HAL
open science

Un outil mathématique pour la physique : l'analyse non linéaire MinPlus et l' intégrale de chemin MinPlus

Michel Gondran, Alexandre Gondran

To cite this version:

Michel Gondran, Alexandre Gondran. Un outil mathématique pour la physique : l'analyse non linéaire MinPlus et l' intégrale de chemin MinPlus. 19e Rencontre du Non Linéaire, Université Paris Diderot, Mar 2016, Paris, France. pp.31-36. hal-01348973v1

HAL Id: hal-01348973

https://hal.science/hal-01348973v1

Submitted on 1 Aug 2016 (v1), last revised 3 Aug 2016 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un modèle heuristique de particule étendue compatible avec la mécanique quantique

Michel Gondran [*1] and Alexandre Gondran [†2]

[1]University Paris Dauphine, Lamsade, Paris, France
[2]École Nationale de l'Aviation Civile, Toulouse, France

Rencontre du Non-Linéaire 2016

Abstract

We propose an extended particle model whose evolution is deterministic. In dimension 2, the extended particle is represented by four points that define a small elastic string that vibrates, alternating between a creation process and an annihilation process.

First we show how the spin and the Heisenberg uncertainty relations emerge from this extended particle. We then show how the complex action associated with this extended particle satisfies, from a generalized principle of least action, a second order complex Hamilton-Jacobi equation. Third, we show that the wave function, which admits this action as a complex phase, satisfies the Schrödinger equation. Finally, we show that the gravity center of this extended particle follows the trajectories proposed by the de Broglie-Bohm interpretation.

This model is built on two new mathematical concepts : complex analytical mechanics on complex-valued functions, which we have introduced [2, 3] following Malov [1], and a periodic deterministic process, which we have developed [9, 10].

Résumé

Nous proposons un modèle non ponctuel de particule en dimension 2 : la particule étendue est représentée par quatre points qui définissent la structure d'une petite corde élastique qui vibre, en alternant entre un processus de création et un processus d'annihilation.

Nous montrons d'abord comment le spin et les relations d'incertitude d'Heisenberg émergent de cette particule étendue.

Nous montrons ensuite comment l'action complexe, associée à cette particule étendue, vérifie, à partir d'un principe de moindre action généralisé, une équation d'Hamilton-Jacobi complexe du second ordre. Alors la fonction, qui admet cette action comme une phase complexe, vérifie l'équation de Schrödinger.

Finalement, nous montrons que le centre de gravité de cette particule étendue suit une trajectoire de Broglie-Bohm.

Ce modèle est construit sur deux concepts mathématiques nouveaux : une mécanique analytique complexe généralisant l'analyse non linéaire Minplus que nous avons introduit [2, 3] à la suite de Maslov [1] et les processus déterministes périodiques que nous avons développé [9, 10].

1 Un modèle de particule étendue et sa trajectoire

Dans un repère orthonormé de l'espace $\mathbb{R}^2$, considérons les quatre sommets $u^1 = \binom{1}{1}$, $u^2 = \binom{1}{-1}$, $u^3 = \binom{-1}{-1}$ et $u^4 = \binom{-1}{1}$ du carré unité. Il existe deux permutations circulaires de ces quatre sommets, l'une s^+ dans le sens des

*michel.gondran@polytechnique.org
†alexandre.gondran@enac.fr

aiguilles d'une montre, l'autre s^- dans le sens inverse. On a pour chacune de ces deux permutations $s \in S = \{s^+,\ s^-\}$ et pour tout $j = 1...4$, $s^4 u^j = u^j$.

On considère une particule étendue représentée par quatre points. Pour tout pas de temps $\varepsilon > 0$ et à chacune des deux permutations $s \in S$, l'évolution de ces quatre points, au temps $t = n\varepsilon$ avec $n = 4q + r$ (n, q, r entiers et $0 \leq r \leq 3$), est définie par la partie réelle des 4 processus discrets $Z_\varepsilon^j(t) \in \mathbb{C}^2$ ($j = 1...4$) suivants :

$$Z_\varepsilon^j(n\varepsilon) = Z_\varepsilon^j\left((n-1)\varepsilon\right) + \mathcal{V}(4q\varepsilon)\varepsilon + \gamma(s^n u^j - s^{n-1}u^j) \tag{1}$$

$$Z_\varepsilon^j(0) = Z_0 \quad pour\ tout\ j, \tag{2}$$

où $\gamma = (1+i)\sqrt{\frac{\hbar\varepsilon}{4m}}$, $\mathcal{V}(t)$ correspond à une fonction complexe continue , $\hbar$ est la constante de Planck, m la masse de la particule, et Z_0 est un vecteur donnée de $\mathbb{C}^2$.

Soit $\widetilde{Z}_\varepsilon(t)$ la solution dans $\mathbb{C}^2$ du système discret défini à l'instant $t = n\,\varepsilon$ avec $n = 4q+r$ (n, q et r entiers et $0 \leq r \leq 3$) par :

$$\widetilde{Z}_\varepsilon(n\varepsilon) = \widetilde{Z}_\varepsilon(n\varepsilon - \varepsilon) + \mathcal{V}(4q\varepsilon)\varepsilon \tag{3}$$

$$\widetilde{Z_\varepsilon}(0) = Z_0. \tag{4}$$

On vérifie alors par récurrence que l'on a en tout instant $t = n\varepsilon$:

$$Z_\varepsilon^j(n\varepsilon) = \widetilde{Z_\varepsilon}(n\varepsilon) + (1+i)\sqrt{\frac{\hbar\varepsilon}{4m}}\left(s^n u^j - u^j\right). \tag{5}$$

Comme $s^4 u^j = u^j$, on déduit de (5) que $Z_\varepsilon^j(4q\varepsilon) = \widetilde{Z}_\varepsilon(4q\varepsilon)$ pour tout j.

Comme $\sum_{j=1}^{j=4} s^n u^j = 0$, on déduit de (1) que le processus $\widetilde{Z}_\varepsilon(t)$ correspond à la moyenne des quatre processus $Z_\varepsilon^j(t)$. Sa partie réelle $\widetilde{X}_\varepsilon(t)$ peut être interprétée comme la position moyenne de la particule. La position $X_\varepsilon^j(t)$ de chaque point $j = 1...4$, partie réelle du processus $Z_\varepsilon^j(t)$, vérifie l'équation :

$$X_\varepsilon^j(n\varepsilon) = \widetilde{X_\varepsilon}(n\varepsilon) + \sqrt{\frac{\hbar\varepsilon}{4m}}\left(s^n u^j - u^j\right). \tag{6}$$

Cette équation donne l'évolution des 4 points de la particule étendue par rapport à son centre de gravité. L'évolution de cette particule étendue sur une période de 4 ε est visualisée sur la figure 1. On considérera que les quatre points $X_\varepsilon^j(t)$

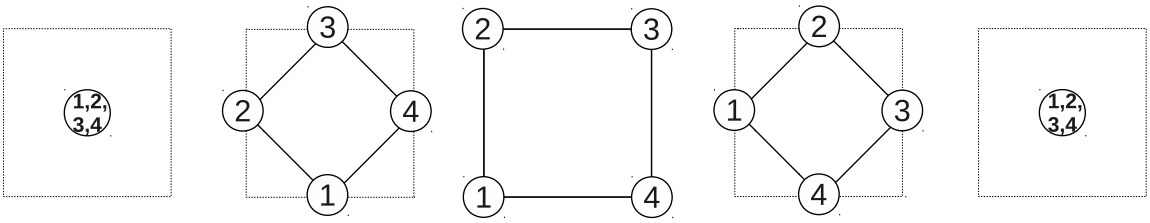

FIGURE 1 – Evolution des quatre points de la particule étendue sur une période 4 ε de la gauche à la droite (ponctuelle à $4q\varepsilon$, en extension à $(4q+1)\varepsilon$ et $(4q+2)\varepsilon$, puis en contraction en $(4q+3)\varepsilon$ et $4(q+1)\varepsilon$).

de la particule définissent la structure d'une corde. Le mouvement de ses quatre points correspond à la vibration de la corde. A l'instant $t = 4q\varepsilon$, les quatre points sont au centre d'un carré et la longueur de la corde à cet instant est donc nulle. Aux instants $t \neq 4q\varepsilon$, elle prend une extension. Aux instants $(4q+1)\varepsilon$ et $(4q+3)\varepsilon$, les quatre points sont au centre des arêtes du carré. A l'instant $(4q+2)\varepsilon$, les quatre points sont sur les quatre sommets du carré. Bien plus, cette interprétation suggère une sorte de processus de création entre les instants $t = 4q\varepsilon$ et $(4q+1)\varepsilon$ suivi d'un processus d'annihilation entre les instants $(4q+3)\varepsilon$ et $(4q+4)\varepsilon$.

L'équation (5) entraine $Z_\varepsilon^j(t) = \widetilde{Z}_\varepsilon(t) + O(\sqrt{\varepsilon})$ pour tout j et tout $t = n\varepsilon$.

Soit $\widetilde{Z}(t)$ la solution de l'équation différentielle classique :

$$\frac{d\widetilde{Z}(t)}{dt} = \mathcal{V}(t) \tag{7}$$

$$\widetilde{Z}(0) = Z_0. \tag{8}$$

Puisque $\mathcal{V}(t)$ est continuement différentiable, nous avons $\widetilde{Z}_\varepsilon(t) = \widetilde{Z}(t) + O(\varepsilon)$ pour tout $t = n\varepsilon$, et donc $Z_\varepsilon^j(t) = \widetilde{Z}(t) + O(\sqrt{\varepsilon})$. On en déduit

Théorème 1. - *Chaque processus $\widetilde{Z}_\varepsilon^j(t)$ converge continuement vers la trajectoire classique $\widetilde{Z}(t)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0^+$.*

Terminons cette section par quelques remarques sur les processus $Z_\varepsilon^j(t)$.

Remarque 1. - *Les quatre processus $Z_\varepsilon^j(t)$ ressemblent aux processus stochastiques de Nelson [11] basées sur les processus de Wiener, mais contrairement aux processus de Nelson ils sont déterministes. Cependant, bien que déterministes, ces processus paraissent aléatoires par rapport à l'extension spatiale de la corde car, à l'instant t, le reste modulo 4 du nombre $n = \frac{t}{\varepsilon}$ est un nombre pseudoaléatoire.*

Remarque 2. - *Feynmann et Hibbs montrent que les "important paths" de la mécanique quantique, bien que continus, sont très irréguliers et nulle part différentiables. Ils admettent une vitesse moyenne $lim_{\Delta t \longrightarrow 0^+} \langle \frac{x_{k+1}-x_k}{\Delta t} \rangle = v$, mais non une vitesse quadratique moyenne car $\langle (\frac{x_{k+1}-x_k}{\Delta t})^2 \rangle = \frac{i\hbar}{m\Delta t}$. Les quatre processus $X_\varepsilon^j(t)$ vérifient les mêmes propriétés que les chemins de Feynmann, de plus en plus irréguliers et non différentiabes quand $\varepsilon \to 0^+$; cependant, la valeur de $\varepsilon = \Delta t$ bien que très petite reste finie.*

2 Emergence du spin et des relations d'incertitude d'Heisenberg

On a associé à une particule étendue quatre points et un cycle de variation en quatre instants durant la période $T = 4\varepsilon$. On fait l'hypothèse que les propriétés d'une telle particule correspondent à la moyenne des propriétés des quatre points pris sur les quatre instants de la période. On obtient les théorèmes suivants :

Théorème 2 ([12])**.** - *Pour tout $\varepsilon > 0$, la particule étendue correspondant à la partie réelle des processus (1) et (2), admet un moment angulaire intrinsèque moyen $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ pour la permutation s^+ et $s_z = +\frac{\hbar}{2}$ pour la permutation s^-.*

Théorème 3 ([12])**.** - *Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $s \in S$, la particule étendue correspondant à la partie réelle des processus (1) et (2) vérifie les relations d'incertitude d'Heisenberg :*

$$\langle \Delta x \rangle \cdot \langle \Delta p_x \rangle = \frac{\hbar}{2}. \tag{9}$$

3 L'équation d'Hamilton-Jacobi complexe du second ordre

Nous montrons que l'évolution correspondant aux processus $Z_\varepsilon^j(t)$ définis par les équations (1) et (2), est régie par une équation d'Hamilton-Jacobi complexe du second ordre. Pour cela, nous utilisons une *mécanique analytique complexe* et *un principe de moindre action généralisé*. La mécanique analytique complexe est une généralisation de la mécanique analytique classique, avec des objets ayant une position complexe $Z(t) \in \mathbb{C}^2$, une vitesse complexe $\mathcal{V}(t) \in \mathbb{C}^2$, et utilisant le minimum d'une fonction complexe et l'analyse minplus complexe que nous avons introduit dans [6, 7, 8].

On peut alors définir une action d'Hamilton-Jacobi complexe pour la particule étendue correspondant aux processus (1-2). On se donne, à l'instant 0, une action complexe $\mathcal{S}^0(Z)$, fonction holomorphe de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$. L'action d'Hamilton-Jacobi complexe associée aux processus (1-2) est obtenue à partir d'une généralisation du principe de moindre action.

Définition 1. - *On définit l'action complexe $\mathcal{S}_\varepsilon(Z,t)$ par l'équation d'optimalité suivante définie aux instants $t = 4q\varepsilon$:*

$$\mathcal{S}_\varepsilon(Z,t) = \min_{\mathcal{V}(t)} \frac{1}{4} \sum_j \left\{ \mathcal{S}_\varepsilon(Z - \mathcal{V}(t)\varepsilon - \gamma(s^4 u^j - s^3 u^j), t-\varepsilon) + L(Z, \mathcal{V}(t), t)\varepsilon \right\} \tag{10}$$

où le min est pris au sens du minimum complexe sur les vitesses complexes possibles $\mathcal{V}(t)$. Pour $t = 0$, on a la condition initiale :

$$\mathcal{S}_\varepsilon(Z,0) = \mathcal{S}^0(Z) \qquad \forall Z \in \mathbb{C}^2.$$

Théorème 4 ([12])**.** - *Si un processus complexe vérifie le nouveau principe de moindre action (10) et admet $L(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ comme Lagrangien, alors l'action complexe vérifie l'équation d'Hamilton-Jacobi complexe du second ordre :*

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \mathcal{S})^2 + V(Z) - i\frac{\hbar}{2m}\triangle \mathcal{S} = 0 \qquad \forall (Z,t) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}^+ \tag{11}$$

$$\mathcal{S}(Z,0) = \mathcal{S}^0(Z) \qquad \forall Z \in \mathbb{C}^2. \tag{12}$$

4 L'équation de Schrödinger

En posant comme fonction d'onde $\Psi = e^{i\frac{S}{\hbar}}$ et en prenant la restriction de (11-12) à la partie réelle de Z, le théorème 4 devient :

Théorème 5 ([12]). *- Si un processus complexe suit le nouveau principe de moindre action (10) et admet $L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ comme Lagrangien, alors sa fonction d'onde Ψ vérifie l'équation de Schrödinger :*

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\Psi + V(X)\Psi \qquad \forall(X,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$$

$$\Psi(X,0) = \Psi^0(X) \qquad \forall X \in \mathbb{R}^2.$$

et la trajectoire du centre de gravité de la particule $\widetilde{X}(t)$ vérifie l'équation différentielle classique :

$$\frac{d\widetilde{X}(t)}{dt} = \frac{\nabla S}{m}, \qquad \widetilde{X}(0) = X_0. \tag{13}$$

Cette trajectoire est celle proposée par de Broglie [13] et Bohm [14] (cf. figure 2).

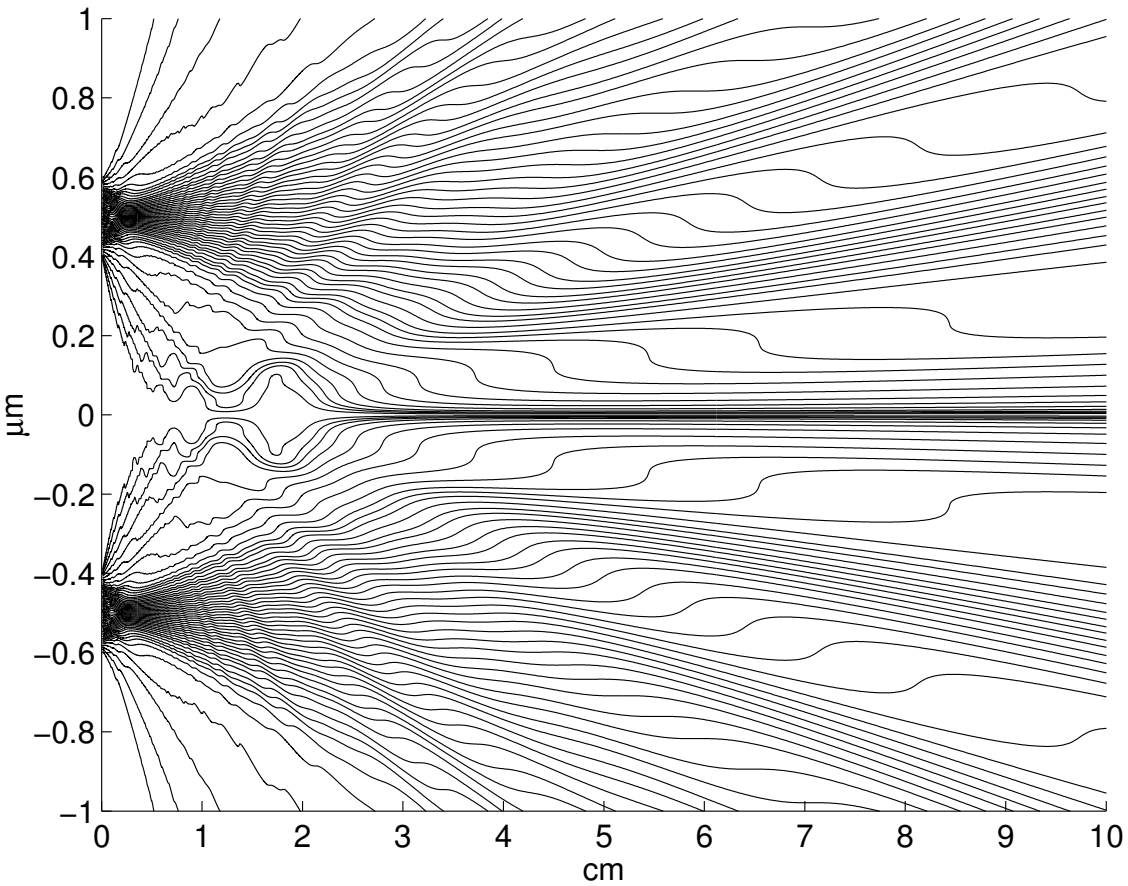

FIGURE 2 – Simulation des trajectoires d'électrons définies par la théorie de de Broglie-Bohm au sortir des deux fentes dans l'expérience d'interférence de Young (données numériques issues de l'expérience de Jönsson [15]). Le centre de gravité de la corde vibrante suit ce type de trajectoire. L'ordre de grandeur de ε si l'on considère la longueur d'onde de de Broglie est de $10^{-20}s$ sachant que le temps de parcourt d'un électron le long de ces $10cm$ de trajectoire est d'environ $10^{-9}s$. Cela corresponds à 10^{-11} cycles contraction/extension de la corde le long de ces $10cm$. De plus, la taille maximale de la corde est dans ce cas de l'ordre de $10^{-12}m$.

Remarque 3. *- Pour préciser notre modèle, il faut faire un choix de ε. L'hypothèse la plus naturelle est de le lier à la longueur d'onde de de Broglie ou à la longueur d'onde de Compton. Or, le mouvement interne du processus (1-2) a une période de 4ε. On peut alors identifier cette période à celle de de Broglie en posant :*

$$4\varepsilon = T = \frac{\lambda_{dB}}{v} = \frac{h}{mv^2} \tag{14}$$

ou à celle de Compton en posant

$$4\varepsilon = T = \frac{\lambda_C}{c} = \frac{h}{mc^2}. \tag{15}$$

Avec l'hypothèse de la longueur d'onde de de Broglie, ε varie le long de la trajectoire en fonction de la vitesse de la particule. Par contre, avec l'hypothèse de la longueur d'onde de Compton, ε reste constant le long de la trajectoire.

Références

[1] V.P. Maslov, *Analyse Idempotente*, édition Mir (1989).

[2] M. Gondran, *"Analyse MinPlus"*, C. R. Acad. Sci. Paris **323**, 371-375 (1996).

[3] M. Gondran et M. Minoux, *Graphes, dioïdes et semi-anneaux*, Lavoisier (2004) ; *Graphs, Dioïds and Semi-rings : New models and Algorithms*, Springer, Operations Research/Computer Science Interfaces (2008).

[4] M. Gondran, *"Processus complexe stochastique non standard en mécanique"*, C. R. Acad. Sci. Paris **333**, 592-598 (2001).

[5] M. Gondran, *"Schrödinger Equation and Minplus Analysis"*, Russian Journal of Mathematical Physics, 11, 2, 130-139 (2004).

[6] M. Gondran, *"Analyse MinPlus complexe"*, C. R. Acad. Sci. Paris, **333**, 592-598 (2001).

[7] M. Gondran, *"Calcul des variations complexe et solutions explicites d'équations d'Hamilton-Jacobi complexes"*, C.R.Acad.Sci. Paris, **332**, sérieI, 677-680 (2001).

[8] M. Gondran, R. Hoblos, *"Complex calculus of variations"*, Kybernetika Max-Plus special issue, **39**, number 2, (2003).

[9] M. Gondran, *"Processus complexe stochastique non standard en mécanique"*, C. R. Acad. Sci. Paris, **333**, 592-598 (2001) ;

[10] M. Gondran, *"Schrödinger Equation and Minplus Complex Analysis"*, Russian Journal of Mathematical Physics, vol. 11, n°2, 2004, pp. 1-18.

[11] E. Nelson, *Quantum fluctuations*, Princeton University Press, Princeton, 1985.

[12] M. Gondran, A. Gondran, *"A heuristic extended particle 2D-model compatible with quantum mechanics"*, quant-ph 1507.08777, 2015.

[13] L. de Broglie, *"La mécanique ondulatoire et la structure de la matière et du rayonnement"*, Le Journal de Physique et le radium, série 6, tome 8, 1927.

[14] D. Bohm, *"A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. II"*, Physical Review, **85**,166-193 (1952).

[15] C. Jönsson, Zeitschr. Phys., **161**, 454 (1961)