



**HAL**  
open science

## Vérification de la cohérence des multi-réseaux de contraintes qualitatives

Quentin Cohen-Solal, Maroua Bouzid, Alexandre Niveau

► **To cite this version:**

Quentin Cohen-Solal, Maroua Bouzid, Alexandre Niveau. Vérification de la cohérence des multi-réseaux de contraintes qualitatives. Conférence Nationale en Intelligence Artificielle, Jun 2016, Clermont-Ferrand, France. hal-01355467

**HAL Id: hal-01355467**

**<https://hal.science/hal-01355467v1>**

Submitted on 21 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Vérification de la cohérence des multi-réseaux de contraintes qualitatives

Quentin Cohen-Solal

Maroua Bouzid

Alexandre Niveau

GREYC-CNRS, Université de Caen, France

{quentin.cohen-solal, maroua.bouzid-mouaddib, alexandre.niveau}@unicaen.fr

## Résumé

Nous étudions le problème de la vérification de la cohérence de réseaux de contraintes dans le cadre de combinaisons de formalismes qualitatifs. En nous inspirant des principes de « l'intégration lâche », nous proposons un cadre formel pour l'étude de multi-réseaux de contraintes qualitatives, dans lesquels les relations entre variables peuvent provenir de plusieurs algèbres de relations différentes. Nous identifions des conditions suffisantes assurant la traitabilité de la vérification de la cohérence des multi-réseaux sur une sous-classe, et appliquons ces résultats au raisonnement temporel multi-échelle qualitatif.

## Mots-clefs

Réseaux de contraintes qualitatives, Raisonnement multi-échelle, Intégration lâche, Sous-classe traitable.

## Abstract

We study the problem of checking the consistency of constraint networks over combined qualitative formalisms. Building upon the principles of “loose integration”, we propose a framework for studying qualitative constraint multi-networks, in which relations between variables can be taken from several different algebras. We identify sufficient conditions ensuring the tractability of deciding whether a multi-network over a subclass is consistent, and we apply these results to multi-scale temporal reasoning.

## Keywords

Qualitative constraint networks, Multi-scale reasoning, Loose integration, Tractable subclass.

## 1 Introduction

Le raisonnement sur le temps et l'espace est omniprésent dans la vie quotidienne. Les ordinateurs peuvent être dotés de ce raisonnement grâce à des approches quantitatives ; cependant, dans le contexte des interactions homme-machine, les informations quantitatives sont souvent indisponibles ou inexploitable. C'est pourquoi la recherche s'intéresse aux approches *qualitatives* du raisonnement sur le temps et l'espace, dans le contexte de l'intelligence artificielle mais également dans ceux des systèmes d'informations géographiques, des bases de données et du multimédia [7]. Plusieurs travaux récents se concentrent sur la

combinaison d'approches qualitatives ; une des combinaisons les plus étudiées est *l'intégration lâche* [7, Ch. 15].

Le *raisonnement multi-échelle*, c'est-à-dire la capacité de raisonner à différents niveaux de détails, est lui aussi fondamental à l'intelligence humaine [5]. Il permet de traiter une forme particulière d'incertitude, *l'indistinguabilité* (par exemple, à l'échelle des minutes, toutes les secondes de la même minute sont considérées comme identiques), ainsi que la hiérarchisation des données et les problématiques de conversion des informations d'une échelle à une autre. Le raisonnement multi-échelle a été étudié dans le cadre temporel et spatial [3, 6, 1].

Les intégrations lâches et les représentations multi-échelles peuvent être vues comme des *multi-réseaux de contraintes qualitatives* : dans les deux cas, une relation d'un des réseaux peut imposer une relation entre les mêmes variables dans chaque autre réseau. Nous proposons un cadre formel pour l'étude de tels multi-réseaux, en particulier dans le contexte de la vérification de la cohérence, tâche fondamentale pour le raisonnement qualitatif. Plus précisément, nous identifions des conditions suffisantes pour que la *clôture algébrique* généralisée d'un réseau implique l'existence d'un *scénario algébriquement clos* : c'est une condition nécessaire pour sa cohérence qui est aussi suffisante pour certains formalismes. Cela permet de trouver des sous-classes polynomiales pour la vérification de la cohérence.

Nous commençons par rappeler les concepts fondamentaux des formalismes temporels et spatiaux, puis nous présentons l'intégration lâche. La section 3 introduit notre cadre formel pour l'analyse des multi-réseaux de contraintes qualitatives, et en section 4 nous étudions leur traitabilité et illustrons nos résultats en les appliquant à la combinaison « taille-topologie ». Enfin, nous présentons brièvement le raisonnement multi-échelle qualitatif et identifions, grâce à notre cadre formel, des sous-classes traitables maximales des formalismes temporels multi-échelles qualitatifs.

## 2 Contexte

### 2.1 Formalismes qualitatifs

Dans le cadre du raisonnement qualitatif sur le temps et l'espace, on s'intéresse en particulier à la vérification de la cohérence de descriptions temporelles et spatiales, prenant

la forme de *relations* entre des *entités* temporelles ou spatiales d'un ensemble  $U$ . Chaque relation est un ensemble de relations *basiques* provenant d'un ensemble  $\mathcal{B}$  (de relations exhaustives et deux à deux disjointes) : cela permet de représenter une ambiguïté sur la relation basique réelle. L'ensemble de toutes les relations forme une algèbre non-associative  $\mathcal{A} = 2^{\mathcal{B}}$  [7, Ch. 11]. Dans la suite, nous ne faisons pas la distinction entre une relation basique et un ensemble ne contenant qu'une seule relation basique. Il y a plusieurs opérateurs sur les relations de  $\mathcal{A}$  : l'*inverse* d'une relation  $r$ , notée  $\bar{r}$ , la composition faible de  $r_1$  et  $r_2$ , notée  $r_1 \diamond r_2$ , et l'*intersection* de  $r_1$  et  $r_2$ , notée  $r_1 \cap r_2$ .

Une description temporelle ou spatiale peut être modélisée par un *réseau de contraintes qualitatives* – un graphe dont les nœuds sont des entités et dont chaque arc est étiqueté avec une relation de  $\mathcal{A}$ . Plus formellement, un réseau de contraintes qualitatives  $N$  sur un ensemble de relations  $\mathcal{S} \subseteq 2^{\mathcal{B}}$  est un couple  $N = (E, C)$  où  $E$  est un ensemble fini de variables d'entités de  $U$  et  $C$  est un ensemble de *contraintes sur  $\mathcal{S}$* , chacune étant un triplet  $(x, r, y)$ , avec  $x \neq y \in E$  et  $r \in \mathcal{S}$ . Dans cet article, les réseaux de contraintes sont normalisés, c'est-à-dire qu'ils contiennent exactement une contrainte pour chaque couple  $(x, y)$ , notée  $N_{xy}$ , et qu'ils vérifient  $N_{xy} = \overline{N_{yx}}$ . Si  $N_{xy}$  est l'ensemble  $\mathcal{B}$  entier, le réseau n'impose en fait aucune contrainte entre les deux entités. On dit qu'un réseau  $N$  *affine* un autre réseau  $N'$  si on a la propriété  $\forall x, y \in E, N_{xy} \subseteq N'_{xy}$ , que l'on note  $N \subseteq N'$ .

Quand un réseau de contraintes  $N$  est associé à un formalisme qualitatif [7, Ch. 11], une *solution* de  $N$  est un ensemble  $\{u_x\}_{x \in E} \subseteq U$  tel que  $\forall x, y \in E, (u_x, u_y) \in \varphi(N_{xy})$ , où  $\varphi$  associe chaque relation  $r$  de l'algèbre à l'ensemble de tous les couples d'entités satisfaisant  $r$ , appelé son *interprétation*. Un problème fondamental est de déterminer si un réseau de contraintes a au moins une solution, auquel cas il est dit *cohérent*. À chaque solution d'un réseau  $N$  correspond un unique *scénario* de  $N$ , c'est-à-dire un réseau  $S \subseteq N$  vérifiant  $\forall x, y \in E, S_{xy} \in \mathcal{B}$ . Trouver une solution d'un réseau  $N$  revient à trouver un scénario cohérent  $S$  de  $N$ , puisque toute solution de  $S$  est une solution de  $N$ . Vérifier la cohérence d'un réseau étant un problème NP-complet pour de nombreux formalismes [7, Ch. 4], de nombreux travaux portent sur l'identification de *sous-classes traitables* [7, Ch. 4], qui sont des ensembles  $\mathcal{S} \subseteq 2^{\mathcal{B}}$  clos par les trois opérateurs, tels qu'il est polynomial de décider de la cohérence de tout réseau sur  $\mathcal{S}$ .

Un réseau de contraintes est *algébriquement clos* si pour tous  $x, y, z \in E$ , on a  $N_{xz} \subseteq N_{xy} \diamond N_{yz}$ . La *clôture algébrique* d'un réseau est le réseau algébriquement clos ayant les mêmes solutions; on peut la calculer (en temps polynomial) en remplaçant itérativement chaque  $N_{xz}$  par  $(N_{xy} \diamond N_{yz}) \cap N_{xz}$  jusqu'à atteindre un point fixe. Si le réseau résultant ne contient aucune contrainte vide, il est dit *chemin-cohérent* ou *◊-cohérent*. Notons qu'il existe des formalismes qualitatifs dont certains scénarios algébriquement clos ne sont pas cohérents [7, Ch. 9], mais lorsqu'ils le sont tous, la cohérence d'un réseau peut être décidée en

cherchant un scénario algébriquement clos, via des méthodes de *backtrack* basées sur la clôture algébrique [7, Ch. 2]. Pour certaines sous-classes, tout réseau chemin-cohérent est cohérent, il n'y a donc pas besoin de *backtrack* : ces sous-classes traitables sont d'un grand intérêt pratique.

## 2.2 Intégration lâche

Des travaux récents se sont concentrés sur l'*intégration lâche* de deux formalismes qualitatifs et leur *bi-réseaux de contraintes* (couples de réseaux ayant des interdépendances) [7, Ch. 15]; un bi-réseau est cohérent s'il existe une même solution pour les deux réseaux. La chemin-cohérence a été généralisée en *bi-chemin-cohérence* [4], qui s'obtient en appliquant la clôture algébrique aux deux réseaux tout en propageant simultanément leurs interdépendances. Des sous-classes pour lesquelles la bi-chemin-cohérence implique la cohérence ont été trouvées pour plusieurs combinaisons de formalismes [4, 2].

## 3 Formalisme pour les multi-réseaux

Nous introduisons maintenant nos multi-réseaux, qui sont simplement des réseaux sur des *multi-algèbres*, et constituent la structure des intégrations lâches et des représentations multi-échelles. Notre cadre formel prend un point de vue algébrique, car la notion de « cohérence » ne peut être définie de manière unifiée pour les intégrations lâches et les représentations multi-échelles, alors qu'en revanche le concept de *scénario algébriquement clos* est utile pour toute combinaison dans les deux cas, et est en pratique souvent équivalent à une solution. Ainsi, nous nous focalisons sur le problème de décider si un réseau est *scénarisable*, c'est-à-dire, s'il contient un scénario algébriquement clos.

### 3.1 Multi-algèbres et multi-réseaux

Cette section introduit les blocs de base de notre cadre formel, en commençant par les multi-algèbres, qui sont des produits cartésiens d'algèbres, associés à des opérateurs de projection représentant les interdépendances de leurs relations, en associant à chaque relation de chaque formalisme les relations correspondantes dans les autres.

**Définition 1.** Une *multi-algèbre*  $\mathcal{A}$  est le produit cartésien de  $m$  algèbres  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$  (avec  $m \in \mathbb{N}^*$ ), équipé de  $m^2$  *opérateurs de projection*  $\bar{r}_i^j : \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_j$  (pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ) qui doivent satisfaire :

- (i)  $\forall b \in \mathcal{B}_i, \bar{r}_i^j \bar{r}_i^k b = \bar{r}_i^j b$ ,
- (ii)  $\forall b \in \mathcal{B}_i, \bar{r}_i^i b = b$ ,
- (iii)  $\forall (b, b') \in \mathcal{B}_i \times \mathcal{B}_j, b' \in \bar{r}_i^j b \iff b \in \bar{r}_i^j b'$ ,
- (iv)  $\forall r \subseteq \mathcal{B}_i, \bar{r}_i^j r = \bigcup_{b \in r} \bar{r}_i^j b$ , et
- (v)  $\forall r \subseteq \mathcal{B}_i, \forall k \in \{1, \dots, m\}, \bar{r}_i^j r \subseteq \bar{r}_i^k \bar{r}_k^j r$ .

Les relations  $R$  de  $\mathcal{A}$  sont multi-dimensionnelles;  $R^i$  désigne la relation associée à  $\mathcal{A}_i$  dans  $R$ . La multi-algèbre est

aussi équipée de 3 opérateurs sur ses relations : composition  $\diamond$ , intersection  $\cap$ , et inversion  $\bar{\cdot}$ , chacun fonctionnant composante par composante (p. ex.  $(R_1 \diamond R_2)^i = R_1^i \diamond R_2^i$ ). Une relation  $R$  d'une multi-algèbre est dite *basique* si elle appartient à l'ensemble  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_m$  (c'est-à-dire que toutes les  $R^i$  sont basiques). Pour deux relations  $R_1$  et  $R_2$ , on écrit  $R_1 \subseteq R_2$  si elles vérifient  $\forall i, R_1^i \subseteq R_2^i$ .

Les propriétés requises pour les opérateurs de projection sont naturelles ; elles ne sont pas restrictives, et devraient en effet être satisfaites par n'importe quelle intégration lâche. Notons que les multi-algèbres généralisent les algèbres classiques, puisqu'une algèbre peut toujours être implicitement vue comme le produit cartésien d'une seule algèbre, avec la fonction identité comme opérateur de projection (le seul choix respectant toutes les hypothèses). D'autre part, une multi-algèbre est en fait une algèbre (équipée d'opérateurs additionnels pour la projection).

**Exemple 2.** La multi-algèbre de la combinaison de la topologie et de la taille qualitative [4] est le produit cartésien de l'algèbre de RCC-8 et de l'algèbre des points, avec leurs opérateurs d'interdépendance comme projections. En notant  $\mathcal{B}_{\text{RCC8}} = \{\text{DC, EC, PO, EQ, TPP, NTPP, \overline{TPP}, \overline{NTPP}\}$  et  $\mathcal{B}_{\text{PA}} = \{<, =, >\}$ , alors la multi-algèbre est  $\text{RCC8} \times \text{PA} = 2^{\mathcal{B}_{\text{RCC8}}} \times 2^{\mathcal{B}_{\text{PA}}}$ . Par exemple,  $(\text{TPP}, \leq)$  est une relation de cette multi-algèbre, et  $\bar{\bar{\bar{r}}}_{\text{RCC8}}^{\text{PA}} \text{TPP} = \{<\}$  est la projection de TPP (puisque une région strictement incluse dans une autre a nécessairement une taille plus petite).

Les formalismes d'une combinaison ne sont pas indépendants : une relation d'un formalisme ne peut pas nécessairement être combinée avec n'importe quelle relation d'un autre formalisme. Ces interdépendances sont représentées dans la multi-algèbre par les opérateurs de projection. Plus précisément, s'il existe  $i, j$  tels que  $R^i \cap \bar{\bar{\bar{r}}}_j^i R^j = \emptyset$ , alors  $R$  est *incohérente*, dans le sens où elle ne peut avoir d'interprétation pour aucune combinaison de formalismes ayant ces interdépendances. Il est ainsi possible de tester si une relation  $R$  d'une multi-algèbre est incohérente en la clôturant par les projections, c'est-à-dire en propageant les interdépendances. Cette clôture retire uniquement des relations basiques *incohérentes* ; si une des composantes de  $R$  devient l'ensemble vide, on conclut que  $R$  est incohérente.

**Définition 3.** Soit  $R$  une relation d'une multi-algèbre ; la *clôture par projection totale* de  $R$ , notée  $\diamond(R)$ , est obtenue à partir de  $R$  en remplaçant itérativement chaque  $R^j$  par  $\bar{\bar{\bar{r}}}_i^j R^i \cap R^j$  pour chaque  $(i, j)$  jusqu'à ce qu'un point fixe soit atteint. Lorsque  $R = \diamond(R)$ , on dit que  $R$  est  $\diamond$ -close ; lorsque  $R$  est  $\diamond$ -close et qu'elle vérifie  $\nexists i : R^i = \emptyset$ , on dit que  $R$  est  $\diamond$ -cohérente.

Dans l'exemple 2, la projection totale de  $(\text{TPP}, \leq)$  est  $\diamond(\text{TPP}, \leq) = (\text{TPP}, <)$ . Notons qu'une relation *basique* non  $\diamond$ -close (ou de manière équivalente, non  $\diamond$ -cohérente), est nécessairement incohérente : sa projection totale génère l'ensemble vide. Les relations basiques  $\diamond$ -closes constituent ainsi des relations fondamentales de la multi-algèbre.

**Définition 4.** Une *relation élémentaire* d'une multi-algèbre  $\mathcal{A}$  est une relation basique  $\diamond$ -close de  $\mathcal{A}$ . Une relation  $R$  de  $\mathcal{A}$  est *élémentarisable* s'il existe une relation élémentaire  $B$  telle que  $B \subseteq R$ .

Toute relation cohérente est élémentarisable, mais ce n'est pas le cas des relations quelconques, même  $\diamond$ -cohérentes. Cependant, pour certains formalismes, toute relation  $\diamond$ -cohérente est élémentarisable : c'est notamment le cas pour toute combinaison de deux formalismes (voir section 3.2). Les concepts associés aux multi-algèbres ayant été introduits, nous pouvons simplement définir les *multi-réseaux de contraintes qualitatives* comme des réseaux de contraintes qualitatives classiques sur des multi-algèbres, c'est-à-dire que les relations entre les variables d'entités sont des relations multi-dimensionnelles. Prenons l'exemple informel d'une algèbre  $\mathcal{A}$  à 4 dimensions, avec des relations multi-échelles directionnelles ( $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ ), des relations topologiques ( $\mathcal{A}_3$ ) et des relations de taille ( $\mathcal{A}_4$ ). On peut définir un réseau  $N$  sur  $\mathcal{A}$  avec 3 entités  $A, B, C$  en spécifiant les contraintes suivantes :  $A$  (égal, sud ou égal, partie propre,  $<$ )  $B$ ,  $B$  (est ou égal, égal, chevauchement,  $\leq$ )  $C$ , et  $A$  (égal ou est, sud ou nord, disjoint ou égal,  $\leq$ )  $C$ . On peut voir  $N$  de manière équivalente comme un tuple de réseaux classiques sur chaque  $\mathcal{A}_i$ , comme montré dans la figure 1, et formalisé dans la définition suivante.

**Définition 5.** Soit  $N = (E, C)$  un réseau sur une multi-algèbre  $\mathcal{A}$ . La *restriction de  $N$  à  $\mathcal{A}_i$* , notée  $N^i$ , est le réseau  $(E, C_i)$  où  $C_i = \{(x, R^i, y) : (x, R, y) \in C\}$ .

Nous définissons les propriétés-clés des multi-réseaux.

**Définition 6.** Un réseau  $N$  est *non trivialement incohérent* s'il vérifie  $\forall i \forall x, y \in E, N_{xy}^i \neq \emptyset$ . Il est *algébriquement clos* si  $\forall x, y, z \in E, N_{xz} \subseteq N_{xy} \diamond N_{yz}$  et  $N_{xy} = \diamond N_{xy}$ . Il est *algébriquement cohérent* s'il est algébriquement clos et non trivialement incohérent. Enfin,  $N$  est *scénarisable* s'il existe un scénario  $S$  algébriquement clos tel que  $S \subseteq N$ .

Sur une multi-algèbre, être algébriquement clos est être clos par composition *et* par projection ; cela généralise proprement le cadre classique, puisque toute relation d'une algèbre monodimensionnelle est  $\diamond$ -close (l'unique opérateur de projection possible est la fonction identité). La scénarisabilité est une condition nécessaire pour la cohérence qui est aussi suffisante pour certains formalismes, et qui peut être vue comme une version purement algébrique de la cohérence. Évidemment, chaque relation d'un réseau scénarisable est élémentarisable. Dans cet article, nous nous focalisons sur la vérification de la scénarisabilité : il est clair que lorsqu'il est polynomial de décider si un réseau est scénarisable, et que chaque scénario algébriquement clos est cohérent, alors la vérification de la cohérence est polynomiale. Notre « cohérence algébrique » généralise la bichemin-cohérence, et fonctionne de la même façon – c'est une condition nécessaire pour la scénarisabilité qui peut être utilisée pour filtrer des réseaux incohérents.

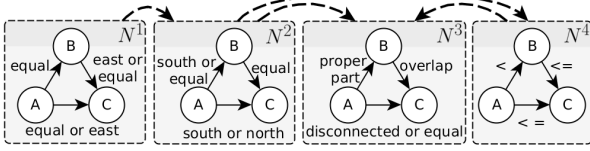


FIGURE 1 – Les quatre restrictions du multi-réseau  $N$  défini dans le texte, c’est-à-dire  $N$  vu comme un tuple de réseaux classiques. Le graphe donné par les flèches en pointillés est une hiérarchie de la multi-algèbre (définition 8)

Par exemple, considérons le réseau suivant sur  $\text{RCC8} \times \text{PA}$  avec uniquement deux régions  $x$  et  $y : x (\text{TPP}, >) y$ , c’est-à-dire que  $x \text{ TPP } y$  et  $x > y$ . Il n’est pas algébriquement clos, car il n’est pas clos par projection : sa clôture est  $x (\emptyset, \emptyset) y$ , puisque l’on a  $\uparrow_{\text{RCC8}}^{\text{PA}}(\text{TPP}) = \{<\}$  et  $\uparrow_{\text{PA}}^{\text{RCC8}}(>) = \{\text{TPP}, \text{NTPP}, \text{DC}, \text{EC}, \text{PO}\}$ . Ainsi, le réseau n’est pas scénarisable (et n’est donc pas cohérent).

### 3.2 Sous-classes et projections partielles

Puisque la vérification de la cohérence est souvent NP-complète, nous procédons comme dans le cadre classique et considérons des *sous-classes* de multi-algèbres.

**Définition 7.** Une *sous-classe*  $\mathcal{S}$  d’une multi-algèbre  $\mathcal{A}$  est un sous-ensemble de relations de  $\mathcal{A}$  qui est clos par composition, intersection, et inversion. Nous notons par  $\mathcal{N}^{\mathcal{S}}$  l’ensemble des réseaux sur  $\mathcal{S}$ . Nous définissons la *sous-classe restreinte*  $\mathcal{S}_i$  de la sous-classe  $\mathcal{S}$  comme l’ensemble  $\{R^i : R \in \mathcal{S}\}$ . Une *sous-algèbre*  $\mathcal{S}$  d’une multi-algèbre  $\mathcal{A}$  est une sous-classe de  $\mathcal{A}$  contenant toutes les relations basiques :  $\mathcal{B}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{S}$ .

Par exemple, en considérant  $\text{H}_8$  la sous-algèbre classique de  $\text{RCC8}$  [4],  $\text{H}_8 \times \text{PA}$  est une sous-algèbre de  $\text{RCC8} \times \text{PA}$ . Notons que toute sous-classe  $\mathcal{S}$  est un sous-ensemble du produit cartésien de ses sous-classes restreintes,  $\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_m$ , qui est lui-même une sous-classe. La notion de sous-classe restreinte va nous servir à transférer sur les multi-algèbres les propriétés de traitabilité du cadre classique. Les sous-algèbres sont des sous-classes particulièrement intéressantes car tous les scénarios d’une multi-algèbre sont des scénarios de ses sous-algèbres. De plus, les sous-classes les plus étudiées sont des sous-algèbres [7].

Il est important de noter que, bien que les sous-classes soient closes par les trois opérateurs classiques, elles ne le sont pas nécessairement par projection totale. Cette hypothèse est en effet très restrictive, et peu de combinaisons de sous-classes classiques la satisfont. Cependant, elle n’est en fait pas nécessaire pour la vérification de la scénarisabilité, qui ne nécessite pas l’application de *tous* les opérateurs de projection. Nous définissons donc la *clôture par projection partielle*, pour laquelle un opérateur de projection n’est appliqué que s’il est « autorisé » par une *hiérarchie* sur les algèbres.

**Définition 8.** Une *hiérarchie*  $\mathfrak{h}$  d’une multi-algèbre  $\mathcal{A}$  est un graphe simple orienté dont les  $m$  nœuds sont les  $\mathcal{A}_i$ . On

écrit  $\mathcal{A}_i \xrightarrow{\mathfrak{h}} \mathcal{A}_j$  ou  $(i, j) \in \mathfrak{h}$  si  $\mathfrak{h}$  contient un arc de  $\mathcal{A}_i$  vers  $\mathcal{A}_j$ . La *clôture par projection partielle* d’une relation  $R \in \mathcal{A}$  par  $\mathfrak{h}$ , notée  $\Delta_{\mathfrak{h}}(R)$ , est obtenue à partir de  $R$  en remplaçant itérativement  $R^i$  par  $\uparrow_i^j R^i \cap R^j$  pour chaque  $(i, j) \in \mathfrak{h}$  jusqu’à ce qu’un point fixe soit atteint. Les notions de relations  $\Delta_{\mathfrak{h}}$ -closes et  $\Delta_{\mathfrak{h}}$ -cohérentes sont directement adaptées de  $\diamond$ .

Une projection partielle  $\Delta_{\mathfrak{h}}$  applique tous les opérateurs de projection possibles dans les directions données par la hiérarchie  $\mathfrak{h}$  (voir figure 1 pour un exemple de hiérarchie). Bien sûr, toutes les projections partielles ne sont pas intéressantes. Si elles ne ferment pas au moins les relations *basiques* par projection totale, elles ne peuvent être utilisées pour décider l’élémentarisabilité et la scénarisabilité. Nous définissons ainsi l’ensemble  $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$  des projections partielles « utiles » pour  $\mathcal{S}$  comme suit :  $\mathcal{P}_{\mathcal{S}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_{\mathcal{S}}} = \{\Delta_{\mathfrak{h}} : \forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}, \Delta_{\mathfrak{h}}(B) = \diamond(B)\}$ . La hiérarchie d’une projection partielle  $\Delta$  de  $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$  sera notée  $\mathfrak{h}_{\Delta}$ . Remarquons que  $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$  contient toujours la projection partielle  $\Delta_{\mathfrak{h}}$  avec  $\mathfrak{h}$  le graphe complet, qui est équivalente à la projection totale  $\diamond$ . C’est important à cause du résultat suivant : si on retire n’importe quel arc de la hiérarchie d’un  $\Delta \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ , tant qu’il y a encore au moins un arc entre deux algèbres, alors la projection partielle correspondante  $\diamond$ -clôt toujours les relations basiques.

**Proposition 9.** Soit  $\Delta \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  pour un certain  $\mathcal{A}$ . Si  $\mathfrak{h}'$  est un sous-graphe couvrant de  $\mathfrak{h}_{\Delta}$  vérifiant  $(i, j) \in \mathfrak{h}_{\Delta} \vee (j, i) \in \mathfrak{h}_{\Delta} \implies (i, j) \in \mathfrak{h}' \vee (j, i) \in \mathfrak{h}'$ , alors  $\Delta_{\mathfrak{h}'} \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ .

*Démonstration.* Soit  $B$  une relation basique  $\Delta_{\mathfrak{h}'}$ -cohérente. Si  $\mathcal{A}_i \xrightarrow{\mathfrak{h}'} \mathcal{A}_j$  alors  $B^j \subseteq \uparrow_i^j B^i$ , donc  $B^i \subseteq \uparrow_j^i B^j$  puisque  $B^i$  et  $B^j$  sont basiques (déf. 1), et ainsi  $B$  est  $\Delta_{\mathfrak{h}'}$ -cohérente. Par conséquent,  $B$  est  $\diamond$ -cohérente, et donc  $\Delta_{\mathfrak{h}'} \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ .  $\square$

On peut ainsi *choisir* une direction de projection pour chaque paire d’algèbres ; la projection partielle résultante est forcément dans  $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ . Par exemple, pour une bi-algèbre,  $\mathcal{P}_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}$  contient toujours trois projections, à savoir la projection totale et les deux projections partielles d’une des algèbres vers l’autre. Dans le cas de la combinaison taille-topologie, si on considère la hiérarchie  $\mathfrak{ts}$  de la topologie (RCC-8) vers la taille (PA), alors par la proposition 9, la projection partielle  $\Delta_{\mathfrak{ts}}$  appartient à  $\mathcal{P}_{\text{RCC8} \times \text{PA}}$ . Plus généralement, quand on étudie une sous-classe  $\mathcal{S}$ , la proposition 9 permet d’éviter les projections  $\uparrow_i^j$  qui produisent des relations en dehors de  $\mathcal{S}$ . Il est ainsi possible de construire des projections partielles  $\Delta \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$  vérifiant  $\forall R \in \mathcal{S}, \Delta(R) \in \mathcal{S}$ , auquel cas la sous-classe  $\mathcal{S}$  est dite  $\Delta$ -close.

Pour finir cette section, nous nous focalisons sur l’élémentarisabilité des relations, et plus précisément sur les cas où la  $\Delta$ -cohérence implique l’élémentarisabilité. Notre premier résultat concerne les relations des bi-algèbres.

**Lemme 10.** Soit  $\mathfrak{h}$  la hiérarchie  $\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\mathfrak{h}} \mathcal{A}_2$ . Si une relation  $R = (R^1, R^2)$  de  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$  est  $\Delta_{\mathfrak{h}}$ -cohérente, alors pour toute  $b \in R^2$ , il existe  $b' \in R^1$  telle que  $(b', b)$  est  $\diamond$ -cohérente (et  $R$  est donc élémentarisable).

*Démonstration.* Soit  $R$  une relation  $\Delta_{\mathfrak{h}}$ -cohérente :  $\emptyset \subsetneq R^2 \subseteq \mathbb{P}_1^2 R^1 = \bigcup_{b' \in R^1} \mathbb{P}_1^2 b'$ . Pour toute  $b \in R^2$ , il existe  $b' \in R^1$  telle que  $b \in \mathbb{P}_1^2 b'$ , donc  $b' \in \mathbb{P}_2^1 b$  (déf. 1), et donc  $(b', b)$  est  $\diamond$ -close.  $\square$

Ainsi, par exemple, toute relation  $\Delta_{\mathfrak{h}}$ -cohérente de  $\text{RCC8} \times \text{PA}$  est élémentarisable. La proposition suivante montre que c'est aussi le cas des relations  $\diamond$ -cohérentes.

**Proposition 11.** *Soit  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{h}'$  deux hiérarchies d'une multi-algèbre. Si  $\mathfrak{h}$  est un sous-graphe de  $\mathfrak{h}'$  alors toute relation  $\Delta_{\mathfrak{h}'}$ -cohérente est  $\Delta_{\mathfrak{h}}$ -cohérente.*

Le résultat suivant est une généralisation du lemme 10 pour les relations de n'importe quelle multi-algèbre. Il illustre l'influence de la structure de la hiérarchie sur les propriétés des projections associées.

**Proposition 12.** *Soit  $\Delta \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ . Si  $\mathfrak{h}_{\Delta}$  est une anti-arborescence<sup>1</sup>, alors toute relation  $\Delta$ -cohérente est élémentarisable.*

*Démonstration.* Soit  $R$  une relation  $\Delta$ -cohérente ; on prouve que  $R$  est élémentarisable. Soit  $\mathcal{A}_i$  l'algèbre racine de  $\mathfrak{h}_{\Delta}$ , et soit  $b_i \in R^i$ . Pour chaque algèbre  $\mathcal{A}_j$  telle que  $\mathcal{A}_j \xrightarrow{\mathfrak{h}_{\Delta}} \mathcal{A}_i$ , il existe  $b_j \in R^j$  telle que la relation  $(b_j, b_i)$  est  $\diamond$ -cohérente (lemme 10). On peut, de façon similaire, trouver une relation basique pour chaque  $R^k$  telle que  $\mathcal{A}_k \xrightarrow{\mathfrak{h}_{\Delta}} \mathcal{A}_j$ , et ainsi récursivement pour toutes les relations : il ne peut y avoir aucun conflit, comme il y a exactement un chemin de n'importe quelle algèbre vers la racine. Cela prouve que l'on peut trouver une relation élémentaire dans  $R$ .  $\square$

### 3.3 Filtres de réseaux

Comme expliqué dans la section 2.1, la clôture algébrique est souvent utilisée comme un outil pour aider à vérifier la cohérence d'un réseau ; une manière courante de prouver qu'une sous-classe  $\mathcal{S}$  est traitable est de montrer que les réseaux sur  $\mathcal{S}$  qui sont  $\diamond$ -cohérents sont cohérents. Appliquer cette idée aux multi-réseaux, pour trouver des sous-classes dont les réseaux *algébriquement cohérents* sont cohérents, n'est pas direct. En effet, comme expliqué dans la section précédente, les sous-classes ne sont pas toujours closes par projection – nous avons besoin des opérateurs de projection partielle. De plus, bien qu'il soit polynomial de clore algébriquement un multi-réseau, ce n'est pas nécessairement efficace en pratique : atteindre le point fixe est plus long que dans le cadre classique (puisque clore le réseau par projection ne préserve pas la clôture par composition, et *vice versa*). Ainsi, voyant la clôture algébrique comme un opérateur qui « filtre » un réseau pour retirer des incohérences, nous généralisons le concept en introduisant les *filtres de réseaux*, qui retirent des relations basiques des contraintes tout en préservant les solutions du réseau.

**Définition 13.** Soit  $\mathcal{A}$  une multi-algèbre. Un *filtre de réseaux* est une fonction  $f : \mathcal{N}^{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{N}^{\mathcal{A}}$  vérifiant

1. Une *anti-arborescence* est un arbre orienté tel qu'il y a exactement un chemin orienté vers un nœud spécifique (appelé la racine) à partir de n'importe quel autre nœud. Par exemple, dans la figure 1, en retirant l'arc entre  $N^2$  et  $N^4$  la hiérarchie devient une anti-arborescence de racine  $N^3$ .

- (i)  $\forall N \in \mathcal{N}^{\mathcal{A}}, f(N) \subseteq N$ ;
- (ii)  $\forall N_1, N_2 \in \mathcal{N}^{\mathcal{A}}, N_1 \subseteq N_2 \implies f(N_1) \subseteq f(N_2)$ ; et
- (iii) pour tout scénario algébriquement clos  $S$  sur  $\mathcal{A}$ ,  $f(S) = S$ .

Les filtres les plus importants et naturels sont le *filtre de composition*  $\diamond(N)$ , qui applique la clôture algébrique classique simultanément sur chaque  $N^i$  (c'est-à-dire qu'il remplace itérativement  $N_{xz}$  par  $N_{xy} \diamond N_{yz} \cap N_{xz}$ , pour chaque  $x, y, z \in E$ , jusqu'à atteindre un point fixe), et le *filtre de projection*  $\Delta(N)$ , qui clôt par projection (partielle ou totale, en fonction de  $\Delta$ ) chaque relation de  $N$  (c'est-à-dire qu'il remplace chaque  $N_{xy}$  par  $\Delta(N_{xy})$ ). Puisqu'un réseau filtré  $f(N)$  ne peut contenir de relation vide que si le réseau original  $N$  n'est pas scénarisable, les filtres permettent un mécanisme sain mais incomplet pour vérifier la scénarisabilité. C'est pourquoi nous les voyons comme une généralisation de la clôture algébrique, et adaptons en conséquence les concepts associés.

**Définition 14.** Un réseau  $N$  est dit *f-clos* si  $f(N) = N$ , et *f-cohérent* s'il est *f-clos* et non trivialement incohérent. Une sous-classe  $\mathcal{S}$  est *f-close* si  $\forall N \in \mathcal{N}^{\mathcal{S}}, f(N) \in \mathcal{N}^{\mathcal{S}}$ .

En d'autres termes – en remarquant qu'un filtre retire certaines relations basiques n'appartenant à aucun scénario algébriquement clos – un réseau est dit cohérent par rapport à un filtre si toutes les relations *détectables par le filtre* ont déjà été retirées. Notons que bien que les filtres  $\diamond$  et  $\Delta$  sont des opérateurs de clôture, ce n'est pas le cas pour tous les filtres : un réseau filtré  $f(N)$  n'est pas *f-clos* en général. C'est en particulier souvent le cas pour les filtres *composés*, obtenus par composition d'autres filtres, comme  $(\diamond) \circ (\diamond)$  (que l'on écrit  $\diamond \diamond$ , omettant le symbole de composition). En effet, la clôture par composition d'un réseau clos par projection n'a aucune raison d'être encore close par projection : appliquer  $\diamond \diamond$  une nouvelle fois peut donc donner un réseau différent. Cependant, il est facile de construire un opérateur de clôture basé sur un filtre  $f$  : le filtre de *clôture par  $f$* , noté  $f^*$ , applique simplement  $f$  itérativement jusqu'à ce que le résultat soit *f-clos*. Par exemple, le filtre  $(\diamond \diamond)^* = \diamond \diamond^*$  (pour alléger les notations, on considère la composition implicite comme plus prioritaire que l'opérateur de clôture  $*$  – ce n'est jamais ambigu dans cet article) applique la clôture algébrique (mais pas de la même façon que l'algorithme de la bi-chemin-cohérence). De manière analogue, le filtre  $\diamond \Delta^*$  applique une clôture algébrique *partielle* (par rapport aux opérateurs de projection), et sur les scénarios est équivalent à  $\diamond \diamond^*$  si  $\Delta \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ .

Toutefois, comme mentionné précédemment, le calcul de tels filtres de clôture peut être inefficace. Heureusement, comme nous allons le voir dans la section 4, les filtres peuvent être utiles pour la vérification de la cohérence même s'ils ne sont pas des opérateurs de clôture, pourvu qu'ils vérifient la propriété plus faible d'être *répétable*.

**Définition 15.** Un filtre  $f$  est *répétable* pour une sous-classe  $\mathcal{S}$  lorsque pour tout  $N$  sur  $\mathcal{S}$ , si  $f(N)$  est non trivialement incohérent alors  $f^*(N)$  l'est également.

Ainsi, alors qu'appliquer  $f$  plusieurs fois sur  $N$  peut donner un résultat différent à chaque fois, appliquer  $f$  une seule fois est suffisant pour obtenir l'information dont on a besoin, c'est-à-dire si  $f^*$  finirait par « éliminer »  $N$ .

## 4 Résultats de traitabilité

On peut maintenant se focaliser sur les sous-classes *traitables*, c'est-à-dire, dans notre contexte, celles pour lesquelles il existe un algorithme polynomial décidant de la scénarisabilité de chacun de leurs réseaux. Nous nous intéressons en particulier à des conditions assurant qu'un filtre soit *suffisant*, c'est-à-dire permette de décider de la scénarisabilité d'un réseau en vérifiant simplement si ce réseau filtré est non trivialement incohérent.

**Définition 16.** Un filtre  $f$  est *suffisant* pour une sous-classe  $\mathcal{S}$  lorsque pour tout  $N \in \mathcal{N}^{\mathcal{S}}$ , si  $f(N)$  est non trivialement incohérent, alors  $N$  est scénarisable.

S'il existe un filtre suffisant applicable en temps polynomial, alors décider de l'existence d'un scénario algébriquement clos est polynomial; dans les cas où les scénarios algébriquement clos sont cohérents, la vérification de la cohérence est traitable. Ainsi, nous démontrons deux théorèmes fournissant des conditions pour qu'un filtre soit suffisant, et nous nous intéressons ensuite à des conditions plus fortes qui facilitent l'application de ces théorèmes.

### 4.1 Filtres suffisants pour la traitabilité

Dans le cadre classique, une façon de montrer qu'une sous-classe  $\mathcal{S}$  est traitable est d'exhiber un *affinement* particulier, c'est-à-dire une fonction  $h: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}$  vérifiant  $\forall R \in \mathcal{S}, h(R) \subseteq R$ . Certaines sous-algèbres admettent ainsi un affinement permettant d'obtenir un scénario cohérent d'un réseau algébriquement clos en (i) choisissant une paire d'entités, (ii) remplaçant leur relation par une relation basique de l'affinement, (iii) calculant la  $\diamond$ -clôture, et en répétant ces étapes jusqu'à obtenir un scénario [7, Ch. 2]. Pour adapter cette méthode aux multi-réseaux, il nous faut d'abord formaliser les conditions algébriques que doivent remplir de tels affinements dans le cadre classique.

**Définition 17.** Un réseau  $\diamond$ -cohérent  $N$  sur une sous-algèbre  $\mathcal{S}$  est *h-scénarisable* si pour tout couple d'entités  $x, y$  et toute  $b \in h(N_{xy})$ , il existe un scénario  $\diamond$ -cohérent  $S \subseteq N$  vérifiant  $S_{xy} = b$ . Une sous-algèbre  $\mathcal{S}$  est *h-scénarisable* si tous les réseaux  $\diamond$ -cohérents sur  $\mathcal{S}$  sont *h-scénarisables*.

Trouver un affinement  $h$  tel qu'une sous-algèbre  $\mathcal{S}$  est *h-scénarisable* suffit à prouver que  $\mathcal{S}$  est traitable, puisque les hypothèses permettent d'appliquer la méthode décrite plus haut. Par exemple, l'algèbre des points et la sous-algèbre des relations pré-convexes de l'algèbre des intervalles sont  $h_{\max}$ -scénarisables, avec  $h_{\max}$  l'affinement par les relations basiques de dimension maximale [7] :  $h_{\max}(r) = \{b \in r : \dim(b) = \dim(r)\}$ . Considérons maintenant une sous-algèbre  $\mathcal{S}$  dont chacune des sous-classes restreintes  $\mathcal{S}_i$  serait connue comme étant  $h_i$ -scénarisable pour

un certain  $h_i$ ; une idée naturelle pour prouver la traitabilité de  $\mathcal{S}$  est d'essayer d'appliquer la technique classique en combinant  $h_1, \dots, h_n$  en un affinement sur les relations multi-dimensionnelles.

**Définition 18.** Soit  $\mathcal{S}$  une sous-classe d'une multi-algèbre. Un *multi-affinement* est un affinement de la forme  $H = (h_1, \dots, h_m)$  avec chaque  $h_i$  un affinement de  $\mathcal{S}_i$ . Pour  $R \in \mathcal{S}$ , on note  $H(R)$  la relation  $(h_1(R^1), \dots, h_m(R^m))$ .

Cependant, même si chaque  $\mathcal{S}_i$  est  $h_i$ -scénarisable, il n'y a aucune garantie que le multi-affinement  $H = (h_1, \dots, h_m)$  puisse être utilisé pour trouver un scénario algébriquement clos en adaptant la méthode classique : des conditions supplémentaires sont nécessaires pour assurer que les affinements individuels fonctionnent bien *ensemble*, par rapport aux projections. De plus, comme on l'a vu précédemment,  $\mathcal{S}$  n'étant pas nécessairement  $\diamond$ -close, nous avons besoin d'utiliser un filtre de projection partielle, qui doit aussi vérifier certaines propriétés. Notre *théorème de suffisance* résume toutes ces hypothèses.

**Théorème 19.** Soit  $\mathcal{S}$  une sous-algèbre d'une multi-algèbre, et soit  $\Delta \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ . Étant donné un multi-affinement  $H = (h_1, \dots, h_m)$  tel que chaque sous-classe restreinte  $\mathcal{S}_i$  est  $h_i$ -scénarisable, si ces hypothèses sont satisfaites :

- (i)  $\mathcal{S}$  est  $\Delta$ -close;
- (ii)  $\diamond_{\Delta}$  est répétable pour  $\mathcal{S}$ ; et
- (iii) pour toute relation  $\Delta$ -cohérente  $R$  de  $\mathcal{S}$ ,  $H(R)$  est élémentarisable;

alors  $\diamond_{\Delta}$  est un filtre suffisant pour  $\mathcal{S}$ .

*Démonstration.* Soit  $N \in \mathcal{N}^{\mathcal{S}}$ ; on suppose que  $\diamond_{\Delta}(N)$  est non trivialement incohérent, et on montre qu'il a un scénario  $\diamond_{\Delta}$ -cohérent. Soit  $N' = \diamond_{\Delta}^*(N)$  : par répétabilité de  $\diamond_{\Delta}$ ,  $\diamond_{\Delta}^*(N)$  est non trivialement incohérent, et ainsi  $N'$  est  $\diamond_{\Delta}$ -cohérent.

Si toutes les relations dans  $N'$  sont basiques, alors  $N'$  est un scénario  $\diamond_{\Delta}$ -cohérent, comme souhaité. Sinon, considérons des entités  $x$  et  $y$  de  $E$  telles que la relation entre elles n'est pas basique. On sait que  $H(N'_{xy})$  est élémentarisable (iii) : elle contient au moins une relation élémentaire (déf. 4). On affine  $N'_{xy}$  par une de ces relations,  $B = (b_1, \dots, b_m)$ . Évidemment, étant  $\diamond$ -cohérente,  $B$  est aussi  $\Delta$ -cohérente, d'où  $N' = \Delta N'$  après l'affinement. De plus, puisque chaque  $(N')^i$  était  $\diamond$ -cohérent, la  $h_i$ -scénarisabilité de  $\mathcal{S}_i$  implique qu'il existe un scénario  $\diamond$ -cohérent  $S \subseteq (N')^i$  tel que  $S_{xy} = b_i$ , et donc  $\diamond(N')$  est non trivialement incohérent.

Au final,  $\diamond_{\Delta}(N')$  est non trivialement incohérent; on peut réappliquer la preuve depuis le début (comme  $\mathcal{S}$  est  $\Delta$ -close et est une sous-algèbre), rendant ainsi itérativement élémentaires toutes les relations. Le processus se termine nécessairement avec un scénario  $\diamond_{\Delta}$ -cohérent. Enfin, puisque  $\Delta \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ , les scénarios  $\diamond_{\Delta}$ -cohérents sont algébriquement cohérents :  $N$  est scénarisable.  $\square$

Le théorème peut être utilisé pour prouver qu'une sous-classe  $\mathcal{S}$  construite à partir de sous-classes traitables est traitable, mais fournit aussi un moyen efficace de décider de la scénarisabilité d'un réseau sur  $\mathcal{S}$  : le filtre suffisant  $\diamond_{\Delta}$  nécessite seulement une clôture par projection suivie d'une clôture par composition. De plus, le théorème implique en

fait une sorte de  $H$ -scénarisabilité pour  $\mathcal{S}$ , fournissant une méthode pour *exhiber* un scénario algébriquement clos. Nous concluons cette section avec un résultat fournissant des conditions permettant « l'héritage » de la traitabilité d'une sous-classe à une autre. Pour cela, nous adaptons la technique classique de « réduction par un affinement » [9] : étant donnée une sous-classe  $\mathcal{S}'$  pour laquelle la chemin-cohérence implique la cohérence, il est possible de prouver qu'une autre sous-classe  $\mathcal{S}$  est aussi traitable en exhibant un affinement qui, lorsqu'appliqué simultanément sur toutes les relations d'un réseau  $\diamond$ -cohérent  $N \in \mathcal{N}^{\mathcal{S}}$ , donne un réseau sur  $\mathcal{S}'$  dont la  $\diamond$ -clôture est  $\diamond$ -cohérente. Nous utilisons ici la même idée, mais exigeons que l'application de tels affinements préserve la  $\diamond$ -cohérence ; c'est une propriété plus forte, mais généralement vérifiée par les affinements en pratique.

**Définition 20.** Une sous-classe  $\mathcal{S}$  est dite *f-stable par H*, avec  $f$  un filtre et  $H$  un affinement, si pour tout réseau  $N$  sur  $\mathcal{S}$ , la  $f$ -cohérence de  $N$  implique la  $f$ -cohérence de  $H(N)$  (où  $H(N)$  est le réseau obtenu à partir de  $N$  en remplaçant chaque relation  $R$  par  $H(R)$ ).

Par exemple, on peut vérifier que  $H_8 \times PA$  est  $\diamond$ -stable par  $H = (h_{H_8}, h_{\max})$  avec  $h_{H_8}$  l'affinement classique de  $H_8$  [4]. Notons que combiné à la proposition 12, la  $\Delta$ -stabilité implique la troisième hypothèse du théorème de suffisance. Notre théorème d'héritage utilise le mécanisme de réduction par un affinement : si on peut affiner chaque réseau  $f$ -cohérent sur une sous-classe vers une seconde sous-classe pour laquelle  $f$  est suffisant, tout en préservant la  $f$ -cohérence, alors  $f^*$  est suffisant pour la première.

**Théorème 21.** Soient  $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$  deux sous-classes,  $f$  un filtre et  $H$  un affinement de  $\mathcal{S}$  vers  $\mathcal{S}'$ . Si (i)  $\mathcal{S}$  est  $f$ -close, (ii)  $\mathcal{S}$  est  $f$ -stable par  $H$ , et (iii)  $f$  est suffisant pour  $\mathcal{S}'$ , alors  $f^*$  est suffisant pour  $\mathcal{S}$ .

*Démonstration.* Soit  $N$  un réseau sur  $\mathcal{S}$  tel que  $f^*(N)$  est non trivialement incohérent. Alors  $H(f^*(N))$  est  $f$ -cohérent (ii), et est sur  $\mathcal{S}'$  (i), pour laquelle  $f$  est suffisant (iii). Il est donc scénarisable, d'où  $N$  est aussi scénarisable, et ainsi  $f^*$  est suffisant.  $\square$

## 4.2 Conditions plus fortes pour la suffisance

On introduit ici des propriétés particulières des sous-classes, qui impliquent les hypothèses des théorèmes mais sont plus facilement vérifiables, et qui seront utilisées dans les sections suivantes. La première est un sous-cas de la  $\Delta$ -stabilité, appelé  $\Delta$ -invariance, qui survient pour de nombreux formalismes multi-échelles et intégrations lâches.

**Définition 22.** Une sous-classe  $\mathcal{S}$  est  $\Delta$ -invariante par un multi-affinement  $H = (h_1, \dots, h_m)$  si pour tout  $(j, k) \in \mathfrak{h}_\Delta$  et pour toute  $r \in \mathcal{S}_j$ , on a  $\mathring{r}^k r = \mathring{r}^k h_j(r)$ .

**Proposition 23.** Une sous-classe  $\Delta$ -invariante par un multi-affinement  $H$  est  $\Delta$ -stable par  $H$ .

*Démonstration.* Soit  $R$  une relation  $\Delta$ -cohérente et soit  $(j, k) \in \mathfrak{h}_\Delta$ . Nous avons  $\mathring{r}^k R^j = \mathring{r}^k h_j(R^j) = \mathring{r}^k H(R)^j$ . Comme  $R$  est  $\Delta$ -cohérente,  $R^k \subseteq \mathring{r}^k R^j$  et donc  $H(R)^k \subseteq R^k \subseteq \mathring{r}^k R^j = \mathring{r}^k H(R)^j$ . Par conséquent,  $H(R)$  est  $\Delta$ -cohérente.  $\square$

Par exemple, considérons la hiérarchie  $\mathfrak{ts}$  de la topologie (RCC-8) vers la taille (PA), et  $Q_8$  une sous-algèbre classique de RCC8.  $Q_8 \times PA$  est  $\Delta_{\mathfrak{ts}}$ -invariante par  $H = (h_{Q_8}, h_{\max})$ , avec  $h_{Q_8}$  son affinement classique et  $h_{\max}$  comme défini en section 4.1, et est ainsi  $\Delta_{\mathfrak{ts}}$ -stable par  $H$ . Nous nous intéressons ensuite à des sous-classes dont les opérateurs de projection vérifient la propriété naturelle de *super-distributivité* sur la composition faible et l'intersection ; sur de telles sous-classes,  $\diamond_\Delta$  est répétable.

**Définition 24.** Soit  $\odot$  l'un des opérateurs  $\diamond$  ou  $\cap$ . On dit que  $\mathring{r}_i^j$  est *super-distributif* sur  $\odot$  pour une sous-classe  $\mathcal{S}_i$  si pour toutes  $r_1, r_2 \in \mathcal{S}_i$  telles que  $r_1 \odot r_2 \neq \emptyset$ , on a  $(\mathring{r}_i^j r_1) \odot (\mathring{r}_i^j r_2) \subseteq \mathring{r}_i^j (r_1 \odot r_2)$ . Une sous-classe  $\mathcal{S}$  est dite  $\Delta$ -distributive (avec  $\Delta \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ ) si pour tout  $(j, k) \in \mathfrak{h}_\Delta$ ,  $\mathring{r}_j^k$  est super-distributif sur  $\diamond$  et  $\cap$  pour  $\mathcal{S}_j$ .

Soit  $RCC8_{\min}$  la sous-algèbre minimale de RCC-8 ; on peut aisément vérifier que la sous-classe  $RCC8_{\min} \times PA$  est  $\Delta_{\mathfrak{ts}}$ -distributive. La  $\Delta$ -distributivité d'une sous-classe implique que toute propagation de la composition faible préserve la  $\Delta$ -clôture, comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 25.** Soit  $N$  un réseau sur une sous-classe  $\mathcal{S}$   $\Delta$ -close et  $\Delta$ -distributive, si  $\diamond_\Delta(N)$  est non trivialement incohérent alors  $\diamond_\Delta(N) = \diamond_\Delta^*(N)$  (et donc  $\diamond_\Delta$  est répétable pour  $\mathcal{S}$ ).

*Démonstration.* Nous prouvons le résultat pour les sous-classes de la forme  $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$ , ce qui est suffisant puisqu'être  $\Delta$ -clos pour chaque couple de sous-classes de  $\mathfrak{h}_\Delta$  revient à être totalement  $\Delta$ -clos. Nous traitons uniquement le cas où  $(i, j) \in \mathfrak{h}_\Delta$  et  $(j, i) \notin \mathfrak{h}_\Delta$  ; les deux autres cas sont similaires. Soit  $N'$  un réseau sur  $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$  tel que  $\diamond_\Delta(N')$  est non trivialement incohérent, et soit  $N = \Delta N'$ . Il suffit de prouver que propager  $\diamond$  préserve la  $\Delta$ -clôture, c'est-à-dire  $\forall x, y, z \in \mathbf{E}, N_{xz}^j \cap (N_{xy}^i \diamond N_{yz}^j) \subseteq \mathring{r}_i^j (N_{xz}^i \cap (N_{xy}^i \diamond N_{yz}^j))$ . Soit  $x, y$  et  $z$  des entités de  $N$ . Puisque  $\diamond_\Delta(N')$  est non trivialement incohérent,  $N_{xz}^i \cap (N_{xy}^i \diamond N_{yz}^i) \neq \emptyset$  et en particulier  $N_{xy}^i \diamond N_{yz}^i \neq \emptyset$ . Comme  $N$  est  $\Delta$ -clos,  $N_{XY}^j \subseteq \mathring{r}_i^j N_{XY}^i$  pour toutes  $X, Y \in \{x, y, z\}$  distinctes, et par définition de  $\diamond$  ( $r_1 \diamond r_2 = \bigcup_{b_1 \in r_1, b_2 \in r_2} b_1 \diamond b_2$ ), on obtient  $N_{xy}^j \diamond N_{yz}^j \subseteq \mathring{r}_i^j N_{xy}^i \diamond \mathring{r}_i^j N_{yz}^i$ . Par super-distributivité de  $\mathring{r}_i^j$  sur  $\diamond$ , on a  $N_{xy}^j \diamond N_{yz}^j \subseteq \mathring{r}_i^j (N_{xy}^i \diamond N_{yz}^i)$ . Par super-distributivité de  $\mathring{r}_i^j$  sur  $\cap$ , on obtient  $N_{xz}^j \cap (N_{xy}^j \diamond N_{yz}^j) \subseteq \mathring{r}_i^j (N_{xz}^i \cap (N_{xy}^i \diamond N_{yz}^i))$ .  $\square$

## 4.3 Combinaison taille-topologie

Appliquons notre cadre formel pour retrouver les résultats de traitabilité de la combinaison taille-topologie [4]. On utilise les notations suivantes :  $PA_{\max} = \{<, =, >, \neq, \mathcal{B}\}$  ;  $RCC8_{\min}$  la plus petite sous-algèbre de RCC-8 ; et pour finir  $H_8, C_8$ , et  $Q_8$ , les trois sous-algèbres maximales pour la traitabilité de RCC-8 [4]. Rappelons que  $\mathfrak{ts}$  est une hiérarchie de RCC-8 vers PA.



**Corollaire 26.** *La vérification de la cohérence pour  $RCC8_{\min} \times PA_{\max}$  est traitable. En effet,  $\diamond_{\Delta_{t_5}}$  est suffisant.*

*Démonstration.* Par le théorème de suffisance : la sous-classe  $RCC8_{\min} \times PA_{\max}$  est  $\Delta_{t_5}$ -close ; on a la  $h_i$ -scénarisabilité (avec  $h_i(r) = r$ ) car les réseaux chemin-cohérents sont minimaux pour  $RCC8_{\min}$  et pour  $PA_{\max}$  [8] ;  $\diamond_{\Delta_{t_5}}$  est répétable par super-distributivité de  $\uparrow_{RCC8}^{PA}$  sur  $\diamond$  et  $\sqcap$ , et par la prop. 25 ; le lemme 10 donne la troisième hypothèse. On conclut par la cohérence des scénarios algébriquement clos [4].  $\square$

**Corollaire 27.** *La vérification de la cohérence pour la sous-classe  $H_8 \times PA$  (resp.  $C_8 \times PA$ , resp.  $Q_8 \times PA$ ) est traitable. En effet,  $\diamond_{\Delta_{t_5}^*}$  (resp.  $\diamond_{\Delta_{t_5}^*}$ , resp.  $\diamond_{\Delta_{t_5}^*}$ ) est suffisant.*

*Démonstration.* On utilise les affinements classiques de  $H_8$ ,  $C_8$  et  $Q_8$  vers les relations basiques [4], et  $h_{\max}$  pour  $PA$ , donc on a la  $\diamond$ -stabilité [9]. On a aussi la  $\diamond$ -stabilité (vérifiée par énumération), et la  $\Delta_{t_5}$ -stabilité pour  $Q_8$  par la prop. 23. On conclut par le théorème d'héritage, car l'affinement envoie vers  $RCC8_{\min} \times PA_{\max}$  et que  $\diamond_{\Delta_{t_5}}$  est suffisant (comme  $\diamond_{\Delta_{t_5}}$  l'est aussi).  $\square$

#### 4.4 Raisonnement multi-échelle qualitatif

Dans cette partie, nous montrons brièvement comment modéliser les représentations multi-échelles qualitatives [3, 1] par des multi-réseaux, et nous identifions des sous-classes traitables maximales pour la vérification de la cohérence associée. Notons par  $IA$  l'algèbre des intervalles et par  $PA$  l'algèbre des points [7] ; on s'intéresse à leur version multi-échelle, où une représentation est un ensemble de relations, chacune définie à une échelle temporelle différente (appelée aussi granularité). Une échelle  $g$  est dite « plus fine » qu'une échelle  $h$ , noté  $g \preceq h$ , si  $g$  a une meilleure résolution que  $h$ . On suppose ici que les échelles sont totalement ordonnées par rapport à  $\preceq$ . Une représentation multi-échelle est donc modélisée par un réseau  $N$  sur une multi-algèbre, où chaque  $N^i$  correspond aux relations définies à l'échelle  $g_i$ . Les projections de la multi-algèbre correspondent aux opérateurs de *conversion descendante*  $\downarrow$  et *ascendante*  $\uparrow$ , qui indiquent ce que devient une relation définie à une échelle vue depuis une échelle plus fine ou moins fine.

**Définition 28.** Soit  $A$  étant  $IA$  ou  $PA$ . La multi-algèbre de la version multi-échelle de  $A$  pour des échelles totalement ordonnées  $\{g_i\}_{i=1}^m$  est le produit cartésien  $A^m$  avec pour opérateurs de projection  $\uparrow_i^j = \uparrow$  et  $\downarrow_j^i = \downarrow$  si  $g_i \preceq g_j$ .

Nous définissons la *hiérarchie naturelle ascendante*  $n$  de  $A^m$  comme le graphe vérifiant  $\mathcal{A}_i \xrightarrow{n} \mathcal{A}_j \iff g_i \preceq g_j$ . Le filtre de projection partielle  $\Delta_n$  basé sur cette hiérarchie clôt les réseaux par conversion ascendante. On peut prouver que les scénarios  $\diamond_{\Delta_n}$ -clos sont cohérents.

On s'intéresse maintenant à deux sous-classes particulières de l'algèbre des intervalles, celles des relations pointisables et des relations pré-convexes [7, Ch. 2].

**Corollaire 29.** *La sous-classe des pointisables et la multi-algèbre des points sont traitables avec des échelles totalement ordonnées. En effet,  $\diamond_{\Delta_n}$  est suffisant.*

Nous obtenons ce résultat par le théorème de suffisance. En revanche, ce dernier ne peut pas prouver la traitabilité des relations pré-convexes, car  $\diamond_{\Delta_n}$  n'est pas suffisant. Toutefois, on peut l'obtenir par le théorème d'héritage en réduisant les relations pré-convexes aux relations pointisables.

**Corollaire 30.** *La sous-classe des pré-convexes est traitable pour la vérification de la cohérence avec des échelles totalement ordonnées. En effet,  $\diamond_{\Delta_n^*}$  est suffisant.*

## 5 Conclusion

Nous avons proposé un cadre formel général pour l'étude des multi-réseaux de contraintes qualitatives sur des formalismes différents. Nous avons en particulier prouvé deux théorèmes impliquant la traitabilité de décider de l'existence d'un multi-scénario algébriquement clos (et donc de la traitabilité de la vérification de la cohérence lorsque de tels scénarios sont cohérents), et nous les avons appliqués pour retrouver les résultats de traitabilité de la combinaison de la taille qualitative et de la topologie, et pour identifier des sous-classes maximales pour la traitabilité des algèbres des points et des intervalles dans le contexte du raisonnement temporel multi-échelle qualitatif. Nous travaillons sur l'application de ces résultats pour d'autres combinaisons.

## Références

- [1] Quentin COHEN-SOLAL, Maroua BOUZID et Alexandre NIVEAU : An algebra of granular temporal relations for qualitative reasoning. *In Proc. of IJCAI*, 2015.
- [2] Anthony G COHN, Sanjiang LI, Weiming LIU et Jochen RENZ : Reasoning about topological and cardinal direction relations between 2-dimensional spatial objects. *Journal of Artificial Intelligence Research*, pages 493–532, 2014.
- [3] Jérôme EUZENAT et Angelo MONTANARI : Time granularity. *Foundations of Artificial Intelligence*, 1:59–118, 2005.
- [4] Alfonso GEREVINI et Jochen RENZ : Combining topological and size information for spatial reasoning. *Artificial Intelligence*, 137(1):1–42, 2002.
- [5] Jerry R HOBBS : Granularity. *In Proc. of IJCAI*, 1985.
- [6] Sanjiang LI et Bernhard NEBEL : Qualitative spatial representation and reasoning : A hierarchical approach. *The Computer Journal*, 50(4):391–402, 2007.
- [7] Gérard LIGOZAT : *Qualitative spatial and temporal reasoning*. John Wiley & Sons, 2013.
- [8] Zhiguo LONG et Sanjiang LI : On distributive subalgebras of qualitative spatial and temporal calculi. *In Spatial Information Theory*, pages 354–374. Springer, 2015.

- [9] Jochen RENZ : Maximal tractable fragments of the region connection calculus : A complete analysis. *In Proc. of IJCAI*, pages 448–455, 1999.