



**HAL**  
open science

# Unitary boson-boson and boson-fermion mixtures: third virial coefficient and three-body parameter on a narrow Feshbach resonance

Shimpei Endo, Yvan Castin

► **To cite this version:**

Shimpei Endo, Yvan Castin. Unitary boson-boson and boson-fermion mixtures: third virial coefficient and three-body parameter on a narrow Feshbach resonance. *The European Physical Journal D: Atomic, molecular, optical and plasma physics*, 2016, 70, pp.238. 10.1140/epjd/e2016-70481-1 . hal-01350476v3

**HAL Id: hal-01350476**

**<https://hal.science/hal-01350476v3>**

Submitted on 17 Jan 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

# Mélanges unitaires boson-boson et boson-fermion : troisième coefficient du viriel et paramètre à trois corps sur une résonance de Feshbach étroite

Shimpei Endo<sup>1,2</sup> et Yvan Castin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Kastler Brossel, ENS-PSL, CNRS, UPMC-Sorbonne Universités, Collège de France, Paris, France

<sup>2</sup>School of Physics and Astronomy, Monash University, Victoria 3800, Australie

6 octobre 2016

**Résumé** Nous donnons des expressions intégrales exactes des troisièmes coefficients d'amas ou du viriel de mélanges binaires de gaz parfaits de bosons ou de fermions, avec une interaction inter-espèce de portée nulle et de longueur de diffusion infinie dans l'onde  $s$ . En général, le résultat dépend de paramètres à trois corps  $R_t$  apparaissant dans des conditions de contact à trois corps, parce qu'un effet Efimov est présent ou parce que le mélange est dans un régime préefimovien avec un rapport de masse proche d'un seuil de l'effet Efimov. Nous donnons une nouvelle expression intégrale exacte de  $R_t$  pour le modèle microscopique d'une résonance de Feshbach étroite. Une divergence de  $R_t$  dans le régime préefimovien à la valeur  $s = 1/2$  de l'exposant d'échelle est prédite et physiquement discutée. Les résultats analytiques sont appliqués aux espèces typiques utilisées dans les expériences d'atomes froids.

**PACS.** 67.85.-d Gaz froids, gaz piégés. – 21.45.-v Systèmes à petit nombre de corps

## 1 Introduction

Le domaine des gaz quantiques atomiques a assisté au cours de la dernière décennie à l'émergence d'un nouveau paradigme, le régime des interactions résonnantes, grâce à la possibilité de contrôler à volonté la longueur de diffusion  $a$  dans l'onde  $s$  par des résonances de Feshbach magnétiques [1, 2, 3, 4]. Cela établit un rapport fructueux entre les corrélations fortes à petit nombre de corps et la physique à  $N$  corps, qui n'a guère été étudié auparavant. À l'unitarité, où  $a^{-1} = 0$  et l'interaction est invariante d'échelle, il existe encore quelques paramètres sur lesquels jouer, à savoir la statistique quantique et le rapport de masse des particules, qui peuvent affecter profondément les propriétés à  $N$  corps du gaz.

Les études expérimentales se sont concentrées jusqu'à présent sur le gaz de fermions de spin 1/2 en interaction forte, et en particulier sur le gaz unitaire de fermions. L'équation d'état du gaz a été mesurée à la fois dans la phase superfluide et dans la phase normale, et les coefficients d'amas du développement de la pression en puissances de la fugacité, à ne pas confondre avec les coefficients du viriel du développement en puissances de la densité, ont été extraits jusqu'à l'ordre quatre [5, 6]. Ces coefficients constituent un lien intéressant entre la physique à petit nombre de corps et celle à  $N$  corps.

Bien qu'elles n'aient pas encore été réalisées expérimentalement, des phases moins conventionnelles avec toute une variété de manifestations de la superfluidité ont été

proposées, qui tirent parti d'une physique sous-jacente à petit nombre de corps très riche. Avec des fermions à plusieurs composantes, des états trimères ou tétramères peuvent exister [7, 8, 9, 10] et interagir [11, 12], ce qui crée de nouvelles voies d'appariement en concurrence avec l'appariement BCS habituel et donne accès à de nouvelles phases [13, 14]. Avec des bosons sans spin en interaction résonnante, des états liés à corps  $N$  peuvent exister [15], conduisant à une transition liquide-gaz en plus de la transition attendue entre un fluide normal et un superfluide [16, 17].

Dans cet article, nous présentons un calcul analytique général du troisième coefficient d'amas  $b_3$  d'un gaz à deux composantes à l'unitarité dans l'esprit de [18] avec la méthode du régulateur harmonique de [19, 20, 21, 22], en nous appuyant sur le fait que le problème unitaire à trois corps piégés peut être résolu [23, 24] grâce à la séparabilité en coordonnées hypersphériques [25]. Comme le cas particulier du mélange unitaire fermion-fermion a déjà été traité [26], nous complétons l'étude en incluant les mélanges unitaires boson-boson et boson-fermion. Nous adhérons ici à la philosophie des modèles de portée nulle, en remplaçant les potentiels d'interaction entre particules par des conditions de contact sur la fonction d'onde à trois corps, à savoir (i) des conditions de contact de Wigner-Bethe-Peierls à deux corps, qui sont invariantes d'échelle à l'unitarité [27, 28, 29], et (ii) des conditions de contact à trois corps sur la fonction d'onde hyperradiale : (a) en général, ces conditions sont également invariantes d'échelle (la fonc-

tion d'onde hyperradiale s'annule en loi de puissance); (b) cependant, si un effet Efimov [7, 8, 9] est présent, elles doivent faire intervenir une échelle de longueur à trois corps  $R_t$ , appelée paramètre à trois corps [7, 8, 9, 30], et une coupure inférieure doit être introduite à la main dans le spectre géométrique des trimères (pour éliminer les états trimères d'énergie de liaison  $\approx \hbar^2/m_r R_t^2$  ou plus, où  $m_r$  est la masse réduite à deux espèces, car ils sont en général hors du régime de validité du modèle de portée nulle); (c) enfin, si aucun effet Efimov n'est présent, mais que le rapport de masse est suffisamment proche d'un seuil de l'effet Efimov, elles doivent tout de même faire intervenir un paramètre à trois corps  $R_t$ , de sorte que  $b_3$  soit une fonction lisse du rapport de masse à travers le seuil [26] (il faut éliminer également à la main dans ce cas l'état trimère prédit par ces conditions de contact modifiées).

Deux questions importantes doivent cependant être résolues avant de procéder au calcul de  $b_3$ . La première question est théorique, c'est une lacune du modèle de portée nulle, qui ne peut par lui-même prédire une valeur de  $b_3$  lorsqu'un paramètre à trois corps entre en jeu, puisque la connaissance de  $R_t$  nécessite un modèle microscopique [31, 32, 33, 34]. Dans les mélanges boson-boson B – b, ce problème est aggravé parce que deux paramètres à trois corps  $R_t$  doivent être introduits,  $R_t^{\text{BBb}}$  et  $R_t^{\text{bbB}}$ , de sorte que l'on ne peut même pas absorber complètement  $R_t$  dans un changement d'échelle de la température comme cela est fait dans [18]. La deuxième question est d'ordre expérimental : lorsque l'effet Efimov est présent dans les expériences actuelles, de fortes pertes à trois corps ont lieu même dans la limite de portée nulle  $k_F b \rightarrow 0$ , où  $k_F$  est un nombre d'onde de Fermi et  $b$  la portée de l'interaction, en raison de la recombinaison en dimères fortement liés [35, 36]. Ceci est dû au fait que la probabilité que trois atomes se trouvent dans un même volume de rayon  $b$  tend vers zéro trop lentement, seulement comme  $b^2$ , alors que le taux de recombinaison dans une telle configuration d'atomes proches est  $\propto \hbar/m_r b^2$  [37]. Jusqu'à présent, cela a limité les études bosoniques à  $N$  corps à l'équilibre thermique au régime fortement non dégénéré [38, 39], où seuls les taux de perte, et non les coefficients du viriel, peuvent être mesurés et comparés à la théorie [38], et cela a limité les études bosoniques quantiques dégénérées à un régime hors d'équilibre [40, 41, 42].

Ici, nous utilisons comme modèle microscopique le modèle d'une résonance de Feshbach (infiniment) étroite [43], où, à l'unitarité, la portée effective de la diffusion à deux corps dans l'onde  $s$  est négative ( $-2R_*$ ) et beaucoup plus grande en valeur absolue que la longueur de van der Waals  $b$  de l'interaction. Cela résout les deux problèmes susmentionnés. Cela résout d'abord le problème théorique car le problème à trois corps à énergie nulle  $E = 0^-$  peut être résolu analytiquement et  $R_t$  peut être extrait [44, 45, 46]; nous affinons la théorie (i) en donnant une expression intégrale de  $R_t$  en termes de la fonction transcendante d'Efimov  $\bar{A}_\ell(s)$  (dans [44, 45], une représentation en termes d'un produit infini sur les racines de  $\bar{A}_\ell(s)$  a été donnée; dans [46], l'expression intégral-différentielle donnée n'est qu'une série asymptotique), (ii) en étendant

la solution d'énergie nulle et le calcul de  $R_t$  au cas non efimovien, pour un rapport de masse proche d'un seuil de l'effet Efimov. Cela résout également le problème expérimental : le choix d'une résonance de Feshbach étroite dans l'expérience devrait réduire les pertes efimoviennes à trois corps, maintenant dominées par la probabilité d'avoir un atome et une molécule de la voie fermée à une distance  $< b$  [47]<sup>1</sup>, où un événement de perte peut avoir lieu avec un taux  $\propto \hbar/m_r b^2$  [37]. Si l'on considère l'atome et la molécule comme des particules discernables qui n'interagissent pas, comme dans [47], la probabilité de les trouver à une distance  $< b$  est un  $O(b^3)$  puisque leur fonction d'onde relative est un  $O(1)$ . On prédit alors un taux de perte à trois corps en  $O(k_F b)$ , qui tend vers zéro dans la limite de portée nulle. Il reste bien sûr le défi de la stabilisation du champ magnétique posé par l'étroitesse de la résonance.

## 2 Troisième coefficient d'amas dans des modèles de portée nulle

Le développement en amas de la pression totale  $P$  d'un mélange de deux espèces à l'équilibre thermique dans une boîte cubique dans la limite thermodynamique est défini comme suit,

$$\frac{P\lambda_r^3}{k_B T} = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^{2*}} b_{n_1, n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \quad (1)$$

où les fugacités  $z_i = \exp(\mu_i/k_B T)$  tendent vers zéro à température fixée  $T$ ,  $\mu_i$  est le potentiel chimique de l'espèce  $i$  et  $\lambda_r = [2\pi\hbar^2/(m_r k_B T)]^{1/2}$  est la longueur d'onde de de Broglie thermique associée à la masse réduite

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

Dans la suite, nous supposons qu'il n'y a pas d'interaction intra-espèce et que l'interaction inter-espèce est dans la limite unitaire, c'est-à-dire avec une longueur de diffusion infinie dans l'onde  $s$  et une portée négligeable. Les coefficients d'amas  $b_{n_1, n_2}$  du gaz homogène sont reliés à la limite  $B_{n_1, n_2}$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$  des coefficients d'amas du gaz dans des potentiels de piégeage isotropes de même pulsation de piégeage  $\omega$  pour les deux espèces [48],

$$B_{n_1, n_2} = \left( \frac{m_r}{n_1 m_1 + n_2 m_2} \right)^{3/2} b_{n_1, n_2} \quad (3)$$

ce qui est plus facile à calculer dans la limite unitaire comme il est expliqué dans l'introduction. En raison de l'invariance par rotation, tous les coefficients d'amas, en particulier ceux du troisième ordre, peuvent être écrits comme des sommes sur les contributions des différents

1. La probabilité d'avoir trois atomes dans la voie ouverte à une distance  $< b$  avec un moment cinétique relatif  $\ell$  est un  $O(b^{2\ell+4})$  pour une résonance de Feshbach étroite, voir la note 41 dans [46].

secteurs de moment cinétique. En raison de l'absence d'interaction intra-espèce,  $B_{3,0}$  et  $B_{0,3}$  ont mêmes valeurs que dans un gaz parfait. Au contraire,  $B_{2,1}$  diffère de la valeur nulle, celle d'un gaz parfait. C'est le seul coefficient du troisième ordre non trivial que nous devons calculer puisque  $B_{1,2}$  s'en déduit en échangeant le rôle des espèces 1 et 2. Nous écrirons sa décomposition sur les secteurs de moment cinétique sous la forme

$$B_{2,1} = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} (2\ell + 1) \sigma_\ell \quad (4)$$

Nous nous limiterons au cas de particules de faibles nombres d'onde, beaucoup plus petits que  $1/b$ , où  $b$  est désormais la portée de l'interaction ou la portée effective si elle est plus grande, afin de pouvoir utiliser le modèle à portée nulle de Wigner-Bethe-Peierls, où les interactions entre les espèces sont remplacées par des conditions aux limites sur la fonction d'onde. Le problème unitaire à trois corps qui en résulte peut être résolu analytiquement dans l'espace libre [7, 8, 9] et dans des pièges harmoniques isotropes [23, 24]<sup>2</sup>. Les fonctions de partition canoniques à trois corps dans le piège et finalement le coefficient  $B_{2,1}$  peuvent être calculés. Le résultat s'applique dans le régime de température

$$k_B T \ll \frac{\hbar^2}{2m_r b^2} \quad (5)$$

Comme nous allons le voir, un ingrédient central de notre expression analytique est la fonction transcendante d'Efimov. C'est une fonction paire d'une seule variable  $s$  qui, dans le secteur de moment cinétique  $\ell \in \mathbb{N}$  pour le problème à trois corps 112, prend la forme<sup>3</sup> [46] :

$$\bar{A}_\ell(s) \stackrel{\ell \text{ pair}}{=} 1 - \frac{2\eta}{\sin 2\nu} \int_0^\nu d\theta P_\ell \left( \frac{\sin \theta}{\sin \nu} \right) \frac{\cos(s\theta)}{\cos(s\pi/2)} \quad (6)$$

$$\bar{A}_\ell(s) \stackrel{\ell \text{ impair}}{=} 1 + \frac{2\eta}{\sin 2\nu} \int_0^\nu d\theta P_\ell \left( \frac{\sin \theta}{\sin \nu} \right) \frac{\sin(s\theta)}{\sin(s\pi/2)} \quad (7)$$

avec  $P_\ell$  un polynôme de Legendre,

$$\nu = \arcsin \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (8)$$

l'angle de masse et  $\eta = 1$  ( $\eta = -1$ ) si l'espèce 1 est bosonique (fermionique). Une écriture équivalente et qui a son utilité peut être obtenue à partir de la forme hypergéométrique de [50, 51] :

$$\bar{A}_\ell(s) = 1 - \frac{\eta(-\sin \nu)^\ell}{2\pi^{1/2} \cos \nu} \times \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\Gamma(k + \frac{\ell+1+s}{2}) \Gamma(k + \frac{\ell+1-s}{2}) \sin^{2k} \nu}{\Gamma(k + \ell + \frac{3}{2}) k!} \quad (9)$$

2. Le problème à trois corps dans l'espace libre peut être résolu analytiquement également pour une longueur de diffusion finie [49].

3. La fonction d'Efimov est ici divisée par  $\cos \nu$  par rapport aux références précédentes, d'où la barre dans la notation  $\bar{A}_\ell(s)$ .

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma d'Euler.

Comme nous le verrons, dans le domaine des modèles de portée nulle, le modèle de Wigner-Bethe-Peierls n'est pas l'alpha et l'oméga, car il ne spécifie que des conditions de contact à deux corps. Pour choisir le modèle de portée nulle approprié pour le problème à trois corps, il faut discuter de l'existence d'une racine de  $\bar{A}_\ell(s)$  sur l'intervalle  $]0, \ell + 1[$ . Sur cet intervalle,  $\bar{A}_\ell(s)$  est une fonction lisse de  $s$  car le plus petit pôle positif des termes de la série (9) se trouve en  $\ell + 1$ . Pour mener cette discussion, on peut profiter d'un premier résultat utile : la fonction  $s \mapsto \bar{A}_\ell(s)$  est décroissante (croissante) sur  $]0, \ell + 1[$  lorsque  $\eta(-1)^\ell$  est positif (négatif)<sup>4</sup> et tend vers  $-\infty$  ( $+\infty$ ) lorsque  $s \rightarrow \ell + 1^-$ . Par conséquent, elle admet zéro ou une racine dans  $]0, \ell + 1[$ , selon le signe de  $\bar{A}_\ell(0)$ . Nous disposons d'un deuxième résultat utile : la fonction  $S \mapsto \bar{A}_\ell(iS)$  est croissante (décroissante) sur  $\mathbb{R}^+$  lorsque  $\eta(-1)^\ell$  est positif (négatif)<sup>5</sup> et tend exponentiellement rapidement vers 1 en  $+\infty$  en vertu des éqs. (6,7). On n'est alors confronté qu'à l'un des trois cas possibles énumérés ci-dessous ; pour  $\eta(-1)^\ell$  négatif, seul le premier cas est effectivement accessible puisque  $\bar{A}_\ell(s)$  est alors  $> 1$  sur  $]0, \ell + 1[$ .

1. *Le cas simple non efimovien* :  $\bar{A}_\ell(s)$  n'a que des racines réelles, et la plus petite racine positive est  $s_\ell > 1$ . La fonction d'onde hyperradiale  $F(R)$  est soumise à la condition aux limites<sup>6</sup>

$$F(R) \stackrel{R \rightarrow 0}{=} O(R^{s_\ell}) \quad (10)$$

où l'hyperrayon  $R$  du système 112 est l'écart type (pondéré par les masses correspondantes) des positions des trois particules comptées à partir de leur centre de masse. Alors la contribution  $\sigma_\ell$  de moment cinétique  $\ell$  à  $B_{2,1}$  comme la définit l'éq. (4) est donnée par [18, 26]

$$\sigma_\ell = - \int_{\mathbb{R}^+} \frac{dS}{2\pi} \ln \bar{A}_\ell(iS) \quad (11)$$

2. *Le cas préefimovien* :  $\bar{A}_\ell(s)$  n'a que des racines réelles, mais la plus petite racine positive  $s_\ell \in ]0, 1[$ . Dans la voie associée à la racine  $s_\ell$ , il existe une condition aux limites enrichie [53, 54, 55], qui doit être utilisée lorsque  $s_\ell$  est suffisamment petit [26]<sup>7</sup> :

$$F(R) \stackrel{R \rightarrow 0}{=} (R/R_t)^{s_\ell} - (R/R_t)^{-s_\ell} + O(R^{2-s_\ell}) \quad (12)$$

4. Pour le voir, on peut utiliser l'éq. (9) et le fait que la fonction  $x \mapsto \Gamma(x+a)\Gamma(a-x)$  est positive et a une dérivée logarithmique strictement positive  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2x}{(a+n)^2 - x^2}$  sur  $[0, a[$   $\forall a > 0$ , voir §8.362(1) dans [52].

5. En effet,  $\forall a > 0$ , la dérivée logarithmique de  $x \mapsto \Gamma(a+ix)\Gamma(a-ix)$  sur  $\mathbb{R}$  est  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{-2x}{(n+a)^2 + x^2}$ , voir §8.362(1) dans [52].

6. Plus précisément, la fonction d'onde à trois corps s'écrit sous la forme  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \phi(\Omega)F(R)/R^2$  où  $\Omega$  est l'ensemble des hyperangles [7, 8, 9, 25].

7. On ne l'utilisera pas pour  $s_\ell > 1$  car la fonction d'onde n'est pas de carré intégrable en  $R = 0$ ,  $\int_0^{R_0} dR R |F(R)|^2 = +\infty$  pour tout  $R_0$  fini.

où la longueur  $R_t$  est un paramètre à trois corps. Ceci conduit à prédire dans l'espace libre un état lié 112 de dégénérescence  $2\ell + 1$  et d'énergie de liaison

$$E_{\text{glob}} = \frac{2\hbar^2}{(2m_1 + m_2)R_t^2} \left( \frac{\Gamma(1 + s_\ell)}{\Gamma(1 - s_\ell)} \right)^{1/s_\ell} \quad (13)$$

qui doit être ignoré en l'absence de résonance à trois corps. Alors [26]

$$\sigma_\ell = - \int_{\mathbb{R}^+} \frac{dS}{2\pi} f_\ell(S) - \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon \Delta(\epsilon) \beta e^{-\beta\epsilon} \quad (14)$$

avec  $\beta = 1/k_B T$ ,

$$\Delta(\epsilon) = \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \frac{\operatorname{th}[\frac{s_\ell}{2} \ln(\epsilon/E_{\text{glob}})]}{\tan(\frac{s_\ell}{2}\pi)} \quad (15)$$

et la fonction lisse à valeurs réelles sur l'axe réel :

$$f_\ell(S) \equiv \ln \left[ \frac{S^2 + 1}{S^2 + s_\ell^2} \bar{A}_\ell(iS) \right] \quad (16)$$

Dans ce cas préefimovien, le modèle de portée nulle enrichi a la même condition de validité que l'éq. (5) sous l'hypothèse générique que  $R_t$  et  $b$  sont du même ordre de grandeur [26].

3. *le cas efimovien* :  $\bar{A}_\ell(s)$  a des racines réelles et une paire de racines imaginaires pures  $\pm s_\ell$  avec  $s_\ell = i|s_\ell|$ . Dans la voie efimovienne, on doit utiliser la condition aux limites [7, 8, 9, 30]

$$F(R) \underset{R \rightarrow 0}{=} (R/R_t)^{|s_\ell|} - (R/R_t)^{-|s_\ell|} + O(R^2) \quad (17)$$

Comme  $F(R)$  a un nombre infini de racines sur tout voisinage de  $R=0$ , le modèle prédit dans l'espace libre un nombre infini d'états trimères d'énergies  $\epsilon_q$  et de dégénérescence  $2\ell + 1$ , formant une suite géométrique que nous tronquons à la main pour la rendre cohérente avec l'hypothèse d'une interaction de portée nulle :

$$\epsilon_q = -E_{\text{glob}} e^{-2\pi(1+q)/|s_\ell|}, \forall q \in \mathbb{N} \quad (18)$$

L'échelle d'énergie globale est un simple prolongement analytique de l'éq. (13) :

$$E_{\text{glob}} = \frac{2\hbar^2}{(2m_1 + m_2)R_t^2} e^{[\ln \Gamma(1+s_\ell) - \ln \Gamma(1-s_\ell)]/s_\ell} \quad (19)$$

avec  $\ln \Gamma$  la détermination habituelle du logarithme de la fonction  $\Gamma$ . En plus de la condition de portée nulle (5), on exige pour que le modèle considéré soit valable que le trimère fondamental soit dans le régime de portée nulle,

$$|\epsilon_0| \ll E_{\text{glob}} \quad (20)$$

c'est-à-dire  $|s_\ell| \lesssim 1,5$ . Comme  $|s_\ell|$  est une fonction croissante du rapport de masse  $m_1/m_2$ , ceci impose une limite supérieure sur  $m_1/m_2$ . Alors [26]

$$\sigma_\ell = - \int_{\mathbb{R}^+} \frac{dS}{2\pi} f_\ell(S) - \int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon \Delta(\epsilon) \beta e^{-\beta\epsilon} + \sum_{q \in \mathbb{N}} (e^{-\beta\epsilon_q} - 1) \quad (21)$$

où la fonction  $f_\ell(S)$  est toujours donnée par l'éq. (16) et la nouvelle forme de la fonction  $\Delta$ ,<sup>8</sup>

$$\Delta(\epsilon) = \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \frac{\tan(\frac{|s_\ell|}{2}x)}{\operatorname{th}(\frac{|s_\ell|}{2}\pi)} + \left\lfloor \frac{|s_\ell|x}{2\pi} \right\rfloor \quad (22)$$

reste une fonction lisse de  $x = \ln(\epsilon/E_{\text{glob}})$  grâce à la fonction entier le plus proche introduite dans le dernier terme.

Les conditions sur le rapport de masse pour qu'il y ait un effet Efimov sont connues. Pour  $\eta = +1$ , il y a un effet Efimov dans le secteur  $\ell = 0$  pour tout rapport de masse, dans le secteur  $\ell = 2$  pour  $m_1/m_2 > 38,6301\dots$ , dans le secteur  $\ell = 4$  pour  $m_1/m_2 > 125,764\dots$ , etc. Pour  $\eta = -1$ , il y a un effet Efimov dans le secteur  $\ell = 1$  pour  $m_1/m_2 > 13,6069\dots$  [57], dans le secteur  $\ell = 3$  pour  $m_1/m_2 > 75,9944\dots$  [58], etc. Sur la fig. 1, faite pour  $\eta = 1$ , nous représentons la partie imaginaire de  $s_0$  en fonction de l'angle de masse (avec une comparaison à ses développements limités à petit et grand rapport de masse); nous représentons également les parties réelle et imaginaire de  $s_2$  près du seuil de l'effet Efimov.

### 3 Paramètre à trois corps pour une résonance de Feshbach étroite

Pour le modèle d'interaction microscopique d'une résonance de Feshbach étroite, nous montrons maintenant comment obtenir une nouvelle expression analytique pour le paramètre à trois corps et nous précisons l'intervalle de rapport de masse sur lequel il faut utiliser le modèle préefimovien enrichi plutôt que le modèle non efimovien simple.

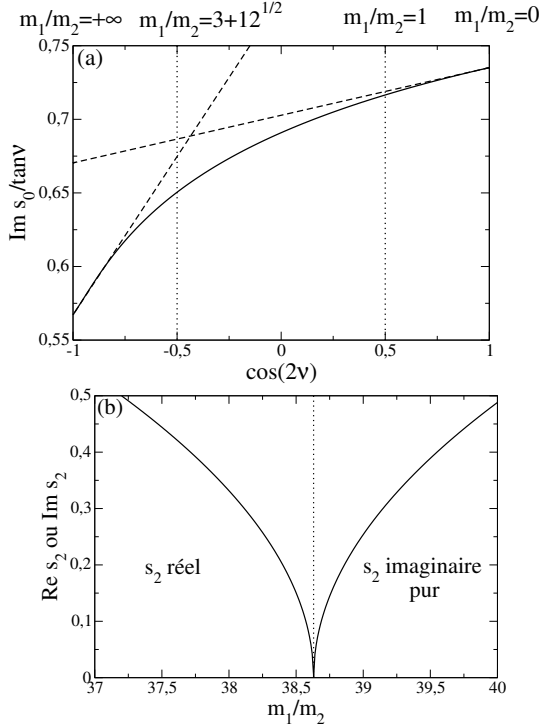
Le point de départ est l'équivalent de l'équation intégrale de Skorniakov–Ter-Martirosienne [59] pour le problème à trois corps 112 sur une résonance de Feshbach étroite. Elle peut être obtenue en utilisant soit des conditions de contact à deux corps modifiées [43], soit un modèle à deux voies avec des potentiels séparables de portée tendant vers zéro [46, 60, 61, 62, 63, 64]. Dans le secteur de moment cinétique  $\ell$ , les deux modèles conduisent pour  $1/a = 0$  et une énergie négative  $E = -\hbar^2 q^2/2m_r$  dans le référentiel du centre de masse à

$$[q_{\text{rel}}(k) + q_{\text{rel}}^2(k)R_*]d(k) = \eta \int_{\mathbb{R}^+} \frac{dk'}{\pi} \int_{-1}^1 du \frac{P_\ell(u)k'^2 d(k')}{q^2 + k^2 + k'^2 + 2kk'u \sin \nu} \quad (23)$$

avec  $P_\ell$  le polynôme de Legendre de degré  $\ell$ ,  $q_{\text{rel}}(k) \equiv |q + ik \cos \nu|$  et  $R_* > 0$  la longueur de Feshbach entrant dans l'amplitude de diffusion 12 à l'énergie  $E$  dans le référentiel du centre de masse,  $f_q = -1/(iq + q^2 R_*)$ . On a tenu

8. On dispose également de l'expression  $\Delta(\epsilon) = \frac{|s_\ell|x}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \ln(1 - e^{-\pi|s_\ell|} e^{-i|s_\ell|x})$  [56], qui conduit à  $-\int_{\mathbb{R}^+} d\epsilon \Delta(\epsilon) \beta e^{-\beta\epsilon} = \frac{|s_\ell|}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \ln(e^\gamma \beta E_{\text{glob}}) - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-n\pi|s_\ell|} \operatorname{Re}[\Gamma(-in|s_\ell|)(\beta E_{\text{glob}})^{in|s_\ell|}] \right\}$  comme dans [18],  $\gamma = 0,577215\dots$  étant la constante d'Euler.





**Figure 1.** Partie réelle ou imaginaire de  $s_\ell$  en fonction du rapport de masse  $m_1/m_2$  dans le problème 112 pour  $\eta = 1$  (les particules de l'espèce 1 sont des bosons identiques) dans le secteur de moment cinétique (a)  $\ell = 0$  ( $s_0$  est toujours imaginaire pur), (b)  $\ell = 2$  ( $s_2$  passe de réel à imaginaire pur pour  $m_1/m_2 = 38,6301 \dots$  sur la ligne pointillée verticale). Dans (a) on utilise l'angle de masse  $\nu = \arcsin \frac{m_1}{m_1+m_2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$  comme paramètre, pour pouvoir couvrir tous les rapports de masse, et  $\text{Im } s_0$  est divisé par  $\tan \nu$  pour former une quantité bornée. Traits pleins : solution numérique de l'équation transcendantale  $\bar{A}_\ell(s_\ell) = 0$ . Lignes tiretées en (a) : développements limités pour un faible rapport de masse  $\nu \rightarrow 0^+$ ,  $\text{Im } s_0 / \tan \nu = \frac{4}{\pi\sqrt{3}} \left[ 1 + \left( \frac{1}{3\pi^2} - \frac{7}{90} \right) (1 - \cos 2\nu) + O(\nu^4) \right]$ , et pour un grand rapport de masse  $\nu \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$  comme dans [46],  $\text{Im } s_0 / \tan \nu = \Omega \left[ 1 + \frac{3+\Omega}{6(1+\Omega)} (1 + \cos 2\nu) \right] + O\left[\left(\frac{\pi}{2} - \nu\right)^4\right]$  où la constante  $\Omega$  satisfait à  $\Omega \exp \Omega = 1$ . Lignes pointillées verticales en (a) : les rapports de masse  $m_1/m_2 = 1$  et  $3 + \sqrt{12}$  où  $\cos 2\nu = \pm \frac{1}{2}$ .

compte de l'invariance par rotation avec l'ansatz suivant sur la fonction inconnue :

$$D(\mathbf{k}) = Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}})d(k) \quad (24)$$

où  $\hat{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}/k$  est la direction de  $\mathbf{k}$  et  $Y_\ell^m$  est une harmonique sphérique. Dans le modèle à deux voies (en supposant pour des raisons de simplicité l'absence d'interaction directe dans la voie ouverte),  $D(\mathbf{k})$  est l'amplitude de probabilité dans la voie fermée d'avoir une particule de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et une molécule de vecteur d'onde  $-\mathbf{k}$ . Dans le modèle de [43]  $D(\mathbf{k})$  est la transformée de Fourier de la partie régulière  $A(\mathbf{x})$  de la fonction d'onde,

$$D(\mathbf{k}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} A(\mathbf{x}) \quad (25)$$

telle que  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \sim \frac{A(\mathbf{r}_3 - \mathbf{R}_{12})}{r_{12}}$  lorsque la distance impureté-première particule identique  $r_{12} \rightarrow 0$  à des positions fixées  $\mathbf{R}_{12}$  de leur centre de masse et  $\mathbf{r}_3$  de la seconde particule identique. Dans la limite de portée nulle et dans le secteur de moment cinétique  $\ell$ , elle est reliée à la fonction d'onde hyperradiale  $F(R)$  comme suit,

$$A(\mathbf{x}) \propto Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}) x^{-1} F\left(R = \frac{x \sin^{1/2} \nu}{1 + \sin \nu}\right) \quad (26)$$

Dans la limite d'énergie nulle  $E = 0^-$ , il y a invariance d'échelle de l'opérateur intégral dans l'éq. (23), qui devient un produit de convolution lorsqu'on utilise  $X = \ln(kR_* \cos \nu)$  comme nouvelle variable. On prend alors la transformée de Fourier de  $d(k)k^2$  par rapport à  $X$  comme nouvelle fonction inconnue; elle obéit à une équation aux différences finies que l'on sait résoudre. En prenant la transformée de Fourier inverse et en utilisant le théorème des résidus, on peut calculer analytiquement le comportement de  $d(k)$  pour  $X \rightarrow -\infty$ , c'est-à-dire pour  $k \rightarrow 0$ , ce qui permet d'accéder au paramètre à trois corps  $R_t$ .

Cette procédure a déjà été mise en œuvre dans [44, 45, 46] dans le cas efimovien  $s_\ell = i|s_\ell|$ . Nous la poussons jusqu'à l'ordre sous-dominant pour obtenir une condition de validité du modèle de portée nulle :

$$d(k) \underset{k \rightarrow 0}{=} C(-s_\ell)(kR_* \cos \nu)^{-s_\ell-2} \left[ 1 - \frac{kR_* \cos \nu}{\bar{A}_\ell(1-s_\ell)} \right] + C(s_\ell)(kR_* \cos \nu)^{s_\ell-2} \left[ 1 - \frac{kR_* \cos \nu}{\bar{A}_\ell(1+s_\ell)} \right] + o(kR_*)^{-1} \quad (27)$$

avec <sup>9</sup>

$$C(s) = \Gamma(-2s) \frac{\Gamma(1 + v_{\ell,0} + s)}{\Gamma(v_{\ell,0} - s)} \times \prod_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\Gamma(u_{\ell,n} - s) \Gamma(1 + v_{\ell,n} + s)}{\Gamma(v_{\ell,n} - s) \Gamma(1 + u_{\ell,n} + s)} \quad (28)$$

où les  $u_{\ell,n}$ ,  $n \geq 1$ , sont les racines positives et  $v_{\ell,n} = \ell + 1 + 2n$ ,  $n \geq 0$ , les pôles positifs de  $\bar{A}_\ell(s)$  rangés dans l'ordre croissant. En utilisant les éqs. (17,26) pour obtenir  $A(\mathbf{x})$  dans le modèle de portée nulle et en prenant la transformée de Fourier comme dans l'éq. (25), on obtient <sup>10</sup>

$$\left( \frac{q_{\text{glob}} R_*}{2} \right)^{2s_\ell} = \frac{C(-s_\ell)}{C(s_\ell)} \prod_{k=0}^{\ell} \frac{k - s_\ell}{k + s_\ell} \quad (29)$$

où

$$E_{\text{glob}} \equiv \frac{\hbar^2 q_{\text{glob}}^2}{2m_r} \quad (30)$$

9. Une meilleure estimation du reste dans l'éq. (27) est  $O(kR_*)^\alpha$  avec  $\alpha = \min(u_{\ell,1} - 2, 0)$  pour  $s_\ell \in i\mathbb{R}^+$  et  $\alpha = -s_\ell$  pour  $s_\ell \in ]0, 1[$  (auquel cas  $\ell \geq 1$ ).

10. On utilise  $\int_0^{+\infty} dx x^{\frac{1}{2}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) x^{-s} = 2^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma(\frac{2+\ell-s}{2})}{\Gamma(\frac{1+\ell+s}{2})}$ , où la fonction de Bessel  $J$  provient du développement d'une onde plane sur les harmoniques sphériques.

est relié au paramètre à trois corps par l'éq. (19). Ceci généralise la référence [46] au cas de deux bosons et d'une impureté. De façon remarquable, nous avons trouvé une nouvelle forme analytique ne nécessitant pas le calcul des racines  $u_{\ell,n}$ ,  $n \geq 1$ , de la fonction transcendante  $\bar{A}_\ell(s)$  :<sup>11</sup>

$$\left(\frac{q_{\text{glob}}R_*}{2}\right)^{2s_\ell} = \frac{\Gamma(1+2s_\ell)\Gamma(v_{\ell,0}-s_\ell)\Gamma(2-s_\ell)}{\Gamma(1-2s_\ell)\Gamma(v_{\ell,0}+s_\ell)\Gamma(2+s_\ell)} \times \exp\left[-i\int_0^{+\infty} dS \frac{f_\ell(S-is_\ell) - f_\ell(S+is_\ell)}{\text{th}(\pi S)}\right] \quad (31)$$

où la fonction  $f_\ell$  est donnée par l'éq. (16). Ceci est aussi explicite que possible puisque  $\bar{A}_\ell(s)$  peut être écrit explicitement grâce aux éqs. (6,7)<sup>12</sup>.

La méthode de résolution de l'équation intégrale à énergie nulle peut être étendue au régime préefimovien  $0 < s_\ell < 1$ .<sup>13</sup> Tous les résultats (27-31) du cas efimovien s'étendent directement au cas préefimovien. Pour  $0 < s_\ell < 1/2$ , le second membre de l'éq. (31) est positif. Pour  $1/2 < s_\ell < 1$ , il est négatif; cela signifie que  $R_t^{2s_\ell}$  est négatif, ce qui conduit dans l'éq. (12) à une condition aux limites  $F(R) \underset{R \rightarrow 0}{=} (R/|R_t|)^{s_\ell} + (R/|R_t|)^{-s_\ell} + O(R^{2-s_\ell})$  ne conduisant plus à un état lié à trois corps comme discuté dans [53].

Il est intéressant de noter qu'à un rapport de masse  $m_1/m_2$  tel que  $s_\ell = \frac{1}{2}$ ,  $q_{\text{glob}}$  et  $1/R_t$  s'annulent comme  $1-2s_\ell$  en raison du premier facteur  $\Gamma$  au dénominateur de l'éq. (31) et à la propriété  $\Gamma(z) \sim 1/z$  pour  $z \rightarrow 0$ , ce qui suggère une résonance à trois corps. S'il s'agissait d'une véritable résonance à trois corps, cependant, on croirait à la condition aux limites (12) à toute échelle d'énergie beaucoup plus petite que l'échelle d'énergie  $\hbar^2/(2m_r R_*^2)$  associée à la portée de l'interaction; pour  $s_\ell - \frac{1}{2}$  petit et négatif, il y aurait alors un état trimère d'énergie de liaison  $E_{\text{glob}}$ . Or, ceci est en contradiction avec une résolution numérique de l'éq. (23) pour  $\eta = -1$  [46] et pour  $\eta = 1$ .

11. On utilise l'identité  $\frac{\Gamma(u+s)\Gamma(u+1+s)\Gamma(v-s)\Gamma(v+1-s)}{\Gamma(u-s)\Gamma(u+1-s)\Gamma(v+s)\Gamma(v+1+s)} = \exp\left\{-i\int_{\mathbb{R}^+} \frac{dx}{\text{th}\pi x} [\ln\Psi(x-is) - \ln\Psi(x+is)]\right\}$  avec  $\Psi(z) = \frac{u^2+z^2}{v^2+z^2}$  et  $u, v > 0$ . Elle est valable pour tout  $s \in i\mathbb{R}^+$ , et aussi pour  $0 < s < u, v$ . Pour l'établir, on remarque qu'elle est clairement satisfaite en  $s = 0$ , et que sa dérivée logarithmique par rapport à  $s$  s'obtient à partir de la formule §8.361(3) dans [52],  $\frac{d}{dz} \ln\Gamma(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - \int_{\mathbb{R}^+} \frac{2t dt}{(t^2+z^2)[\exp(2\pi t)-1]}$  avec  $\text{Re } z > 0$ .

12. Pour  $s_\ell \in i\mathbb{R}^+$ , on prend le logarithme de l'éq. (31) pour exprimer  $q_{\text{glob}}R_*$  de manière univoque en termes de la détermination habituelle de la fonction  $\ln\Gamma(z)$ , et on peut utiliser la forme numériquement plus commode  $2i\int_0^{|s_\ell|} dS f_\ell(S) + i\int_{\mathbb{R}^+} dS \left(1 - \frac{1}{\text{th}(\pi S)}\right) [f_\ell(S+|s_\ell|) - f_\ell(S-|s_\ell|)]$  pour l'argument de la fonction exponentielle dans l'éq. (31).

13. Le seul point subtil est qu'il faut déplacer la ligne d'intégration définissant la représentation de Fourier de  $k^2 d(k)$  considérée comme une fonction de  $X$ : au lieu d'intégrer sur la ligne  $\mathbb{R} + i0^+$  comme dans l'éq. (66) de [46], on doit intégrer sur une ligne  $\mathbb{R} + i\gamma$ ,  $s_\ell < \gamma < 1 + v_{\ell,0}$ , pour passer entre le pôle le plus élevé  $is_\ell$  de la transformée de Fourier provenant d'une racine de  $\bar{A}_\ell$  et le pôle le plus bas  $i(1+v_{\ell,0})$  provenant d'un pôle de  $\bar{A}_\ell$ .

Pour identifier la bonne échelle d'énergie  $E_{\text{lim}}$  en dessous de laquelle les prédictions du modèle de portée nulle enrichi (12) sont fiables, nous exigeons que pour  $k_{\text{lim}} \cos \nu \equiv (2m_r E_{\text{lim}})^{1/2}/\hbar$  le terme sous-dominant de l'éq. (27) soit comparable au terme dominant<sup>14</sup>:

$$k_{\text{lim}}R_* \cos \nu = |\bar{A}_\ell(1-s_\ell)| \quad (32)$$

Comme  $\bar{A}_\ell(s) \propto s-s_\ell$  près de sa racine  $s_\ell$ ,  $\bar{A}_\ell(1-s_\ell)$  s'annule comme  $1-2s_\ell$  quand  $s_\ell \rightarrow 1/2$ , donc  $k_{\text{lim}} \cos \nu \simeq q_{\text{glob}}$  et  $E_{\text{lim}} \simeq E_{\text{glob}}$ . Ceci explique l'absence d'état trimère même pour  $q_{\text{glob}}R_* \ll 1$ . On peut donc calculer le coefficient d'amas de 112 sur une étroite résonance de Feshbach près de  $s_\ell = 1/2$  en utilisant le modèle de portée nulle enrichi (12) seulement sous la condition

$$k_B T \ll E_{\text{glob}} \quad (33)$$

Lorsque  $s_\ell$  est très proche de  $1/2$ ,  $k_B T$  devient en pratique  $> E_{\text{glob}}$  et on doit revenir au modèle habituel de portée nulle (10), sous la condition de validité (5) écrite pour  $b = R_*$ . L'équation (27) devient alors

$$d(k) \underset{k \rightarrow 0}{s_\ell = \frac{1}{2}} (kR_* \cos \nu)^{-5/2} - (kR_* \cos \nu)^{-3/2} [\text{cte} + \ln(kR_* \cos \nu)] + O[\ln(kR_* \cos \nu)(kR_* \cos \nu)^{-1/2}] \quad (34)$$

Le terme dominant correspond à la condition aux limites habituelle (10), et le terme sous-dominant est effectivement négligeable (à un facteur logarithmique près) sous la condition  $kR_* \cos \nu \ll 1$ .

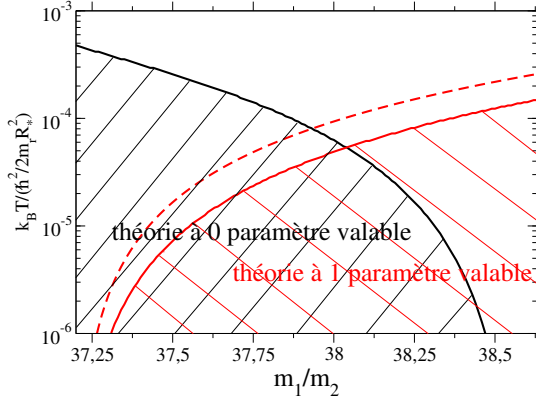
Pour  $s_\ell$  significativement éloigné de  $1/2$  par valeurs inférieures, ou pour  $s_\ell$  imaginaire pur, les modèles de portée nulle enrichis (12,17) prédisent toujours l'existence d'un état trimère d'énergie de liaison  $E_{\text{glob}}$ , ce qui est incorrect sur une résonance de Feshbach étroite. Cela signifie que ces modèles ne sont jamais corrects à l'échelle d'énergie  $E_{\text{glob}}$ . Dans le calcul des coefficients du viriel, nous prenons donc comme condition de validité qualitative

$$k_B T \ll E_{\text{glob}}, \frac{\hbar^2}{2m_r R_*^2} \quad (35)$$

ce qui inclut automatiquement la contrainte obtenue ci-dessus au voisinage de  $s_\ell = 1/2$ . Les régimes de température *quantitativement* déterminés où le modèle habituel de portée nulle à zéro paramètre et le modèle de portée nulle enrichi à un paramètre peuvent être utilisés pour calculer le troisième coefficient d'amas pour un rapport de masse conduisant à  $s_\ell \in [0, 1/2]$  sont représentés sur la fig. 2, en prenant comme exemple le cas bosonique  $\eta = +1$  dans le secteur  $\ell = 2$ . Ils confirment l'analyse *qualitative* ci-dessus.

Sur la fig. 3, nous avons représenté le paramètre à trois corps  $R_t$ , ou plus commodément  $q_{\text{glob}}R_*$ , en fonction du rapport de masse  $m_1/m_2$ , dans le cas bosonique  $\eta = 1$ , à tous les angles de masse pour  $\ell = 0$  et au voisinage du

14. La condition correspondante pour  $s_\ell \leftrightarrow -s_\ell$  met en jeu  $\bar{A}_\ell(1+s_\ell)$  et est moins contraignante.

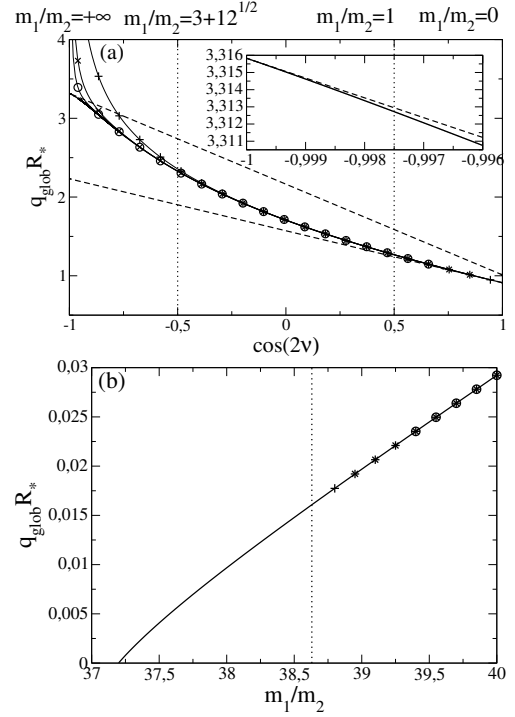


**Figure 2.** Pour  $\eta = +1$  dans le secteur  $\ell = 2$ , zone de validité dans le plan (rapport de masse, température) de la théorie de portée nulle habituelle à zéro paramètre (hachures noires) et de la théorie de portée nulle enrichie à un paramètre (hachures rouges) pour le calcul du coefficient d'amas  $B_{2,1}$  à l'unitarité sur une résonance de Feshbach étroite de longueur de Feshbach  $R_*$ . Sous la ligne noire en trait plein, la somme des termes de degré  $-s_2 - 1$  et  $s_2 - 2$  en  $k$  est plus de 3 fois plus petite que le terme de degré  $-s_2 - 2$  dans l'éq. (27), pour  $k \cos \nu = (2m_r k_B T)^{1/2} / \hbar$ . Sous le trait plein rouge, la somme des termes de degré  $-s_2 - 1$  et  $s_2 - 1$  dans  $k$  est plus de 3 fois plus petite que la somme des termes de degré  $-s_2 - 2$  et  $s_2 - 2$ . Ligne pointillée rouge : là où  $k_B T = E_{\text{glob}}$ . Aux bornes de l'intervalle de masse considéré, on a respectivement  $s_2 = 1/2$  et  $s_2 = 0$ .

seuil de l'effet Efimov pour  $\ell = 2$ . Du côté efimovien, nous comparons également  $E_{\text{glob}}$  aux quantités  $-\epsilon_q \exp[2\pi(q+1)/|s_\ell|]$ , pour les premiers états trimères  $q = 0$ ,  $q = 1$ , etc. du modèle de résonance étroite de Feshbach, qui dans la précision de la théorie de portée nulle coïncident avec  $E_{\text{glob}}$ .

Avec notre nouvelle expression (31), certains résultats analytiques explicites pour le paramètre à trois corps peuvent être obtenus dans la limite d'une impureté (particule de l'espèce 2) lourde  $m_2/m_1 \gg 1$  ou légère  $m_2/m_1 \ll 1$ , en considérant le cas où les particules de l'espèce 1 sont bosoniques ( $\eta = +1$ ) et en se limitant au secteur  $\ell = 0$ . Dans la limite d'une impureté lourde  $\nu \rightarrow 0^+$ , nous obtenons le développement

$$\frac{q_{\text{glob}} R_*}{2} \underset{\nu \rightarrow 0^+}{=} e^{-\pi/4} \left[ 1 + \left( \frac{17}{27} - \frac{1}{9\pi^2} + \frac{19\pi}{72} \right) \sin^2 \nu + O(\sin^4 \nu) \right] \quad (36)$$



**Figure 3.** Valeur de  $q_{\text{glob}} R_*$  donnant l'échelle d'énergie globale  $E_{\text{glob}} = \hbar^2 q_{\text{glob}}^2 / 2m_r$  [ou de manière équivalente le paramètre à trois corps  $R_t$  selon les eqs. (13,19)] pour deux bosons identiques de l'espèce 1 et une particule d'espèce différente 2 interagissant avec une longueur de diffusion infinie dans l'onde  $s$  sur une résonance de Feshbach étroite, en fonction du rapport de masse  $m_1/m_2$  ou de l'angle de masse  $\nu = \arcsin \frac{m_1}{m_1+m_2}$ , dans le secteur de moment cinétique  $\ell = 0$  pour (a) et  $\ell = 2$  pour (b). Trait plein épais : valeur exacte éq. (31), à la fois pour le cas préefimovien limité à  $s_\ell \in ]0, 1/2]$  [dans (b) à gauche de la ligne pointillée verticale] et pour le cas efimovien  $s_\ell \in i\mathbb{R}^+$  [partout dans (a) et à droite de la ligne pointillée verticale dans (b)]. Symboles reliés par des traits fins : dans le cas efimovien, à partir des estimations  $E_{\text{glob}} \simeq -\epsilon_q \exp[2\pi(q+1)/|s_\ell|]$  (exactes pour  $q \rightarrow +\infty$  ou  $|s_\ell| \rightarrow 0$ ), où  $\epsilon_q$  est l'énergie du gème état trimère,  $q \in \mathbb{N}$ , obtenue numériquement à partir de l'éq. (23) quand c'est faisable ( $q = 0$  : plus,  $q = 1$  : croix,  $q = 2$  : cercles); quand  $m_1/m_2 \rightarrow +\infty$  la partie basse du spectre devient hydrogénoïde [46] (plutôt que géométrique) et  $(-2m_r \epsilon_q)^{1/2} R_* / \hbar \rightarrow +\infty$ , d'où les écarts à la courbe en trait plein noir épais. En (a) les droites obliques en tiretés sont les développements (36) et (37), ce dernier étant en réalité utile sur une plage très limitée, voir l'agrandissement dans l'encadré, et les lignes pointillées verticales repèrent les rapports de masse  $m_1/m_2 = 1$  et  $3 + \sqrt{12}$  où  $\cos 2\nu = \pm \frac{1}{2}$ . En (b),  $q_{\text{glob}}$  s'annule au rapport de masse tel que  $s_2 = 1/2$ , mais il ne s'agit pas d'une véritable résonance à trois corps (voir le texte). La longueur de Feshbach  $R_*$  est liée à la portée effective à deux corps par  $r_e = -2R_*$  à l'unitarité.



Dans la limite d'une impureté légère  $\nu \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ , le développement analytique prend la forme <sup>15</sup> :

$$\frac{q_{\text{glob}} R_*}{2} \underset{\nu \rightarrow \frac{\pi}{2}^-}{=} e^{J_0} \left\{ 1 + \left[ \frac{2\Omega J_2}{3(\Omega + 1)} + \frac{1}{12\Omega^2} - \frac{2}{3\Omega} + \frac{1}{24(1 + \Omega)} \right] \cos^2 \nu + O(\cos^3 \nu) \right\} \quad (37)$$

où nous avons introduit  $\Omega = 0,567143\dots$  solution de  $\Omega \exp \Omega = 1$  et les intégrales

$$J_0 \equiv \int_0^1 d\tau \ln \frac{e^{\Omega\tau} + \tau - 1}{\tau} = 0,505560\dots \quad (38)$$

$$J_2 \equiv \int_0^1 d\tau \frac{\tau e^{\Omega\tau}}{e^{\Omega\tau} + \tau - 1} = 0,194862\dots \quad (39)$$

Le terme dominant au second membre de l'éq. (37) est en accord avec [46], le terme sous-dominant est nouveau. Les développements pour  $\nu \rightarrow 0^+$  et  $\nu \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$  sont représentés par des lignes tiretées sur la fig. 3a.

## 4 Application à des mélanges atomiques concrets

Pour illustrer les expressions analytiques obtenues dans cet article, nous représentons sur la fig. 4 le troisième coefficient d'amas dans le régulateur harmonique  $B_{2,1}$  en fonction de la température pour des mélanges boson-boson ( $\eta = 1$ ) unitaires réalistes, en considérant les espèces atomiques  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{41}\text{K}$  et  ${}^{87}\text{Rb}$  qui ont déjà été refroidies expérimentalement à très basse température. Nous incluons le cas d'un rapport de masse unité car il correspond à la même espèce atomique prise dans deux états internes différents. Nous rappelons que les coefficients d'amas du gaz homogène sont reliés à ceux dans le régulateur harmonique par l'éq. (3). Pour contrôler la troncature numérique dans la somme sur  $\ell$  dans l'éq. (4), nous utilisons l'équivalent à grand  $\ell$  résultant de la note 11 de [18] :

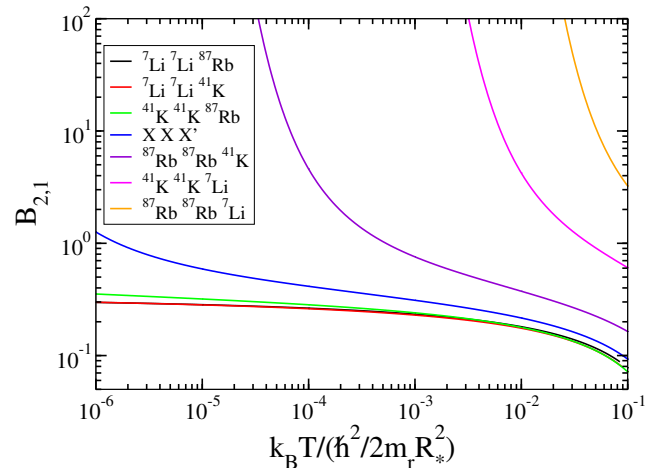
$$\sigma_\ell \underset{\ell \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\eta(-1)^\ell}{\pi \sin 2\nu} Q_\ell \left( \frac{1}{\sin \nu} \right) \quad (40)$$

où  $Q_\ell(z) = \int_{-1}^1 \frac{du}{2} \frac{P_\ell(u)}{z-u}$  est une fonction de Legendre de deuxième espèce <sup>16</sup>. Les valeurs des quantités pertinentes, telles que le rapport de masse, l'exposant d'Efimov  $s_0$ ,

15. Dans l'intégrale sur  $S$  sous l'exponentielle de l'éq. (31), on doit traiter séparément la contribution de  $S = O(1)$  et de  $S \approx |s_0|$ . La première contribution conduit dans  $\ln(q_{\text{glob}} R_*)$  à un terme linéaire en  $\pi/2 - \nu$  qui compense exactement celui provenant du logarithme des facteurs  $\Gamma$  dans le préfacteur de l'éq. (31).

16. De la relation 8.723(2) de [52] on tire en outre l'équivalent  $Q_\ell(1/\sin \nu) \sim (\pi/\ell)^{1/2} \tan^\ell(\nu/2) \sin(\nu/2) / \cos^{1/2} \nu$  pour  $\ell \rightarrow +\infty$  mais garder l'expression exacte de  $Q_\ell$  rend l'estimation (40) beaucoup plus précise à  $\ell$  modérément élevé, pour de petites valeurs de  $\nu$ .

l'échelle d'énergie globale  $E_{\text{glob}}$  et l'énergie du trimère de l'état fondamental  $\epsilon_0$ , sont données dans la table. La comparaison de  $E_{\text{glob}}$  et  $-\epsilon_0 e^{2\pi/|s_0|}$  indique dans quelle mesure le trimère de l'état fondamental se trouve dans le régime de portée nulle, ce qui devient marginalement le cas pour le mélange rubidium-lithium. La connaissance de la valeur de  $\epsilon_0$  donne également la température de raccordement  $k_B T \approx |\epsilon_0|$  entre le régime dominé par le trimère à basse température  $B_{2,1} \sim \exp(\beta|\epsilon_0|)$  et le régime fortement dissocié à haute température  $B_{2,1} \approx \frac{|s_0|}{2\pi} \ln(\beta E_{\text{glob}})$ , voir [18] et notre note 8.



**Figure 4.** Troisième coefficient d'amas dans le régulateur harmonique  $B_{2,1}$  en fonction de la température, pour des mélanges binaires unitaires d'espèces atomiques bosoniques  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{41}\text{K}$  et  ${}^{87}\text{Rb}$  couramment utilisées dans les expériences sur les gaz froids. Il n'y a pas d'interaction intra-espèce. L'interaction inter-espèce est traitée dans le modèle de portée nulle avec des conditions de contact à deux et trois corps invariante d'échelle, sauf dans le secteur efimovien  $\ell = 0$  où les conditions à trois corps font intervenir un paramètre  $R_\ell$  comme dans l'éq. (17), dont la valeur est obtenue à partir du modèle de résonance de Feshbach étroite de longueur de Feshbach  $R_*$ , voir les éqs. (19,31). Le modèle de portée nulle a une applicabilité limitée au régime de basse température (35), et à des rapports de masse atomique pas trop grands de sorte que le trimère fondamental reste dans la limite de portée nulle. Ici,  $m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  est la masse réduite des deux espèces, et XXX' correspond à un mélange de deux états internes différents du même isotope atomique.

## 5 Conclusion

Nous avons considéré des mélanges binaires à l'équilibre thermique de particules bosoniques ou fermioniques sans interaction intra-espèce, mais avec une interaction inter-espèce unitaire, c'est-à-dire de longueur de diffusion infinie dans l'onde  $s$  et de portée réelle et effective bien plus petite que la longueur d'onde de de Broglie thermique, une situation qui peut être réalisée expérimentalement.

**Table 1.** Pour toutes les combinaisons possibles des espèces bosoniques  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{41}\text{K}$  et  ${}^{87}\text{Rb}$ , les quantités physiques du problème à trois corps 112 qui entrent dans le troisième coefficient d’amas correspondant  $B_{2,1}$  (voir le texte). Le cas  $X - X'$ , avec un rapport de masse unité, correspond à un isotope atomique donné pris dans deux états internes différents. L’interaction entre les espèces 1 et 2 est décrite par le modèle de résonance Feshbach étroite de longueur Feshbach  $R_*$ . L’énergie correspondante du trimère de l’état fondamental  $\epsilon_0$  [lorsqu’elle n’est pas trop faible pour être obtenue numériquement à partir de l’éq. (23)] et l’échelle d’énergie globale  $E_{\text{glob}}$  liée au paramètre à trois corps par l’éq. (19) sont données en unités de  $\hbar^2/2m_r R_*^2$ . Pour les rapports de masse considérés, l’effet Efimov est présent dans le secteur  $\ell = 0$  seulement, et on a  $s_\ell > 1$  dans tous les autres secteurs. La partie non efimovienne  $B_{2,1}^{\text{non efim}}$  de  $B_{2,1}$  est la somme du premier terme de l’éq. (21) pour  $\ell = 0$  et de toutes les contributions de  $\ell > 0$  dans l’éq. (4), elle est indépendante de la température et du paramètre à trois corps.

espèce 1	espèce 2	$m_1/m_2$	$\text{Im } s_0$	$-\epsilon_0$	$-\epsilon_0 e^{2\pi/ s_0 }$	$E_{\text{glob}}$	$B_{2,1}^{\text{non efim}}$
${}^7\text{Li}$	${}^{87}\text{Rb}$	0,080728	0,055037	–	–	0,845022	–0,13645
${}^7\text{Li}$	${}^{41}\text{K}$	0,17128	0,108458	$6,12 \times 10^{-26}$	0,884(1)	0,884068	–0,14692
${}^{41}\text{K}$	${}^{87}\text{Rb}$	0,47132	0,246214	$9,13 \times 10^{-12}$	1,104669	1,104669	–0,17285
X	X'	1	0,413697	$4,07 \times 10^{-7}$	1,606453	1,606449	–0,20539
${}^{87}\text{Rb}$	${}^{41}\text{K}$	2,12171	0,644404	$1,55 \times 10^{-4}$	2,663601	2,662428	–0,25361
${}^{41}\text{K}$	${}^7\text{Li}$	5,8383	1,073851	$1,50 \times 10^{-2}$	5,221479	5,125277	–0,31954
${}^{87}\text{Rb}$	${}^7\text{Li}$	12,3873	1,521051	$1,29 \times 10^{-1}$	8,038473	7,329207	–0,20990

lement avec des atomes froids. Les propriétés du système dépendent alors de manière cruciale du rapport de masse des deux espèces.

En généralisant des résultats connus, nous avons obtenu, dans le cadre du modèle de portée nulle, des expressions analytiques pour les troisièmes coefficients d’amas ou du viriel, en termes d’intégrales du logarithme des fonctions transcendentes d’Efimov. Cela a été rendu possible par l’invariance d’échelle des conditions de contact de Wigner-Bethe-Peierls à deux corps. En général, le résultat dépend de paramètres à trois corps  $R_t$  apparaissant dans les conditions de contact à trois corps, soit parce que l’effet Efimov est présent (un exposant d’échelle  $s$  est imaginaire pur), soit parce que le système est dans le régime préefimovien (un exposant d’échelle  $s$  est réel et proche de zéro, car le rapport de masse est proche d’un seuil de l’effet Efimov).

Pour prédire la valeur des paramètres à trois corps, nous avons utilisé le modèle microscopique d’une résonance de Feshbach infiniment étroite de longueur de Feshbach  $R_*$ , ce qui devrait également supprimer les pertes de particules à trois corps dans les expériences. Nous avons ensuite obtenu une nouvelle expression analytique pour  $R_t$ , sous la forme d’une intégrale faisant intervenir à nouveau le logarithme de la fonction transcendente d’Efimov, à la fois dans les régimes efimovien et préefimovien. On constate que  $R_t$  diverge pour  $s = 1/2$ , sans qu’il s’agisse d’une véritable résonance à trois corps, car les conditions de contact à trois corps ne représentent fidèlement la véritable interaction microscopique qu’à des échelles d’énergie bien inférieures à  $\hbar^2/m_r R_t^2$  (et à  $\hbar^2/m_r R_*^2$ , évidemment), avec  $m_r$  la masse réduite des deux espèces. En particulier, dans le modèle de résonance de Feshbach étroite, il n’existe pas d’état trimère dans le régime préefimovien, contrairement à ce que prédit le modèle de portée nulle.

Enfin, nous avons appliqué ce travail analytique à un calcul explicite des troisièmes coefficients d’amas en fonction de la température pour toutes les combinaisons binaires de trois espèces atomiques bosoniques couramment utilisées dans les expériences d’atomes froids.

## 6 Remerciements

S. E. remercie le JSPS pour son soutien financier.

## Références

1. K.M. O’Hara, S.L. Hemmer, M.E. Gehm, S.R. Granade, J.E. Thomas, *Science* **298**, 2179 (2002)
2. T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K.M.F. Magalhães, S.J.J.M.F. Kokkelmans, G.V. Shlyapnikov, C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 020402 (2003)
3. C.A. Regal, M. Greiner, D.S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004)
4. M. Zwierlein, C. Stan, C. Schunck, S. Raupach, A. Kerman, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120403 (2004)
5. S. Nascimbène, N. Navon, K. Jiang, F. Chevy, C. Salomon, *Nature* **463**, 1057 (2010)
6. Mark J.H. Ku, A.T. Sommer, L.W. Cheuk, M.W. Zwierlein, *Science* **335**, 563 (2012)
7. V. Efimov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **12**, 589 (1971)
8. V. Efimov, *Nucl. Phys. A* **210**, 157 (1973)
9. A. Bulgac, V. Efimov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **22**, 296 (1975)
10. O.I. Kartavtsev, A.V. Malykh, *J. Phys. B* **40**, 1429 (2007)
11. S. Endo, A.M. García-García, P. Naidon, *Phys. Rev. A* **93**, 053611 (2016)
12. P. Naidon, S. Endo, A.M. García-García, *J. Phys. B* **49**, 034002 (2016)
13. Y. Nishida, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 240401 (2012)
14. Y. Nishida, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 115302 (2015)
15. J. von Stecher, *J. Phys. B* **43**, 101002 (2010)
16. S. Piatecki, W. Krauth, *Nature Comm.* **5**, 3503 (2014)
17. T. Comparin, W. Krauth, arXiv :1604.08870 (2016)
18. Y. Castin, F. Werner, *Rev. can. phys.* **91**, 382 (2013)
19. A. Comtet, Y. Georgelin, S. Ouvry, *J. Phys. A* **22**, 3917 (1989)

20. J. McCabe, S. Ouvry, Phys. Lett. B **260**, 113 (1990)
21. Xia-Ji Liu, Hui Hu, P.D. Drummond, Phys. Rev. Lett. **102**, 160401 (2009)
22. Xia-Ji Liu, Hui Hu, P.D. Drummond, Phys. Rev. A **82**, 023619 (2010)
23. S. Jonsell, H. Heiselberg, C.J. Pethick, Phys. Rev. Lett. **89**, 250401 (2002)
24. F. Werner, Y. Castin, Phys. Rev. Lett. **97**, 150401 (2006)
25. F. Werner, Y. Castin, Phys. Rev. A **74**, 053604 (2006)
26. Chao Gao, Shimpei Endo, Y. Castin, EPL **109**, 16003 (2015)
27. E. Wigner, Zeits. f. Physik **83**, 253 (1933)
28. H. Bethe, R. Peierls, Proc. R. Soc. London, Ser. A **148**, 146 (1935)
29. Y. Castin, C. R. Phys. **5**, 407 (2004)
30. G.S. Danilov, Sov. Phys. JETP **13**, 349 (1961)
31. P. Naidon, S. Endo, M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **112**, 105301 (2014)
32. P. Naidon, S. Endo, M. Ueda, Phys. Rev. A **90**, 022106 (2014)
33. J. Wang, J.P. D’Incao, B.D. Esry, C.H. Greene, Phys. Rev. Lett. **108**, 263001 (2012)
34. Y. Wang, J. Wang, J.P. D’Incao, C.H. Greene, Phys. Rev. Lett. **109**, 243201 (2016)
35. K. Helfrich, H.-W. Hammer, D.S. Petrov, Phys. Rev. A **81**, 042715 (2010)
36. D.S. Petrov, F. Werner, Phys. Rev. A **92**, 022704 (2015)
37. D.S. Petrov, C. Salomon, G.V. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. **93**, 090404 (2004)
38. B.S. Rem, A.T. Grier, I. Ferrier-Barbut, U. Eismann, T. Langen, N. Navon, L. Khaykovich, F. Werner, D.S. Petrov, F. Chevy, C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **110**, 163202 (2013)
39. R.J. Fletcher, A.L. Gaunt, N. Navon, R.P. Smith, Z. Hadzibabic, Phys. Rev. Lett. **111**, 125303 (2013)
40. P. Makotyn, C.E. Klauss, D.L. Goldberger, E.A. Cornell, D.S. Jin, Nat. Phys. **10**, 116 (2014)
41. S. Laurent, X. Leyronas, F. Chevy, Phys. Rev. Lett. **113**, 220601 (2014)
42. M. Barth, J. Hofmann, Phys. Rev. A **92**, 062716 (2015)
43. D.S. Petrov, Phys. Rev. Lett. **93**, 143201 (2004)
44. A. Gogolin, C. Mora, R. Egger, Phys. Rev. Lett. **100**, 140404 (2008)
45. C. Mora, A. Gogolin, R. Egger, C. R. Phys. **12**, 27 (2011)
46. Y. Castin, E. Tignone, Phys. Rev. A **84**, 062704 (2011)
47. J. Levinsen, D.S. Petrov, Eur. Phys. J. D **65**, 67 (2011)
48. K.M. Daily, D. Blume, Phys. Rev. A **85**, 013609 (2012)
49. J.H. Macek, S. Ovchinnikov, G. Gasaneo, Phys. Rev. A **73**, 032704 (2006)
50. G. Gasaneo, J.H. Macek, J. Phys. B **35**, 2239 (2002)
51. M. Birse, J. Phys. A **39**, L49 (2006)
52. I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, in *Tables of Integrals, Series, and Products*, 5ème édition, édité par A. Jeffrey (Academic Press, San Diego, 1994)
53. F. Werner, *thèse de doctorat de l’Université Pierre et Marie Curie* (2008, Paris, France)
54. Y. Nishida, Dam Thanh Son, Shina Tan, Phys. Rev. Lett. **100**, 090405 (2008)
55. A. Safavi-Naini, Seth T. Rittenhouse, D. Blume, H.R. Sadeghpour, Phys. Rev. A **87**, 032713 (2013)
56. F. Werner, Y. Castin, Phys. Rev. A **86**, 053633 (2012)
57. D. Petrov, Phys. Rev. A **67**, 010703 (2003)
58. O.I. Kartavtsev, A.V. Malykh, Zh. Eksp. Teor. Phys. **86**, 713 (2007)
59. G.V. Skorniakov, K.A. Ter-Martirosian, Sov. Phys. JETP **4**, 648 (1957)
60. M.H. Szymańska, K. Góral, T. Köhler, K. Burnett, Phys. Rev. A **72**, 013610 (2005)
61. F. Werner, L. Tarruell, Y. Castin, Eur. Phys. J. B **68**, 401 (2009)
62. M. Jona-Lasinio, L. Pricoupenko, Phys. Rev. Lett. **104**, 023201 (2010)
63. R. Schmidt, S.P. Rath, W. Zwerger, Eur. Phys. J. B **85**, 386 (2012)
64. L. Pricoupenko, Phys. Rev. Lett. **110**, 180402 (2013)