



**HAL**  
open science

# Une formulation du contact à frottement sec; application au calcul numérique

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Une formulation du contact à frottement sec; application au calcul numérique. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Serie II, 1986, 302 (13), pp.799-801. hal-01349850

**HAL Id: hal-01349850**

**<https://hal.science/hal-01349850>**

Submitted on 29 Jul 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

FROTTEMENT, ADHÉSION, LUBRIFICATION. — *Une formulation du contact à frottement sec; application au calcul numérique.* Note de **Jean Jacques Moreau**, présentée par **Paul Germain**.

La loi usuelle du frottement sec est mise sous une forme évitant d'exhiber la composante normale et la composante tangentielle de la réaction. On en tire un algorithme numérique pour la dynamique de systèmes à contact unilatéral, avec chocs éventuels inélastiques.

FRICITION, ADHESION, LUBRICATION. — A formulation of contact with dry friction; computational application.

*The usual law of dry friction is turned into a statement which does not involve splitting the contact force into its normal and tangential components. A numerical algorithm is derived for the dynamics of systems with unilateral contact; possible shocks are inelastic.*

EXPRESSION DU FROTTEMENT. — Soient deux solides  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ ; s'ils demeurent en contact durant un intervalle de temps, la vitesse de glissement  $V_2(M_1)$  de  $\mathcal{S}_1$  par rapport à  $\mathcal{S}_2$  au point de contact  $M$ , notée simplement  $V$  dans ce qui suit, est en élément de  $T$ , plan vectoriel tangent commun en  $M$  à l'instant considéré aux surfaces des deux corps (bien défini si l'une au moins des deux surfaces est régulière). La loi du frottement sec, loi de Coulomb ou son extension au cas d'états de surface anisotropes [1], édicte une relation entre  $V$  et la réaction  $(M_1, \mathbf{R})$  que subit  $\mathcal{S}_1$  de la part de  $\mathcal{S}_2$ .

Classiquement,  $\mathbf{R}$  est décomposé en sa composante  $\mathbf{R}_T$  selon  $T$  et sa composante normale  $R_N \mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  : vecteur unité normal dirigé vers  $\mathcal{S}_1$ ). Pour chaque valeur de  $R_N$  (positive ou nulle, car le contact est supposé non adhésif) il ressort une relation entre  $\mathbf{R}_T$  et  $V$  d'un type aujourd'hui usuel, dans divers domaines de la thermomécanique, exprimée au moyen d'un sous-différentiel ou, de façon équivalente, au moyen d'une inéquation variationnelle exprimant un « principe de dissipation maximale » [1]. Une telle formulation se montre surtout efficace dans le cas, très spécial mais dont il existe des exemples réalistes, où  $R_N$  se trouve directement connu; elle est en outre exploitable par des techniques de point fixe faisant ressortir  $R_N$  comme inconnue [2].

La présente Note propose une formulation équivalente à la précédente, évitant la décomposition de  $\mathbf{R}$ .

Dans l'espace  $E_3$  des vecteurs de l'espace physique, est donné le *cône de frottement*  $C$ , d'usage traditionnel en Statique : cône convexe fermé (de sommet zéro) contenant  $\mathbf{n}$ ; dans le cas du frottement isotrope de Coulomb, il est de révolution autour de  $\mathbf{n}$ .

Des raisonnements d'Analyse Convexe élémentaire [3] fournissent l'équivalence de ce qui précède à

$$(2) \quad -V \in \text{proj}_T \partial\psi_C(\mathbf{R}).$$

Le sous-différentiel  $\partial\psi_C$  de la fonction indicatrice  $\psi_C$  de l'ensemble  $C$  est entendu au sens du produit scalaire euclidien de  $E_3$  : c'est le cône normal sortant au point concerné  $\mathbf{R}$  de  $C$  (réduit au zéro de  $E_3$  si  $\mathbf{R} \in \text{int } C$ , vide si  $\mathbf{R} \notin C$ ).

Cette formulation peut, à son tour, se transformer comme suit. Vu que  $V \in T$  équivaut à  $\partial\psi_T(V) = T^\perp$ , (2) équivaut à

$$(3) \quad 0 \in V + \partial\psi_T(V) + \partial\psi_C(\mathbf{R}).$$

En définissant la fonction  $\theta : V \mapsto 1/2 |V|^2 + \psi_T(V)$ , on donne finalement à la loi (2) la forme, d'ailleurs adaptable à d'autres types de loi de résistance (par exemple, plasticité

avec loi d'écoulement et critère « non associés ») :

$$(4) \quad 0 \in \partial\psi_C(\mathbf{R}) + \partial\theta(\mathbf{V}).$$

*Exemple.* — L'exemple simple qui suit montre comment se formule la dynamique d'un système comportant une résistance de cette sorte, en prenant en compte aussi le caractère *unilatéral* de la liaison de contact.

Dans la région  $f \leq 0$  de l'espace physique, limitée par la paroi matérielle fixe d'équation  $f=0$ , est confiné un point matériel, de masse  $m$  (petit objet qui, en cas de contact avec la paroi, est supposé frotter sans rouler ni basculer). Ce point est soumis par ailleurs à une force définie comme fonction de sa position  $q$ , de sa vitesse  $\dot{q}=u$  et, éventuellement, du temps, soit  $Q(t, q, u)$ .

Pour un mouvement au contact de la paroi, l'élimination de la réaction entre (4) et l'équation de la dynamique laisse l'inclusion différentielle

$$(5) \quad 0 \in \partial\psi_C(m\ddot{q} - Q(t, q, \dot{q})) + \partial\theta(\dot{q}).$$

Le plan vectoriel tangent  $T$  à la surface  $f=0$  (d'où la fonction  $\theta$ ) et le cône de frottement  $C$  sont des fonctions connues de  $q$ , définies pour  $f(q)=0$ .

La même inclusion différentielle régira les mouvements éventuels sans contact avec la paroi si l'on pose la convention

$$(6) \quad \text{si } f(q) < 0, \quad \text{alors } T(q) = E_3 \quad \text{et} \quad C(q) = \{0\}.$$

ALGORITHME. — Une des sources d'intérêt de (5) est de suggérer des techniques de différences finies pour l'approximation numérique des solutions, à partir d'une donnée initiale.

Notons  $q_I, u_I$  les valeurs de la position et de la vitesse au début du pas de temps ( $t_I, t_I+h$ ); à ce pas on associe  $q_M$ , « position test » et  $u_L$ , « vitesse libre ». On calcule comme suit les valeurs finales  $q_F, u_F$  :

1<sup>re</sup> étape. — Calculer

$$q_M = q_I + \frac{1}{2} h u_I, \quad Q_M = Q\left(t_I + \frac{h}{2}, q_M, u_I\right), \quad u_L = u_I + \frac{h}{m} Q_M.$$

2<sup>e</sup> étape.

\* si  $f(q_M) < 0$  ou  $u_L \cdot \text{grad } f(q_M) \leq 0$  alors  $u_F = u_L$ ,

\* sinon  $u_F$  est déterminé par une discrétisation semi-implicite de (5) :

$$(6) \quad 0 \in \partial\psi_C\left(\frac{m}{h}(u_F - u_L)\right) + \partial\theta(u_F),$$

où la fonction  $\theta$  et l'ensemble  $C$  sont évalués au point  $q_M$ .

Parce que la multifonction  $\partial\psi_C$  est *positivement homogène de degré zéro*, le facteur  $m/h$  peut être effacé et l'Analyse Convexe élémentaire fournit immédiatement la solution unique de (6) :  $u_F$  est le point proximal de l'origine dans l'ensemble  $T(q_M) \cap (C(q_M) + u_L)$ . Pour la loi de Coulomb isotrope cet ensemble est un disque, d'où calcul particulièrement simple.

3<sup>e</sup> étape. — Calculer

$$q_F = q_M + \frac{1}{2} h u_F.$$

Il faut naturellement s'attendre à voir le point  $q_M$  violer légèrement l'inégalité  $f \leq 0$ . On aura donc prolongé, de façon continue arbitraire aussi simple que possible, la définition de  $C(q)$  et de  $\theta_q$  à des valeurs de  $q$  telles que  $f(q) > 0$ .

Avec une précision d'autant meilleure que la discrétisation est plus fine, l'algorithme préserve automatiquement la condition  $f(q) \leq 0$ ; pour une procédure additionnelle améliorant à cet égard la qualité de l'approximation, voir [3].

La mise en équation du mouvement d'un point au contact de la surface  $f=0$  demande traditionnellement le calcul des dérivées secondes de  $f$ . L'algorithme ci-dessus n'en a pas besoin : l'effet de courbure est pris en compte simplement par le calcul fait de  $\text{grad } f$  à chaque pas.

**CALCUL DES CHOCS.** — Ce qui précède suppose un mouvement régulier, débutant par exemple le long de la paroi : dans ce cas l'algorithme exhibera de lui-même un éventuelle cessation ultérieure du contact et le mouvement libre consécutif.

Si au contraire un mouvement, débutant dans la région  $f < 0$ , aboutit à la paroi on ne pourra espérer en général la continuité de  $u$ . On constate que l'algorithme appréhende sans difficulté cette éventualité; si d'un pas au suivant le branchement de la deuxième étape bascule du premier cas au second, le calcul livre un saut de  $u_i$  à  $u_F$  représentant le choc. Tout cela tient à l'homogénéité positive de degré 1 de la multifonction  $\partial\psi_C$ . Grâce à elle la notion de solution de (5) peut s'entendre *au sens des mesures différentielles*, défini dans [4] et [5] en supposant la fonction  $\dot{q}$  à *variation localement bornée*. Les chocs à frottement sec schématisés ici généralisent les « chocs inélastiques standards » introduits dans [4] et [5].

On peut trouver dans [3] des applications d'algorithmes du type ci-dessus à des situations usuelles : petit objet reposant sur une table vibrante, « broutage » d'un oscillateur présentant un contact unilatéral à frottement sec avec une paroi de mouvement imposé.

*Remarque.* — L'interprétation de (5) au sens des mesures différentielles suppose que la fonction  $t \mapsto q$  est intégrale d'une fonction à variation localement bornée  $t \mapsto u$ ; cette dernière n'est pas canoniquement précisée (on peut la modifier arbitrairement sur un ensemble de mesure nulle), mais le sont les deux fonctions  $t \mapsto u^-$  et  $t \mapsto u^+$  *vitesse à gauche* et *vitesse à droite*. C'est  $u^+$  qui sera substitué à  $\dot{q}$  dans le terme  $\partial\theta$  mais  $u^-$  dans la fonction  $Q$ ; on pourra par ailleurs admettre que le cône de frottement  $C(q)$  dépend aussi de  $u^-$  : cela permet notamment de prendre en compte la distinction empirique entre *coefficient de frottement au repos* et *coefficient de frottement de glissement*. L'algorithme semi-implicite décrit ci-dessus appréhende cela parfaitement.

Remise le 24 février 1986.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J. J. MOREAU, Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité, *Comptes rendus*, 271, série A, 1970, p. 608-611.
- [2] M. JEAN et E. PRATT, A system of rigid bodies with dry friction, *Int. J. Engineering Sc.*, 23, 1985, p. 497-513.
- [3] J. J. MOREAU, *Dynamique de systèmes à liaisons unilatérales avec frottement sec éventuel; essais numériques*, Note technique n° 85-1, L.M.G.M.C., U.S.T.L., Montpellier, 1985, 130 p.
- [4] J. J. MOREAU, Liaisons unilatérales sans frottement et chocs inélastiques, *Comptes rendus*, 296, série II, 1983, p. 1473-1476.
- [5] J. J. MOREAU, *Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints* in: G. DEL PIERO et F. MACERI, éd., *Unilateral problems in structural analysis*, C.I.S.M., Courses and Lectures, n° 288, Springer-Verlag, 1985, p. 173-221.

*Laboratoire de Mécanique générale des Milieux continus,  
Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 34060 Montpellier Cedex.*