



HAL
open science

DES APPLICATIONS GÉNÉRATRICES DES NOMBRES PREMIERS ET CINQ PREUVES DE L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN

M Sghiar

► **To cite this version:**

M Sghiar. DES APPLICATIONS GÉNÉRATRICES DES NOMBRES PREMIERS ET CINQ PREUVES DE L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN. Pioneer Journal of Algebra Number Theory and its Applications, 2015, 10 (1-2), pp.1-31. hal-01356061

HAL Id: hal-01356061

<https://hal.science/hal-01356061>

Submitted on 3 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Des applications génératrices des nombres premiers et cinq
preuves de l'hypothèse de Riemann**

21 septembre 2015 (**Version révisée**)

M.Sghiar

msghiar21@gmail.com

Publié dans : Pioneer Journal of Algebra Number Theory and its
Applications, 2015, 10 (1-2), pp.1-31

Abstract : I will prove that there exists one application $\psi(\psi^-, \psi^+)$ on \mathbb{R}^2 such that $\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times \mathcal{F}^- + 1 \cup 6 \times \mathcal{F}^+ - 1$ where : \mathcal{P} is the set of relatively prime numbers, $\mathcal{F}^- = \mathbb{Z} \cap (\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$ and $\mathcal{F}^+ = \mathbb{Z} \cap (\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$. And I will give an algorithm that allows both to generate prime numbers and confirm that \mathcal{P} is indeed determined by the mapping $\psi(\psi^-, \psi^+)$ that I will apply in some proofs of the Riemann hypothesis .

Résumé : Je démontre qu'il existe une application $\psi(\psi^-, \psi^+)$ définie sur \mathbb{R}^2 et telle que $\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times \mathcal{F}^- + 1 \cup 6 \times \mathcal{F}^+ - 1$ où : \mathcal{P} est l'ensemble des nombres relatifs premiers, $\mathcal{F}^- = \mathbb{Z} \cap (\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$ et $\mathcal{F}^+ = \mathbb{Z} \cap (\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$. Et je donnerai un algorithme permettant à la fois de générer les nombres premiers et de confirmer que \mathcal{P} est bel et bien déterminé par l'application $\psi(\psi^-, \psi^+)$ que je vais appliquer dans des preuves de l'hypothèse de Riemann.

Sommaire

A propos de cette version	4
Préface	5
Un lien avec la physique	6
A la mémoire	7
Remerciements	8
Introduction	9
Notations et définitions	13
1 Le Lien entre les nombres premiers et l'application ψ	13
2 Etude des ensembles $\mathbb{Z}\backslash\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ et $\mathbb{Z}\backslash\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$	18
3 Algorithme	19
4 Le lien entre les fonctions ζ et ψ	22
5 La première preuve de l'hypothèse de Riemann	23
6 Une deuxième preuve de l'hypothèse de Riemann	26
7 La troisième preuve de l'hypothèse de Riemann	29
8 La quatrième preuve de l'hypothèse de Riemann	31
9 La cinquième preuve de l'hypothèse de Riemann et l'invariance des Spins 0, $\frac{1}{2}$, et 1	33

10 L'action du groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$ sur le spin des particules	36
11 La fonction de Dieu et le Spin des particules	37
12 Conclusion	41
Références	42

A propos de cette version

Dans cette version, je donne une légère rectification de l'algorithme [3.1](#) .

Préface

Quoique je préfère l'application ψ à la fonction ζ de Riemann qui me permet de bien voir les nombres premiers dans un espace à 3 dimension, je donne ici cinq preuves de la célèbre hypothèse de Riemann qui a toujours fasciné les mathématiciens et qui a une place centrale dans la recherche mathématique contemporaine. elle a des connexions avec l'analyse (complexe, fonctionnelle, harmonique, hilbertienne...), la théorie des nombres, la géométrie algébrique, les probabilités, les systèmes dynamiques, la mécanique quantique...

sghiar

Un lien avec la physique

Dans la première preuve de l'hypothèse de Riemann, tout point de l'espace est considéré comme une particule dont la position est défini relativement par rapport au repère choisi. Et ζ est une action sur les particules....

Par un changement convenable du repère, on constatera que la fonction ζ restera invariante, et que suite à ce changement de repère, les zéros non triviaux de ζ auront tous $\frac{1}{2}$ pour partie réelle.

Voir aussi [11](#) pour les liens de ζ avec la physique. En particulier avec le Spin des particules.

sghiar

A la mémoire

A la mémoire du grand professeur, le physicien et mathématicien :

Moshé Flaton

Remerciements

Je tiens à remercier toute personne qui a contribué à la réussite des résultats de cette œuvre dont les techniques ont permis de résoudre en particulier le célèbre problème de l'hypothèse de Riemann.

Je remercie aussi et surtout tout ceux qui ont eu le courage de lire et de relire les différentes versions de cette œuvre dans le but de défendre les mathématiques et d'apporter de l'aide à l'auteur de cette œuvre. En particulier, je remercie les chercheurs : Fausto Galetto et Ahmad hassanat de s'être intéressé par ce travail.

Sghiar

Introduction

On a toujours cherché des formules pour générer les nombres premiers. C'est à dire trouver une formule qui à un entier n associe le n^e nombre premier. Ou d'une manière moins exigeante, on peut se contenter d'exiger une fonction f qui à tout entier n associe un nombre premier et telle que chaque valeur prise ne le soit qu'une fois.

Et on souhaite que la fonction soit calculable en pratique (voir [5]) : Par exemple, le théorème de Wilson [7] (voir aussi [4]) assure que p est un nombre premier si et seulement si $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Il s'ensuit que la fonction $f(n) = 2 + (2((n - 1)! \pmod{n}))$ vaut n si n est un nombre premier et vaut 2 sinon. Cependant, le calcul de la factorielle (même modulo n) est rédhibitoire pour de grandes valeurs de n , et cette fonction a donc peu de valeur pour générer les nombres premiers.

Une autre fonction, la fonction ζ de Riemann (Voir[3] et [2]), a été introduite pour fournir la position des nombres premiers : En fait, la position des zéros de la fonction ζ de Riemann fournit la position des nombres premiers et on a même pu trouver une formule exprimant chaque nombre premier en fonction des zéros de la fonction ζ de Riemann !.

Pour rappel, la fonction ζ de Riemann est une fonction analytique complexe méromorphe et définie, pour $Re(s) > 1$, par la série de Dirichlet : $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

La fonction ζ admet un prolongement analytique à tout le plan complexe, sauf 1. Il existe plusieurs démonstrations, faisant appel à différentes représentations de la fonction ζ . Parmi elles :

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{1+s}} du.$$

Comme $\{u\}$ est toujours compris entre 0 et 1, l'intégrale est convergente pour

$Re(s) > 0$.

La fonction ζ satisfait à l'Équation fonctionnelle : $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$

valable pour tout nombre complexe s différent de 0 et 1. Ici, Γ désigne la fonction gamma.

L'hypothèse de Riemann [6] est une conjecture formulée en 1859 par le mathématicien Bernhard Riemann. Elle dit que les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle $1/2$.

Le lien entre la fonction ζ et les nombres premiers avait déjà été établi par Leonhard Euler avec la formule, valable pour $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \dots}$$

où le produit infini est étendu à l'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers. On appelle parfois cette formule produit eulérien.

Un autre lien existe aussi avec la fonction de comptage $\pi(x)$ des nombres premiers inférieurs ou égaux à x :

$$\pi(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq x} 1$$

On a en effet, pour $Re(s) > 1$: $\ln \zeta(s) = s \int_2^\infty \frac{\pi(u)}{u(u^s-1)} du$.

À cause de la relation entre la fonction ζ et la fonction π , l'hypothèse de Riemann a une importance considérable en théorie des nombres : Car elle donne une meilleure estimation de l'erreur intervenant dans le théorème des nombres premiers qui permet d'obtenir une formule qui donne le comportement asymptotique du n^{eme} nombre premier p_n : $p_n \sim n \ln(n)$. En effet : Helge von Koch en 1901 a montré plus précisément : L'hypothèse de Riemann

équivalent à $\pi(x) = \text{li}(x) + O(\sqrt{x} \ln x)$. où $\text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)}$.

Malgré tout cela, je trouve que les fonctions ζ et π ne permettent qu'une approximation des nombres premiers.

Dans cette esprit, j'ai trouvé l'application $\psi(\psi^-, \psi^+)$ qui va générer tout les nombres premiers.

Et en démontrant dans le corollaire 2.1 que $\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times \mathcal{F}^- + 1 \cup 6 \times \mathcal{F}^+ - 1$ où : \mathcal{P} est l'ensemble des nombres relatifs premiers, $\mathcal{F}^- = \mathbb{Z} \cap (\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$ et $\mathcal{F}^+ = \mathbb{Z} \cap (\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$, ceci s'interprète Graphiquement comme suit : \mathcal{F}^+ est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe \overrightarrow{OZ} du graphe de l'application $\psi^- | \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ dont on a enlevé les points qui sont dans l'intersection avec le graphe de l'application $\psi^- | \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$. Et \mathcal{F}^- est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe \overrightarrow{OZ} du graphe de l'application $\psi^+ | \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ dont on a enlevé les points qui sont dans l'intersection avec le graphe de l'application $\psi^+ | \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$.

Il s'en suit que $\mathcal{P} \setminus \{\pm 2, \pm 3\}$ est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe \overrightarrow{OZ} des graphes de deux applications $6\psi^+ + 1$ et $6\psi^- - 1$ dont on a enlevé respectivement les points des graphes des applications $6\psi^+ | \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* + 1$ et $6\psi^- | \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* + 1$. Ce résultat est décrit par le corollaire 2.2.

Et enfin, et pratiquement, on déduit de cette étude un algorithme 3.1 permettant à la fois de générer les nombres premiers et de confirmer que \mathcal{P} est bel et bien déterminé par l'application $\psi(\psi^-, \psi^+)$ que je vais appliquer dans des preuves de la célèbre hypothèse de Riemann qui a une place centrale dans la recherche mathématique contemporaine. elle a des connexions avec l'analyse (complexe, fonctionnelle, harmonique, hilbertienne...), la théorie des nombres, la géométrie algébrique, les probabilités, les systèmes dynamiques,

la mécanique quantique...

Notations et définitions

Par convention ± 1 seront considérés des premiers.

Soient les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (-\alpha + (1 + 6\alpha)\beta, \alpha + (1 + 6\alpha)\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi^+ : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha + (1 + 6\alpha)\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi^- : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto -\alpha + (1 + 6\alpha)\beta \end{aligned}$$

Posons $\mathcal{F}^+ = \{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{Z}^*, \frac{k+\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z}^*\}$ ($\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$)

Et posons $\mathcal{F}^- = \{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{Z}^*, \frac{k-\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z}^*\}$

Si χ est une partie de \mathbb{R}^2 , l'application indicatrice $\mathbb{1}_\chi$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_\chi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \mathbb{1}_\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \chi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

1 Le Lien entre les nombres premiers et l'application ψ

Théorème 1.1 *Si \mathcal{P} est l'ensemble des nombres relatifs premiers, alors :*

$$\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times (\mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)) + 1 \cup 6 \times (\mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)) - 1$$

Lemme 1.1 (lemme fondamental) *Tout nombre premier de $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 2, \pm 3\}$ s'écrit sous la forme : $p = 6k + 1$ ou $p = 6k - 1$ où $k \in \mathbb{Z}$*

Théorème 1.2 (Théorème de Bézout) [1]

a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs x et y tels que $ax + by = \pm 1$.

Preuve du lemme 1.1

Si p est un premier de $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 2, \pm 3\}$, alors p et 6 sont premiers entre eux, donc du Théorème de Bézout 1.2 :

$$\exists(\alpha', \beta') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } : \alpha'p + 6\beta' = \pm 1$$

En divisant α' par 6 : $\alpha' = 6q + r$ avec $(r, q) \in \mathbb{Z}^2$ et $|r| \leq 5$

Donc :

$$rp + 6qp + 6\beta' = \pm 1 \text{ avec } |r| \in \{1, 5\}. \text{ (car 1 est impair et 3 ne divise pas 1)}$$

Et par suite (en multipliant par le signe de r) on déduit :

$$\exists(\alpha'', \beta'') \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \text{ tels que } : \alpha''p + 6\beta'' = \pm 1 \text{ avec } \alpha'' \in \{1, 5\}$$

Si $\alpha'' = 1$ on a le résultat.

$$\text{Si } \alpha'' = 5 \text{ alors } -p + 6(\beta'' + p) = \pm 1$$

Donc :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } : p + 6k = \pm 1$$

d'où le résultat.

Corollaire 1.1 *Si n est un nombre de $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. Alors n est premier si et seulement si on a : i- ou ii- :*

$$i : n = 6k + 1 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$$

$$ii : n = 6k - 1 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$$

Preuve du corollaire 1.1 :

On va démontrer le point i-, le point ii- se démontre de la même façon :

Soit n un nombre de $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$.

Si $n = 6k + 1$ et $k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$:

Si n n'est pas premier, alors $n = mm'$, avec : $m = 6\alpha + 1$ et $m' = 6\beta + 1$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{*2}$; on en déduit que : $k = 6\alpha\beta + (\alpha + \beta)$, ce qui est absurde.

Donc n est premier si $n = 6k + 1$ et $k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$.

Inversement si n est premier de $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 2, \pm 3\}$, alors du lemme 1.1, $n = 6k + 1$ ou $n = 6k - 1$ où $k \in \mathbb{Z}$

Supposons que $n = 6k + 1$

Si $k \notin \mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$, alors : $k = 6\alpha\beta + (\alpha + \beta)$, et par suite : $n = 6k + 1 = 6(6\alpha\beta + (\alpha + \beta)) + 1 = (6\alpha + 1)(6\beta + 1)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{*2}$, ce qui contredit que n est premier. Et par suite $k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$.

De même si $n = 6k - 1$.

Si $k \notin \mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$, alors : $k = 6\alpha\beta + (-\alpha + \beta)$, et par suite : $n = 6k - 1 = 6(6\alpha\beta + (-\alpha + \beta)) - 1 = (6\alpha + 1)(6\beta - 1)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{*2}$, ce qui contredit que n est premier. Et par suite $k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$.

D'où le corollaire 1.1.

Preuve du Théorème 1.1 :

Se déduit directement du corollaire 1.1. Et du fait que ± 1 qui sont par convention des nombres premiers appartiennent à $6 \times (\mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)) + 1 \cup 6 \times (\mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)) - 1$

Corollaire 1.2 Si \mathcal{P} est l'ensemble des nombres relatifs premiers, et si ϕ^+ et ϕ^- sont deux applications surjectives définies respectivement de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ et de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ alors : $\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times \phi^+(\mathbb{Z}) + 1 \cup 6 \times \phi^-(\mathbb{Z}) - 1$

Corollaire 1.3 Si \mathcal{P} est l'ensemble des nombres relatifs premiers, et si ϕ est une application définie sur \mathbb{Z} telle que $\mathcal{P} = \{\phi(k), k \in \mathbb{Z}\}$, alors il existe ϕ^+ et ϕ^- deux applications surjectives définies respectivement de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ et de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ telles que : $\forall k \in \mathbb{Z}$ telle que $\phi(k) \notin \{\pm 2, \pm 3\}$, alors $\phi(k) = 6\phi^+(k) + 1$ ou $\phi(k) = 6\phi^-(k) - 1$

Remarques :

- i- Du corollaire 1.2, on déduit que la connaissance des ensembles $\mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ et de $\mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ permet de déterminer les applications ϕ^+ et ϕ^- génératrices des nombres premiers. D'où l'intérêt de les étudier dans la section 2.
- ii- Le Théorème 1.1 est testé pour tout les nombres premiers appartenant à $[-1, 241] \setminus \{2, 3\}$ et obtenus par les applications ψ^+ et ψ^- comme le montre le tableur suivant :

Les nombres premiers $\in \hat{\mathbb{Z}}[-1, 241] \setminus \{2, 3\}$ et obtenus par ψ^+ et ψ^-							
a	b	$6ab + a + b$	$k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$	$6 \times k + 1$	$6ab - a + b$	$k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$	$6 \times k - 1$
1	1	8	0	1	6	0	-1
1	2	15	1	7	13	1	5
1	3	22	2	13	20	2	11
1	4	29	3	19	27	3	17
1	5	36	4	25	34	4	23
1	6	43	5	31	41	5	29
1	7	50	6	37	48	6	41
1	8	57	7	43	55	7	47
1	9	64	8	49	62	8	53
1	10	71	10	61	69	10	59
1	11	78	11	67	76	11	65
1	12	85	12	73	83	12	71
1	13	92	13	79	90	13	77
1	14	99	14	85	97	14	83
1	15	106	15	91	104	15	89
2	1	15	16	97	104	16	95
2	2	28	17	103	111	17	101
2	3	41	18	109	118	18	107
2	4	54	19	115	125	19	113
2	5	67	20	121	132	20	119
2	6	80	21	127	139	21	125
2	7	93	22	133	146	22	131
2	8	106	23	139	153	23	137
2	9	119	24	145	160	24	143
2	10	132	25	151	167	25	149
2	11	145	26	157	174	26	155
2	12	158	27	163	181	27	161
2	13	171	28	169	188	28	167
2	14	184	29	175	195	29	173
2	15	197	30	181	202	30	179
2	16	210	31	187	209	31	185
2	17	223	32	193	216	32	191
2	18	236	33	199	223	33	197
2	19	249	34	205	230	34	203
2	20	262	35	211	237	35	209
2	21	275	36	217	244	36	215
2	22	288	37	223	251	37	221
2	23	301	38	229	258	38	227
2	24	314	39	235	265	39	233
2	25	327	40	241	272	40	239
2	26	340	41	247	279	41	245
2	27	353	42	253	286	42	251
2	28	366	43	259	293	43	257
2	29	379	44	265	300	44	263
2	30	392	45	271	307	45	269
2	31	405	46	277	314	46	275
2	32	418	47	283	321	47	281
2	33	431	48	289	328	48	287
2	34	444	49	295	335	49	293
2	35	457	50	301	342	50	299
2	36	470	51	307	349	51	305
2	37	483	52	313	356	52	311
2	38	496	53	319	363	53	317
2	39	509	54	325	370	54	323
2	40	522	55	331	377	55	329
2	41	535	56	337	384	56	335
2	42	548	57	343	391	57	341
2	43	561	58	349	398	58	347
2	44	574	59	355	405	59	353
2	45	587	60	361	412	60	359
2	46	600	61	367	419	61	365
2	47	613	62	373	426	62	371
2	48	626	63	379	433	63	377
2	49	639	64	385	440	64	383
2	50	652	65	391	447	65	389
2	51	665	66	397	454	66	395
2	52	678	67	403	461	67	401
2	53	691	68	409	468	68	407
2	54	704	69	415	475	69	413
2	55	717	70	421	482	70	419
2	56	730	71	427	489	71	425
2	57	743	72	433	496	72	431
2	58	756	73	439	503	73	437
2	59	769	74	445	510	74	443
2	60	782	75	451	517	75	449
2	61	795	76	457	524	76	455
2	62	808	77	463	531	77	461
2	63	821	78	469	538	78	467
2	64	834	79	475	545	79	473
2	65	847	80	481	552	80	479
2	66	860	81	487	559	81	485
2	67	873	82	493	566	82	491
2	68	886	83	499	573	83	497
2	69	899	84	505	580	84	503
2	70	912	85	511	587	85	509
2	71	925	86	517	594	86	515
2	72	938	87	523	601	87	521
2	73	951	88	529	608	88	527
2	74	964	89	535	615	89	533
2	75	977	90	541	622	90	539
2	76	990	91	547	629	91	545
2	77	1003	92	553	636	92	551
2	78	1016	93	559	643	93	557
2	79	1029	94	565	650	94	563
2	80	1042	95	571	657	95	569
2	81	1055	96	577	664	96	575
2	82	1068	97	583	671	97	581
2	83	1081	98	589	678	98	587
2	84	1094	99	595	685	99	593
2	85	1107	100	601	692	100	599
2	86	1120	101	607	699	101	605
2	87	1133	102	613	706	102	611
2	88	1146	103	619	713	103	617
2	89	1159	104	625	720	104	623
2	90	1172	105	631	727	105	629
2	91	1185	106	637	734	106	635
2	92	1198	107	643	741	107	641
2	93	1211	108	649	748	108	647
2	94	1224	109	655	755	109	653
2	95	1237	110	661	762	110	659
2	96	1250	111	667	769	111	665
2	97	1263	112	673	776	112	671
2	98	1276	113	679	783	113	677
2	99	1289	114	685	790	114	683
2	100	1302	115	691	797	115	689
2	101	1315	116	697	804	116	695
2	102	1328	117	703	811	117	701
2	103	1341	118	709	818	118	707
2	104	1354	119	715	825	119	713
2	105	1367	120	721	832	120	719
2	106	1380	121	727	839	121	725
2	107	1393	122	733	846	122	731
2	108	1406	123	739	853	123	737
2	109	1419	124	745	860	124	743
2	110	1432	125	751	867	125	749
2	111	1445	126	757	874	126	755
2	112	1458	127	763	881	127	761
2	113	1471	128	769	888	128	767
2	114	1484	129	775	895	129	773
2	115	1497	130	781	902	130	779
2	116	1510	131	787	909	131	785
2	117	1523	132	793	916	132	791
2	118	1536	133	799	923	133	797
2	119	1549	134	805	930	134	803
2	120	1562	135	811	937	135	809
2	121	1575	136	817	944	136	815
2	122	1588	137	823	951	137	821
2	123	1601	138	829	958	138	827
2	124	1614	139	835	965	139	833
2	125	1627	140	841	972	140	839
2	126	1640	141	847	979	141	845
2	127	1653	142	853	986	142	851
2	128	1666	143	859	993	143	857
2	129	1679	144	865	1000	144	863
2	130	1692	145	871	1007	145	869
2	131	1705	146	877	1014	146	875
2	132	1718	147	883	1021	147	881
2	133	1731	148	889	1028	148	887
2	134	1744	149	895	1035	149	893
2	135	1757	150	901	1042	150	899
2	136	1770	151	907	1049	151	905
2	137	1783	152	913	1056	152	911
2	138	1796	153	919	1063	153	917
2	139	1809	154	925	1070	154	923
2	140	1822	155	931	1077	155	929
2	141	1835	156	937	1084	156	935
2	142	1848	157	943	1091	157	941
2	143	1861	158	949	1098	158	947
2	144	1874	159	955	1105	159	953
2	145	1887	160	961	1112	160	959
2	146	1900	161	967	1119	161	965
2	147	1913	162	973	1126	162	971
2	148	1926	163	979	1133	163	977
2	149	1939	164	985	1140	164	983
2	150	1952	165	991	1147	165	989
2	151	1965	166	997	1154	166	995
2	152	1978	167	1003	1161	167	1001
2	153	1991	168	1009	1168	168	1007
2	154	2004	169	1015	1175	169	1013
2	155	2017	170	1021	1182	170	1019
2	156	2030	171	1027	1189	171	1025
2	157	2043	172	1033	1196	172	1031
2	158	2056	173	1039	1203	173	1037
2	159	2069	174	1045	1210	174	1043
2	160	2082	175	1051	1217	175	1049
2	161	2095	176	1057	1224	176	1055
2	162	2108	177	1063	1231	177	1061
2	163	2121	178	1069	1238	178	1067
2	164	2134	179	1075	1245	179	1073
2	165	2147	180	1081	1252	180	1079
2	166	2160	181	1087	1259	181	1085
2	167	2173	182	1093	1266	182	1091
2	168	2186	183	1099	1273	183	1097
2	169						

2 Etude des ensembles $\mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ et $\mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$

Lemme 2.1

$$i- \mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*) = \mathcal{F}^- = \{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{Z}^*, \frac{k-\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z}^*\} \quad (\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

$$ii- \mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*) = \mathcal{F}^+ = \{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{Z}^*, \frac{k+\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z}^*\}$$

Preuve du lemme 2.1 : Démontrons le i-, la preuve du ii- est similaire :

En effet, il suffit de voir que :

$$k \in \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*) \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{*2} \text{ tels que } k = 6\alpha\beta + \alpha + \beta \iff \exists \alpha \in \mathbb{Z}^* \text{ tel que } \frac{k-\alpha}{1+6\alpha} \in \mathbb{Z}^*$$

Du lemme 2.1 et du Théorème 1.1, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 $\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times \mathcal{F}^- + 1 \cup 6 \times \mathcal{F}^+ - 1$ où :

$$\mathcal{F}^- = (\mathbb{Z} \cap \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})) \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*) = \mathbb{Z} \cap (\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)) \text{ et}$$

$$\mathcal{F}^+ = (\mathbb{Z} \cap \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})) \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*) = \mathbb{Z} \cap (\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$$

Remarque :

Interprétation Graphique du corollaire 2.1 : \mathcal{F}^+ est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe \overrightarrow{OZ} du graphe de l'application $\psi^-|_{\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}}$ dont on a enlevé les points qui sont dans l'intersection avec le graphe de l'application $\psi^-|_{\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*}$. Et \mathcal{F}^- est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe \overrightarrow{OZ} du graphe de l'application $\psi^+|_{\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}}$ dont on a enlevé les points qui sont dans l'intersection avec le graphe de l'application $\psi^+|_{\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*}$.

Il s'en suit que $\mathcal{P} \setminus \{\pm 2, \pm 3\}$ est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe \overrightarrow{OZ} des graphes de deux applications $6\psi^+ + 1$ et $6\psi^- - 1$ dont on a enlevé respectivement les points des graphes des applications $6\psi^+|_{\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*} + 1$ et $6\psi^-|_{\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*} - 1$.

Ce qui se traduit par :

Corollaire 2.2 $\mathcal{P} \setminus \{\pm 2, \pm 3\} = \mathcal{D}(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$

Où \mathcal{D} est l'application de $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ sur \mathbb{Z} définie par :

$$\mathcal{D} = [(6\psi^+ + 1) \times \mathbb{1}_{\mathbb{Z}} \circ (6\psi^+ + 1) \times (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} - \mathbb{1}_{6\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)+1}) \circ (6\psi^+ + 1)] + [(6\psi^- - 1) \times \mathbb{1}_{\mathbb{Z}} \circ (6\psi^- - 1) \times (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} - \mathbb{1}_{6\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)+1}) \circ (6\psi^- - 1)]$$

Remarque : Les nombres premiers sont donc déterminés par les applications ψ^+ et ψ^-

3 Algorithmme

Théorème 3.1 (Algorithmme) Soit n un entier relatif impair de $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 3\}$:

Si $n = 6k+1$, alors n est premier si et seulement si $\frac{\frac{n-1}{6}-\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z} \forall \alpha$ tel que $0 \leq \alpha \leq \frac{\frac{n-1}{6}-1}{7}$ et $\forall \alpha$ tel que $0 \leq -\alpha \leq \frac{\frac{n-1}{6}+1}{5}$

Si $n = 6k-1$, alors n est premier si et seulement si $\frac{\frac{n-1}{6}+\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z} \forall \alpha$ tel que $0 \leq \alpha \leq \frac{\frac{n-1}{6}-1}{5}$ et $\forall \alpha$ tel que $0 \leq -\alpha \leq \frac{\frac{n-1}{6}+1}{5}$

Preuve du Théorème 3.1 : Se déduit du lemme 2.1 et du Théorème 1.1.

Voici ci-dessous un code en langage C pour tester le dernier résultat.

```

1
2 // Début du code de test de primalité écrit
3 // par sghiar et rectifié le 22 août 2016
4 #include <stdio.h>
5 #include <stdlib.h>
6 int main()
7 {
8     int k ;
9     long n;
10    int ren;
11    long b=1;
12    double c = 1;
13    int e=1;
14    int f=1;

```

```
15     printf("Entrez un entier relatif pour tester
        sa primalité: ");
16     ren = scanf("%d", &n);
17     printf("Votre valeur est %d \n", n);
18
19     if(n==91||n==-91||n==49 ||n==-49 || n==35 ||n
        ==-35){
20     printf(" %.d n'est pas premier ",n);
21     }
22     else{
23         if( n==1 || n==-1 ){
24         printf(" %.d est premier par convention ",n)
                ;
25         }
26         else {
27         if((n-1)%6==0 ){
28         k=(n-1)/6;
29         for( b =1; b < (double)(k-1)/7 -1;b++ ){
30         c= (double)(k-b)/(1+6*b);
31         if((c -floor(c) )==0 ){
32         e=0;
33         }
34         }
35         for( b = -(double)(k+1)/5; b < 0;b++ ){
36         c= (double)(k-b)/(1+6*b);
37         if((c -floor(c) )==0){
38         f=0;
39         }
40         }
41         if (e*f==0){
42         printf(" %.d n'est pas premier",n);
43         }
44         else if (e*f==1){
45         printf(" %.d est premier",n);
46         }
47         }
48         else if((n+1)%6==0 ){
49         k=(n+1)/6;
50         for( b =1; b < (double)(k-1)/5;b++ ){
51         c= (double)(k+b)/(1+6*b);
52         if((c -floor(c) )==0){
```

```
53     e=0;
54     }
55     }
56     for( b = -(double)(k+1)/5; b < 0;b++ ){
57     c= (double)(k+b)/(1+6*b);
58     if((c -floor(c) )==0){
59     f=0;
60     }
61     }
62     if (e*f==0){
63     printf(" %.d  n'est pas premier",n);
64     }
65     else if (e*f==1){
66     printf(" %.d  est  premier",n);
67     }
68     }
69     else if(n==2 ||n==-2 || n==3 ||n==-3){
70     printf(" %.d  est  premier",n);
71     }
72     else {
73     printf(" %d  n'est pas premier",n);
74     }
75     }
76     }
77     }
78     //Fin du code
```

4 Le lien entre les fonctions ζ et ψ

Le lien entre la fonction ζ et les nombres premiers avait déjà été établi par Leonhard Euler avec la formule, valable pour $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \dots}$$

où le produit infini est étendu à l'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers. On appelle parfois cette formule produit eulérien.

On en déduit :

Corollaire 4.1 (Un lien entre ψ et ζ)

$$\exists \mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} / \forall s, Re(s) > 1 : \zeta(s) = \prod_{k \in \mathcal{K}} \frac{1}{1 - (6\psi^+(k) + 1)^{-s}} \prod_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{1 - (6\psi^-(l) - 1)^{-s}}$$

5 La première preuve de l'hypothèse de Riemann

Le but de cette section est de donner une première démonstration de l'hypothèse de Riemann en utilisant l'analyse et la géométrie.

Théorème 5.1 (L'hypothèse de Riemann) [6]

Les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle $1/2$.

Preuve du Théorème 5.1 :

Comme la fonction zêta de Dirichlet peut être définie par $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$

où : $\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$

On a en particulier :

$$\zeta(z) = \frac{1}{1 - 2^{1-z}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$$

pour $0 < \text{Re}(z) < 1$,

On en déduit que :

$$(1 - 2^{1-s})k^z \zeta(z) = (-1)^{k-1} + k^z \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$$

$$(-1)^k = k^z \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} \tag{1}$$

si z est une racine non triviale de ζ .

Soit :

$$0 = \frac{(-1)^{k+1}}{k^z} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} \tag{2}$$

si z est une racine non triviale de ζ .

Or de l'équation (2),

$$\left| \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} \right|$$

est plus petit que $k^\mu \forall \mu \geq 0$, donc

$$\left| \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} \right| = k^{\mu-\epsilon} \text{ avec } \epsilon \geq 0,$$

$$|k^{z+\mu-\epsilon}| = 1 \tag{3}$$

De 3 on déduit :

$$x + \mu - \epsilon = 0 \tag{4}$$

Si z' est une autre racine non triviale de ζ , avec $Re(z') = x'$ alors il existe μ' et ϵ' tels que :

$$x' + \mu' - \epsilon' = 0 \tag{5}$$

Et

$$\alpha((x' + x) + (\mu' + \mu) - (\epsilon' + \epsilon)) = 0; \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Donc l'ensemble $\mathcal{S} = \{(x, \mu, \epsilon) / x + \mu - \epsilon = 0, x = Re(z), \zeta(z) = 0\}$ est contenu dans le \mathbb{R} - espace vectoriel \mathcal{S}' de dimension deux : $\mathcal{S}' = \{(x, \mu, x + \mu), (x, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

On en déduit que si \mathcal{Z} est l'ensemble des zéros $x + iy$ non triviaux de ζ , alors \mathcal{Z} est contenu dans la droite \mathcal{D} intersection du plan \mathcal{S}' avec le plan $z = 0$, donc tout les points de \mathcal{Z} sont **alignés**.

On peut voir facilement que $\mathcal{D} = \{\rho e^{i\frac{\pi}{4}}, \rho \in \mathbb{R}\}$

Dans un repère convenablement choisi, tout les points de \mathcal{Z} auront pour partie réel $\frac{1}{2}$: En effet , il suffit de faire le changement suivant :

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto i(z - \frac{1}{2})e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

τ agit sur ζ comme suit : $\tau\zeta(z) = \zeta(\tau(z))$.

On a donc : $\tau\zeta\tau^{-1}(z) = \zeta(z)$. (Invariance de $\zeta(z)$ sous l'action adjointe)

$$\tau\zeta\tau^{-1}(\tau(z)) = 0 \implies \tau\zeta(z) = 0 \implies \zeta(\tau(z)) = 0 \implies \tau(z) \in \mathcal{D} \implies \tau(z) = \rho e^{i\frac{\pi}{4}} \implies \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}.$$

D' où l'hypothèse de Riemann. ✓

Fin de la première preuve de l'hypothèse de Riemann ✓

Remarque : On ne doit pas s'étonner par l'introduction nouvelle du repère et de l'action adjointe sur ζ : En fait on peut interpréter ceci comme suit : Tout point de l'espace est considéré comme une particule dont la position est défini relativement par rapport au repère choisi. Et ζ est une action sur les particules....

Cette idée je l'ai déjà utilisée dans l'article déposé dans les hal : "Relativité et théorie des des nombres" et qui a permis la preuve de nombreux conjectures, en particulier la preuve de l'Hypothèse de Riemann en utilisant des techniques relativistes.

6 Une deuxième preuve de l'hypothèse de Riemann

Le but de cette section est de donner une deuxième démonstration de l'hypothèse de Riemann à partir du lien entre les fonctions ζ et ψ .

Théorème 6.1 (L'hypothèse de Riemann) [6]

Les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle $1/2$.

Lemme 6.1 :

Toutes les racines non triviales de ζ sont symétriques par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$

Preuve : Résulte de l'équation fonctionnelle :

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s),$$

Lemme 6.2 *Les zéros s non triviaux de ζ vérifient $0 < \text{Re}(s) < 1$*

Preuve : Ce résultat est très connu.

Le lien entre la fonction ζ et les nombres premiers avait déjà été établi par Leonhard Euler avec la formule, valable pour $\text{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \dots}$$

où le produit infini est étendu à l'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers. On appelle parfois cette formule produit eulérien.

Et comme la fonction éta de Dirichlet peut être définie par $\eta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$

où : $\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$

On a en particulier :

$$\zeta(z) = \frac{1}{1 - 2^{1-z}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$$

pour $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$,

On en déduit le corollaire suivant qui est similaire au corollaire 4.1 :

Corollaire 6.1 (un lien entre ψ et ζ) $\exists \mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} / \forall s \neq 0 < \operatorname{Re}(s) < 1$, $\zeta(s) = \prod_{k \in \mathcal{K}} \frac{1}{1 - (6\psi^+(k) + 1)^{-s}} \prod_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{1 - (6\psi^-(l) - 1)^{-s}}$

Preuve : Se déduit des sections précédentes.

Et on en déduit aussi que :

$$\zeta(2z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2z}}$$

est bien définie en particulier pour $2z$ tel que $0 < \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}$.

Remarque et définition des $\mathcal{B}_{\mu,h}$:

De ce qui est dit ci-dessus, $\zeta(s)$ est bien définie pour $s = 2z$ avec $0 < \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}$, ceci justifie l'introduction des $\mathcal{B}_{\mu,h}$ pour localiser les zéros non triviaux :

Posons $\mathcal{B}_{\mu,h} = \{z \in \mathbb{C} / \frac{1}{2} + \mu \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 - \mu \text{ et } \mu \leq |\operatorname{Im}z| \leq h\} \cup \{z \in \mathbb{C} / \mu \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2} - \mu \text{ et } \mu \leq |\operatorname{Im}z| \leq h\}$ où $0 < \mu < \frac{1}{4}$

Posons $f_n(s) = \sum_{k \in \mathcal{K}, 6\psi^+(k)+1 \leq n} \log(|1 - (6\psi^+(k) + 1)^{-s}|) + \sum_{l \in \mathcal{L}, 6\psi^-(l)-1 \leq n} \log(|1 - (6\psi^-(l) - 1)^{-s}|)$

Lemme 6.3 $\mathcal{B}_{\mu,h}$ est compact et symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$

Corollaire 6.2 $\forall \mathcal{B}_{\mu,h}, \exists \mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} / \forall s \in \mathcal{B}_{\mu,h} : \log(|\zeta(s)|^{-1}) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \log(|1 - (6\psi^+(k) + 1)^{-s}|) + \sum_{l \in \mathcal{L}} \log(|1 - (6\psi^-(l) - 1)^{-s}|)$

On en déduit que : $\forall \mathcal{B}_{\mu,h}, \exists \mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} / \forall s \in \mathcal{B}_{\mu,h} : |\log(|\zeta(s)|^{-1})| \leq \sum_{k \in \mathcal{K}} |\log(|1 - (6\psi^+(k) + 1)^{-s}|)| + \sum_{l \in \mathcal{L}} |\log(|1 - (6\psi^-(l) - 1)^{-s}|)|$

Preuve du Corollaire 6.2 : Se déduit du 6.1 par passage au log, et du fait que la suite f_n converge simplement dans le compact $\mathcal{B}_{\mu,h}$ vers $\log(|\zeta|^{-1})$.

Corollaire 6.3 $\forall s \in \mathcal{B}_{\mu,h} : \zeta(s) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathcal{K} / |\log(|1 - (6\psi^+(k) + 1)^{-s}|)| = +\infty$ ou $\exists l \in \mathcal{L} / |\log(|1 - (6\psi^-(l) - 1)^{-s}|)| = +\infty$

Où $\mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

Preuve : Se déduit directement du corollaire 6.2 et du fait que la suite f_n qui converge simplement dans le compact $\mathcal{B}_{\mu,h}$ vers $\log(|\zeta|^{-1})$ convergera uniformément vers $\log(|\zeta|^{-1})$ dans le compact $\mathcal{B}_{\mu,h}$.

La deuxième preuve de l'hypothèse de Riemann :

Du corollaire 6.3 , si $\zeta(s) = 0$ avec $s \in \mathcal{B}_{\mu,h}$, alors : $\exists k \in \mathcal{K} / |\log(|1 - (6\psi^+(k) + 1)^{-s}|)| = +\infty$ ou $\exists l \in \mathcal{L} / |\log(|1 - (6\psi^-(l) - 1)^{-s}|)| = +\infty$

Donc $\exists k \in \mathcal{K} / 1 = |(6\psi^+(k) + 1)^{-s}|$ ou $\exists l \in \mathcal{L} / 1 = |(6\psi^-(l) - 1)^{-s}|$

Supposons que

$$\exists k \in \mathcal{K} / 1 = |(6\psi^+(k) + 1)^{-s}| \tag{7}$$

Comme du lemme 6.1 les racines non triviaux de ζ sont symétriques par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$, alors de l'équation 7, en posant $s = \frac{1}{2} + x + iy$ on doit avoir :

$$1 = |(6\psi^+(k) + 1)^{-\frac{1}{2}-x-iy}| = |(6\psi^+(k) + 1)^{-\frac{1}{2}-x}| \tag{8}$$

Donc $x = -\frac{1}{2}$, et par suite $Re(s) = 0$, ce qui est impossible puisque $s \in \mathcal{B}_{\mu,h}$.

Si $s' = \frac{1}{2} - x + iy$ est la racine symétrique de s , on doit avoir : $x = \frac{1}{2}$, et par suite $Re(s) = 1$ et $Re(z) = Re(\frac{s}{2}) = \frac{1}{2}$, ce qui est impossible puisque $0 < Re(z) < \frac{1}{2}$.

On en déduit que si $\zeta(s) = 0$ alors : $Re(s) = \frac{1}{2}$

Fin de la deuxième preuve de l'hypothèse de Riemann ✓

7 La troisième preuve de l'hypothèse de Riemann

Le but de cette section est de donner une troisième preuve de l'hypothèse de Riemann, en utilisant de la géométrie algébrique :

Théorème 7.1 (L'hypothèse de Riemann) [6]

Les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle $1/2$.

Pour cette troisième preuve, rappelons que dans la première preuve de l'hypothèse de Riemann, on a montré que si z est une racine non triviale de ζ avec $Re(z) = \frac{1}{2} + x$, alors :

$$\frac{1}{2} + x + \mu - \epsilon = 0 \quad (9)$$

Soit :

$$x + \left(\mu + \frac{1}{2}\right) - \epsilon = 0 \quad (10)$$

Or du lemme 6.1, on sait que les racines non triviales de ζ , sont symétriques par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$, donc il existe ϵ' tel que :

$$\frac{1}{2} - x + \mu' - \epsilon' = 0 \quad (11)$$

Soit :

$$-x + \left(\mu + \frac{1}{2}\right) - \epsilon'' = 0 \quad (12)$$

Les équations 10 et 12 sont des équations de deux plans qui rencontrent le plan $\epsilon' = 0$ en un point tel que :

$x + \left(\mu + \frac{1}{2}\right) = 0$ et $-x + \left(\mu + \frac{1}{2}\right) = 0$, donc $x = 0$.

Soit :

$$Re(z) = \frac{1}{2} + x = \frac{1}{2}$$

D'où la troisième preuve de l'hypothèse de Riemann.✓

Fin de la troisième preuve de l'hypothèse de Riemann ✓

8 La quatrième preuve de l'hypothèse de Riemann

Le but de cette section est de donner une quatrième preuve de l'hypothèse de Riemann. Cette preuve à une ressemblance avec la résolution d'une équation linéaire dans un \mathcal{K} -espace vectoriel.

Théorème 8.1 (L'hypothèse de Riemann) [6]

Les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle $1/2$.

Posons $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}, / |z - a| < r\}$

Posons $\mathcal{B}_{\epsilon, h} = \{z \in \mathbb{C} / 0 \leq Re(z) \leq 1 \text{ et } 0 \leq |Imz| \leq h\} \setminus \{D(1, \epsilon)\}$ où $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$

Soit τ la transformation sur \mathbb{C} :

$$\tau : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{2} - x + iy$$

Par un raisonnement similaire à celle faite dans la deuxième preuve, on a :

Corollaire 8.1 $\forall s \in \mathcal{B}_{\epsilon, h} : \zeta(\tau(s)) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathcal{K} / |\log(|1 - (6\psi^+(k) + 1)^{-\tau(s)}|)| = +\infty$ ou $\exists l \in \mathcal{L} / |\log(|1 - (6\psi^-(l) - 1)^{-\tau(s)}|)| = +\infty$

Où $\mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

Corollaire 8.2 $\zeta(\tau(z)) = 0 \implies Re(\tau(z)) = 0$ si $z \in \mathcal{B}_{\epsilon, h}$.

Preuve de l'hypothèse de Riemann :

τ agit sur ζ comme suit : $\tau\zeta(z) = \zeta(\tau(z))$.

On a donc : $\tau\zeta\tau^{-1}(z) = \zeta(z)$. (Invariance de $\zeta(z)$ sous l'action adjointe)

$\tau\zeta\tau^{-1}(\tau(z)) = 0 \implies \tau\zeta(z) = 0 \implies \zeta(\tau(z)) = 0 \implies Re(\tau(z)) = 0 \implies$

$Re(z) = \frac{1}{2}$ si $z \in \mathcal{B}_{\epsilon, h}$.

D' où l'hypothèse de Riemann. ✓

Remarque :

Le passage de ζ à $\tau\zeta\tau^{-1}$ ressemble au fait suivant :

Soit E un \mathcal{K} -espace vectoriel de dimension finie, et soient \mathcal{E} et \mathcal{E}' deux bases de E .

Soit \mathcal{A} un opérateur linéaire sur E .

Si \mathcal{P} est la matrice de passage de \mathcal{E} à \mathcal{E}' et si \mathcal{X} est un vecteur de E , alors $\mathcal{A}(\mathcal{X}) = 0$ dans $\mathcal{E} \iff \mathcal{P}\mathcal{A}\mathcal{P}^{-1}(\mathcal{P}(\mathcal{X}')) = 0$ dans \mathcal{E}'

Fin de la quatrième preuve de l'hypothèse de Riemann ✓

9 La cinquième preuve de l'hypothèse de Riemann et l'invariance des Spins $0, \frac{1}{2},$ et 1

Le but de cette section est de donner une cinquième preuve de l'hypothèse de Riemann, et de montrer la particularité et l'invariance des Spins $0, \frac{1}{2},$ et 1 .

Théorème 9.1 (L'hypothèse de Riemann) [6]

Les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle $1/2$.

Posons $\mathcal{B}_{\epsilon,h} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Re}(z) \leq 1 \text{ et } \epsilon \leq |\text{Im}z| \leq h\}$ où $(\epsilon, h) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^+$

Soit $\tau = \tau_{\alpha,\beta}$, ($\beta \in \mathbb{R}^*$) la transformation sur \mathbb{C} :

$$\tau : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \mapsto & \alpha + \beta x + iy \end{array}$$

Par un raisonnement similaire à celle faite dans la deuxième preuve, on a :

Corollaire 9.1 $\forall s \in \mathcal{B}_{\epsilon,h} : \zeta(\tau(s)) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathcal{K} \mid |\log(|1 - (6\psi^+(k) + 1)^{-\tau(s)}|)| = +\infty$ ou $\exists l \in \mathcal{L} \mid |\log(|1 - (6\psi^-(l) - 1)^{-\tau(s)}|)| = +\infty$

Où $\mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

Corollaire 9.2 $\zeta(\tau(z)) = 0 \Rightarrow \text{Re}(\tau(z)) = 0$ si $z \in \mathcal{B}_{\epsilon,h}$.

Preuve de l'hypothèse de Riemann :

Cette fois, on fait agir τ sur ζ comme suit : $\tau\zeta(z) = \zeta(\tau^{-1}(z))$.

On a donc : $\tau\zeta\tau(z) = \zeta(z)$ si $z \in \mathcal{B}_{\epsilon,h}$ (Invariance de ζ sous l'action de τ).

$\tau\zeta\tau(\tau(z)) = 0 \Rightarrow \zeta(\tau(z)) = 0 \Rightarrow \text{Re}(\tau(z)) = 0 \Rightarrow \text{Re}(z) = -\frac{\alpha}{\beta}$ si $z \in \mathcal{B}_{\epsilon,h}$.

Or par symétrie des racines de ζ par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$, si $z = \frac{1}{2} + x + iy$ et $z' = \frac{1}{2} - x + iy$ sont deux racines de ζ , alors :

$$\frac{1}{2} + x = -\frac{\alpha}{\beta}$$

Et

$$\frac{1}{2} - x = -\frac{\alpha}{\beta}$$

Donc :

$$x = 0 \text{ et } -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$$

Et par suite :

$$Re(z) = \frac{1}{2}$$

D' où l'hypothèse de Riemann. ✓

Remarques et commentaires :

1- Si $\tau = \tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\frac{1}{2},-1}$, alors $\tau = \tau^{-1}$, et $\tau\zeta\tau = \tau\zeta\tau^{-1}$: Ce qui ressemble à un changement de base en algèbre linéaire (voir la remarque de la page 32)

2- Si $\tau = \tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\frac{1}{2},-1}$, alors $\tau = \tau^{-1}$, soit $\tau^2 = I_2$, ceci a une ressemblance avec les matrices de **Pauli** :

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Qui vérifient elles aussi :

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2, \quad \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i \text{ pour } i \neq j$$

Et pour rappel, les matrices de Pauli, développées par Wolfgang Pauli, forment, au facteur i près, une base de l'algèbre de Lie du groupe $SU(2)$, et sont uti-

lisées en mécanique quantique pour représenter le **spin** des particules.

3- Sous l'action $\tau = \tau_{\alpha,\beta}$ la particule z va subir l'action $\tau\zeta\tau(\tau(z))$, cette dernière action est nulle si le Spin de la particule (sa partie réelle) est $\frac{1}{2}$: autrement dit les particules de Spin $\frac{1}{2}$ conserveront leur Spin.

4- En utilisant la fonction de Dieu \mathcal{D} (voir la section 11), on en déduit de la même façon que les Spins 0, $\frac{1}{2}$ et 1 sont conservés.

Pour rappel : Les particules élémentaires du **modèle standard** sont au nombre de 25 et leurs Spins appartiennent à $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Fin de la cinquième preuve de l'hypothèse de Riemann ✓

10 L'action du groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$ sur le spin des particules

Si M est une matrice du groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$, on définit l'action de M sur ζ par :

$M\zeta(z) = \zeta M(z)$, de même on définit l'action de M sur la fonction de Dieu \mathcal{D} par :

$$M\mathcal{D}(z) = \mathcal{D}(M(z)).$$

Théorème 10.1 *Les zéros non triviaux de la fonction de Dieu \mathcal{D} sont des particules de Spin $0, \frac{1}{2}$, et 1 , et les zéros non triviaux de la fonction zeta sont des particules de Spin $\frac{1}{2}$. Et l'ensemble des Spins $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ est invariant sous l'action du groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$.*

Preuve :

Dans la cinquième preuve de l'hypothèse de Riemann, on a utilisé $\tau = \tau_{\alpha,\beta}$.

Si $\tau = \tau_{\alpha,\beta} = \tau_{\frac{1}{2},-1}$, alors $\tau = \tau^{-1}$, d'où l'idée de remplacer τ par toute matrice M inversible.

Mais comme il faut que ζM et $\mathcal{D}M$ soient bien définies, ceci on l'a si M est un élément de $O_2(\mathbb{R})$.

En reprenant la cinquième démonstration, on déduit le résultat. On retrouve donc en particulier que les zéros de la fonction ζ de Riemann sont tous sur la droite $x = \frac{1}{2}$!.

11 La fonction de Dieu et le Spin des particules

Est-ce un message codé par le Premier qui a aligné de la sorte les zéros de de la fonction zeta de Riemann ?

Au début, cette question peut paraître un peu étrange! mais si l'on sait qu'il y'a une connexion entre la fonction zéta de Riemann et la physique - Par exemple la distribution des zéros sur la droite critique $x = \frac{1}{2}$ et la distribution des niveaux d'énergie d'un noyau atomique satisfont au même statistique - cette étrangeté s'amenuiseet même si l'on doute qu'il y'a un message derrière, on reste ébahi devant la beauté de cette alignement géométrique des zéros...(voir figure 1) et devant le fait qu'on retrouve que le spin d'une particule est soit un entier soit un demi-entier.

Pour voir cela, d'abord les zéros de la fonction ζ sont aussi les zéros d'une autre fonction appelée fonction de **Dieu** suivante :

Définition :

La fonction de Dieu \mathcal{D} est définie par :

$$\mathcal{D} : \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \zeta\left(z - \frac{1}{2}\right)\zeta(z)\zeta\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

Si z est une racine de \mathcal{D} , le Spin de z est $Spin(z) = Re(z)$

Une particule p_i est un ensemble fini de zéros z_{i_j} de \mathcal{D} .

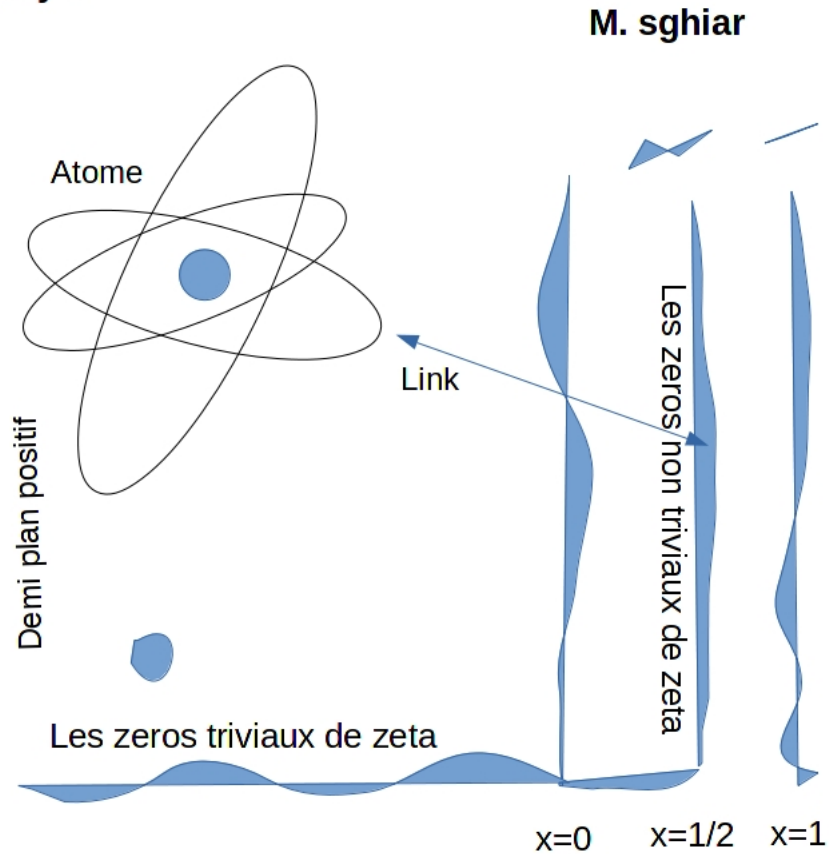
Le Spin de p_i est $Spin(p_i) = \sum_{i_j} Spin(z_{i_j})$

Corollaire 11.1 *Les racines z non triviales de \mathcal{D} vérifient $Spin(z) \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$*

Remarque :

1- L'appellation de fonction de Dieu vient du fait que les zéros z de \mathcal{D} tels que $Im(z) \geq 0$ appartiennent à un graphe ayant l'allure du nom de Dieu en arabe.(voir figure 2).

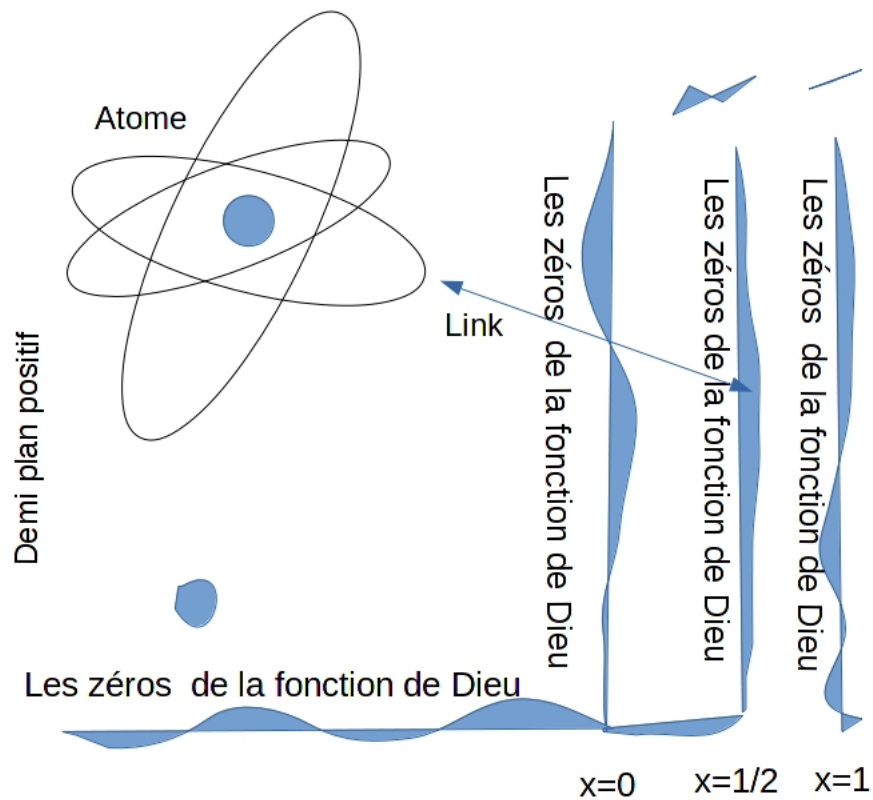
Is it a coded message by the First who aligned the zeros of the Riemann zeta function in this way ?



هُوَ الْأَوَّلُ وَالْآخِرُ وَالظَّاهِرُ وَالْبَاطِنُ وَهُوَ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ
He is the First and the Last and the Ascendant (over all) and the Knower of hidden things, and He is Cognizant of all things.

FIGURE 1 – a coded message

Is it a coded message by the First who aligned the zeros of the God function D in this way ?
M. sghiar



هُوَ الْأَوَّلُ وَالْآخِرُ وَالظَّاهِرُ وَالْبَاطِنُ وَهُوَ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ
He is the First and the Last and the Ascendant (over all) and the Knower of hidden things, and He is Cognizant of all things.

FIGURE 2 – a coded message

2- Le champs crée par l'action de la fonction ζ et qui s'annule en certaines particules qui sont alignées et qui ont même partie réelle laisse penser que ces particules ont une propriété intrinsèque dépendante de leurs parties réelles que j'ai liée avec le Spin des particules en physique (voir rappel ci-dessous).

Corollaire 11.2 (Spin d'une particule) *Le Spin d'une particule est soit un entier soit un demi-entier.*

Rappel de Spin en physique :

Le **spin** d'une particule est son moment angulaire intrinsèque. Le spin est une propriété quantique, il ne peut prendre que des valeurs entières ou demi-entières. Une particule de **spin demi-entier** est un **fermion**, une particule de **spin entier** est un **boson**.

Un **fermion** est une particule de spin demi-entier, il obéit à la statistique de Fermi-Dirac. Les leptons et les quarks sont des fermions. Les photons n'en sont pas.

Les fermions obéissent au principe d'exclusion de **Pauli**, et ne peuvent pas se trouver dans le même état quantique

Un **boson** est une particule de spin entier, il obéit à la statistique de Bose-Einstein. Les photons, les gluons, les W , le Z^0 et le Higgs sont des bosons.

Spin 0 : le boson de Higgs.

Spin 1/2 : l'électron, le positron, le proton, le neutron, les neutrinos, les quarks, etc.

Spin 1 : le photon, les bosons W^\pm et Z^0 vecteurs de l'interaction faible.

Spin 2 : le graviton, particule hypothétique vecteur de la gravitation.

Pour rappel : Les particules élémentaires du **modèle standard** sont au nombre de 25 et leurs Spins appartiennent à $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

12 Conclusion

Pour explorer l'univers des particules, les physiciens se sont servis des accélérateurs des particules pour les faire entrer en collision et étudier les particules élémentaires générées au cours de cette collision.

Par analogie, pour étudier les zéros de la fonction ζ qui sont aussi les zéros de la fonction de Dieu \mathcal{D} et que j'ai assimilés à des particules, il m'a fallu les "accélérer" en faisant agir sur elles certaines types de transformations tels que le groupe $O_2(\mathbb{R})$, et là c'est la surprise : le Spin des zéros non triviaux de la fonction ζ est bien égal à $\frac{1}{2}$ et le spectre des Spins des zéros non triviaux de la fonction de Dieu \mathcal{D} est égal à $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, ce qui correspond bien aux spins des particules élémentaires du **modèle standard** !.

Références

- [1] Lililiane Alfonsi. *Etienne Bézout (1730-1783), mathématicien des Lumières*. 2011. L. Alfonsi indique aussi quelques manuels du début du XXe siècle où le nom de Bézout est utilisé.
- [2] R. J. Backlund. Sur les zéros de la fonction zeta de riemann. *CRAS*, 158 :1979–1981, 1914.
- [3] Pierre Colmez et Philippe Biane Jean-Benoît Bost. *La Fonction Zêta*. Éditions de l'École polytechnique, Paris, 2002.
- [4] Roshdi Rashed. Entre arithmétique et algèbre : Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes. *Paris*, 1984.
- [5] Ribenboim. *introduction du chapitre 3*. 1996.
- [6] Karl Sabbagh. *The Riemann Hypothesis : The Greatest Unsolved Problem in Mathematics*. ISBN 0-374-52935-3. Farrar, Straus and Giroux, 2004.
- [7] Edward Waring. *Edward Waring Meditationes*. 1770.

M.Sghiar
msghiar21@gmail.com