HAL
open science

DES APPLICATIONS GÉNÉRATRICES DES NOMBRES PREMIERS ET CINQ PREUVES DE L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN

M Sghiar

To cite this version:

M Sghiar. DES APPLICATIONS GÉNÉRATRICES DES NOMBRES PREMIERS ET CINQ PREUVES DE L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN. Pioneer Journal of Algebra Number Theory and its Applications, 2015, 10 (1-2), pp.1-31. hal-01356061

HAL Id: hal-01356061

https://hal.science/hal-01356061v1

Submitted on 3 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Des applications génératrices des nombres premiers et cinq preuves de l'hypothèse de Riemann

21 septembre 2015 (**Version révisée**)

M.Sghiar

msghiar21@gmail.com

Publié dans : Pioneer Journal of Algebra Number Theory and its Applications, 2015, 10 (1-2), pp.1-31

Abstract : I will prove that there exists one application $\psi(\psi^-, \psi^+)$ on $\mathbb{R}^2$ such that $\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times \mathcal{F}^- + 1 \cup 6 \times \mathcal{F}^+ - 1$ where : $\mathcal{P}$ is the set of relatively prime numbers, $\mathcal{F}^- = \mathbb{Z} \cap (\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z})\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$ and $\mathcal{F}^+ = \mathbb{Z} \cap (\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z})\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$. And I will give an algorithm that allows both to generate prime numbers and confirm that $\mathcal{P}$ is indeed determined by the mapping $\psi(\psi^-, \psi^+)$ that I will apply in some proofs of the Riemann hypothesis .

Résumé : Je démontre qu'il existe une application $\psi(\psi^-, \psi^+)$ définie sur $\mathbb{R}^2$ et telle que $\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times \mathcal{F}^- + 1 \cup 6 \times \mathcal{F}^+ - 1$ où : $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres relatifs premiers, $\mathcal{F}^- = \mathbb{Z} \cap (\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z})\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$ et $\mathcal{F}^+ = \mathbb{Z} \cap (\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z})\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$. Et je donnerai un algorithme permettant à la fois de générer les nombres premiers et de confirmer que $\mathcal{P}$ est bel et bien déterminé par l'application $\psi(\psi^-, \psi^+)$ que je vais appliquer dans des preuves de l'hypothèse de Riemann.

Sommaire

A propos de cette version 4

Préface 5

Un lien avec la physique 6

A la mémoire 7

Remerciements 8

Introduction 9

Notations et définitions 13

1 Le Lien entre les nombres premiers et l'application ψ 13

2 Etude des ensembles $\mathbb{Z}\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ et $\mathbb{Z}\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ 18

3 Algorithme 19

4 Le lien entre les fonctions ζ et ψ 22

5 La première preuve de l'hypothèse de Riemann 23

6 Une deuxième preuve de l'hypothèse de Riemann 26

7 La troisième preuve de l'hypothèse de Riemann 29

8 La quatrième preuve de l'hypothèse de Riemann 31

9 La cinquième preuve de l'hypothèse de Riemann et l'invariance des Spins 0, $\frac{1}{2}$, et 1 33

10 L'action du groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$ sur le spin des particules **36**

11 La fonction de Dieu et le Spin des particules **37**

12 Conclusion **41**

Références **42**

A propos de cette version

Dans cette version, je donne une légère rectification de l'algorithme 3.1 .

Préface

Quoique je préfère l'application ψ à la fonction ζ de Riemann qui me permet de bien voir les nombres premiers dans un espace à 3 dimension, je donne ici cinq preuves de la célèbre hypothèse de Riemann qui a toujours fasciné les mathématiciens et qui a une place centrale dans la recherche mathématique contemporaine. elle a des connexions avec l'analyse (complexe, fonctionnelle, harmonique,hilbertienne...), la théorie des nombres, la géométrie algébrique, les probabilités, les systèmes dynamiques, la mécanique quantique...

sghiar

Un lien avec la physique

Dans la première preuve de l'hypothèse de Riemann, tout point de l'espace est considéré comme une particule dont la position est défini relativement par rapport au repère choisi. Et ζ est une action sur les particules....
Par un changement convenable du repère, on constatera que la fonction ζ restera invariante, et que suite à ce changement de repère, les zéros non triviaux de ζ auront tous $\frac{1}{2}$ pour partie réelle.
Voir aussi 11 pour les liens de ζ avec la physique. En particulier avec le Spin des particules.

sghiar

A la mémoire

A la mémoire du grand professeur, le physicien et mathématicien :

Moshé Flaton

Remerciements

Je tiens à remercier toute personne qui a contribué à la réussite des résultats de cette œuvre dont les techniques ont permis de résoudre en particulier le célèbre problème de l'hypothèse de Riemann.
Je remercie aussi et surtout tout ceux qui ont eu le courage de lire et de relire les différentes versions de cette œuvre dans le but de défendre les mathématiques et d'apporter de l'aide à l'auteur de cette œuvre. En particulier, je remercie les chercheurs : Fausto Galetto et Ahmad hassanat de s'être intéressé par ce travail.

Sghiar

Introduction

On a toujours cherché des formules pour générer les nombres premiers. C'est à dire trouver une formule qui à un entier n associe le n^{e} nombre premier. Ou d'une manière moins exigeante, on peut se contenter d'exiger une fonction f qui à tout entier n associe un nombre premier et telle que chaque valeur prise ne le soit qu'une fois.

Et on souhaite que la fonction soit calculable en pratique (voir [5]) : Par exemple, le théorème de Wilson [7] (voir aussi [4]) assure que p est un nombre premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1 \mod p$. Il s'ensuit que la fonction $f(n) = 2 + (2((n-1)!) \mod (n))$ vaut n si n est un nombre premier et vaut 2 sinon. Cependant, le calcul de la factorielle (même modulo n) est rédhibitoire pour de grandes valeurs de n, et cette fonction a donc peu de valeur pour générer les nombres premiers.

Une autre fonction, la fonction ζ de Riemann (Voir[3] et [2]), a été introduite pour fournir la position des nombres premiers : En fait, la position des zéros de la fonction ζ de Riemann fournit la position des nombres premiers et on a même pu trouver une formule exprimant chaque nombre premier en fonction des zéros de la fonction ζ de Riemann !.

Pour rappel, la fonction ζ de Riemann est une fonction analytique complexe méromorphe et définie, pour $Re(s) > 1$, par la série de Dirichlet : $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

La fonction ζ admet un prolongement analytique à tout le plan complexe, sauf 1. Il existe plusieurs démonstrations, faisant appel à différentes représentations de la fonction ζ. Parmi elles :

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{1+s}} \mathrm{d}u.$$

Comme $\{u\}$ est toujours compris entre 0 et 1, l'intégrale est convergente pour

$Re(s) > 0$.

La fonction ζ satisfait à l'Équation fonctionnelle : $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$

valable pour tout nombre complexe s différent de 0 et 1. Ici, Γ désigne la fonction gamma.

L'hypothèse de Riemann [6] est une conjecture formulée en 1859 par le mathématicien Bernhard Riemann. Elle dit que les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle 1/2.

Le lien entre la fonction ζ et les nombres premiers avait déjà été établi par Leonhard Euler avec la formule, valable pour $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) \;=\; \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\cdots}$$

où le produit infini est étendu à l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers. On appelle parfois cette formule produit eulérien.

Un autre lien existe aussi avec la fonction de comptage $\pi(x)$ des nombres premiers inférieurs ou égaux à x :

$$\pi(x) = \sum_{p\in\mathcal{P}, p\leq x} 1$$

On a en effet, pour Re(s) > 1 : $\ln\zeta(s) = s\int_2^\infty \frac{\pi(u)}{u(u^s-1)}\mathrm{d}u$.

À cause de la relation entre la fonction ζ et la fonction π, l'hypothèse de Riemann a une importance considérable en théorie des nombres : Car elle donne une meilleure estimation de l'erreur intervenant dans le théorème des nombres premiers qui permet d'obtenir une formule qui donne le comportement asymptotique du n^{eme} nombre premier p_n : $p_n \sim n\ln(n)$. En effet : Helge von Koch en 1901 a montré plus précisément : L'hypothèse de Riemann

équivaut à $\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(\sqrt{x}\ln x\right)$. où $\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

Malgré tout cela, je trouve que les fonctions ζ et π ne permettent qu'une approximation des nombres premiers.

Dans cette esprit, j'ai trouvé l'application $\psi(\psi^-, \psi^+)$ qui va générer tout les nombres premiers.

Et en démontrant dans le corollaire 2.1 que $\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times \mathcal{F}^- + 1 \cup 6 \times \mathcal{F}^+ - 1$ où : $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres relatifs premiers, $\mathcal{F}^- = \mathbb{Z} \cap (\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z})\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$ et $\mathcal{F}^+ = \mathbb{Z} \cap (\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z})\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$, ceci s'interprète Graphiquement comme suit : $\mathcal{F}^+$ est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe $\overrightarrow{OZ}$ du graphe de l'application $\psi^-|\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ dont on a enlevé les points qui sont dans l' intersection avec le graphe de l'application $\psi^-|\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$. Et $\mathcal{F}^-$ est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe $\overrightarrow{OZ}$ du graphe de l'application $\psi^+|\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ dont on a enlevé les points qui sont dans l'intersection avec le graphe de l'application $\psi^+|\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$.

Il s'en suit que $\mathcal{P}\backslash\{\pm 2, \pm 3\}$ est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe $\overrightarrow{OZ}$ des graphes de deux applications $6\psi^+ + 1$ et $6\psi^- - 1$ dont on a enlevé respectivement les points des graphes des applications $6\psi^+|\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* + 1$ et $6\psi^-|\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* + 1$. Ce résultat est décrit par le corollaire 2.2.

Et enfin, et pratiquement, on déduit de cette étude un algorithme 3.1 permettant à la fois de générer les nombres premiers et de confirmer que $\mathcal{P}$ est bel et bien déterminé par l'application $\psi(\psi^-, \psi^+)$ que je vais appliquer dans des preuves de la célèbre hypothèse de Riemann qui a une place centrale dans la recherche mathématique contemporaine. elle a des connexions avec l'analyse (complexe, fonctionnelle, harmonique,hilbertienne...), la théorie des nombres, la géométrie algébrique, les probabilités, les systèmes dynamiques,

la mécanique quantique...

Notations et définitions

Par convention ± 1 seront considérés des premiers.

Soient les applications suivantes :

$$\begin{array}{rcccl} \psi & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (\alpha,\beta) & \mapsto & (-\alpha+(1+6\alpha)\beta, \alpha+(1+6\alpha)\beta) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} \psi^+ & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (\alpha,\beta) & \mapsto & \alpha+(1+6\alpha)\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} \psi^- & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (\alpha,\beta) & \mapsto & -\alpha+(1+6\alpha)\beta \end{array}$$

Posons $\mathcal{F}^+ = \{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{Z}^*, \frac{k+\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z}^*\}$ $(\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\})$

Et posons $\mathcal{F}^- = \{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{Z}^*, \frac{k-\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z}^*\}$

Si χ est une partie de $\mathbb{R}^2$, l'application indicatrice $\mathbb{1}_\chi$ est définie comme suit :

$$\begin{array}{rcccl} \mathbb{1}_\chi & : & \mathbb{R}^2 & \to & \{0,1\} \\ & & x & \mapsto & \mathbb{1}_\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \chi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1 Le Lien entre les nombres premiers et l'application ψ

Théorème 1.1 *Si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres relatifs premiers, alors :*
$\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times (\mathbb{Z} \backslash \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)) + 1 \cup 6 \times (\mathbb{Z} \backslash \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)) - 1$

Lemme 1.1 (lemme fondamental) *Tout nombre premier de $\mathbb{Z} \backslash \{\pm 2, \pm 3\}$ s'écrit sous la forme : $p = 6k+1$ ou $p = 6k-1$ où $k \in \mathbb{Z}$*

Théorème 1.2 (Théorème de Bézout) *[1]*
a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs x et y tels que $ax + by = \pm 1$.

Preuve du lemme 1.1

Si p est un premier de $\mathbb{Z}\backslash\{\pm 2, \pm 3\}$, alors p et 6 sont premiers entre eux, donc du Théorème de Bézout 1.2 :

$\exists(\alpha', \beta') \in \mathbb{Z}^2$tels que $: \alpha' p + 6\beta' = \pm 1$

En divisant α' par 6 : $\alpha' = 6q + r$ avec $(r, q) \in \mathbb{Z}^2$ et $|r| \leq 5$

Donc :

$rp + 6qp + 6\beta' = \pm 1$ avec $|r| \in \{1, 5\}$. (car 1 est impair et 3 ne divise pas 1)

Et par suite (en multipliant par le signe de r) on déduit :

$\exists(\alpha'', \beta'') \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tels que : $\alpha'' p + 6\beta'' = \pm 1$ avec $\alpha'' \in \{1, 5\}$

Si $\alpha'' = 1$ on a le résultat.

Si $\alpha'' = 5$ alors $-p + 6(\beta'' + p) = \pm 1$

Donc :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que : } p + 6k = \pm 1$$

d'où le résultat.

Corollaire 1.1 *Si n est un nombre de $\mathbb{Z}\backslash\{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. Alors n est premier si et seulement si on a : i- ou ii- :*

i $: n = 6k + 1$ *et* $k \in \mathbb{Z}\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$

ii $: n = 6k - 1$ *et* $k \in \mathbb{Z}\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$

Preuve du corollaire 1.1 :

On va démonter le point i-, le point ii- se démontre de la même façon :

Soit n un nombre de $\mathbb{Z}\backslash\{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$.

Si $n = 6k + 1$ et $k \in \mathbb{Z}\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$:

Si n n'est pas premier, alors $n = mm'$, avec : $m = 6\alpha + 1$ et $m' = 6\beta + 1$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{*2}$; on en déduit que : $k = 6\alpha\beta + (\alpha + \beta)$, ce qui est absurde.

Donc n est premier si $n = 6k + 1$ et $k \in \mathbb{Z}\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$.

Inversement si n est premier de $\mathbb{Z}\backslash\{\pm 2, \pm 3\}$, alors du lemme 1.1, $n = 6k + 1$ ou $n = 6k - 1$ où $k \in \mathbb{Z}$

Supposons que $n = 6k + 1$

Si $k \notin \mathbb{Z}\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$, alors : $k = 6\alpha\beta + (\alpha + \beta)$, et par suite : $n = 6k + 1 = 6(6\alpha\beta + (\alpha + \beta)) + 1 = (6\alpha + 1)(6\beta + 1)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{*2}$, ce qui contredit que n est premier. Et par suite $k \in \mathbb{Z}\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$.

De même si $n = 6k - 1$.

Si $k \notin \mathbb{Z}\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$, alors : $k = 6\alpha\beta + (-\alpha + \beta)$, et par suite : $n = 6k - 1 = 6(6\alpha\beta + (-\alpha + \beta)) - 1 = (6\alpha + 1)(6\beta - 1)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{*2}$, ce qui contredit que n est premier. Et par suite $k \in \mathbb{Z}\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$.

D'où le corollaire 1.1.

Preuve du Théorème 1.1 :

Se déduit directement du corollaire 1.1. Et du fait que ± 1 qui sont par convention des nombres premiers appartiennent à $6 \times (\mathbb{Z}\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)) + 1 \cup 6 \times (\mathbb{Z}\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)) - 1$

Corollaire 1.2 *Si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres relatifs premiers, et si ϕ^+ et ϕ^- sont deux applications surjectives définies respectivement de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ et de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ alors : $\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times \phi^+(\mathbb{Z}) + 1 \cup 6 \times \phi^-(\mathbb{Z}) - 1$*

Corollaire 1.3 *Si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres relatifs premiers, et si ϕ est une application définie sur $\mathbb{Z}$ telle que $\mathcal{P} = \{\phi(k), k \in \mathbb{Z}\}$, alors il existe ϕ^+ et ϕ^- deux applications surjectives définies respectivement de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ et de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ telles que : $\forall k \in \mathbb{Z}$ telle que $\phi(k) \notin \{\pm 2, \pm 3\}$, alors $\phi(k) = 6\phi^+(k) + 1$ ou $\phi(k) = 6\phi^-(k) - 1$*

Remarques :

i- Du corollaire 1.2, on déduit que la connaissance des ensembles $\mathbb{Z}\backslash\psi^{+}(\mathbb{Z}^{*}\times\mathbb{Z}^{*})$ et de $\mathbb{Z}\backslash\psi^{-}(\mathbb{Z}^{*}\times\mathbb{Z}^{*})$ permet de déterminer les applications ϕ^{+} et ϕ^{-} génératrices des nombres premiers. D'où l'intérêt de les étudier dans la section 2.

ii- Le Théorème 1.1 est testé pour tout les nombres premiers appartenant à $[-1, 241]\backslash\{2, 3\}$ et obtenus par les applications ψ^{+} et ψ^{-} comme le montre le tableur suivant :

Les nombres premiers $\in$ à $[-1, 241]\backslash\{2, 3\}$ et obtenus par ψ^+ et ψ^-							
a	b	6ab +a+b	$k \in \mathbb{Z}\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$	$6 \times k + 1$	6ab -a+b	$k \in \mathbb{Z}\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$	$6 \times k - 1$
1	1	8	0	1	6	0	-1
1	2	15	1	7	13	1	5
1	3	22	2	13	20	2	11
1	4	29	3	19	27	3	17
1	5	36			34	4	23
1	6	43	5	31	41	5	29
1	7	50	6	37	48	7	41
1	8	57	7	43	55	8	47
1	9	64			62	9	53
1	10	71	10	61	69	10	59
1	11	78	11	67	76	12	71
1	12	85	12	73	83	14	83
1	13	92	13	79	90	15	89
1	14	99			97	17	101
1	15	106	16	97	104	18	107
2	1	15	17	103	11	19	113
2	2	28	18	109	24		
2	3	41			37	22	131
2	4	54			50	23	137
2	5	67	21	127	63	24	143
2	6	80	23	139	76	25	149
2	7	93	25	151	89		
2	8	106	26	157	102	27	161
-1	-1	4	27	163	6	28	167
-1	-2	9	30	181	11	29	173
-1	-3	14	32	193	16	30	179
-1	-4	19	33	199	21		
-1	-5	24		1	26	32	191
-1	-6	29	35	211	31	33	197
-1	-7	34	37	223	36	38	227
-2	1	-13	38	229	-9	39	233
-2	-2	20	40	241	24	40	239

2 Etude des ensembles $\mathbb{Z}\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*)$ et $\mathbb{Z}\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*)$

Lemme 2.1

i- $\mathbb{Z}\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*) = \mathcal{F}^- = \{k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\forall\alpha \in \mathbb{Z}^*, \frac{k-\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z}^*\}$ $(\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\})$

ii- $\mathbb{Z}\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*) = \mathcal{F}^+ = \{k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\forall\alpha \in \mathbb{Z}^*, \frac{k+\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z}^*\}$

Preuve du lemme 2.1 : Démontrons le i-, la preuve du ii- est similaire :

En effet, il suffit de voir que :

$k \in \psi^+(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*) \iff \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^{*2}$ tels que $k = 6\alpha\beta + \alpha + \beta \iff \exists\alpha \in \mathbb{Z}^*$ tel que$\frac{k-\alpha}{1+6\alpha} \in \mathbb{Z}^*$

Du lemme 2.1 et du Théorème 1.1, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 $\mathcal{P} = \{\pm2,\pm3\} \cup 6\times\mathcal{F}^- + 1 \cup 6\times\mathcal{F}^+ - 1$ *où :*

$\mathcal{F}^- = (\mathbb{Z}\cap\psi^+(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}))\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*) = \mathbb{Z}\cap(\psi^+(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z})\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*))$ *et*

$\mathcal{F}^+ = (\mathbb{Z}\cap\psi^-(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}))\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*) = \mathbb{Z}\cap(\psi^-(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z})\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*))$

Remarque :

Interprétation Graphique du corollaire 2.1 : $\mathcal{F}^+$ est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe $\overrightarrow{OZ}$ du graphe de l'application $\psi^-|\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ dont on a enlevé les points qui sont dans l'intersection avec le graphe de l'application $\psi^-|\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$. Et $\mathcal{F}^-$ est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe $\overrightarrow{OZ}$ du graphe de l'application $\psi^+|\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ dont on a enlevé les points qui sont dans l'intersection avec le graphe de l'application $\psi^+|\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$.

Il s'en suit que $\mathcal{P}\backslash\{\pm2,\pm3\}$ est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe $\overrightarrow{OZ}$ des graphes de deux applications $6\psi^+ + 1$ et $6\psi^- - 1$ dont on a enlevé respectivement les points des graphes des applications $6\psi^+|\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^* + 1$ et $6\psi^-|\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^* - 1$.

Ce qui se traduit par :

Corollaire 2.2 $\mathcal{P}\backslash\{\pm 2, \pm 3\} = \mathcal{D}(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z})$

Où $\mathcal{D}$ est l'application de $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$\mathcal{D} = [(6\psi^+ + 1) \times \mathbb{1}_{\mathbb{Z}} \circ (6\psi^+ + 1) \times (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} - \mathbb{1}_{6\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)+1}) \circ (6\psi^+ + 1)] + [(6\psi^- - 1) \times \mathbb{1}_{\mathbb{Z}} \circ (6\psi^- - 1) \times (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} - \mathbb{1}_{6\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)+1}) \circ (6\psi^- - 1)]$

Remarque : *Les nombres premiers sont donc déterminés par les applications ψ^+ et ψ^-*

3 Algorithme

Théorème 3.1 (Algorithme) *Soit n un entier relatif impair de $\mathbb{Z}\backslash\{\pm 3\}$:*
Si $n = 6k+1$, alors n est premier si et seulement si $\frac{\frac{n-1}{6}-\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z}\ \forall\alpha$ tel que $0 \lneqq \alpha \leq \frac{\frac{n-1}{6}-1}{7}$ et $\forall\alpha$ tel que $0 \lneqq -\alpha \leq \frac{\frac{n-1}{6}+1}{5}$
Si $n = 6k-1$, alors n est premier si et seulement si $\frac{\frac{n-1}{6}+\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z}\ \forall\alpha$ tel que $0 \lneqq \alpha \leq \frac{\frac{n-1}{6}-1}{5}$ et $\forall\alpha$ tel que $0 \lneqq -\alpha \leq \frac{\frac{n-1}{6}+1}{5}$

Preuve du Théorème 3.1 : Se déduit du lemme 2.1 et du Théorème 1.1.

Voici ci-dessous un code en langage C pour tester le dernier résultat.

```

        //  Début du code de test de primalité écrit
        // par sghiar et rectifié le 22 août 2016
        #include <stdio.h>
        #include <stdlib.h>
        int main()
        {
        int k ;
        long n;
        int ren;
        long b=1;
        double c = 1;
        int e=1;
        int f=1;
```

```
        printf("Entrez un entier relatif pour tester sa primalité: ");
        ren = scanf("%d", &n);
        printf("Votre valeur est %d \n", n);

    if(n==91||n==-91||n==49 ||n==-49 || n==35 ||n==-35){
    printf(" %.d n'est pas premier ",n);
    }
    else{
        if( n==1 || n==-1 ){
        printf(" %.d est premier par convention ",n);
        }
        else {
        if((n-1)%6==0 ){
        k=(n-1)/6;
        for( b =1; b < (double)(k-1)/7 -1;b++ ){
        c= (double)(k-b)/(1+6*b);
        if((c -floor(c) )==0 ){
        e=0;
        }
            }
          for(  b = -(double)(k+1)/5; b < 0;b++ ){
        c= (double)(k-b)/(1+6*b);
        if((c -floor(c) )==0){
        f=0;
            }
        }
        if (e*f==0){
        printf(" %.d  n'est pas premier",n);
        }
        else if (e*f==1){
        printf(" %.d  est  premier",n);
        }
        }
        else if((n+1)%6==0 ){
        k=(n+1)/6;
        for( b =1; b < (double)(k-1)/5;b++ ){
        c= (double)(k+b)/(1+6*b);
        if((c -floor(c) )==0){
```

```
        e=0;
        }
            }
          for(  b = -(double)(k+1)/5; b < 0;b++ ){
        c= (double)(k+b)/(1+6*b);
        if((c -floor(c) )==0){
        f=0;
            }
        }
        if (e*f==0){
        printf(" %.d  n'est pas premier",n);
        }
        else if (e*f==1){
        printf(" %.d  est  premier",n);
        }
        }
        else if(n==2 ||n==-2 || n==3 ||n==-3){
        printf(" %.d  est  premier",n);
        }
        else {
        printf(" %d  n'est pas premier",n);
        }
        }
        }
        }
        //Fin du code
```

4 Le lien entre les fonctions ζ et ψ

Le lien entre la fonction ζ et les nombres premiers avait déjà été établi par Leonhard Euler avec la formule, valable pour $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) \;=\; \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\cdots}$$

où le produit infini est étendu à l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers. On appelle parfois cette formule produit eulérien.
On en déduit :

Corollaire 4.1 (Un lien entre ψ et ζ)

$$\exists\, \mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^*\times\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z} \;/\; \forall s,\; Re(s) > 1 :\; \zeta(s) = \prod_{k\in\mathcal{K}} \frac{1}{1-(6\psi^+(k)+1)^{-s}} \prod_{l\in\mathcal{L}} \frac{1}{1-(6\psi^-(l)-1)^{-s}}$$

5 La première preuve de l'hypothèse de Riemann

Le but de cette section est de donner une première démonstration de l'hypothèse de Riemann en utilisant l'analyse et la géométrie.

Théorème 5.1 (L'hypothèse de Riemann) *[6]*
Les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle 1/2.

Preuve du Théorème 5.1 :
Comme la fonction êta de Dirichlet peut être définie par $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\,\zeta(s)$ où : $\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$
On a en particulier :

$$\zeta(z) = \frac{1}{1 - 2^{1-z}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$$

pour $0 < Re(z) < 1$,
On en déduit que :

$$(1 - 2^{1-s})k^z\zeta(z) = (-1)^{k-1} + k^z \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq k}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$$

$$(-1)^k = k^z \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq k}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} \tag{1}$$

si z est une racine non triviale de ζ.
Soit :

$$0 = \frac{(-1)^{k+1}}{k^z} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq k}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} \tag{2}$$

si z est une racine non triviale de ζ.

Or de l'équation (2),

$$|\sum_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^z}|$$

est plus petit que k^{μ} $\forall\mu \gneqq 0$, donc

$$|\sum_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^z}| = k^{\mu-\epsilon} \text{ avec } \epsilon \geq 0,$$

$$|k^{z+\mu-\epsilon}| = 1 \tag{3}$$

De 3 on déduit :

$$x + \mu - \epsilon = 0 \tag{4}$$

Si z' est une autre racine non triviale de ζ, avec $Re(z') = x'$ alors il existe μ' et ϵ' tels que :

$$x' + \mu' - \epsilon' = 0 \tag{5}$$

Et

$$\alpha\left((x' + x) + (\mu' + \mu) - (\epsilon' + \epsilon)\right) = 0; \forall\alpha \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Donc l'ensemble $\mathcal{S} = \{(x, \mu, \epsilon) \ /x + \mu - \epsilon = 0, x = Re(z),\ \zeta(z) = 0\}$ est contenu dans le $\mathbb{R}$- espace vectoriel $\mathcal{S}'$ de dimension deux : $\mathcal{S}' = \{(x, \mu, x + \mu),\ (x, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

On en déduit que si $\mathcal{Z}$ est l'ensemble des zéros $x + iy$ non triviaux de ζ, alors $\mathcal{Z}$ est contenu dans la droite $\mathcal{D}$ intersection du plan $\mathcal{S}'$ avec le plan $z = 0$, donc tout les points de $\mathcal{Z}$ sont **alignés**.

On peut voir facilement que $\mathcal{D} = \{\rho e^{i\frac{\pi}{4}},\ \rho \in \mathbb{R}\}$

Dans un repère convenablement choisi, tout les points de $\mathcal{Z}$ auront pour partie réel $\frac{1}{2}$: En effet , il suffit de faire le changement suivant :

$$\begin{array}{cccc} \tau & : & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & i(z-\frac{1}{2})e^{i\frac{\pi}{4}} \end{array}$$

τ agit sur ζ comme suit : $\tau\zeta(z) = \zeta(\tau(z))$.

On a donc : $\tau\zeta\tau^{-1}(z) = \zeta(z)$. (Invariance de $\zeta(z)$ sous l'action adjointe)

$\tau\zeta\tau^{-1}(\tau(z)) = 0 \Longrightarrow \tau\zeta(z) = 0 \Longrightarrow \zeta(\tau(z)) = 0 \Longrightarrow \tau(z) \in \mathcal{D} \Longrightarrow \tau(z) = \rho e^{i\frac{\pi}{4}} \Longrightarrow Re(z) = \frac{1}{2}$.

D' où l'hypothèse de Riemann. ✓

Fin de la première preuve de l'hypothèse de Riemann ✓

Remarque : On ne doit pas s'étonner par l'introduction nouvelle du repère et de l'action adjointe sur ζ : En fait on peut interpréter ceci comme suit : Tout point de l'espace est considéré comme une particule dont la position est défini relativement par rapport au repère choisi. Et ζ est une action sur les particules....

Cette idée je l'ai déjà utilisée dans l'article déposé dans les hal : "Relativité et théorie des des nombres" et qui a permis la preuve de nombreux conjectures, en particulier la preuve de l'Hypothèse de Riemann en utilisant des techniques relativistes.

6 Une deuxième preuve de l'hypothèse de Riemann

Le but de cette section est de donner une deuxième démonstration de l'hypothèse de Riemann à partir du lien entre les fonctions ζ et ψ.

Théorème 6.1 (L'hypothèse de Riemann) *[6]*
Les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle 1/2.

Lemme 6.1 *:*
Toutes les racines non triviales de ζ sont symétriques par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$

Preuve : Résulte de l'équation fonctionnelle :
$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$,

Lemme 6.2 *Les zéros s non triviaux de ζ vérifient* $0 < Re(s) < 1$

Preuve : Ce résultat est très connu.
Le lien entre la fonction ζ et les nombres premiers avait déjà été établi par Leonhard Euler avec la formule, valable pour $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) \;=\; \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\cdots}$$

où le produit infini est étendu à l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers. On appelle parfois cette formule produit eulérien.
Et comme la fonction êta de Dirichlet peut être définie par $\eta(s) = (1-2^{1-s})\,\zeta(s)$ où : $\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$

On a en particulier :

$$\zeta(z) = \frac{1}{1-2^{1-z}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$$

pour $0 < Re(z) < 1$,

On en déduit le corollaire suivant qui est similaire au corollaire 4.1 :

Corollaire 6.1 (un lien entre ψ et ζ) $\exists\ \mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z} \ / \ \forall s \ / 0 < Re(s) < 1$, : $\zeta(s) = \prod_{k\in\mathcal{K}} \frac{1}{1-(6\psi^+(k)+1)^{-s}} \prod_{l\in\mathcal{L}} \frac{1}{1-(6\psi^-(l)-1)^{-s}}$

Preuve : Se déduit des sections précédentes.

Et on en déduit aussi que :

$$\zeta(2z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2z}}$$

est bien définie en particulier pour $2z$ tel que $0 < Re(z) < \frac{1}{2}$.

Remarque et définition des $\mathcal{B}_{\mu,h}$:

De ce qui est dit ci-dessus, $\zeta(s)$ est bien définie pour $s = 2z$ avec $0 < Re(z) < \frac{1}{2}$, ceci justifie l'introduction des $\mathcal{B}_{\mu,h}$ pour localiser les zéros non triviaux :

Posons $\mathcal{B}_{\mu,h} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \frac{1}{2} + \mu \leq Re(z) \leq 1 - \mu$ et $\mu \leq |Imz| \leq h\} \cup \{z \in \mathbb{C} \ / \ \mu \leq Re(z) \leq \frac{1}{2} - \mu$ et $\mu \leq |Imz| \leq h\}$ où $0 < \mu < \frac{1}{4}$

Posons $f_n(s) = \sum_{k\in\mathcal{K}, 6\psi^+(k)+1\leq n} log(|1-(6\psi^+(k)+1)^{-s}|) + \sum_{l\in\mathcal{L}, 6\psi^-(l)-1\leq n} log(|1-(6\psi^-(l)-1)^{-s}|)$

Lemme 6.3 *$\mathcal{B}_{\mu,h}$ est compact et symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$*

Corollaire 6.2 $\forall \mathcal{B}_{\mu,h},\ \exists\ \mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z} \ / \ \forall s \in \mathcal{B}_{\mu,h} \ : \ log(|\zeta(s)|^{-1}) = \sum_{k\in\mathcal{K}} log(|1-(6\psi^+(k)+1)^{-s}|) + \sum_{l\in\mathcal{L}} log(|1-(6\psi^-(l)-1)^{-s}|)$

On en déduit que : $\forall \mathcal{B}_{\mu,h},\ \exists\ \mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z} \ / \ \forall s \in \mathcal{B}_{\mu,h} \ : \ |log(|\zeta(s)|^{-1})| \leq \sum_{k\in\mathcal{K}} |log(|1-(6\psi^+(k)+1)^{-s}|)| + \sum_{l\in\mathcal{L}} |log(|1-(6\psi^-(l)-1)^{-s}|)|$

Preuve du Corollaire 6.2 : Se déduit du 6.1 par passage au log, et du fait que la suite f_n converge simplement dans le compact $\mathcal{B}_{\mu,h}$ vers $log(|\zeta|^{-1})$.

Corollaire 6.3 $\forall s \in \mathcal{B}_{\mu,h} \ : \ \zeta(s) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathcal{K}/|log(|1-(6\psi^+(k)+1)^{-s}|)| = +\infty$ *ou* $\exists l \in \mathcal{L}/|log(|1-(6\psi^-(l)-1)^{-s}|)| = +\infty$
Où $\mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$

Preuve : Se déduit directement du corollaire 6.2 et du fait que la suite f_n qui converge simplement dans le compact $\mathcal{B}_{\mu,h}$ vers $log(|\zeta|^{-1})$ convergera uniformément vers $log(|\zeta|^{-1})$ dans le compact $\mathcal{B}_{\mu,h}$.

La deuxième preuve de l'hypothèse de Riemann :

Du corollaire 6.3 , si $\zeta(s) = 0$ avec $s \in \mathcal{B}_{\mu,h}$, alors : $\exists k \in \mathcal{K}/|log(|1-(6\psi^+(k)+1)^{-s}|)| = +\infty$ ou $\exists l \in \mathcal{L}/|log(|1-(6\psi^-(l)-1)^{-s}|)| = +\infty$
Donc $\exists k \in \mathcal{K}/1 = |(6\psi^+(k)+1)^{-s}|$ ou $\exists l \in \mathcal{L}/1 = |(6\psi^-(l)-1)^{-s}|$
Supposons que

$$\exists k \in \mathcal{K}/1 = |(6\psi^+(k)+1)^{-s}| \tag{7}$$

Comme du lemme 6.1 les racines non triviaux de ζ sont symétriques par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$, alors de l'équation 7, en posant $s = \frac{1}{2} + x + iy$ on doit avoir :

$$1 = |(6\psi^+(k)+1)^{-\frac{1}{2}-x-iy}| = |(6\psi^+(k)+1)^{-\frac{1}{2}-x}| \tag{8}$$

Donc $x = -\frac{1}{2}$, et par suite $Re(s) = 0$, ce qui est impossible puisque $s \in \mathcal{B}_{\mu,h}$.
Si $s' = \frac{1}{2} - x + iy$ est la racine symétrique de s, on doit avoir : $x = \frac{1}{2}$, et par suite $Re(s) = 1$ et $Re(z) = Re(\frac{s}{2}) = \frac{1}{2}$, ce qui est impossible puisque $0 < Re(z) < \frac{1}{2}$.
On en déduit que si $\zeta(s) = 0$ alors : $Re(s) = \frac{1}{2}$

Fin de la deuxième preuve de l'hypothèse de Riemann ✓

7 La troisième preuve de l'hypothèse de Riemann

Le but de cette section est de donner une troisième preuve de l'hypothèse de Riemann, en utilisant de la géométrie algébrique :

Théorème 7.1 (L'hypothèse de Riemann) *[6]*
Les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle 1/2.

Pour cette troisième preuve, rappelons que dans la première preuve de l'hypothèse de Riemann, on a montré que si z est une racine non triviale de ζ avec $Re(z) = \frac{1}{2} + x$, alors :

$$\frac{1}{2} + x + \mu - \epsilon = 0 \tag{9}$$

Soit :

$$x + (\mu + \frac{1}{2}) - \epsilon = 0 \tag{10}$$

Or du lemme 6.1, on sait que les racines non triviales de ζ , sont symétriques par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$, donc il existe ϵ' tel que :

$$\frac{1}{2} - x + \mu' - \epsilon' = 0 \tag{11}$$

Soit :

$$-x + (\mu + \frac{1}{2}) - \epsilon'' = 0 \tag{12}$$

Les équations 10 et 12 sont des équations de deux plans qui rencontrent le plan $\epsilon' = 0$ en un point tel que :
$x + (\mu + \frac{1}{2}) = 0$ et $-x + (\mu + \frac{1}{2}) = 0$, donc $x = 0$.

Soit :

$$Re(z) = \frac{1}{2} + x = \frac{1}{2}$$

D'où la troisième preuve de l'hypothèse de Riemann.✓

Fin de la troisième preuve de l'hypothèse de Riemann ✓

8 La quatrième preuve de l'hypothèse de Riemann

Le but de cette section est de donner une quatrième preuve de l'hypothèse de Riemann. Cette preuve à une ressemblance avec la résolution d'une équation linéaire dans un $\mathcal{K}$-espace vectoriel.

Théorème 8.1 (L'hypothèse de Riemann) *[6]*
Les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle 1/2.

Posons $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C}, \diagup |z-a| < r\}$
Posons $\mathcal{B}_{\epsilon,h} = \{z \in \mathbb{C} \diagup 0 \leq Re(z) \leq 1 \text{ et } 0 \leq |Imz| \leq h\} \setminus \{D(1,\epsilon)\}$ où $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$
Soit τ la transformation sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{cccc} \tau & : & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \frac{1}{2} - x + iy \end{array}$$

Par un raisonnement similaire à celle faite dans la deuxième preuve, on a :

Corollaire 8.1 $\forall s \in \mathcal{B}_{\epsilon,h} \ : \ \zeta(\tau(s)) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathcal{K} \diagup |log(|1-(6\psi^{+}(k)+1)^{-\tau(s)}|)| = +\infty$ *ou* $\exists l \in \mathcal{L} \diagup |log(|1-(6\psi^{-}(l)-1)^{-\tau(s)}|)| = +\infty$
Où $\mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^{*} \times \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$

Corollaire 8.2 $\zeta(\tau(z)) = 0 \Longrightarrow Re(\tau(z)) = 0$ *si* $z \in \mathcal{B}_{\epsilon,h}$.

Preuve de l'hypothèse de Riemann :
τ agit sur ζ comme suit : $\tau\zeta(z) = \zeta(\tau(z))$.
On a donc : $\tau\zeta\tau^{-1}(z) = \zeta(z)$. (Invariance de $\zeta(z)$ sous l'action adjointe)
$\tau\zeta\tau^{-1}(\tau(z)) = 0 \Longrightarrow \tau\zeta(z) = 0 \Longrightarrow \zeta(\tau(z)) = 0 \Longrightarrow Re(\tau(z)) = 0 \Longrightarrow Re(z) = \frac{1}{2}$ si $z \in \mathcal{B}_{\epsilon,h}$.
D' où l'hypothèse de Riemann. ✓

Remarque :

Le passage de ζ à $\tau\zeta\tau^{-1}$ ressemble au fait suivant :

Soit E un $\mathcal{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases de E.

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire sur E.

Si $\mathcal{P}$ est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ et si $\mathcal{X}$ est un vecteur de E, alors $\mathcal{A}(\mathcal{X}) = 0$ dans $\mathcal{E} \Longleftrightarrow \mathcal{P}A\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(\mathcal{X}') = 0$ dans $\mathcal{E}'$

Fin de la quatrième preuve de l'hypothèse de Riemann ✓

9 La cinquième preuve de l'hypothèse de Riemann et l'invariance des Spins 0, $\frac{1}{2}$, et 1

Le but de cette section est de donner une cinquième preuve de l'hypothèse de Riemann, et de montrer la particularité et l'invariance des Spins 0, $\frac{1}{2}$, et 1.

Théorème 9.1 (L'hypothèse de Riemann) *[6]*
Les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle 1/2.

Posons $\mathcal{B}_{\epsilon,h} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 \leq Re(z) \leq 1 \text{ et } \epsilon \leq |Imz| \leq h\}$ où $(\epsilon, h) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+}$
Soit $\tau = \tau_{\alpha,\beta}$, $(\beta \in \mathbb{R}^*)$ la transformation sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{cccc} \tau & : & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & z = x + iy & \mapsto & \alpha + \beta x + iy \end{array}$$

Par un raisonnement similaire à celle faite dans la deuxième preuve, on a :

Corollaire 9.1 $\forall s \in \mathcal{B}_{\epsilon,h} \ : \ \zeta(\tau(s)) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathcal{K} / |log(|1 - (6\psi^{+}(k) + 1)^{-\tau(s)}|)| = +\infty$ *ou* $\exists l \in \mathcal{L} / |log(|1 - (6\psi^{-}(l) - 1)^{-\tau(s)}|)| = +\infty$
Où $\mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$

Corollaire 9.2 $\zeta(\tau(z)) = 0 \Longrightarrow Re(\tau(z)) = 0$ *si* $z \in \mathcal{B}_{\epsilon,h}$.

Preuve de l'hypothèse de Riemann :
Cette fois, on fait agir τ sur ζ comme suit : $\tau\zeta(z) = \zeta(\tau^{-1}(z))$.
On a donc : $\tau\zeta\tau(z) = \zeta(z)$ si $z \in \mathcal{B}_{\epsilon,h}$ (Invariance de ζ sous l'action de τ).
$\tau\zeta\tau(\tau(z)) = 0 \Longrightarrow \zeta(\tau(z)) = 0 \Longrightarrow Re(\tau(z)) = 0 \Longrightarrow Re(z) = -\frac{\alpha}{\beta}$ si $z \in \mathcal{B}_{\epsilon,h}$.

Or par symétrie des racines de ζ par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$, si $z = \frac{1}{2} + x + iy$ et $z' = \frac{1}{2} - x + iy$ sont deux racines de ζ, alors :

$$\frac{1}{2} + x = -\frac{\alpha}{\beta}$$

Et

$$\frac{1}{2} - x = -\frac{\alpha}{\beta}$$

Donc :

$$x = 0 \text{ et } -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$$

Et par suite :

$$Re(z) = \frac{1}{2}$$

D' où l'hypothèse de Riemann. ✓

Remarques et commentaires :

1- Si $\tau = \tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\frac{1}{2},-1}$, alors $\tau = \tau^{-1}$, et $\tau\zeta\tau = \tau\zeta\tau^{-1}$: Ce qui ressemble à une changement de base en algèbre linéaire (voir la remarque de la page 32)

2- Si $\tau = \tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\frac{1}{2},-1}$, alors $\tau = \tau^{-1}$, soit $\tau^2 = I_2$, ceci a une ressemblance avec les matrices de **Pauli** :

$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Qui vérifient elles aussi :

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$, $\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, $\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1$, $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i$ pour $i \neq j$

Et pour rappel, les matrices de Pauli, développées par Wolfgang Pauli, forment, au facteur i près, une base de l'algèbre de Lie du groupe SU(2), et sont uti-

lisées en mécanique quantique pour représenter le **spin** des particules.

3- Sous l'action $\tau = \tau_{\alpha,\beta}$ la particule z va subir l'action $\tau\zeta\tau(\tau(z))$, cette dernière action est nulle si le Spin de la particule (sa partie réelle) est $\frac{1}{2}$: autrement dit les particules de Spin $\frac{1}{2}$ conserveront leur Spin.

4- En utilisant la fonction de Dieu $\mathcal{D}$ (voir la section 11), on en déduit de la même façon que les Spins 0, $\frac{1}{2}$ et 1 sont conservés.

Pour rappel : Les particules élémentaires du **modèle standard** sont au nombre de 25 et leurs Spins appartiennent à $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Fin de la cinquième preuve de l'hypothèse de Riemann ✓

10 L'action du groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$ sur le spin des particules

Si M est une matrice du groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$, on définit l'action de M sur ζ par :
$M\zeta(z) = \zeta M(z)$, de même on définit l'action de M sur la fonction de Dieu $\mathcal{D}$ par :
$M\mathcal{D}(z) = \mathcal{D}(M(z))$.

Théorème 10.1 *Lez zéros non triviaux de la fonction de Dieu $\mathcal{D}$ sont des particules de Spin 0, $\frac{1}{2}$, et 1, et lez zéros non triviaux de la fonction zeta sont des particules de Spin $\frac{1}{2}$. Et l'ensemble des Spins $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ est invariant sous l'action du groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$.*

Preuve :
Dans la cinquième preuve de l'hypothèse de Riemann, on a utilisé $\tau = \tau_{\alpha,\beta}$.
Si $\tau = \tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\frac{1}{2},-1}$, alors $\tau = \tau^{-1}$, d'où l'idée de remplacer τ par toute matrice M inversible.
Mais comme il faut que ζM et $\mathcal{D}M$ soient bien définies, ceci on l'a si M est un élément de $O_2(\mathbb{R})$.
En reprenant la cinquième démonstration, on déduit le résultat. On retrouve donc en particulier que les zéros de la fonction ζ de Riemann sont tous sur la droite $x = \frac{1}{2}$!.

11 La fonction de Dieu et le Spin des particules

Est-ce un message codé par le Premier qui a aligné de la sorte les zéros de de la fonction zeta de Riemann ?

Au début, cette question peut paraître un peu étrange ! mais si l'on sait qu'il y'a une connexion entre la fonction zéta de Riemann et la physique - Par exemple la distribution des zéros sur la droite critique $x = \frac{1}{2}$ et la distribution des niveaux d'énergie d'un noyau atomique satisfont au même statistique - cette étrangeté s'amenuise ....et même si l'on doute qu'il y'a un message derrière, on reste ébahi devant la beauté de cette alignement géométrique des zéros...(voir figure 1) et devant le fait qu'on retrouve que le spin d'une particule est soit un entier soit un demi-entier.

Pour voir cela, d'abord les zéros de la fonction ζ sont aussi les zéros d'une autre fonction appelée fonction de **Dieu** suivante :

Définition :

La fonction de Dieu $\mathcal{D}$ est définie par :

$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{D} & : & \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \zeta(z - \frac{1}{2})\zeta(z)\zeta(z + \frac{1}{2}) \end{array}$$

Si z est une racine de $\mathcal{D}$, le Spin de z est $Spin(z) = Re(z)$

Une particule p_i est un ensemble fini de zéros z_{i_j} de $\mathcal{D}$.

Le Spin de p_i est $Spin(p_i) = \sum_{i_j} Spin(z_{i_j})$

Corollaire 11.1 *Les racines z non triviales de $\mathcal{D}$ vérifient $Spin(z) \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$*

Remarque :

1- L'appellation de fonction de Dieu vient du fait que les zéros z de $\mathcal{D}$ tels que $Im(z) \geq 0$ appartiennent à un graphe ayant l'allure du nom de Dieu en arabe.(voir figure 2).

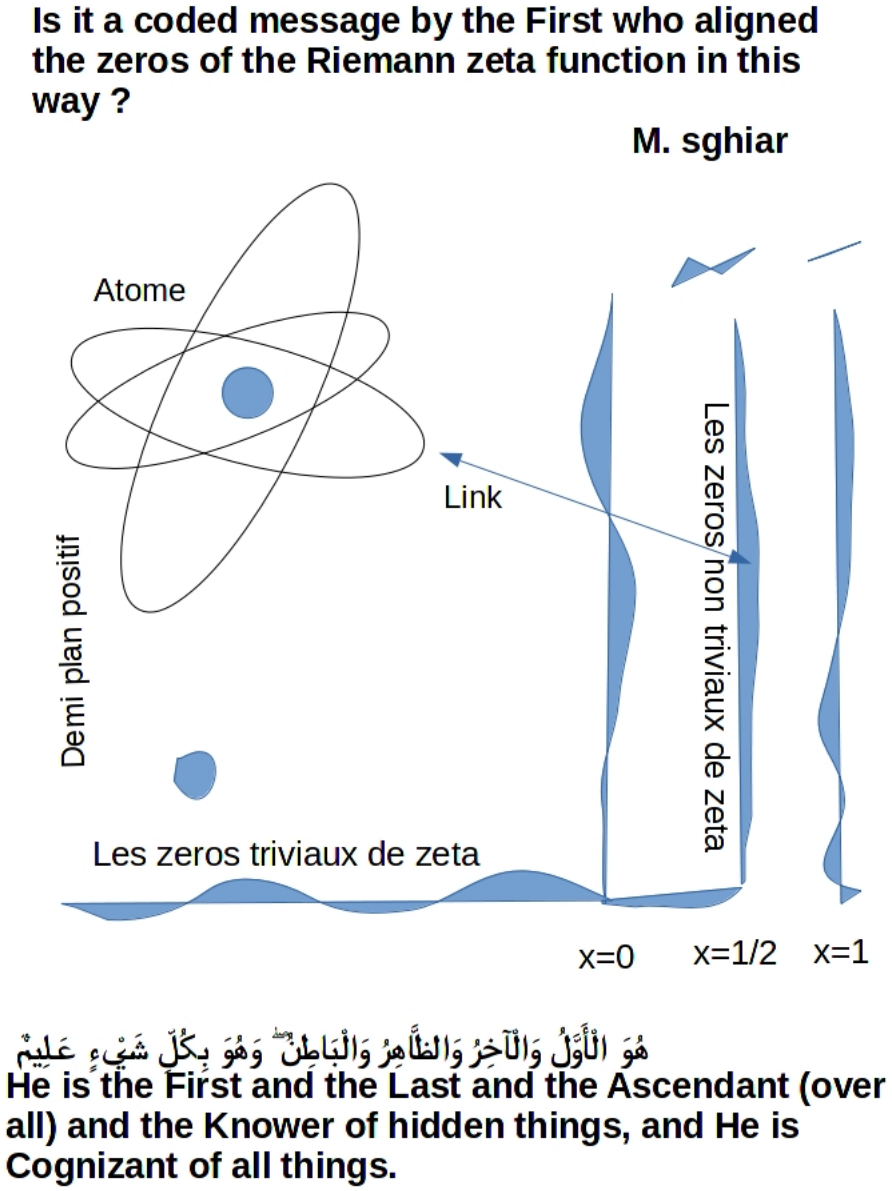

FIGURE 1 – a coded message

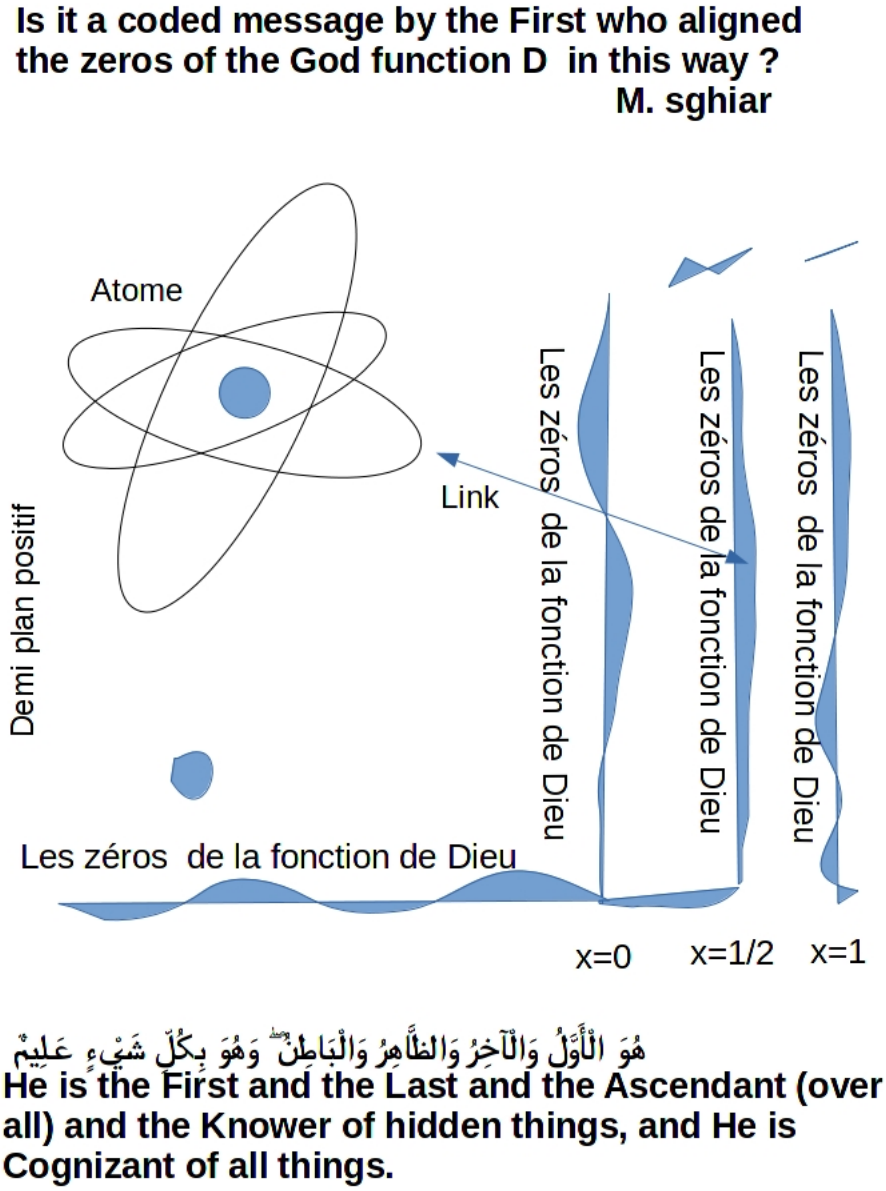

FIGURE 2 – a coded message

2- Le champs crée par l'action de la fonction ζ et qui s'annule en certaines particules qui sont alignées et qui ont même partie réelle laisse penser que ces particules ont une propriété intrinsèque dépendante de leurs parties réelles que j'ai liée avec le Spin des particules en physique (voir rappel ci-dessous).

Corollaire 11.2 (Spin d'une particule) *Le Spin d'une particule est soit un entier soit un demi-entier.*

Rappel de Spin en physique :

Le **spin** d'une particule est son moment angulaire intrinsèque. Le spin est une propriété quantique, il ne peut prendre que des valeurs entières ou demi-entières. Une particule de **spin demi-entier** est un **fermion**, une particule de **spin entier** est un **boson**.

Un **fermion** est une particule de spin demi-entier, il obéit à la statistique de Fermi-Dirac. Les leptons et les quarks sont des fermions. Les photons n'en sont pas.

Les fermions obéissent au principe d'exclusion de **Pauli**, et ne peuvent pas se trouver dans le même état quantique

Un **boson** est une particule de spin entier, il obéit à la statistique de Bose-Einstein. Les photons, les gluons, les W, le Z^0 et le Higgs sont des bosons.

Spin 0 : le boson de Higgs.

Spin 1/2 : l'électron, le positron, le proton, le neutron, les neutrinos, les quarks, etc.

Spin 1 : le photon, les bosons $W^{\pm}$ etZ^0 vecteurs de l'interaction faible.

Spin 2 : le graviton, particule hypothétique vecteur de la gravitation.

Pour rappel : Les particules élémentaires du **modèle standard** sont au nombre de 25 et leurs Spins appartiennent à $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

12 Conclusion

Pour explorer l'univers des particules, les physiciens se sont servis des accélérateurs des particules pour les faire entrer en collision et étudier les particules élémentaires générées au cours de cette collision.

Par analogie, pour étudier les zéros de la fonction ζ qui sont aussi les zéros de la fonction de Dieu $\mathcal{D}$ et que j'ai assimilés à des particules, il m'a fallu les "accélérer" en faisant agir sur elles certaines types de transformations tels que le groupe $O_2(\mathbb{R})$, et là c'est la surprise : le Spin des zéros non triviaux de la fonction ζ est bien égal à $\frac{1}{2}$ et le spectre des Spins des zéros non triviaux de la fonction de Dieu $\mathcal{D}$ est égal à $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, ce qui correspond bien aux spins des particules élémentaires du **modèle standard** !.

Références

[1] Lililiane Alfonsi. *Etienne Bézout (1730-1783),mathématicien des Lumières.* 2011. L. Alfonsi indique aussi quelques manuels du début du XXe siècle où le nom de Bézout est utilisé.

[2] R. J. Backlund. Sur les zéros de la fonction zeta de riemann. *CRAS*, 158 :1979–1981, 1914.

[3] Pierre Colmez et Philippe Biane Jean-Benoît Bost. *La Fonction Zêta.* Éditions de l'École polytechnique, Paris, 2002.

[4] Roshdi Rashed. Entre arithmétique et algèbre : Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes. *Paris*, 1984.

[5] Ribenboim. *introduction du chapitre 3.* 1996.

[6] Karl Sabbagh. *The Riemann Hypothesis : The Greatest Unsolved Problem in Mathematics.* ISBN 0-374-52935-3. Farrar, Straus and Giroux, 2004.

[7] Edward Waring. *Edward Waring Meditationes.* 1770.

M.Sghiar

msghiar21@gmail.com