

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Problème d'évolution associé à un convexe mobile d'un espace hilbertien.* Note (*) de M. JEAN JACQUES MOREAU, présentée par M. Jean Leray.

1. FORMULATION. — Le problème suivant est issu de la théorie des systèmes mécaniques *élastoplastiques* (1).

Soit H un espace hilbertien réel; soit I un intervalle de \mathbb{R} (non nécessairement fermé ni borné), contenant son origine t_0 . On donne une multiapplication $t \mapsto C(t)$, de I dans H , à valeurs convexes fermées non vides, autrement dit, en langage de cinématique, un *ensemble convexe mobile* dans H . On note $x \mapsto \psi(t, x)$ la fonction indicatrice de $C(t)$ [valeur 0 si $x \in C(t)$, sinon $+\infty$].

Soit $a \in C(t_0)$; on demande de déterminer une application (univoque) $u : I \rightarrow H$, absolument continue sur tout sous-intervalle compact, telle que $u(t_0) = a$ et que, pour presque tout t ,

$$(1) \quad -\frac{du}{dt} \in \partial\psi(t, u(t)).$$

Rappelons que l'ensemble $\partial\psi(t, x)$, *sous-différentiel* de la fonction $\psi(t, \cdot)$ au point x , est égal au cône des vecteurs « normaux » à $C(t)$, dans le sens sortant, au point x [ensemble vide si et seulement si $x \notin C(t)$; réduit à $\{0\}$, en particulier, si x est point intérieur de $C(t)$].

Au moins dans le cas particulier où $C(t)$ possède un intérieur non vide, l'équation d'évolution (1) admet une illustration mécanique intuitive : le point mobile $t \mapsto u(t)$ reste au repos tant qu'il se trouve à l'intérieur de $C(t)$; lorsqu'il est atteint par la frontière de cet ensemble, u prend un mouvement dans une direction normale entrante, comme poussé par ladite frontière, de manière à continuer d'appartenir à C ; c'est ce que nous appelons un *processus de rafle*.

Des équations moins spéciales que (1) ont déjà souvent été étudiées : on peut par exemple remplacer le second membre par $\partial\varphi(t, u(t))$ où $\varphi : H \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est convexe s. c. i. et, plus généralement par $A(t, u(t))$, en notant $x \mapsto A(t, x)$ une multiapplication *monotone maximale* de H dans H . Mais, si l'on excepte des travaux de H. Brézis (2) et de J. C. Peralba (3), il est habituellement supposé que $\text{dom } A = \{x \in H : A(t, x) \neq \emptyset\}$ est indépendant de t . Au contraire ici il est essentiel que $\text{dom } \partial\psi = C$ varie : outre l'intérêt de ses applications, le présent problème a l'avantage de faire ressortir, en quelque sorte à l'état pur, les difficultés afférentes à la variation du domaine.

Pour la démonstration des assertions qui suivent, nous renvoyons à (4).

2. APPROXIMATIONS EN ESCALIER ET ALGORITHME. — Selon la terminologie d'une Note précédente (*) nous supposons que la multiapplication $t \mapsto C(t)$ est à rétraction finie. Alors, pour tout $t_1 \in I$ (distinct de l'extrémité éventuelle de cet intervalle) existe l'ensemble limite à droite noté $C^+(t_1)$, convexe fermé non vide.

Soit P une partition finie de I en sous-intervalles quelconques I_0, I_1, \dots, I_n (indexés dans l'ordre de leur succession : I_0 est donc d'origine t_0 , éventuellement réduit à ce point); on notera $t \mapsto C_r(t)$ la multiapplication en escalier prenant sur chaque intervalle I_i de P la valeur constante $C_r(I_i)$ définie comme suit : si I_i contient son origine t_i , on prend $C_r(I_i) = C(t_i)$; sinon $C_r(I_i) = C^+(t_i)$. Soit $t \mapsto u_r(t)$ l'application en escalier de I dans H prenant sur chaque intervalle I_i la valeur constante $u_r(I_i)$ déterminée par la loi de récurrence suivante :

$$(2) \quad \begin{cases} u_r(I_0) = a, \\ u_r(I_i) = \text{proj}(u_r(I_{i-1}), C_r(I_i)). \end{cases}$$

Sur l'ensemble \mathcal{E} des partitions finies de I en sous-intervalles on définit un ordre filtrant à droite en écrivant $P \prec P'$ si P' est un raffinement de P . Alors des inégalités élémentaires concernant les projections sur un convexe d'un espace hilbertien permettent d'établir :

PROPOSITION. — Si la multiapplication $C : I \rightarrow H$ est à rétraction finie, la famille d'applications en escalier $u_r : I \rightarrow H$ converge, uniformément sur tout compact de I , selon la base de filtre des sections de (\mathcal{E}, \prec) vers une fonction $t \mapsto u(t) \in C(t)$.

DÉFINITION. — On dira que la limite u ci-dessus est la solution faible du problème de rasle par le convexe mobile C , pour la donnée initiale $u(t_0) = a$.

Cette solution faible peut, en particulier, être atteinte comme limite d'une suite ordinaire de fonctions en escalier : chacune d'elles est construite par la cascade de projections décrite en (2), ce que nous appelons l'algorithme de rattrapage; elle est, si l'on veut, solution faible du problème de rasle pour une multiapplication en escalier qui approche C en un certain sens; une inégalité analogue à l'inégalité (3) ci-après permet alors de majorer l'erreur commise lorsqu'on adopte cette fonction en escalier comme approximation de u .

3. PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS FAIBLES. — a. Variation. — Pour tout sous-intervalle compact $[s, t]$ de I , on a

$$\text{var}(u; s, t) \leq \text{ret}(C; s, t) \leq \text{var}(C; s, t)$$

(le dernier membre représente la variation de C au sens de la distance de Hausdorff). En particulier, si C est à rétraction finie continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne de rapport l), la fonction u est continue à variation finie (resp. est absolument continue, resp. est lipschitzienne de rapport l).

b. *Discontinuités.* — La fonction u possède une limite à gauche $u^-(t_1)$ pour tout $t_1 \in I$ (distinct de t_0), une limite à droite $u^+(t_1)$ pour tout $t_1 \in I$ (distinct de l'extrémité éventuelle de cet intervalle) et on a

$$\begin{aligned} u(t_i) &= \text{proj}(u^-(t_i), C(t_i)), \\ u^+(t_i) &= \text{proj}(u(t_i), C^+(t_i)). \end{aligned}$$

c. *Altération des données.* — Soit $t \mapsto D(t)$ une autre multiapplication de I dans H , à valeurs convexes fermées non vides, à rétraction finie, et soit $t \mapsto v(t)$ une solution faible du problème de rafle pour D . Soit $[s, t]$ un sous-intervalle compact de I ; si μ est un majorant de la distance de Hausdorff $h(C(\theta), D(\theta))$ pour $\theta \in [s, t]$, on a

$$(3) \quad \|u(t) - v(t)\|^2 - \|u(s) - v(s)\|^2 \leq 2(\text{ret}(C; s, t) + \text{ret}(D; s, t))\mu.$$

d. *Changement de variable.* — Il est intuitif que le processus de rafle associe la succession des positions du point mobile u à celle des configurations du convexe mobile C d'une manière indépendante de l'horaire; cela se précise comme suit :

Soit $I' \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant son origine t'_0 ; soit π une application surjective croissante (peut être non strictement) de I' sur I et soit la multiapplication $C' = C \circ \pi$ de I' dans H , c'est-à-dire $C'(t') = C(\pi(t'))$. On trouve que $u' : I' \rightarrow H$ est solution faible du problème de rafle pour C' si et seulement si il existe u , solution faible du problème de rafle pour C , telle que $u' = u \circ \pi$.

4. EXISTENCE DE SOLUTIONS FORTES.

PROPOSITION 2. — Si la multiapplication $t \mapsto C(t)$ est à rétraction absolument continue sur tout sous-intervalle compact de I , la solution faible définie en 2 est forte c'est-à-dire qu'elle satisfait aux exigences formulées en 1.

On peut établir cela en invoquant d'abord un changement de variable $\pi^{-1} : t \mapsto kt + r(t)$ (k : réel strictement positif; r : fonction « rétraction indéfinie » de la multiapplication C); la théorie du changement de variable dans l'intégrale de Lebesgue, puis le fait que le second membre de (1) est un ensemble conique, ramène la recherche des solutions fortes de cette équation à celle des solutions fortes de l'équation correspondant au convexe mobile $C' = C \circ \pi$, lequel est à rétraction lipschitzienne de rapport 1 sur l'intervalle $I' = \pi^{-1}(I)$. La solution faible du problème de rafle pour C' est limite d'une suite de fonctions en escalier de pas tendant vers zéro : les régularisées « polygonales » (c'est-à-dire affines par morceaux et continues) de ces fonctions en escalier sont des fonctions lipschitziennes de rapport 1, donc à dérivée dans la boule unité de $L_{\mathbb{H}}^{\infty}(I')$. Pour tout K , sous-intervalle compact de I' , la boule unité de $L_{\mathbb{H}}^{\infty}(K)$ s'injecte naturellement dans un ensemble de $L_{\mathbb{H}}^1(K)$, compact pour la topologie faible $\sigma(L_{\mathbb{H}}^1(K), L_{\mathbb{H}}^{\infty}(K))$. L'extraction d'une sous-suite convergente pour cette topologie faible conduit finalement au résultat annoncé, par des consi-

dérations familières d'analyse convexe [par exemple, l'usage de fonctionnelles convexes définies sur $L_H^1(K)$ par des intégrales, ou bien encore la construction d'une suite fortement convergente dans $L_H^1(K)$ au moyen de barycentres de termes de la suite précédente].

5. REMARQUES. — Les hypothèses de régularité de $t \mapsto C(t)$ formulées au moyen de la notion de rétraction paraissent extrêmement bien adaptées au présent problème. Il est clair en effet que si, au moins au voisinage du point $u(t_1)$ de H , ce convexe mobile se trouve « en expansion » sur un intervalle $[t_1, t_1 + \varepsilon]$, la fonction constante $u(t) = u(t_1)$ est solution de (1) sur cet intervalle sans qu'il soit besoin d'invoquer aucune hypothèse de régularité du mouvement de C . Une certaine régularité est utile seulement au cas où C « se rétracte ».

Naturellement l'usage le plus fréquent de la présente théorie concernera le cas particulier de convexes à *variation* finie continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne) au sens de la distance de Hausdorff. Avec ces hypothèses plus fortes, nous avons également pu étudier l'équation (1) par la technique de régularisation de Yosida, laquelle ici équivaut d'ailleurs au remplacement de la fonction indicatrice ψ du convexe C par une *fonction de pénalisation* de cet ensemble (*).

(Résumé d'un texte qui sera conservé 5 ans par les Archives de l'Académie, et dont copie peut être obtenue de l'Académie.)

(*) Séance du 26 février 1973.

(1) J. J. MOREAU, *Comptes rendus*, 273, série A, 1971, p. 118.

(2) H. BRÉZIS, *Comptes rendus*, 274, série A, 1972, p. 310.

(3) J. C. PERALBA, *Comptes rendus*, 275, série A, 1972, p. 93.

(4) J. J. MOREAU, *Retraction d'une multiapplication* [Travaux du Séminaire d'Analyse convexe, Montpellier, 1972, exposé n° 13 (89 p.)].

(5) J. J. MOREAU, *Comptes rendus*, 276, série A, 1973, p. 265.

(6) J. J. MOREAU, *Rafle par un convexe variable*, [Travaux du Séminaire d'Analyse convexe, Montpellier, 1971, exposé n° 15 (43 p.), 1972, exposé n° 3 (36 p.)].

*Institut de Mathématiques,
Université des Sciences et Techniques
du Languedoc,
place Eugène-Bataillon,
34060 Montpellier-Cedex.*