



**HAL**  
open science

# Trajectoires chaotiques dans un écoulement de Stokes stationnaire

Philippe Carrière, Florence Raynal

► **To cite this version:**

Philippe Carrière, Florence Raynal. Trajectoires chaotiques dans un écoulement de Stokes stationnaire. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, physique, astronomie, 1995, 320 (8), pp.381-386. hal-01349120

**HAL Id: hal-01349120**

**<https://hal.science/hal-01349120>**

Submitted on 26 Jul 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mécanique des fluides/*Fluid Mechanics*

## Trajectoires chaotiques dans un écoulement de Stokes stationnaire

Philippe CARRIÈRE et Florence RAYNAL

**Résumé** – Nous étudions le chaos des trajectoires des particules fluides pour un écoulement de Stokes stationnaire dans une sphère. L'écoulement est la superposition de deux champs de vitesse, le premier étant induit par un gradient de température, le deuxième étant simplement une rotation solide. Chacun de ces champs pris séparément conduit à des trajectoires fermées. À l'aide des sections de Poincaré, nous étudions le chaos engendré par l'écoulement pour différents rapports des amplitudes de chacun des champs. Nous montrons que bien que ces champs sont topologiquement très différents, le chaos global est atteint pour un rapport d'amplitudes de l'ordre de 1.

### Chaotic trajectories in steady thermally driven Stokes flows

**Abstract** – Chaos of trajectories of fluid particles for a stationary Stokes flow within a sphere is considered. The flow is a linear superposition of two flows, the first one being buoyancy driven and the second one being a solid body rotation. Both flows, alone, would induce closed trajectories. Using Poincaré sections, we study chaos generated by the combination flow for different values of the ratio between the amplitudes of the superimposed flows. We show, although the two flows are topologically merely different, that global chaos is reached for a ratio of the amplitudes of order unity.

**Abridged English Version** – The phenomenon of chaotic advection has received a particular attention in the past decade, especially concerning time-periodic planar flows (Aref, 1984; Aref and Balachandar, 1986; Chaiken *et al.*, 1987; Ottino, 1989; Kaper and Wiggins, 1993). Considering three-dimensional stationary flows, the time-periodicity may be replaced by spatial periodicity (Dombre *et al.*, 1986; Jones *et al.*, 1989). However, only a few papers deal with bounded three-dimensional chaotic flows (Bajer and Moffatt, 1990; Bajer *et al.*, 1990; Moffatt, 1991; Stone *et al.*, 1991).

In the present paper we investigate the kinematics of a steady Stokes flow of a viscous heat-conducting fluid inside a rigid sphere under gravity. The motion is produced by buoyancy effects (flow-field  $\mathbf{U}$ ) superimposed to a solid body rotation around the  $y$ -axis, denoted  $\mathbf{V}$ .  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{V}$  respectively satisfy:

$$U_x = -4U(1 - r^2)xy$$

$$U_y = U(1 - r^2)(x^3 - 3y^2 - 19z^2 + 3)$$

$$U_z = 16U(1 - r^2)yz,$$

and

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \Omega \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{x},$$

where  $\mathbf{e}_y$  is the unit vector in the  $y$ -direction. The flow  $\mathbf{V}$  leads to trajectories corresponding to circles around the  $y$ -axis, while  $\mathbf{U}$  also leads to closed trajectories, but topologically much more complicated.

The sum  $\mathbf{U} + \mathbf{V}$  satisfies the governing equations in the Boussinesq approximation, with the corresponding boundary conditions on the sphere. Consider the non-integrable trajectories

---

Note présentée par Gérard Iooss.

generated by the superimposition of the flows: the analysis of the given dynamical system lies in a one dimensional space  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{U}{\Omega},$$

the ratio of the two superimposed flows. Figure shows two typical Poincaré sections corresponding to the two planes  $x - y$  and  $x - z$ , for values of  $\alpha$  varying from  $10^{-2}$  to  $10^2$ . It can be seen that global chaos is reached when  $\alpha$  is equal to unity, which may be surprising provided the deep topological differences of the two flows. However the transition to chaos is merely different in the two cases: when  $\alpha$  ranges from zero to unity, the transition is quite sharp, lying between  $\alpha = 0.1$  and  $1$ , whereas the transition is smooth when  $\alpha$  ranges from infinity to unity. The quasi-ordered behaviour observed for  $\alpha \leq 0.1$  can be explained analytically using multiple scale analysis for weakly perturbed rigid body rotation, but no analytical result can predict the sharp transition to chaos found numerically.

The results presented here could lead us to the conclusion that when two flow fields are superimposed, global chaos is reached when the two amplitudes are of same order of magnitude. From the point of view of mixing, we think that this work is a first step towards the realization of a three-dimensional mixing apparatus of viscous fluids, and the result found above could avoid useless numerical and experimental trials.

---

I. INTRODUCTION. – L'étude des champs de vitesse engendrant des trajectoires chaotiques a connu un essor important dans les 10 dernières années, en particulier en ce qui concerne les écoulements plans périodiques en temps (Aref, 1984; Aref et Balachandar, 1986; Chaiken *et al.*, 1987, Ottino, 1989; Kaper et Wiggins, 1993). Dans le cas des écoulements tridimensionnels stationnaires, la périodicité en temps peut être remplacée par une périodicité spatiale (Dombre *et al.*, 1986; Jones *et al.*, 1989). Cependant, peu d'études portent sur les écoulements chaotiques tridimensionnels confinés (Bajer et Moffatt, 1990; Bajer *et al.*, 1990; Stone *et al.*, 1991). Notons également une étude d'écoulements chaotiques engendrés par effets électromagnétiques (Moffatt, 1991).

Nous présentons ici une analyse de mélange par chaos lagrangien dans un écoulement de Stokes pour un fluide conducteur de la chaleur confiné dans une sphère creuse. Cette géométrie simple nous permet de calculer analytiquement le champ de vitesse : celui-ci est la superposition linéaire d'un champ induit par un gradient de température et d'une rotation solide. Nous intégrons les trajectoires à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 en double précision, et nous étudions les conditions d'apparition du chaos global.

II. LE CHAMP DE VITESSE. – Les équations pour le champ de vitesse dans l'approximation de Boussinesq sont données par :

$$(1) \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \nabla^2 \mathbf{u} + G T \mathbf{e}_z - \nabla p = 0, \\ \nabla^2 T = 0, \end{cases}$$

où  $\mathbf{u}$ ,  $T$  et  $p$  sont respectivement les champs non dimensionnels de vitesse, température et pression,  $\mathbf{e}_z$  est le vecteur unité ascendant, et  $G$  est une constante introduite par

l'adimensionalisation, qui mesure l'importance des effets de gravité par rapport aux effets visqueux. Le système est soumis à un champ de température  $T$  :

$$(2) \quad T = \frac{840}{G} U yz,$$

qui induit le champ de vitesse  $\mathbf{U}$  tel que :

$$(3) \quad \begin{cases} U_x = -4U(1-r^2)xy \\ U_y = U(1-r^2)(x^3 - 3y^2 - 19z^2 + 3) \\ U_z = 16U(1-r^2)yz, \end{cases}$$

$x$ ,  $y$  et  $z$  étant les coordonnées cartésiennes et  $r$  la distance à l'origine. Les équations des trajectoires de cet écoulement s'intègrent aisément en :

$$(4) \quad \begin{cases} zx^4 = z_0 x_0^4 \\ (1-r^2) = (1-r_0^2) \left(\frac{x}{x_0}\right)^{3/2} \end{cases}$$

où l'indice 0 désigne les valeurs des paramètres à  $t = 0$ . Le système d'équations (4) montre que  $x$  (resp.  $z$ ) garde le signe de  $x_0$  (resp.  $z_0$ ), donc une trajectoire donnée reste dans le même quart de sphère. Pour y remédier, nous choisissons donc de superposer à  $\mathbf{U}$  une rotation solide  $\mathbf{V}$  autour de l'axe des  $y$  de vitesse angulaire  $\Omega$ .  $\mathbf{V}$  vérifie donc :

$$(5) \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \Omega \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{x}.$$

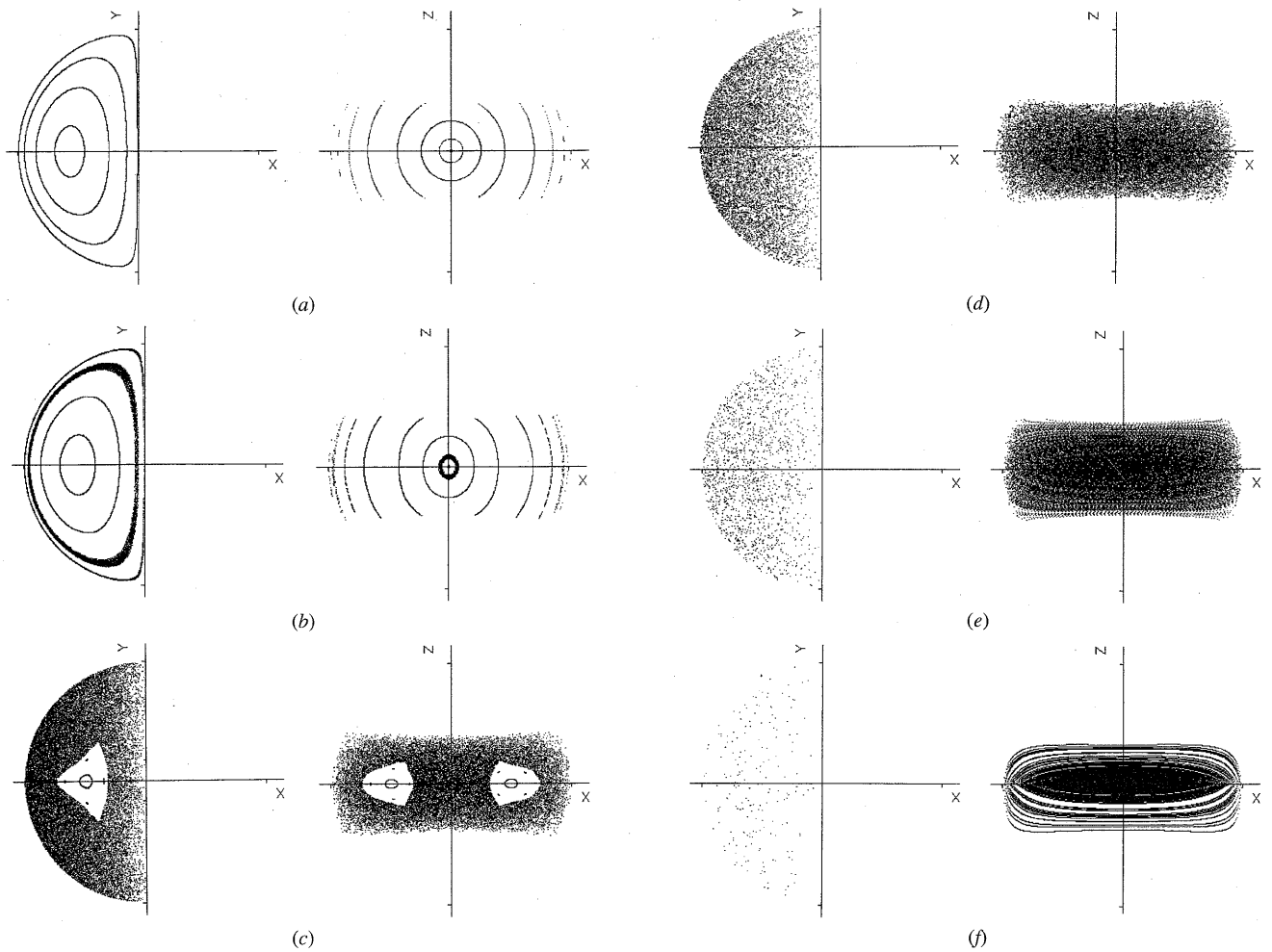
Cet écoulement conduit à des trajectoires circulaires autour de l'axe des  $y$ .

La somme  $\mathbf{U} + \mathbf{V}$  est une solution du système d'équations (1), avec les conditions limites correspondantes. L'analyse des trajectoires montre que celles-ci ne sont pas intégrables analytiquement et dépendent du rapport  $\alpha$  des amplitudes des deux champs,

$$(6) \quad \alpha = \frac{U}{\Omega}.$$

III. RÉSULTATS. – Nous donnons dans la figure deux sections de Poincaré correspondant aux deux plans  $z = 0$  et  $y = 0$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Les calculs ont été effectués sur des temps suffisamment long pour que le nombre de points d'intersection d'une trajectoire avec l'un des deux plans soit compris entre 30 000 et 50 000. Classiquement, les points d'intersections considérés pour chaque plan sont ceux pour lesquels la composante normale de la vitesse est positive. Pour  $\alpha \geq 1$ , les calculs ont été effectués avec une seule trajectoire, alors qu'il y en a trois pour  $\alpha = 0,3$  et quatre pour  $\alpha = 0,1$  et  $0,01$ .

Le cas trivial de rotation solide  $\alpha = 0$ , non représenté ici, nous donnerait quatre points correspondant aux quatre trajectoires dans le plan  $z = 0$ , et ne donnerait aucun point dans le plan  $y = 0$ , sauf si certaines des conditions initiales étaient déjà dans ce plan, auquel cas on observerait des cercles. Dans les cas de faibles valeurs de  $\alpha$  non nulles, les sections de Poincaré sont totalement différentes, cependant qu'aucune zone chaotique conséquente n'est visible. En fait, les trajectoires décrivent un tore  $T_2$ , ce qui peut se vérifier analytiquement par une méthode de développement en échelles multiples (Bajer



Sections de Poincaré  $z = 0$  et  $y = 0$  de l'écoulement  $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{V}$ ,  
 pour  $\alpha =$ : (a) 0,01, (b) 0,1, (c) 0,3, (d) 1, (e) 10, (f) 100.  
*x - y and x - z Poincaré sections of the flow  $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{V}$ ,*  
*for  $\alpha =$ : (a) 0.01, (b) 0.1, (c) 0.3, (d) 1, (e) 10, (f) 100.*

et Moffatt, 1990) : en introduisant un petit paramètre  $\varepsilon$ , on peut décomposer l'amplitude  $U$  et la solution  $\mathbf{x}$  en

$$(7) \quad \begin{cases} U = \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots, \\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{x}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{x}_2 + \dots, \end{cases}$$

et introduire des échelles de temps  $\tau_n$  :

$$(8) \quad \tau_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A l'ordre 0, on retrouve la rotation solide. Cependant, à l'ordre 1, on peut montrer que les courbes intégrales sont telles que :

$$(9) \quad (x^2 + z^2)(1 - r^2) = \text{Cte.}$$

Ce résultat reste valable jusqu'à des temps de l'ordre de  $\varepsilon^{-2}$ . Il est clair à la vue des sections obtenues pour  $\alpha \leq 0,1$  que l'invariant adiabatique (9) donne une bonne description du comportement.

Dans le cas contraire où  $\alpha = 100$ , une zone chaotique est déjà visible dans la section  $y = 0$  le long de l'axe des  $x$ . Cela est dû à la topologie des trajectoires de  $\mathbf{U}$  au voisinage de l'origine; en effet, le système (4) peut se réécrire :

$$(10) \quad xz(1 - r^2) = \text{Cte},$$

soit  $xz$  sensiblement constant pour  $r \simeq 0$ . Ainsi, on a des trajectoires quasi hyperboliques près de l'origine dans le plan  $y = 0$ , auxquelles on superpose une rotation autour de l'axe des  $y$ ...

Lorsque  $\alpha = 10$ , on observe un comportement globalement beaucoup plus chaotique que dans le cas quasi-régulier  $\alpha = 0, 1$ , et l'on s'attendrait donc à obtenir un chaos global pour un  $\alpha$  tel que  $0,1 \ll \alpha \approx 10$ . Or, le système transitionne rapidement vers le chaos global lorsque  $\alpha$  passe de  $0,1$  à  $1$ , alors que cette transition est beaucoup plus douce entre  $10$  et  $1$ . Lorsque  $\alpha = 0,3$ , on voit apparaître des îles régulières dans chaque section de Poincaré. Pour une condition initiale dans une de ces îles, une trajectoire décrit un tore  $T^2$ , donc est représentée soit par une série de points, soit par une ligne fermée, selon que le nombre de rotation est rationnel ou irrationnel, comme le montre la figure.

IV. CONCLUSION. – Nous avons proposé un écoulement de Stokes confiné qui engendre des trajectoires chaotiques. Cet écoulement est la superposition linéaire d'une rotation solide, pour laquelle les trajectoires sont des cercles, et d'un champ de vitesse qui, seul, conduit à des trajectoires non chaotiques mais compliquées. Nous avons étudié le passage progressif du premier champ au deuxième, en faisant varier le rapport des amplitudes de chacun des champs. Nous avons montré analytiquement et numériquement que lorsque l'on perturbe la rotation solide, les trajectoires restent quasi-ordonnées. Cependant, la transition vers le chaos global lorsque les amplitudes des deux champs deviennent du même ordre de grandeur est très rapide. Le retour au cas intégrable  $\mathbf{U}$  a lieu par diminution très progressive de la taille de la zone chaotique.

Le résultat original de cette étude est que le chaos global est atteint pour des amplitudes des deux champs de vitesse du même ordre de grandeur, alors que l'on est parti de deux champs topologiquement totalement différents. Du point de vue du mélange, même si nous sommes conscients que ce système n'est pas très aisé à réaliser expérimentalement, nous pensons qu'il s'agit d'un premier pas vers un système *tridimensionnel* de mélangeur de fluide visqueux.

Note remise le 6 décembre 1994, acceptée après révision le 20 février 1995.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- H. AREF, Stirring by chaotic advection, *J. Fluid Mech.*, 143, 1984, p. 21.  
 H. AREF et S. BALACHANDAR, Chaotic advection in a Stokes flow, *Phys. Fluids*, 29-11, 1986, p. 3515-3521.  
 K. BAJER et H. K. MOFFATT, On a class of steady confined Stokes flows with chaotic streamlines, *J. Fluid Mech.*, 212, 1990, p. 337-363.  
 K. BAJER, H. K. MOFFATT et NEX, *Topological Fluid Mechanics*, Cambridge Univ. Press, 1990.  
 J. CHAIKEN, C. K. CHU, M. TABOR et Q. M. TAN, Lagrangian turbulence and spatial complexity in a Stokes flow, *Phys. Fluids*, 30-3, 1987, p. 687-694.  
 T. DOMBRE, U. FRISCH, J. M. GREENE, M. HENON, A. MEHR et A. M. SOWARD, Chaotic streamlines in the ABC flows, *J. Fluid Mech.*, 167, 1986, p. 353-39.  
 S. W. JONES, O. M. THOMAS et H. AREF, Chaotic advection by laminar flow in a twisted pipe, *J. Fluid Mech.*, 209, 1989, p. 335-357.

- 
- T. J. KAPER et S. WIGGINS, An analytical study of transport in Stokes flows exhibiting large-scale chaos in the eccentric journal bearing, *J. Fluid Mech.*, 253, 1993, p. 211-24.
- H. K. MOFFATT, Electromagnetic stirring, *Phys. Fluids*, A3, 1991, p. 1336-1343.
- J. M. OTTINO, *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport*, Cambridge Univ. Press. 1989.
- H. A. STONE, A. NADIM et S. H. STROGATZ, Chaotic streamlines inside drops immersed in steady Stokes flows, *J. Fluid Mech.*, 232, 1991, p. 629-646.

---

*Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique,  
URA CNRS 263, École Centrale de Lyon, Université Lyon-I,  
36, avenue Guy-de-Collongue, 69131 Écully Cedex, France.*