



HAL
open science

Ce que nous dit l'étude d'une recherche de Kepler de l'influence d'une relation singulière aux objets naturalisés

Mathias Front

► **To cite this version:**

Mathias Front. Ce que nous dit l'étude d'une recherche de Kepler de l'influence d'une relation singulière aux objets naturalisés. *History and Pedagogy of Mathematics*, Jul 2016, Montpellier, France. hal-01349252

HAL Id: hal-01349252

<https://hal.science/hal-01349252>

Submitted on 27 Jul 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CE QUE NOUS DIT L'ÉTUDE D'UNE RECHERCHE DE KEPLER DE L'INFLUENCE D'UNE RELATION SINGULIÈRE AUX OBJETS NATURALISÉS

Mathias FRONT

ESPE de l'Académie de Lyon, et S2HEP, 38 boulevard Niels BOHR Université Lyon 1
F-69622 Villeurbanne Cedex, Lyon, France
mathias.front@univ-lyon1.fr

ABSTRACT

La question des articulations entre histoire, épistémologie et didactique est suffisamment riche pour être source inépuisable de réflexion. Nous souhaitons proposer ici une approche qui étudie l'activité du savant cherchant et les liens potentiels avec des situations didactiques où la recherche de problème est centrale. Nous explicitons dans un premier temps comment une vision philosophique, mettant en avant l'agir en mathématique, peut légitimer l'étude de l'activité du savant cherchant jusque dans sa relation aux objets familiers. Cette approche nous amène ensuite à étudier, à titre d'exemple générique, la relation aux objets de Kepler explorant les pavages archimédiens du plan. Nous présentons pour finir des retombées de l'enquête historique et épistémologique sur un travail d'ingénierie qui étudie la construction de situations lors desquelles les élèves peuvent, dans des allers-retours entre objets familiers et objet nouveau, élaborer de nouveaux savoirs.

1 Quelle enquête historique pour rendre compte de l'agir constructif en mathématiques ?

1.1 L'histoire ne trace pas de chemin

Le lien entre une étude méticuleuse du passé et des projets d'action contemporains, en particulier en éducation, ne peut être immédiat et direct. L'histoire ne trace aucun chemin. Toutefois il serait dommage de ne pas considérer l'accumulation des « expériences » passées qui peuvent faire retour dans notre actualité. Mais comment alors concevoir, accueillir ou récuser les analogies ?

Le premier point de vue que nous retenons consiste à personnaliser, contextualiser l'étude des faits mathématiques. Nous cherchons donc en premier lieu à atteindre ce que Veyne appelle des *tranches de vie* :

Les faits n'existent pas isolément, en ce sens que le tissu de l'histoire est ce que nous appellerons une intrigue, un mélange très humain et très peu « scientifique » de causes matérielles, de fins et de hasards ; une tranche de vie, en un mot, que l'historien découpe à son gré et où les faits ont leurs liaisons objectives et leur importance relative. (Veyne, 1996, p.51)

Alors, la compréhension de l'importance de ce tissu historique nous confirme qu'il est vain de vouloir définir la scientificité en général. Les travaux de Simon (1979, 2008) sur Kepler l'ont ainsi obligé à réintroduire des savoirs jusque-là écartés car jugés a posteriori non scientifiques, et plus globalement à considérer l'ensemble des objets de savoir du savant, pour tenter d'approcher la structure de sa pensée. Comprendre les productions de Kepler nécessite

de comprendre le paradigme képlérien, sa rationalité propre, indépendamment d'une rationalité (re)construite a posteriori.

Dans un deuxième point de vue, philosophique et épistémologique, cela revient à placer l'activité du savant au centre de la réflexion sur la production scientifique. Et cela amène à envisager, pour comprendre les objets en jeu dans une recherche, un regard pragmatiste qui :

accorde à la pratique de la construction, de l'application des règles de fabrication le long du temps opératoire, une sorte de primauté par rapport aux choses prétendant à un statut d'objet, constructions ou symboles. L'objet de la mathématique, soit comme symbole soit comme construction, selon cette vue, « provient » de l'agir mathématique, constructif en l'espèce. (Salanskis, 2008, p.72)

Dans ce paradigme, et dans une perspective très locale d'émergence des savoirs, les recherches historiques peuvent engendrer des questionnements didactiques. En effet, il s'agit, dans tous les cas, d'identifier, dans des agirs constructifs qui permettent l'émergence de nouveaux objets mathématiques, des caractéristiques de l'activité du chercheur. Et, confrontés à un même problème, dans une même position instable non finalisée par un savoir pour l'heure absent, nous pouvons faire l'hypothèse que des sujets différents vont développer à l'égard des objets familiers¹ des relations singulières mais comparables car caractérisant ces phases de recherche. Avant de mettre en évidence ces relations par une étude historique singulière, nous revenons sur une caractérisation possible de l'activité mathématique dans les phases d'émergence d'objets nouveaux².

1.2 La dimension expérimentale des mathématiques comme grille de lecture

En mathématiques, un des modes de l'agir constructif est un mode empirique qui permet l'émergence d'objets. Ce mode empirique se traduit par :

la multiplication des expériences, en appui sur des objets, des méthodes et des connaissances naturalisées pour le sujet, [qui] favorise l'élaboration de nouveaux objets conceptuels et de leurs propriétés, de résultats nouveaux et de leurs preuves, et contribue de manière essentielle au processus de conceptualisation (au sens de Vergnaud). (Durand-Guerrier, 2010, p.5)³

Ce mode d'émergence et la démarche associée caractérisent la dimension expérimentale des mathématiques. De nombreux auteurs, Chevallard (1992), Perrin (2007), ont décrit tout l'intérêt de cette dimension expérimentale dans des argumentaires qui amènent par exemple Perrin à formuler une maxime : « *Deux expériences valent mieux qu'une démonstration fausse* », (Perrin, 2007, p.25). Il souhaite ainsi mettre en évidence que dans des phases d'élaboration de nouvelles connaissances, la maîtrise formelle est souvent incertaine pour s'assurer de la vérité d'une conjecture, alors qu'un aller-retour supplémentaire entre objets

¹ Familier signifie « dont la manipulation est devenu facile, aisée, par la pratique, l'habitude ».

² Objet nouveau désigne un objet mathématique que le sujet est en train d'explorer et de faire advenir.

³ Dans ce même texte Durand-Guerrier définit les objets « naturalisés » comme des objets « suffisamment familiers pour que les résultats des actions soient considérés comme fiables [...]. Ils permettent donc de valider les hypothèses ou les prévisions et constituent donc en ce sens un domaine d'expérience pour le sujet [...] ».

familiers et objet nouveau permet souvent des progrès dans la conceptualisation. Cette dimension expérimentale est une des grilles de lecture de l'activité mathématique, utile quand cette activité relève de la construction d'un modèle, de l'élaboration d'une théorie locale, qui rendent compte des actions sur les objets et des premières conjectures.

L'usage de cette grille de lecture peut orienter les travaux de recherche dans plusieurs directions. Ouvrier-Bufferet (2013) et Gardes (2013) ont, par exemple, mis en évidence des invariants dans l'activité mathématique effective d'un sujet confronté à la résolution d'un problème de recherche. Chez ces deux auteurs, les invariants retenus caractérisent essentiellement la méthode mise en œuvre par les sujets et donnent des « indices du progrès » de la recherche. L'approche que nous proposons vise, quant à elle, à identifier dans la relation aux objets des causes des modifications de l'action.

Mais alors que certaines études peuvent s'appuyer sur des échanges avec des chercheurs contemporains, comment envisager, lorsque c'est indispensable, l'étude de l'activité de chercheurs anciens ? L'étude de ce qui est pensable, l'étude de la relation aux objets manipulés sont-elles alors possibles ? Le travail de l'historien peut-il accompagner le travail de l'épistémologue et identifier les tenants et les aboutissants de l'activité à dimension expérimentale en cours ?

2 Kepler et la recherche des pavages archimédiens du plan

Ce travail d'étude du savant cherchant nous l'avons entrepris à partir de l'activité de Kepler à la recherche des pavages archimédiens du plan, c'est-à-dire des pavages stricts du plan dont les tuiles sont des polygones réguliers convexes et tels que les nœuds sont tous identiques.

2.1 Une enquête historique qui interroge l'activité du savant cherchant

L'enquête historique menée vise donc à analyser l'activité de Kepler à la recherche de ces pavages, dans un contexte qui a été par beaucoup jugé a posteriori non scientifique. En tenant l'équilibre entre un familier mathématique qui nous donne aujourd'hui de trop nombreuses grilles de lecture et un inconnu à définir à partir de bien peu d'éléments, il s'agit de comprendre la relation de Kepler aux objets familiers dans son exploration d'un nouvel objet.

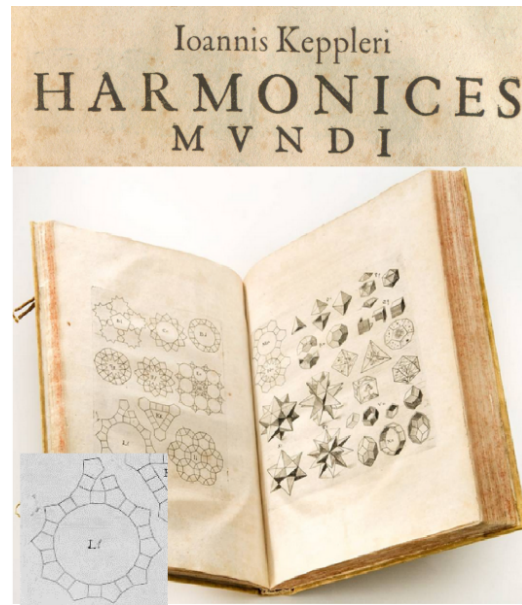


Figure 1. Planches de l'Harmonices Mundi⁴

Entre 1595, date annoncée par Kepler du début de ses recherches sur « la belle harmonie des choses immuables » et 1619, date de la parution de l' « Harmonices Mundi », Kepler a, au milieu de ses grandes avancées astronomiques, produit un résultat simple, mais jusque là non encore explicité par quiconque : *il existe exactement 11 pavages archimédiens du plan*⁵. Notons brièvement que les écrits précédents de Pappus sur la question⁶ se limitaient à la présentation et la preuve de l'existence des 3 pavages réguliers du plan, et que les écrits suivants, de Badoureau, beaucoup plus tardifs, datent de 1881 et sont indépendants de ceux de Kepler. Badoureau, qui ne mentionne pas Kepler, retrouve plus de 250 ans plus tard un résultat longtemps tombé dans l'oubli. Sans nous attarder sur le fait que ces génèses sont totalement différentes, nous allons tenter de mettre à jour quelques particularités de l'activité d'un savant, Kepler, qui a su dépasser les cadres qui contraignaient ses prédécesseurs.

2.2 Quelques éléments généraux sur la pensée képlérienne

Kepler est Chrétien. Et en tant que savant, il cherche à comprendre l'harmonie du monde, à comprendre le modèle qui aurait servi au créateur comme archétype de la Création. Cette recherche s'appuie sur une formation classique puisque, une fois admis au grand séminaire, Kepler suit un enseignement basé sur le trivium : grammaire, rhétorique et dialectique et sur le quadrivium : arithmétique, géométrie, musique et astronomie. Il n'est donc pas surprenant que ses premières recherches mélangent harmonies planétaires, musicales, polygonales et que les analogies soient très présentes. Mais Kepler est un esprit curieux et il devient autre chose que le dernier des grands anciens :

⁴ (Kepler, 1940).

⁵ Pour une démonstration du résultat, nous renvoyons à (Front, 2010).

⁶ La collection mathématique, (Pappus d'Alexandrie, 1933a,b).

Dans tous les domaines qu'il aborde, il rompt de manière consciente avec ses prédécesseurs. Même quand il émerge le plus manifestement d'un passé révolu, dans les savoirs que nous considérons comme fossiles, il est profondément novateur. (Simon, 1979, p.449)⁷

Et novateur, il l'est également malgré des positions philosophiques qui resteront identiques à elles-mêmes, tout au long de sa vie.

Loin d'être desservi par ses a priori métaphysiques, Kepler fut dans sa tâche guidé par eux. [...] Il fut constamment aiguillonné par la conviction que rien dans le monde n'est laissé au hasard, et que tout au contraire y obéit au principe du meilleur. La pensée d'une création faite à l'image du Créateur lui servit à la fois de guide et de garant. Mieux même, la forme métaphorique qu'elle prit [...] alimenta ses intuitions les plus profondes. (Simon, 1979, p.453)

Loin d'une image lisse de la science, Simon met ici en évidence la construction de savoirs en appui sur des paradigmes qui aujourd'hui surprennent. Mais il est vrai que Kepler ne se contente pas du socle métaphysique. Il est en effet remarquable qu'il sait, au-delà de ses a priori, produire des théories variées et les soumettre aux retours de l'expérience, celle de son époque, qui est toute observation. Et, formé au contact de Tycho Brahe à l'importance des données astronomiques qui l'ont plusieurs fois amené à revoir ses modèles, Kepler sait être pragmatique. C'est ainsi, par exemple, qu'après avoir longtemps cru à l'identité des harmonies musicales et des aspects, sa soumission aux données l'a progressivement amené à changer d'avis :

Il est juste sur ces matières aussi d'écouter le témoignage de l'expérience : car c'est elle qui comme pour le reste fait la conviction première, avant les raisons. Kepler cité par (Simon, 1979, p.169)⁸

Ces quelques éléments mettent ainsi en évidence la capacité de Kepler à faire des allers-retours entre théorie en cours d'élaboration et observations, la capacité à mettre en accord la théorie et l'expérience en reprenant aussi bien la première que les résultats de la seconde.

Nous revenons maintenant sur la constitution du domaine d'expérience de Kepler et l'effet de la création d'une théorie structurant l'ensemble des polygones réguliers.

2.3 Kepler et les polygones réguliers

Par la mise au point d'un opérateur conceptuel sur les polygones, Kepler va attribuer aux différents êtres géométriques, par l'intermédiaire de démonstrations géométriques, une plus ou moins grande dignité ontologique. Ceci l'amène ainsi à définir des « êtres connaissables » :

⁷ Pour cette sous partie nous nous appuyons sur les analyses de Simon qui a su éclairer la rationalité de Kepler et sa capacité à mettre en accord, par un travail patient et inventif, la théorie et l'expérience. Simon a non seulement remis en valeur les travaux de Kepler mais plus fondamentalement par cette étude réaffirmer l'intérêt d'une histoire des savoirs.

⁸ Il est notable que certaines traductions de Simon, sont plus pertinentes que celle de (Kepler, 1980), c'est pourquoi nous les préférons à deux occasions ici.

Est dit connaissable, ce qui est mesurable par le diamètre ou immédiatement par soi-même, soit une ligne, soit une surface par son carré ; ou bien au moins ce qui est formé par une raison sûre et géométrique de telles quantités qui dépendent d'un enchaînement, de n'importe quelle grandeur, enfin pourtant du Diamètre ou de son carré. La démonstration de la quantité, ou à décrire, ou à connaître, est une déduction à partir du diamètre au moyen des intermédiaires possibles. (Kepler, 1980, p.9)

Et, en cohérence, la théorie produit des « non-êtres » ;

Car ici, quant à nous, nous nous occupons d'êtres connaissables ; et nous affirmons à juste titre, que le côté de l'heptagone fait partie des non-êtres ; j'entends connaissables. Kepler cité par (Simon, 1979, p.155).

Cette approche engendre donc, dans le cadre de cette ontologie képlérienne, des modes d'existences des polygones réguliers spécifiques. Et Kepler ne retiendra, dans les « limites de la Notion, de la Science, de la Détermination, de la Description » qu'un nombre réduit de polygones ayant des démonstrations « appropriées ». Ce sont les polygones convexes à 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 côtés auxquels il faut ajouter les polygones étoilés associés au pentagone, à l'octogone, au décagone et au dodécagone. Il nous reste maintenant à voir comment cette organisation des objets, désormais « naturalisés », agit sur la recherche de Kepler des pavages archimédiens du plan.

2.4 La relation de Kepler aux objets naturalisés et l'émergence d'objets nouveaux

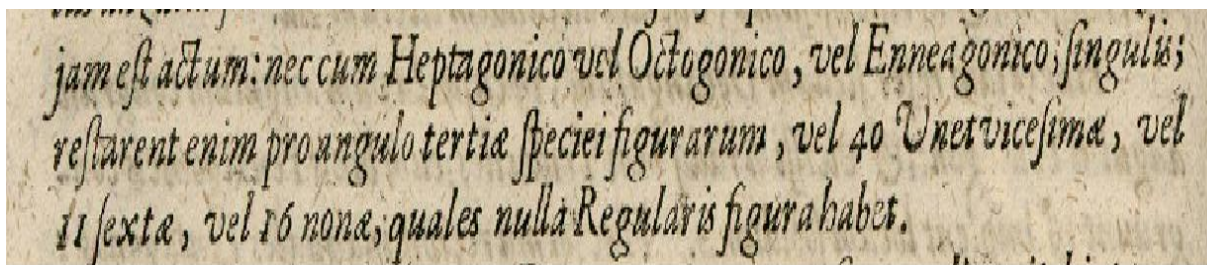


Figure 2. Une erreur de Kepler⁹.

Kepler travaille depuis 1595 sur les harmonies planétaires, musicales, numériques et astrologiques. Ainsi quand l'harmoniques Mundi parait en 1619, nul doute que le savant a eu le temps de peaufiner cette œuvre de maturité sous tous ces aspects. Rappelons également que Kepler est un calculateur hors-pair, particulièrement familier avec les angles des polygones réguliers. Aussi quand, lors d'un passage où il recherche les pavages constitués avec des *angles plans de trois espèces*, il ne « reconnaît » pas en 40 vingt-et-unièmes, ou 11 sixièmes, ou 16 neuvièmes [de droit] les angles des polygones réguliers à 42, 24 et 18 côtés, ce n'est certainement pas pour des raisons internes au raisonnement qu'il mène. On peut au contraire y voir une influence du milieu de la recherche et de la relation de Kepler aux non-êtres qui font que certains objets sont de fait exclus des combinaisons possibles. Il est fort probable que la

⁹ Un angle du triangle n'est pas joint [...] ni avec l'angle de l'Heptagone ou de l'Octogone ou du polygone de neuf côtés chacun en particulier en effet il reste pour l'angle des figures de troisième espèce ou 40 vingt-et-unièmes, ou 11 sixièmes, ou 16 neuvièmes [de droit], tels que n'a aucune figure Régulière. (Kepler, 1980, p.68)

figure Régulière que Kepler évoque doit avoir, pour lui, d'autres caractéristiques que celles des polygones réguliers que nous connaissons et doit, de façon plus ou moins consciente, renvoyer aux *connaissables*.

Il se trouve que les candidats pavages (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18) ne permettent pas, au-delà de l'assemblage local autour d'un nœud, de paver le plan. Cette « erreur » de Kepler ne portera ainsi pas à conséquence. Notons, s'il fallait mettre davantage en évidence la familiarité de Kepler avec les polygones réguliers et les pavages, que sa relation particulièrement forte lui permettra de ne pas passer à côté de la possibilité de réaliser deux pavages énantiomorphes (cf. figure 3) avec l'assemblage (3,3,3,3,6). Notons que cette possibilité ne sera pas perçue par Badoureaux qui développera, lui, une approche beaucoup plus formelle.

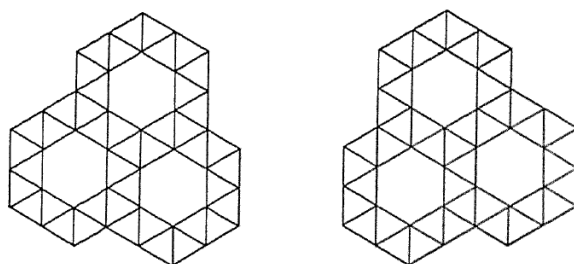


Figure 3. Deux pavages énantiomorphes

L'ensemble des sources montre que les dimensions ontologique et pragmatique se cotoient chez Kepler du début de la recherche (1595) à la rédaction de l'œuvre (1619). L'enquête que nous avons menée, met alors en évidence différents impacts d'une telle relation aux objets. Le positionnement ontologique de Kepler engendre par exemple dans la recherche des pavages une réduction de l'ensemble des objets à considérer et facilite, de façon abusive, une étude exhaustive¹⁰. Mais par ailleurs, en générant des objets « marginaux », il induit potentiellement des retours d'expériences qui pourraient troubler ultérieurement la nouvelle théorie locale en cours d'élaboration. Kepler a montré qu'il était capable d'intégrer dans la théorie de tels retours d'expérience. Reste à voir si des chercheurs moins expérimentés auront eux aussi cette capacité.

3 Étude historique et ingénierie didactique en vue d'élaborer des situations didactiques de recherche en classe

Le point de vue que nous développons renvoie fondamentalement à l'activité mathématique singulière et en aucune façon à une thèse qui chercherait à faire un parallèle entre la construction du concept au fil des siècles et les possibles élaborations d'élèves. Les genèses singulières, sans lien, présentant chacune des particularités et des imprécisions, nous renvoient beaucoup plus au fait que les connaissances nouvelles produites ont toutes un caractère local. Dès lors, concernant l'élaboration de situations didactiques pour la classe, les questionnements produits par ces retours du passé nous ont amenés à considérer

¹⁰ On retrouve ici l'idée que toute idée « fausse » n'est pas nécessairement, et tout au moins dans un premier temps, un obstacle à la découverte.

particulièrement deux axes. En premier lieu une réflexion sur l'activité qui amène à penser le problème comme essence d'une situation didactique, en garantissant une activité de l'élève à forte dimension expérimentale. En second lieu l'observation de cette activité et particulièrement l'analyse de la relation des élèves aux objets en situation.

3.1 Des situations didactiques où la recherche de problèmes est première

Nous nous centrons, dans l'élaboration de situations didactiques, sur les phases didactiques à fort caractère expérimental. Dans des situations didactiques de recherche de problèmes construites pour favoriser l'émergence d'objets nouveaux dans des allers-retours avec des objets rendus familiers par l'usage et la construction de savoirs¹¹, nous étudions alors particulièrement le rôle des relations aux objets. L'étude des pavages archimédiens du plan se révèle doublement favorable, d'une part par l'appui possible sur des objets familiers à un grand nombre d'élèves (les polygones réguliers), et d'autre part par la possibilité d'émergence relativement aisée d'éléments structurant potentiellement le nouvel objet. Il s'agit par exemple de lois locales (*la somme des angles autour d'un noeud vaut un plein, les côtés sont nécessairement de même longueur, ...*) mais également de contingences globales, avec par exemple le fait que « *la somme des angles autour d'un noeud vaut un plein* » n'est pas une condition suffisante pour la réalisation d'un pavage.

La mise en oeuvre d'une situation didactique explorant les pavages archimédiens du plan permet donc la vie de la dimension expérimentale de l'activité mathématiques des élèves. Des expérimentations permettent alors de constater, qu'en fonction de relations différentes aux polygones réguliers, des élèves vont s'orienter sur des voies différentes, complémentaires dans la détermination des pavages archimédiens du plan. Les uns, peuvent s'engager sur la détermination d'une formule donnant l'angle d'un polygone régulier convexe et déterminer l'ensemble des pavages réguliers du plan alors que d'autres développeront des résultats à un niveau plus global.

Nous pouvons alors affiner l'étude du rôle de la relation aux objets et en particulier observer d'éventuelles difficultés à intégrer certains polygones dans le domaine d'expérience, voire à refuser qu'ils y entrent au nom d'une théorie, l'usage d'analogies, de métaphores, d'icônes de l'objet manipulé, ...

3.2 Analyses de productions d'élèves explorant les pavages archimédiens du plan

De la même façon que les productions de Kepler à la recherche de pavages harmonieux montrent le plaisir du savant à multiplier la variété des constructions possibles, et une jubilation à mettre en valeur la richesse combinatoire des figures géométriques, les productions d'élèves ou d'étudiants dans le cadre d'une situation didactique de recherche de problèmes fondée sur ce problème sont elles aussi très riches.

¹¹ Au sens ici de Conne : « Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance, utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation ». (Conne, 1992, p. 235)

Les figures 4 et 5 montrent deux extraits de la production d'un étudiant de terminale S, à l'issue d'une recherche individuelle puis en groupe.

$\alpha \times n = 360$
 α et n diviseurs de 360

$\alpha = 180 = \frac{360}{n}$
 $360 - x\alpha = x'\alpha'$
 $360 - 6 \times 90 = 0 = 0 \times 0$
 $360 - x \times x \times x$

2×708
 276
 744
 $360 \times 735 = 90$
 288×708
 $360 - x \times 735 = 8 \times 8$

$\alpha' = 90, 60, 720$
 12 cot.
 $\text{polygone de } 30^\circ$
 $\alpha = \frac{720 - 360}{n}$
 $\frac{360 - 750}{n}$
 $\frac{360}{150} = n$
 $90 + 30$
 $360 - 3 \times (720)$
 $360 - 3\alpha - x\alpha' = 0$
 $360 - x(\alpha + \alpha') = 0$
 $\text{multiple de } 360$
 $360 - 5 \times (72) = 0$
 $360 - 5(60 + 72)$
 $(\alpha + \alpha') = 720$

Figure 4. Extrait 1 de la production de Thimoté.

$\Sigma \text{ angl} = 360$
 plans convexes?

60° $6 \times$ triangles équilatéraux

$\text{chaque angl} = \frac{360}{\text{nombre de pt de contact}}$

1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	18	20	24	30
36	40	45	60	72	90	120	180	360						

Figure 5. Extrait 2 de la production de Thimoté.

L'analyse de productions de ce type nécessite un outil qui puisse rendre compte de la dimension dynamique de la production et de l'évolution de la recherche vers une structure non prédéfinie. Nous ne développons pas ici la technique utilisée qui s'appuie sur la sémiotique de Peirce. Elle permet, par exemple pour la production de Thimoté, de mettre en évidence la succession de significations émergentes (sémiose). Ainsi, initiée par un premier geste de la main¹² faisant exister un noeud imaginaire, la sémiose se poursuit par le tracé d'un noeud¹³, comme le montre le repère 1 de la figure 4. L'évolution se poursuit par l'apparition de signes régis par la symbolique mathématique (repère 2 de la **figure 5**) qui montrent l'entrée de la sémiose dans une dimension formelle. Le repère 3 montre une nouvelle étape avec le changement de statut des relations mathématiques lors d'interactions avec les objets familiers. Les repères 4 et 5 montrent un travail dans le nouveau modèle, travail qui permet, in fine, la détermination des pavages réguliers. La sémiose se poursuivra désormais (figure 4) dans le contexte général de pavages utilisant plusieurs types de polygones.

3.3 Une similitude

Dans cette élaboration d'un objet nouveau, ce qui est également particulièrement intéressant c'est d'identifier dans les interactions de Thimoté aux objets des phénomènes similaires à ceux identifiés dans la recherche de Kepler. Il est ainsi possible de constater en début de recherche la mise à l'écart du pentagone régulier. Cette mise à l'écart intervient quand Thimoté ne parvient pas à construire ce polygone malgré un appui sur un travail préliminaire ayant produit une liste des angles des premiers polygones réguliers et une liste des polygones constructibles à la règle et au compas. Ainsi, des essais malheureux finiront par exclure le pentagone du milieu objectif, « *Ça n'existe pas, cette figure n'existe pas* », sans que cela pénalise la recherche. La réintroduction du pentagone interviendra après la détermination des pavages réguliers, quand l'association de deux polygones de types différents amène Thimoté à considérer des relations de la forme $360 - x\alpha - x'\alpha' = 0$. L'introduction du décagone ($x = 1$ et $\alpha = 144$) fait alors dire à Thimoté : « Ça fait 2 fois 108 ? Donc ça veut dire que si on a un décagone, on peut mettre deux figures à 5 cotés autour. Les 5 côtés c'est un peu bizarre mais ... ». Ainsi le pentagone, exclu dans un temps du domaine d'expérience, le réintègre quand le modèle en cours d'élaboration le nécessite.

Cette similitude dans le « jeu » avec les objets nous renvoie en premier lieu à l'intérêt de considérer ce jeu dans notre réflexion sur l'agir en mathématique, et donc également à l'importance de construire des situations didactiques qui permettent ce jeu et les constructions de savoirs associés. Elle nous conforte aussi dans notre approche historique et dans la pertinence d'études qui s'astreignent à atteindre ce degré de granularité dans l'observation de l'émergence des savoirs en mathématiques.

4 Conclusion sur les apprentissages

Le modèle d'analyse que nous utilisons pour analyser les processus d'élaboration d'un nouvel objet mathématique croise une approche sémiotique, qui rend compte de la dynamique

¹² Qualisigne iconique rhématique.

¹³ Sinsigne iconique rhématique.

réursive de construction de l'objet exploré, et la dialectique entre cet objet et les objets naturalisés. La dialectique objets naturalisés-objet nouveau évolue au fil de l'avancée de la recherche. Dans un premier temps, elle est portée par la relation première aux objets naturalisés, relation qui influe fortement sur la direction prise et les premières structurations de l'objet à explorer. Puis la dialectique s'enrichit et peut produire une évolution de la relation aux objets.

C'est l'existence de la relation singulière aux objets et l'influence qu'elle peut avoir sur l'avancée de la recherche que nous venons de donner à voir aussi bien chez Kepler que chez un élève de terminale impliqué dans une situation didactique de recherche de problème. Dans tous les cas nous mettons en évidence des relations très personnalisées et qui portent en elles leviers et obstacles à la résolution du problème. Ces relations, constatées dans l'enquête historique et présentes en situation didactique, sont résistantes aux tentatives superficielles de modifications et doivent être intégrées à la réflexion sur l'élaboration de situations didactiques. S'en servir comme levier revient donc à les laisser vivre et agir, parce que localement elles permettent l'avancée de la recherche. Éviter qu'elles ne deviennent des obstacles, c'est permettre la confrontation et la régulation des points de vue en classe. On l'aura compris, notre approche s'appuie sur une vision constructiviste qui souhaite donner la possibilité aux élèves de s'engager dans une recherche et de construire des savoirs sur un objet à explorer. Thimoté, et les autres élèves considérés dans les expérimentations réalisées, ont construit, dans des dynamiques dans un premier temps très personnalisées, des savoirs, pour certains conformes aux savoirs institués, pour d'autres erronés ou imprécis, comme ont pu l'être en leur temps les savoirs produits par Kepler et Badoureau. Dans la classe, donner le temps aux savoirs de vivre avant institutionnalisation, c'est favoriser une nouvelle vision des savoirs, c'est casser cette idée du savoir-absolu, pré-existant à l'exploration, qui prive élèves et enseignants de toute liberté dans l'acte de recherche. Si un autre parallélisme entre Kepler et Thimoté peut être fait, c'est bien celui qui met en évidence la richesse de l'imagination pour peu que les conditions d'une réelle activité mathématique soient réunies.

REFERENCES

- Chevallard, Y. (1992). Le caractère expérimental de l'activité mathématique. *Petit x*, 30, 5–15.
- Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 12(2.3), 221-270.
- Durand-Guerrier, V. (2010). La dimension expérimentale en mathématiques, enjeux épistémologiques et didactiques. In *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école (cédérom)*. INRP.
- Front, M., & Legrand, P. (2010). Pavages semi-réguliers du plan. *Bulletin de l'APMEP*.
- Gardes, M. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse de doctorat, Université de Lyon.
- Kepler, J. (1940). *Harmonices Mundi*. München: C. H. Beck.
- Kepler, J. (1980). *Harmonie du monde. Harmonices Mundi. Traduit du latin avec un avertissement et des notes par Jean Peyroux*. Blanchard.
- Ouvrier-Buffet, C. (2013). *Modeling of the defining activity in mathematics and of its dialectic with the proving process Epistemological study and didactical challenges*. Paris VII : Habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Diderot.
- Pappus d'Alexandrie (1933a). *La Collection mathématique, avec une introduction et des notes de Paul Ver Eecke. Tome premier*. Paris and Bruges : Desclée De Brouwer. Réédition Blanchard, Paris 1982.

- Pappus d'Alexandrie (1933b). *La Collection mathématique, avec une introduction et des notes de Paul Ver Eecke. Tome second.* Paris and Bruges : Desclée De Brouwer. Réédition Blanchard, Paris 1982.
- Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x*, 73(6), 34.
- Salanskis, J.-M. (2008). *Philosophie des mathématiques.* Vrin.
- Simon, G. (1979). *Kepler astronome astrologue.* Gallimard.
- Simon, G. (2008). *Sciences et histoire.* Bibliothèque des histoires, ISSN 0768-0724.
- Veyne, P. (1996). *Comment on écrit l'histoire : Texte intégral.* Points. Histoire. Seuil.