Amélioration d'une congruence de Glaisher

Scheherazade Zerroukhat [1], Redha Chellal [2] et Farid Bencherif [2]

[1] Laboratoire ATN, Faculté de Mathématiques, USTHB., BP32 EL Alia 16111 Bab Ezzouar Alger.
E-mail:szerroukhat@gmail.com

[2] Laboratoire LA3C, Faculté de Mathématiques, USTHB., BP32 EL Alia 16111 Bab Ezzouar Alger.
E-mail:chellal.redha@gmail.com

[2] Laboratoire LA3C, Faculté de Mathématiques, USTHB., BP32 EL Alia 16111 Bab Ezzouar Alger.
E-mail:fbencherif@gmail.com

Abstract

Nous prouvons que pour tout nombre premier $p \geq 5$

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{2^k}{k}\right) \ (modp^2)$$

Mots clefs: Congruences, nombres harmoniques.

1 Introduction

Pour tout nombre premier p impair et pour tout entier a premier avec p, le quotient de Fermat en base a est défini par

$$q_p(a) = \frac{a^{p-1}-1}{p}.$$

L'étude des quotients de Fermat et notamment des congruences concenant ces quotients est en relation avec l'étude classique du grand théorème de Fermat [3]. La congruence suivante est due to Glaisher [1]:

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{2^k}{k}\right) \ (modp).$$

En faisant de nombreux essais numériques, B. Ronk [4] et [5] a constaté que cette congruence était vérifiée modulo p^2 pour tout nombre premier $p \leq 1000$. Il a conjecturé que cette congruence était vérifiée modulo p^2 pour tout nombre premier p. Dans cet article, nous confirmons cette conjecture. Nous améliorons ainsi la congruence de Glaisher en prouvant le

Théorème 1 *Pour tout nombre premier $p \geq 5$*

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{2^k}{k}\right) \ (modp^2).$$

2 Démonstration du théorème

La preuve du théorème repose sur les nombreux lemmes qui suivent

Lemme 1 *Pour tout nombre premier $p \geq 5$*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{H_k}{k2^k} \equiv 0 \ (modp).$$

Preuve. Ce lemme est prouvé dans [6] ■

Lemme 2 *Pour tout nombre premier p impair, on a*

$$H_{p-k} \equiv H_{k-1} \ (modp).$$

Preuve. Ce lemme est aussi prouvé dans [6] ■

Lemme 3 *Pour tout nombre premier* $p \geq 5$

$$\sum_{k=1}^{p-2} \frac{2^k H_k}{k+1} \equiv 0 \ (modp).$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p-2} \frac{2^k H_k}{k+1} &= \sum_{k=2}^{p-1} \frac{2^{p-k} H_{p-k}}{p-k+1} \\
&\equiv \sum_{k=2}^{p-1} \frac{2^{p-1-(k-1)} H_{p-k}}{p-(k-1)} \\
&\equiv -\sum_{k=2}^{p-1} \frac{H_{k-1}}{(k-1)2^{k-1}} \\
&\equiv -\sum_{k=1}^{p-2} \frac{H_k}{k2^k} \\
&\equiv -\sum_{k=1}^{p-1} \frac{H_k}{k2^k} + \frac{H_{p-1}}{(p-1)2^{p-1}} \\
&\equiv 0 \ (modp).
\end{aligned}$$

■

Lemme 4

$$\frac{x^p - (x-1)^p - 1}{p} \equiv -\sum_{k=0}^{p-2} \frac{x^{k+1}}{k+1} + p \sum_{k=1}^{p-2} H_k \ \frac{x^{k+1}}{k+1} \ (modp^2).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\frac{x^p - (x-1)^p - 1}{p} &= -\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} x^k (-1)^{p-k} \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \binom{p-1}{k-1} \frac{x^k}{k} \\
&= -\sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k \binom{p-1}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}.
\end{aligned}$$

Remarquons alors que

$$\begin{aligned}
(-1)^k \binom{p-1}{k} &= \frac{(1-p)(2-p)\dots(k-p)}{1.2.\dots k} \\
&= (1-\frac{p}{1})(1-\frac{p}{2})\dots(1-\frac{p}{k}) \\
&\equiv 1 - p\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \ (modp^2).
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\frac{x^p-(x-1)^p-1}{p} &\equiv -\sum_{k=0}^{p-2}(1-pH_k)\,\frac{x^{k+1}}{k+1}\ (mod p^2).\\ &\equiv -\sum_{k=0}^{p-2}\frac{x^{k+1}}{k+1}\ +p\sum_{k=1}^{p-2}H_k\ \frac{x^{k+1}}{k+1}\ (mod p^2).\end{aligned}$$

■

La preuve du théorème est alors immédiate. Il suffit de remplacer x par 2. On a alors

$$\frac{2^p-2}{p}\equiv -\sum_{k=0}^{p-2}\frac{2^{k+1}}{k+1}\ +p\sum_{k=1}^{p-2}H_k\ \frac{2^{k+1}}{k+1}\ (mod p^2).$$

D'où

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}\equiv -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-2}\frac{2^{k+1}}{k+1}\ +p\sum_{k=1}^{p-2}H_k\ \frac{2^{k}}{k+1}\ (mod p^2).$$

References

[1] J.W.L. Glaisher, On the residues of the sums of products of the first $p-1$ numbers and their powers to modulus p^2 or p^3, Quart. J. Math. Oxford 31 (1900), $321-353$.

[2] A. Granville, The square of the Fermat quotient, Integers: Electronic J. of Combinatorial Number Theory 4 (2004), #A22 (electronic)

[3] P. Ribenboim, 13 Lectures on Fermat's Last Theorem. Springer-Verlag, New York, 1979.

[4] http://bernard.ronk.free.fr/Quotient_Fermat_V1.pdf

[5] http://bernard.ronk.free.fr/approche_elementaire_v8_3.pdf

[6] Z. W. Sun, Arithmetic theory of harmonic numbers, Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), 415–428.