HAL
open science

Caract eres automorphes d'un groupe réductif

J.-L Waldspurger

To cite this version:

J.-L Waldspurger. Caract eres automorphes d'un groupe réductif. 2016. hal-01356306

HAL Id: hal-01356306

https://hal.science/hal-01356306v1

Preprint submitted on 25 Aug 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Caractères automorphes d'un groupe réductif

J.-L. Waldspurger

25 août 2016

Abstract *Let G be a reductive group defined over a number field. Denote $Z(\hat{G})$ the center of the dual group. Langlands has defined some homomorphism from some cohomology group of $Z(\hat{G})$ into the group of automorphic characters of G. We prove that it is bijective.*

Soit F un corps de caractéristique 0 qui est soit un corps local, soit un corps de nombres. On fixe une clôture algébrique $\bar{F}$ de F. On note Γ_F le groupe de Galois $Gal(\bar{F}/F)$ et W_F le groupe de Weil de F. Si F est un corps de nombres, on note $\mathbb{A}_F$ son anneau des adèles et $Val(F)$ l'ensemble de ses valuations. Soit G un groupe réductif connexe défini sur F. On introduit le groupe dual complexe $\hat{G}$ et son centre $Z(\hat{G})$. Ces groupes sont munis d'une action algébrique de Γ_F.

Si F est local, on définit après Langlands un homomorphisme

$$\alpha_F : H^1(W_F; Z(\hat{G})) \to Hom_{cont}(G(F), \mathbb{C}^\times),$$

l'indice "cont" indiquant qu'il s'agit d'homomorphismes continus.

Si F est un corps de nombres, on note $Hom_{cont}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times)$ le groupe des homomorphismes continus de $G(\mathbb{A}_F)$ dans $\mathbb{C}^\times$ qui sont égaux à 1 sur $G(F)$. D'autre part, on a un homomorphisme de localisation

$$H^1(W_F; Z(\hat{G})) \to \prod_{v \in Val(F)} H^1(W_{F_v}; Z(\hat{G}))$$

dont on note $ker^1(W_F; Z(\hat{G}))$ le noyau. On définit alors un homomorphisme

$$\alpha_F : H^1(W_F; Z(\hat{G}))/ker^1(W_F; Z(\hat{G})) \to Hom_{cont}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times).$$

Si $F = \mathbb{R}$, l'homomorphisme α_F n'est en général ni surjectif, ni injectif. Si F est p-adique, α_F est toujours injectif. J'ai à plusieurs reprises commis l'erreur d'affirmer que α_F était toujours surjectif. J.-P. Labesse m'a signalé cette erreur et indiqué la référence [3] qui décrit précisément ce qu'il en est (disons toutefois que α_F est surjectif pour beaucoup de groupes usuels). Je l'en remercie vivement. Cependant, la référence [3] traite aussi le cas des corps de nombres et, dans ce cas, son résultat n'est pas optimal. En effet, on a le lemme suivant.

Lemme. *Si F est un corps de nombres, α_F est bijectif.*

Peut-être qu'une preuve de ce résultat se trouve déjà dans la littérature. Faute de l'avoir trouvée, je vais en donner une.

Remarque. Les auteurs de [3] ne supposent pas que F est de caractéristique nulle. Par prudence, je me limiterai à ce cas.

Preuve. Soient T et T' deux tores définis sur F et $f : T \to T'$ un homomorphisme défini sur F. On définit divers groupes de cohomologie associés au 2-complexe $T \xrightarrow{f} T'$. Fâcheusement, la numérotation de ces groupes diffère selon les auteurs. Nous notons $H^{i+1,i}$ le groupe dont les éléments sont des classes d'équivalence de paires de cochaînes, la première étant de degré $i+1$ et la seconde de degré i. Ainsi, on a des groupes $H^{1,0}(F; T \xrightarrow{f} T')$, $H^{1,0}(\mathbb{A}_F; T \xrightarrow{f} T')$, $H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; T \xrightarrow{f} T')$, cf. [2] 1.4 ou [1] appendice C1. Ils s'inscrivent dans une suite exacte

$$H^{1,0}(F; T \xrightarrow{f} T') \to H^{1,0}(\mathbb{A}_F; T \xrightarrow{f} T') \to H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; T \xrightarrow{f} T').$$

Le groupe $H^{1,0}(\mathbb{A}_F; T \xrightarrow{f} T')$ est un produit restreint des groupes $H^{1,0}(F_v; T \xrightarrow{f} T')$ sur les places $v \in Val(F)$. Tous ces groupes sont munis de topologies qui en font des groupes localement compacts. Les flèches de la suite ci-dessus sont continues. Dualement, on a un complexe $\hat{T}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{T}$ et on définit le groupe de cohomologie $H^{1,0}(W_F; \hat{T}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{T})$ et, pour toute place $v \in Val(F)$, le groupe $H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{T}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{T})$. On a un homomorphisme

$$H^{1,0}(W_F; \hat{T}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{T}) \to \prod_{v \in Val(F)} H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{T}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{T}).$$

On dispose d'un accouplement

$$H^{1,0}(W_F; \hat{T}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{T}) \times H^{1,0}(\mathbb{A}_F/F; T \xrightarrow{f} T') \to \mathbb{C}^\times$$

et, pour tout $v \in Val(F)$, d'un accouplement

$$H^{1,0}(W_{F_v}; \hat{T}' \xrightarrow{\hat{f}} \hat{T}) \to H^{1,0}(F_v; T \xrightarrow{f} T').$$

Ils sont compatibles avec les homomorphismes définis ci-dessus.

Notons G_{SC} le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de G et notons $\pi : G_{SC} \to G$ l'homomorphisme naturel. Choisissons un sous-tore maximal T de G défini sur F, notons T_{sc} son image réciproque par π. Labesse définit les groupes $H^0_{ab}(F; G)$, $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)$ et $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F; G)$ comme étant $H^0_{ab}(F; T_{sc} \xrightarrow{\pi} T)$, etc... Ils ne dépendent pas du choix de T car on voit que l'on peut remplacer dans leurs définitions le complexe de tores $T_{sc} \xrightarrow{\pi} T$ par le complexe de groupes diagonalisables $Z(G_{SC}) \xrightarrow{\pi} Z(G)$ (où $Z(G)$ est le centre de G et $Z(G_{SC})$ celui de G_{SC}). On dispose d'homomorphismes $ab_F : G(F) \to H^0_{ab}(F; G)$ et $ab_{F_v} : G(F_v) \to H^0(F_v; G)$ pour tout $v \in Val(F)$, ces derniers se regroupant en un homomorphisme $ab_{\mathbb{A}_F} : G(\mathbb{A}_F) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)$. Rappelons leur définition, par exemple dans le cas de ab_F. Pour $g \in G(F)$, on choisit $g_{sc} \in G_{SC}(\bar{F})$ et $z \in Z(G)(\bar{F})$ tels que $g = \pi(g_{sc})z$. On définit un cocycle $\mu : \Gamma_F \to G_{SC}$ par $\mu(\sigma) = g_{sc}\sigma(g_{sc})^{-1}$ pour $\sigma \in \Gamma_F$. On voit qu'il prend ses valeurs dans $Z(G_{SC})(\bar{F})$ et que le couple de cochaînes (μ, z) est un cocycle dont la classe dans $H^0_{ab}(F; G)$ est, par définition, $ab_F(g)$. On voit que le noyau de ab_F est égal à $\pi(G_{SC}(F))$ et que, pour toute place v, le noyau de ab_{F_v} est $\pi(G_{SC}(F_v))$. On voit aussi que l'homomorphisme $ab_{\mathbb{A}_F}$ est continu et ouvert.

Au tore T est associé un sous-tore maximal $\hat{T}$ de $\hat{G}$. Le groupe dual de G_{SC} est le groupe adjoint $\hat{G}_{AD} = \hat{G}/Z(\hat{G})$. Notons $\hat{\pi} : \hat{G} \to \hat{G}_{AD}$ l'homomorphisme naturel et $\hat{T}_{ad}$

l'image de $\hat{T}$ par π_{ad}. Le complexe dual de $T_{sc} \xrightarrow{\pi} T$ est alors $\hat{T} \xrightarrow{\hat{\pi}} \hat{T}_{ad}$. On voit que les groupes de cohomologie associés ce complexe sont égaux à ceux associés au complexe $Z(\hat{G}) \to \{1\}$, autrement dit ce sont les groupes $H^1(W_F; Z(\hat{G}))$, etc...

Nous avons ainsi introduit les objets et les homomorphismes du diagramme suivant :

$$(1) \qquad \begin{array}{ccccc}
G_{SC}(F) & & G_{SC}(\mathbb{A}_F) & & \\
\downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \\
G(F) & \to & G(\mathbb{A}_F) & & \\
\downarrow ab_F & & \downarrow ab_{\mathbb{A}_F} & & \\
H^0_{ab}(F;G) & \xrightarrow{j} & H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G) & \xrightarrow{k} & H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F;G) \\
 & & \prod_{v\in Val_F} H^1(W_{F_v};Z(\hat{G})) & \leftarrow & H^1(W_F;Z(\hat{G}))
\end{array}$$

Dans notre cas, les accouplements évoqués plus haut sont des dualités parfaites ([1] lemmes A.3.B et C.2.C), c'est-à-dire qu'il s'en déduit un isomorphisme

$$\alpha'_F : H^1(W_F; Z(\hat{G})) \to Hom_{cont}(H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F;G), \mathbb{C}^\times)$$

et, pour tout $v \in Val(F)$, un isomorphisme

$$\alpha'_{F_v} : H^1(W_{F_v}; Z(\hat{G})) \to Hom_{cont}(H^0_{ab}(F_v;G), \mathbb{C}^\times).$$

Ces isomorphismes sont compatibles avec les homomorphismes du diagramme (1). Parce que les α'_{F_v} sont des isomorphismes, l'image par α'_F de $ker^1(W_F; Z(\hat{G}))$ est le sous-groupe des éléments de $Hom_{cont}(H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F;G), \mathbb{C}^\times)$ qui sont triviaux sur l'image de l'homomorphisme k du diagramme (1). Or, d'après [1] lemme C.3.A, k se quotiente en un homéomorphisme de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G)/j(H^0_{ab}(F;G))$ sur un sous-groupe ouvert de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F;G)$. Donc le groupe $Hom_{cont}(H^0_{ab}(\mathbb{A}_F/F;G), \mathbb{C}^\times)$, quotienté par le sous-groupe des éléments qui sont triviaux sur l'image de k, s'identifie à $Hom_{cont}(H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G)/j(H^0_{ab}(F;G)), \mathbb{C}^\times)$. De α'_F se déduit donc un isomorphisme

$$\alpha''_F : H^1(W_F; Z(\hat{G}))/ker^1(W_F; Z(\hat{G})) \to Hom_{cont}(H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G)/j(H^0_{ab}(F;G)), \mathbb{C}^\times).$$

D'autre part, de l'homomorphisme $ab_{\mathbb{A}_F}$ se déduit un homomorphisme

$$ab'_{\mathbb{A}_F} : G(\mathbb{A}_F) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G)/j(H^0_{ab}(F;G)),$$

dont le noyau contient $G(F)$. On a donc dualement un homomorphisme

$$\beta : Hom_{cont}(H^0_{ab}(\mathbb{A}_F;G)/j(H^0_{ab}(F;G)), \mathbb{C}^\times) \to Hom_{cont}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times).$$

par définition, l'application α_F de l'énoncé est égale à $\beta \circ \alpha''_F$. Puisque α''_F est bijectif, on doit prouver que β l'est aussi.

Montrons d'abord que

(2) si G est simplement connexe, $Hom_{cont}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times) = \{1\}$.

Notons S l'ensemble des places $v \in Val(F)$ telles que G ne soit pas quasi-déployé sur F_v. C'est un ensemble fini. D'après [3], α_{F_v} est un isomorphisme pour $v \in Val(F) - S$. Or $Z(\hat{G}) = \{1\}$ puisque $\hat{G}$ est adjoint. Donc $Hom_{cont}(G(F_v), \mathbb{C}^\times) = \{1\}$ pour $v \in Val(F) - S$. Un élément ω de $Hom_{cont}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times)$ est donc trivial sur $G(F_v)$ pour ces places v, donc ω est trivial sur $G(F)G(\mathbb{A}_F^S)$, où $\mathbb{A}_F^S$ est le produit restreint des F_v pour $v \in Val(F) - S$. Or, parce que G est simplement connexe, cet ensemble est

dense dans $G(\mathbb{A}_F)$ (théorème de Kneser-Harder, cf. [4] théorème 3.1). Donc ω est trivial, ce qui prouve (2).

Revenons à G quelconque. Soit $\omega \in Hom_{cont}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times)$. Alors $\omega \circ \pi$ est un élément de $Hom_{cont}(G_{SC}(F)\backslash G_{SC}(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times)$, lequel est trivial d'après (2). Donc ω est trivial sur $\pi(G_{SC}(\mathbb{A}_F))$. On obtient que l'application naturelle

$$G(\mathbb{A}_F) \to G(F)\pi(G_{SC}(\mathbb{A}_F))\backslash G(\mathbb{A}_F)$$

se dualise en une bijection

$$(3) \qquad Hom_{cont}(G(F)\pi(G_{SC}(\mathbb{A}_F))\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times) \to Hom_{cont}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F), \mathbb{C}^\times).$$

L'homomorphisme $ab'_{\mathbb{A}_F}$ introduit plus haut se quotiente en un homomorphisme

$$b : G(F)\pi(G_{SC}(\mathbb{A}_F))\backslash G(\mathbb{A}_F) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)/j(H^0_{ab}(F; G))$$

et, modulo la bijection (3), β n'est autre que l'homomorphisme dual de b. D'autre part, parce que $ab_{\mathbb{A}_F}$ est continu et ouvert, b l'est aussi. Pour montrer que β est bijectif, il suffit de prouver que b l'est.

Remarquons que, puisque les suites verticales du diagramme (1) sont exactes, le groupe $G(F)\pi(G_{SC}(\mathbb{A}_F))\backslash G(\mathbb{A}_F)$ s'identifie avec $ab_{\mathbb{A}_F}(G(\mathbb{A}_F))/j \circ ab_F(G(F))$ et b devient l'application

$$b : ab_{\mathbb{A}_F}(G(\mathbb{A}_F))/j \circ ab_F(G(F)) \to H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)/j(H^0_{ab}(F; G))$$

déduite de l'injection $ab_{\mathbb{A}_F}(G(\mathbb{A}_F)) \subset H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)$.

Montrons que

(4) b est surjectif.

Notons $Val_\infty(F)$ l'ensemble des places archimédiennes de F. Pour toute place $v \in Val(F)$, l'image de ab_{F_v} est un sous-groupe ouvert d'indice fini de $H^0_{ab}(F_v; G)$. Si $v \notin Val_\infty(F)$, ab_{F_v} est surjectif, cf. [2] proposition 1.6.7. Donc l'image de b est un sous-groupe ouvert d'indice fini de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)/j(H^0_{ab}(F; G))$ qui contient l'image naturelle de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F^{Val_\infty(F)}; G)$. D'après [1] lemme C.5.A, la projection de $j(H^0_{ab}(F; G))$ dans le produit $\prod_{v \in Val_\infty(F)} H^0_{ab}(F_v; G)$ est d'image dense. Il revient au même de dire que le produit de $j(H^0_{ab}(F; G))$ et de l'image naturelle de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F^{Val_\infty(F)}; G)$ dans $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)$ est dense dans ce dernier groupe, ou encore que l'image naturelle de $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F^{Val_\infty(F)}; G)$ dans $H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G)/j(H^0_{ab}(F; G))$ est dense. Ainsi, l'image de b est un sous-groupe ouvert dense, donc b est surjectif.

Montrons enfin que

(5) b est injectif.

Il revient au même de prouver l'égalité

(6) $j(H^0_{ab}(F; G)) \cap ab_{\mathbb{A}_F}(G(\mathbb{A}_F)) = j \circ ab_F(G(F))$.

L'inclusion du membre de droite dans celui de gauche est claire et est d'ailleurs utilisée dans les constructions ci-dessus. Montrons l'inclusion inverse. L'homomorphisme j s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
G_{SC}(F) & \stackrel{\pi}{\to} & G(F) & \stackrel{ab_F}{\to} & H^0_{ab}(F; G) & \to & H^1(F; G_{SC}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow h \\
G_{SC}(\mathbb{A}_F) & \stackrel{\pi}{\to} & G(\mathbb{A}_F) & \stackrel{ab_{\mathbb{A}_F}}{\to} & H^0_{ab}(\mathbb{A}_F; G) & \to & \prod_{v \in Val(F)} H^1(F_v; G_{SC})
\end{array}$$

Les suites horizontales sont exactes, cf. [2] page 31. Soit $x \in H^0_{ab}(F;G)$, supposons $j(x) \in ab_{\mathbb{A}_F}(G(\mathbb{A}_F))$. Alors l'image de x dans le terme sud-est du diagramme ci-dessus est triviale. L'image de x dans $H^1(F;G_{SC})$ est donc dans le noyau de h. Or ce noyau est trivial (théorème de Kneser-Harder-Chernousov, [2] théorème 1.6.9). Donc x appartient à l'image de ab_F et $j(x)$ appartient à $j \circ ab_F(G(F))$. Cela prouve (6) et achève la démonstration du lemme.

Références

[1] R. Kottwitz, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[2] J.-P. Labesse : *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, Astérisque 257 (1999)

[3] J.-P. Labesse, E. Lapid : *Characters of G over local and global fields*,appendice à E. Lapid, Z. Mao : *A conjecture on Whittaker-Fourier coefficients of cusp forms,* arXiv NT 13093190v2 (2013)

[4] J.-L. Sansuc : *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine u. ang. Math. 327 (1981), p.12-80

e-mail : jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr