\infty}$ est presque fidèlement plat sur $A^o_{\infty 0}$ (th. 2.5.1), donc presque pur, $A^o_{\infty\infty}$ est aussi presque pur sur $A^o_{\infty 0}$, donc N est presque nul : son annulateur $\mathfrak{I}$ contient K^{oo}_∞. Or $\mathfrak{I}$ est un idéal de présentation finie, donc provient d'un idéal $\mathfrak{I}_j$ de l'un des A^o_{j0} : $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_j \otimes_{A^o_{i,j,0}} A^o_{\infty 0}$. Comme $A^o_{\infty 0}$ est fidèlement plat sur l'anneau local A^o_{j0}, on conclut par le lemme 1.1.2 (avec $\mathfrak{k} = A^{oo}_{\infty 0}$ et $\mathfrak{J} = \mathfrak{I}_j$) que $\mathfrak{I}_j = A^o_{j0}$ et que $N = 0$. Donc $M \to M \otimes_{A^o_{\infty 0}} A^o_{\infty\infty}$ est injectif. □

2.6.1. *Remarque.* Si g est sans facteur carré (dans l'anneau factoriel $A[\frac{1}{p}]$) et non divisible par les T_h, les A_{jk} et A^o_{jk} sont des anneaux normaux.

Si $\pm g$ n'est pas produit d'un monôme en les T_h et d'une puissance p-ième dans A, on peut montrer, en utilisant le lemme de Capelli-Vahlen, que A_{jk} est intègre. Si $\pm g$ mod. p n'est pas produit d'un monôme en les T_h et d'une puissance p-ième dans A/p, on peut montrer que la norme de A_{jk} est multiplicative.

En général, même sous les hypothèses de (1) et (2), il est très difficile de déterminer les anneaux A^o_{jk}, et plus encore leurs propriétés relatives [3] ; voir [17] pour le cas $j,k \leq 1$ et [23] pour le cas $j \leq 1, k > 1$.

2.6.2. *Remarque.* Dans la suite, nous n'aurons besoin de ce théorème que modulo les puissance de p, ce qui permet de se dispenser des subtilités sur les complétions.

3. Application du lemme d'Abhyankar perfectoïde.

3.1. Soit B une extension finie de A, et prenons $g \in A \setminus pA$ de sorte que $B[\frac{1}{pg}]$ soit étale sur $A[\frac{1}{pg}]$. Pour prouver la pureté de $A \hookrightarrow B$, on peut supposer B intègre [12, lemma 3], et même que $B[\frac{1}{pg}]$ soit une extension galoisienne de $A[\frac{1}{pg}]$. Comme A est intégralement fermé dans $A[\frac{1}{p}]$, $A/p^m \to B/p^m$ est injectif pour tout $m \in \mathbf{N}$.

La $\hat{K}_\infty$-algèbre $\hat{A}_{\infty\infty}$ est perfectoïde [1, §3.6.2]. Notons $\hat{A}^o_{\infty\infty !!}$ la $A^o_{\infty 0}$-algèbre déduite de $\hat{A}^o_{\infty\infty}$ par application de la localisation dans le cadre $(A^o_{\infty 0}, K^{oo}_\infty A^o_{\infty 0})$ suivie de son adjoint à gauche, comme ci-dessus. Comme cette opération respecte la platitude fidèle, il découle du th. 2.5.1 que $\hat{A}^o_{\infty\infty !!}$ *est fidèlement plate sur* $A^o_{\infty 0}$ *donc aussi sur* A (et en particulier sans A-torsion). D'après la formule (2.2.26) de [7], c'est la sous-algèbre $A^o_{\infty 0} + K^{oo}_\infty \hat{A}^o_{\infty\infty}$ de $\hat{A}^o_{\infty\infty}$; en particulier, elle est stable par multiplication par tout élément de $(\varpi g)^{\frac{1}{p^\infty}}$.

3.2. Considérons la fermeture intégrale $\mathcal{B}^o$ de $g^{-\frac{1}{p^\infty}} \hat{A}^o_{\infty\infty}$ dans la $\hat{A}_{\infty\infty}[\frac{1}{g}]$-algèbre étale finie $B \otimes_A \hat{A}_{\infty\infty}[\frac{1}{g}]$ (galoisienne si l'on veut). Le morphisme canonique $B \otimes_A \hat{A}^o_{\infty\infty !!} \to B \otimes_A \hat{A}_{\infty\infty}[\frac{1}{g}]$ se factorise à travers un morphisme $B \otimes_A \hat{A}^o_{\infty\infty !!} \to \mathcal{B}^o$ (qui devient un isomorphisme après inversion de pg).

3. il n'est déjà pas facile de déterminer $Q(A_{jk})^o$ à cause de la ramification féroce éventuelle ; *cf.* [24] pour une approche algorithmique - c'est dans cet article oublié qu'est introduite la terminologie « féroce » (fierce).

Voyons $\hat{A}^o_{\infty\infty}$ et $\mathcal{B}^o$ comme des $K^o_\infty[T^{\frac{1}{p^\infty}}]$-algèbres via $T^{\frac{1}{p^h}} \mapsto g^{\frac{1}{p^h}}$. Un fragment du lemme d'Abhyankar perfectoïde [1, th. 0.3.1][4] s'énonce :

3.2.1. **Théorème.** *Dans le cadre* $(K^o_\infty[T^{\frac{1}{p^\infty}}], T^{\frac{1}{p^\infty}} K^{oo}_\infty[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$*, et pour tout* $m \in \mathbf{N}$*, le morphisme* $\hat{A}^o_{\infty\infty}/p^m \to \mathcal{B}^o/p^m$ *est presque fidèlement plat, donc presque pur.* □

3.2.2. **Corollaire.** *Dans le cadre* $(K^o_\infty + K^{oo}_\infty[T^{\frac{1}{p^\infty}}], T^{\frac{1}{p^\infty}} K^{oo}_\infty[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$*, et pour tout* $m \in \mathbf{N}$*, le morphisme* $\hat{A}^o_{\infty\infty!!}/p^m \to (B \otimes_A \hat{A}^o_{\infty\infty!!})/p^m$ *est presque pur.*

En effet, l'énoncé du théorème, qui porte sur les $\hat{A}^o_{\infty\infty}/p^m$-modules, équivaut à l'énoncé analogue dans le cadre $(K^o_\infty + K^{oo}_\infty[T^{\frac{1}{p^\infty}}], T^{\frac{1}{p^\infty}} K^{oo}_\infty[T^{\frac{1}{p^\infty}}])$ puisque la presque-nullité y a le même sens ; et dans ce cadre-ci, $\hat{A}^o_{\infty\infty!!}$ est presque isomorphe à $\hat{A}^o_{\infty\infty}$. Donc $\hat{A}^o_{\infty\infty!!}/p^m \to \mathcal{B}^o/p^m$ y est presque pur, de même que $\hat{A}^o_{\infty\infty!!}/p^m \to B \otimes_A \hat{A}^o_{\infty\infty!!}/p^m$ à travers lequel $\hat{A}^o_{\infty\infty!!}/p^m \to \mathcal{B}^o/p^m$ se factorise. □

3.3. Fixons provisoirement $m \geq 2$, notons avec une barre la réduction modulo p^m pour alléger, et démontrons que la classe e de l'extension $0 \to \bar{A} \to \bar{B} \to \bar{B}/\bar{A} \to 0$ est nulle en combinant les deux théorèmes précédents, suivant une idée de B. Bhatt [4].

Comme $\overline{\hat{A}^o_{\infty\infty!!}}$ est (fidèlement) plat sur $\bar{A}$ et $\bar{B}$ de présentation finie sur $\bar{A}$, on a

$$\mathrm{Ext}^1(\bar{B}/\bar{A}, \bar{A}) \otimes_{\bar{A}} \overline{\hat{A}^o_{\infty\infty!!}} = \mathrm{Ext}^1((\bar{B} \otimes_{\bar{A}} \overline{\hat{A}^o_{\infty\infty!!}})/\overline{\hat{A}^o_{\infty\infty!!}}, \overline{\hat{A}^o_{\infty\infty!!}}).$$

Le corollaire 3.2.2 joint au lemme 5.5.1 implique que $e \otimes 1$ est annulé par $g^{\frac{1}{p^\infty}} K^{oo}_\infty$. Appliquons alors le lemme 1.1.2 avec

$$R = \bar{A},\ \mathfrak{J} = \mathrm{Ann}_{\bar{A}}\, \bar{A}e,\ S = \overline{\hat{A}^o_{\infty\infty!!}},\ \mathfrak{K} = g^{\frac{1}{p^\infty}} K^{oo}_\infty \overline{\hat{A}^o_{\infty\infty!!}}.$$

Notons que $\mathfrak{J}S = \mathrm{Ann}_{\overline{\hat{A}^o_{\infty\infty!!}}} \overline{\hat{A}^o_{\infty\infty!!}}(e \otimes 1)$ puisque $\overline{\hat{A}^o_{\infty\infty!!}}$ est plat sur $\bar{A}$, de sorte que $\mathfrak{J}S$ contient $\mathfrak{K}$. Puisque $R \cap \mathfrak{K} \neq 0$ (il contient la classe de pg), on conclut que $\mathfrak{J} = R$, c'est-à-dire $e = 0$.

3.4. On a donc obtenu l'existence d'une rétraction de $A/p^m \to B/p^m$ pour tout m. Il en est donc de même pour $A/(p^m, T^{p^m}_{\leq n}) \to B/(p^m, T^{p^m}_{\leq n})$. Un argument de type Mittag-Leffler dû à Hochster [12, p. 30], basé sur le fait que ces rétractions forment un torseur sous un A/p^m-module artinien, permet de conclure que $A \to B$ admet une rétraction.

4. Algèbres de Cohen-Macaulay.

4.1. Soient B un anneau local noethérien de caractéristique résiduelle p, $\mathfrak{m}_B$ son idéal maximal, et $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ une suite sécante maximale ($d = \dim B$). Soit C une extension non nécessairement noethérienne de B.

4.1.1. **Definition.** (1) On dit que C est *de Cohen-Macaulay pour* $(B, \underline{x})$ si $C \neq \mathfrak{m}_B C$ et si $\underline{x}$ devient une suite régulière dans C.

(2) On dit que C est une *B-algèbre de Cohen-Macaulay*[5] si elle est de Cohen-Macaulay pour $(B, \underline{x})$ pour toute suite sécante maximale $\underline{x}$.

(3) Supposons que C contienne une suite compatible de racines p^m-ièmes d'un élément π non diviseur de zéro dans C. Suivant P. Roberts, on dit que C est *presque de Cohen-Macaulay pour* $(B, \underline{x}, \pi^{\frac{1}{p^\infty}})$ si dans le cadre $(C, \pi^{\frac{1}{p^\infty}} C)$, C n'est pas presque égale à $\mathfrak{m}_B C$ (*i.e.* $\mathfrak{m}_B C$ ne contient pas $\pi^{\frac{1}{p^\infty}}$) et si $\underline{x}$ devient presque une suite régulière dans C (*i.e.* pour tout $i = 0, \ldots, d-1$, $((x_1, \ldots, x_i)C : x_{i+1}C)/(x_1, \ldots, x_i)C$ est annulé par $\pi^{\frac{1}{p^\infty}}$).

4. le cas galoisien suffit.

5. "big Cohen-Macaulay algebra" ou "balanced big Cohen-Macaulay algebra" dans la littérature anglo-saxonne.

On « passe » de (1) à (2) en complétant C $\mathfrak{m}_B$-adiquement [2, th. 1.7], et de (3) à (1) grâce à la technique des modifications partielles de Hochster [14], qui peut se résumer comme suit. Une *modification partielle de degré n d'un B-module M relatif à $(B, \underline{x})$* est un homomorphisme $M \to M'$, où, étant donnée une relation $x_{i+1}m_{i+1} = \sum_1^i x_j m_j$ à coefficients dans M, $M' := M[T_1, \dots, T_i]_{\leq n}/(m_{i+1} - \sum_1^i x_j T_j) \cdot M[T_1, \dots, T_i]_{\leq n-1}$.

4.1.2. **Proposition.** *Soit B un anneau local noethérien de caractéristique résiduelle p. Si B admet une algèbre presque de Cohen-Macaulay C pour $(B, \underline{x}, \pi^{\frac{1}{p^\infty}})$ (pour une suite sécante maximale $\underline{x}$ de B et une suite de racines $\pi^{\frac{1}{p^m}}$ d'un non-diviseur de zéro dans C), alors B admet une algèbre de Cohen-Macaulay.*

Démonstration. [14] Il est loisible de remplacer C par $\pi^{-\frac{1}{p^\infty}}C$, qui est encore presque de Cohen-Macaulay pour $(B, \underline{x}, \pi^{\frac{1}{p^\infty}})$. Considérons une suite finie $\underline{M} = (M_1 := B \to M_2 \to \cdots \to M_\ell)$ de modifications partielles de degré n relatives à $(B, \underline{x})$. Le lemme crucial [14, 5.1] (où l'on prend $c = \pi^{\frac{1}{p^m}}$ pour m arbitraire) permet de construire pas à pas un diagramme commutatif de B-modules, partant de $M_1 = B \to C$:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
M_2 \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\vdots & C, \\
M_\ell. \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Comme $C \neq \mathfrak{m}_B C$, on a $M_\ell \neq \mathfrak{m}_B M_\ell$. Lorsque $(n, \ell, \underline{M})$ varie, la colimite (filtrante) des M_ℓ est alors une algèbre de Cohen-Macaulay pour $(B, \underline{x})$. Passant au complété $\mathfrak{m}_B$-adique, on obtient une algèbre de Cohen-Macaulay pour B. □

Voici un moyen commode pour construire des algèbres presque de Cohen-Macaulay. Soient $B, \underline{x}, C$ comme au début du §4.1, et supposons que C contienne une suite compatible de racines p^m-ièmes d'un élément π non diviseur de zéro.

4.1.3. **Lemme.** *Supposons que les x_i soient contenus dans un sous-anneau $A \subset B$, local de Cohen-Macaulay, tel que B soit un A-module fini. Alors C est presque de Cohen-Macaulay pour $(B, \underline{x}, \pi^{\frac{1}{p^\infty}})$ si et seulement si elle l'est pour $(A, \underline{x}, \pi^{\frac{1}{p^\infty}})$. C'est le cas si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

a) $(\pi) \cap A \neq 0$ et C est presque isomorphe, dans le cadre $(A[\pi^{\frac{1}{p^\infty}}], \pi^{\frac{1}{p^\infty}}A[\pi^{\frac{1}{p^\infty}}])$, à une A-algèbre fidèlement plate (ne contenant pas nécessairement B).

b) $(\pi) \cap A \not\subset x_1 A,$ C est sans x_1-torsion, et C/x_1C est presque isomorphe, dans le cadre $(A[\pi^{\frac{1}{p^\infty}}], \pi^{\frac{1}{p^\infty}}A[\pi^{\frac{1}{p^\infty}}])$, à une A/x_1A-algèbre fidèlement plate.

Démonstration. Comme $\mathfrak{m}_A B$ est $\mathfrak{m}_B$-primaire, C n'est pas presque égale à $\mathfrak{m}_B C$ si et seulement si elle n'est pas presque égale à $\mathfrak{m}_A C$, d'où la première assertion. C'est le cas si C (*resp.* C/x_1C) est presque isomorphe à une A-algèbre (*resp.* A/x_1A-algèbre) fidèlement plate C' car sous les hypothèses en vigueur, l'image de $\pi^{\frac{1}{p^\infty}}$ dans C' ne peut être contenu dans $\mathfrak{m}_A C'$ en vertu du lemme 1.1.2.

Par ailleurs, $((x_1, \dots, x_i)A : x_{i+1}A)/(x_1, \dots, x_i)A = 0$ puisque A est de Cohen-Macaulay, donc $((x_1, \dots, x_i)C' : x_{i+1}C')/(x_1, \dots, x_i)C' = 0$ et $((x_1, \dots, x_i)C : x_{i+1}C)/(x_1, \dots, x_i)C = 0$ est annulé par $\pi^{\frac{1}{p^\infty}}$. On conclut de même dans le cas (b), remplaçant A par son quotient de Cohen-Macaulay A/x_1A et $(x_1, \dots, x_i)$ par $(x_2, \dots, x_i)$. □

4.2. Venons-en au th. 0.7.1. Supposons désormais en outre que B soit complet intègre de car. $(0,p)$. Soient $n+1$ sa dimension, k son corps résiduel et $\Lambda \subset W(k^{\frac{1}{p^\infty}})$ son anneau de coefficients. Le choix d'une suite sécante maximale $\underline{x}$ de B avec $x_1 = p^2$ permet d'écrire B comme extension finie de $A := \Lambda[[T_1,\dots,T_n]]$, où T_i s'envoie sur x_{i+1}. Il est loisible de remplacer k par $k^{\frac{1}{p^\infty}}$ et Λ par $W(k^{\frac{1}{p^\infty}})$, ce qui nous place dans la situation du §3.1.

Soit $g \in A \setminus pA$ tel que $B[\frac{1}{pg}]$ soit étale sur $A[\frac{1}{pg}]$. Avec les notations de 3.2, prenons

$$C := \mathcal{B}^o,\ \pi^{\frac{1}{p^m}} := (\varpi g)^{\frac{1}{p^m}}. \tag{4.1}$$

Alors $(\pi) \cap A = pgA \not\subset p^2A$, la $\hat{A}^o_{\infty\infty!!}$-algèbre C est sans p-torsion, et C/p^2C est presque isomorphe, dans le cadre $(\hat{A}^o_{\infty\infty!!}, (\varpi g)^{\frac{1}{p^\infty}}\hat{A}^o_{\infty\infty!!})$, à $(C/p^2C)^a_{!!}$ qui est fidèlement plate sur A/p^2A par les th. 2.5.1 et 3.2.1. On conclut du lemme 4.1.3 que C est presque de Cohen-Macaulay pour $(B,\underline{x},\pi^{\frac{1}{p^\infty}})$. Par la prop. 4.1.2, il existe donc une B-algèbre de Cohen-Macaulay. □

4.2.1. *Remarque.* Le th. 0.7.1 implique directement la conjecture monomiale (point (3) du §0.1), qui est équivalente à la conjecture du facteur direct. Cela en fournit une seconde preuve, où le lemme d'Abhyankar perfectoïde n'intervient que modulo p^2.

La conjecture qui contrôle tout l'écheveau des conjectures homologiques prédit la fonctorialité faible des algèbres de Cohen-Macaulay. Les techniques précédentes devraient permettre de traiter le cas d'un homomorphisme local *injectif* d'anneaux locaux noethériens complets intègres d'inégale caractéristique $(0,p)$, mais le cas général semble requérir une nouvelle idée.

5. Appendice : pureté.

Comme la conjecture du facteur direct est un énoncé de pureté (au sens d'injectivité universelle), nous rassemblons ici quelques résultats concernant cette notion.

5.1. **Sous-modules purs et modules générateurs.** Soient R un anneau commutatif unitaire, N un R-module. On dit qu'un sous-module $M \subset N$ est *pur* si pour tout R-module P, $P \to P \otimes_R S$ est injectif. Comme tout module est colimite filtrante de modules de présentation finie, on peut se borner aux modules P de présentation finie.

5.1.1. **Lemme.** [18, I.2]

(1) $M \subset N$ *est pur si et seulement si pour tout module de présentation finie* P, $Hom_R(P,N) \to Hom_R(P,N/M)$ *est surjectif.*

(2) En particulier, si N/M *est de présentation finie,* $M \subset N$ *est pur si et seulement si* M *est facteur direct de* N.

(3) Si N *est plat, alors* M *est un sous-module pur si et seulement si* N/M *est plat.* □

Un R-module M est *générateur* si tout R-module N est engendré par les images des applications R-linéaires de M dans N.

5.1.2. **Lemme.** [6, §5, n. 2, Th. 1] *M est générateur si et seulement si R est facteur direct d'une puissance M^n (en particulier M est fidèle).* □

5.2. **Extensions pures d'anneaux.** On dit qu'un monomorphisme d'anneaux $R \hookrightarrow S$ est *pur* (ou encore que la R-algèbre fidèle S est *pure*) si R est un sous-R-module pur de S : autrement dit, pour tout R-module (de présentation finie) P, $P \to P \otimes_R S$ est injectif. En passant par l'algèbre symétrique sur P, on voit $R \hookrightarrow S$ est pur si et seulement si il est *universellement injectif*, *i.e.* $R' \to S \otimes_R R'$ est injectif pour toute R-algèbre R' (et on peut se limiter aux R' de présentation finie puisque toute R-algèbre est colimite filtrante de telles algèbres).

5.2.1. **Proposition.** *(1) Les monomorphismes purs sont stables par composition, produit, changement de base, et colimite filtrante. En outre, si un composé $R \to S \to T$ est pur, il en est de même de $R \to S$.*

(2) Si $R \hookrightarrow S$ est fidèlement plat, il est pur.

(3) Supposons que S soit de présentation finie en tant que R-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $R \hookrightarrow S$ est pur,

(b) $R \hookrightarrow S$ admet une rétraction R-linéaire, i.e. le sous-R-module $R \subset S$ est facteur direct.

(c) S est un R-module générateur,

Le point (1) est formel, *cf.* [21, prop 1.2]. Le point (2) découle du point (3) du lemme 5.1.1, compte tenu de ce que $R \hookrightarrow S$ est fidèlement plat si et seulement si S/R est plat. Les implications $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ de (3) découlent en effet directement des lemmes précédents, et $(b) \Rightarrow (a)$ est banale. Pour $(c) \Rightarrow (b)$, noter que pour tout couple $(s, \check{s}) \in S \times Hom_S(S, R)$ tel que $\check{s}(s) = 1_R$, la composition de la multiplication par s dans S et de $\check{s}$ est une rétraction de $R \hookrightarrow S$. □

5.3. *Remarque.* Notons $f : \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ le morphisme associé à $R \to S$ et $f^* : Mod_R \to Mod_S$ le foncteur de changement de base. Alors f est plat si et seulement si f^* est exact, tandis que f est pur si et seulement si f^* est fidèle (ce qui équivaut ici à conservatif, *i.e.* reflétant les isomorphismes), *cf.* [21].

5.4. **Un critère de pureté de Hochster.** Voici une variante de [13, 6.3 et 6.1 (2⇒ 5)].

5.4.1. **Proposition.** *Soient R un anneau local (non nécessairement noethérien) d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et r un élément de $\mathfrak{m}$ tel que R soit r-adiquement séparé.*

Soit σ un endomorphisme local de R tel que R soit libre sur $\sigma(R)$ et que $\bigcap_m (\sigma^m(\mathfrak{m}).R)$ soit contenu dans rR. Soit enfin S une extension de R telle que σ se prolonge en un endomorphisme injectif de S.

Considérons les conditions

(a) $R \hookrightarrow S$ est pur,

(b) $R \hookrightarrow S$ admet une rétraction R-linéaire,

(c) Le dual $S^\vee := Hom_R(S, R)$ est non nul.

On a les implications

$$(c) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (a).$$

En outre $(a) \Rightarrow (b)$ si R est (noethérien) régulier et S entier sur R.

Démonstration. L'implication $(b) \Rightarrow (a) + (c)$ est triviale.

Prouvons $(c) \Rightarrow (b)$. Soit $\lambda \in S^\vee \setminus \{0\}$. Comme R est r-adiquement séparé, on peut, en divisant λ par une puissance convenable de r, supposer qu'il existe $s \in S$ tel que $\lambda(s) \notin rR$; quitte à précomposer λ avec la multiplication par s, on peut même supposer $\lambda(1) \notin rR$. Il existe alors m tel que $\lambda(1) \notin \sigma^m(\mathfrak{m})R$. Comme R est libre sur $\sigma^m R$ (qui est un anneau local d'idéal maximal $\sigma^m(\mathfrak{m})$), il existe un facteur direct (libre) de type fini M

tel que $\lambda(1) \in M \setminus \sigma^m(\mathfrak{m})M$, et on peut donc trouver d'après Nakayama une forme $\sigma^m R$-linéaire μ sur N qui envoie $\lambda(1)$ sur 1, qu'on prolonge à R par 0 sur un supplémentaire de M. La restriction à $\sigma^m S$ de $\mu\lambda$ est alors une rétraction $\sigma^m R$-linéaire de $\sigma^m S$ sur $\sigma^m R$. Par transport de structure via σ^m, on obtient une rétraction R-linéaire de S sur R.

Prouvons ensuite $(a) \Rightarrow (c)$ si R est régulier et S entier sur R. S est alors colimite filtrante de sous-R-algèbres finies S_α qui sont pures. Si d est la dimension de Krull de R, le groupe de cohomologie locale $H^d_{\mathfrak{m}}(R)$ est non nul, et s'injecte dans $H^d_{\mathfrak{m}}(S_\alpha)$ puisque $R \hookrightarrow S_\alpha$ est scindé. Par passage à la colimite, $H^d_{\mathfrak{m}}(S)$ est non nul. Soit alors E l'enveloppe injective du corps résiduel de R. Par dualité locale, $H^d_{\mathfrak{m}}(S)$ s'identifie à $Hom_R(S^\vee, E)$, donc $S^\vee$ est non nul. □

L'implication $(c) \Rightarrow (b)$ fournit une preuve très courte de la conjecture du facteur direct en caractéristique $p > 0$ [13, 6.2], en prenant $r = 0$ et σ égal à l'endomorphisme de Frobenius, qui est plat si R est régulier et fini si R est local complet de corps résiduel parfait.

5.5. **Presque-pureté.** Soit $(\mathfrak{V}, \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2)$ un cadre tel que $\tilde{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m} \otimes_{\mathfrak{V}} \mathfrak{m}$ soit plat sur $\mathfrak{V}$. Soient R une $\mathfrak{V}$-algèbre, et N un R-module. L'adjoint à gauche $(\,)_! = \tilde{\mathfrak{m}} \otimes (\,)_*$ de la localisation $(\,)^a$ est exact et commute à $\otimes$ [7, 2.2.24, 2.4.35].

On dit qu'un homomorphisme presque injectif $M \to N$ de R-modules est *presque pur* si pour tout R-module P, $P \to P \otimes_R S$ est presque injectif (ici encore, il suffit de tester sur les modules P de présentation finie). Cela équivaut à dire que $M^a_! \subset N^a_!$ est pur. Si M' est un module intermédiaire (avec $M' \to M$ presque injectif), $M \to M'$ est encore presque pur.

5.5.1. **Lemme.** *Si $M \subset N$ est presque pur, alors pour tout R-module de présentation finie P, $Hom_R(P, N) \to Hom_R(P, N/M)$ est presque surjectif. En particulier, si N/M est de présentation finie sur l'anneau R (au sens usuel), M est alors presque facteur direct de N, et donc la classe de N dans le R-module $Ext^1(N/M, M)$ est presque nulle.*

Démonstration. D'après le lemme 5.1.1, $M \subset N$ est presque pur si et seulement si pour tout R-module de présentation finie P, $Hom_R(P, N^a_!) \to Hom_R(P, N^a_!/M^a_!)$ est surjectif, donc $Hom_R(P, N) \to Hom_R(P, N/M)$ est presque surjectif. Si N/M est de présentation finie, on peut prendre $P = N/M$, d'où l'existence, pour tout $\eta \in \mathfrak{m}$, d'un élément $f \in Hom_R(N/M, N)$ dont la projection dans $End_R(N/M)$ est $\eta \cdot id$. □

Un homomorphisme de $\mathfrak{V}$-algèbres $R \to S$ est *presque pur* s'il l'est en tant qu'homomorphisme de R-modules. Si un composé $R \to S \to T$ est presque pur, il en est de même de $R \to S$.

RÉFÉRENCES

[1] Y. André, *Le « lemme d'Abhyankar » perfectoïde*, prépublication (2016).

[2] J. Bartijn, J. Strooker, *Modifications mnimales*, Sém. d'algèbre de Paris, Lecture Notes in Math. 1029 (1983), 192-217.

[3] V. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, vol. 33, Math. Surveys and Monographs, A. M. S., Providence, RI, 1990.

[4] B. Bhatt, *Almost direct summands*, Nagoya math. J. 214 (2014), 195-204.

[5] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, chapitres 1 à 7, Masson, Paris (1985).

[6] −, *Algèbre*, chapitre 8, nouvelle éd. Springer (2012).

[7] O. Gabber, L. Ramero, *Almost ring theory*, Lecture Notes in Math. 1800, Springer (2003).

[8] D. Dobbs, *On purity and related universal properties of extensions of commutative rings*, Tamkang J. of Math. 41, n^o 3 (2010), 253-259.

[9] S. Dutta, *On the canonical element conjecture*, Trans. Amer. Math. Soc. 299 (1987), 803-811.

[10] E. Evans, P. Griffith, *The syzygy problem*, Annals of Maths. 114 (1981), 323-333.

[11] R. Heitman, *The direct summand conjecture in dimension three*, Ann. of Maths 156 (2002), 695-712.

[12] M. Hochster, *Contracted ideals from integral extensions of regular rings*, Nagoya Math. J., 51 (1973), 25-43.

[13] $-$, *Canonical elements in local cohomology modules and the direct summand conjecture*, J. of Algebra 84 (1983), 503-553.

[14] $-$, *Big Cohen-Macaulay algebras in dimension three via Heitmann's theorem*, J. Algebra 254 (2002), 395-408.

[15] $-$, *Homological conjectures, old and new*, Illinois J. Math. 51, n^o 1 (2007), 151-169.

[16] $-$, C. Huneke, *Applications of the existence of big Cohen-Macaulay algebras*, Adv. in maths 113 (1995), 45-117.

[17] J. Koh, *Degree p extensions of an unramified regular local ring of mixed characteristic p*, J. Algebra 99, (1986), 310-323.

[18] D. Lazard, *Autour de la platitude*, Bull. Soc. Math. France 97 (1969), 81-128.

[19] T. Mihara, *On Tate acyclicity and uniformity of Berkovich spectra and adic spectra*, prépublication ArXiv :1403.7856v1 (2014).

[20] P. Scholze, *Perfectoid spaces*, Publ. Math. I.H.E.S. 116, n^o 1 (2012), 245-313.

[21] J.-P. Olivier, *Descente par morphismes purs*, C. R. Acad. Sc. Paris 271 (1970), 821-823.

[22] C. Peskine, L. Szpiro, *Dimension projective finie et cohomologie locale*, Publ. Math. I.H.E.S. 42 (1973), 323-395.

[23] N. Ranganathan, *Splitting in module-finite extension rings and the vanishing conjecture for maps of Tor*, PHD thesis Univ. Michigan (2000).

[24] S. Williamson, *Ramification theory for extensions of degree p*, Nagoya Math. J. 41 (1971), 149-168.

[25] A. Yekutieli, *Flatnss and completion revisited*, prépublication ArXiv 1606.01832 (2016).

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, 4 PLACE JUSSIEU, 75005 PARIS, FRANCE.
E-mail address: yves.andre@imj-prg.fr